



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



ESTUDO DA PASSAGEM DE UMA NUVEM DE PARTÍCULAS POR UM CORPO CELESTE

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBITI/CNPq/INPE)

José Batista da Silva Neto (FATEC-SJC, Bolsista PIBITI/CNPq)

E-mail: josebatista91@gmail.com

Dr. Jorge Kennety Silva Formiga (FATEC-SJC, INPE, Orientador)

E-mail: jkennety@yahoo.com.br

INPE
São José dos Campos
Julho de 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e aos meus pais. A meu orientador Prof. Dr. Jorge Kennety pelo conhecimento transmitido, apoio e encorajamento durante a elaboração deste trabalho.

E ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq), que me proporcionaram esta oportunidade de estudos.

RESUMO

Este trabalho tem com o objetivo de analisar a passagem de uma nuvem de partículas (fragmentos de asteróide) por um corpo celeste (planeta). Analisar esta passagem permite prever possíveis riscos de choques de nuvem de partículas com a Terra e identificar regiões de manobras ótimas. Para atingir o objetivo proposto, foi considerado que durante a passagem próxima a nuvem de partículas realiza uma manobra assistida por gravidade (*swing-by*) com o corpo celeste. O conceito de *swing-by* está inserido dentro dos métodos modernos de otimização de trajetória e seu uso é importante devido às missões espaciais envolverem custos altíssimos. Assim utilizando o movimento e a influencia gravitacional de corpos celestes, para prover variações dos elementos orbitais sem o uso de propulsão, a manobra *swing-by* garante uma grande economia de combustível. Podemos citar algumas missões espaciais utilizando manobras de *swing-by*: missões Voyagers e Galileo. O modelo matemático adotado para o estudo é encontrado na literatura Prado (2001), onde considera-se um sistema formado por três corpos: um corpo massivo (M1) no centro do sistema de referencial inercial, um corpo secundário (M2) em orbita ao redor de M1, e um corpo de massa infinitesimal (M3) que passa pelo sistema e tem suas características orbitais iniciais alteradas. Para descrever a manobra é adotada a abordagem *patched-conics*, este método consiste em dividir um sistema de n-corpos, em diversas partes em que cada uma um modelo simples de dois corpos é adotado. E com base nas literaturas Prado (2005), e Gomes e Prado (2008), estendeu-se o modelo desenvolvido inicialmente para uma partícula para uma nuvem de partículas. Com o auxílio do integrador numérico Fortran foram feitas simulações de *swing-by* para os sistemas Sol-Marte e Sol-Júpiter onde foram adotados diferentes planetas e distâncias de aproximação para melhor entender a influencia dos parâmetros iniciais, na manobra para uma nuvem de partículas. Após as simulações foram analisados os elementos orbitais semi-eixo maior, excentricidade, energia, momento angular e velocidade.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do encontro da nuvem de partículas com um planeta.....	9
Figura 2 – Descrição Missões Pioneers.....	13
Figura 3 – Missão Mariner 10.....	13
Figura 4 – Descrições das Missões Voyager.....	14
Figura 5 – Descrição missão Galileo.....	15
Figura 6 – Descrição missão Ulysses.....	15
Figura 7 – Descrição missão Cassini.....	16
Figura 8 – Descrição missão MESSENGER.....	16
Figura 9 – Descrição Missão New Horizons.....	17
Figura 10 – Representação do <i>swing-by</i>	18
Figura 11 – Soma dos vetores velocidade envolvidos no <i>swing-by</i>	19
Figura 12 – Vetores envolvidos no <i>swing-by</i>	20
Figura 13 – Soma vetorial envolvida no <i>swing-by</i>	22
Figura 14 – Possíveis rotações para o vetor velocidade.....	23
Figura 15 – Fluxograma da rotina em Fortran.....	26
Figura 16 – Cinturão principal de asteróides.....	28
Figura 17 – Órbitas sistema Sol-Marte.....	31
Figura 18 – Órbitas sistema Sol-Júpiter.....	31
Figura 19 – Configuração inicial da nuvem (semi-eixo maior x excentricidade antes da manobra).....	32
Figura 20 – Configuração inicial da nuvem (energia x momento angular antes da manobra).33	33
Figura 21 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade devido ao <i>swingy-by</i> para <i>rap = 1, 1rpl</i>	33
Figura 22 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade devido ao <i>swingy-by</i> para <i>rap = 10rpl</i>	34
Figura 23 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para <i>rap = 1, 1rpl</i>	35
Figura 24 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para <i>rap = 10rpl</i>	35
Figura 25 – Energia x momento angular após a manobra para <i>rap = 1, 1rpl</i>	36
Figura 26 - Energia x momento angular após a manobra para <i>rap = 10rpl</i>	36
Figura 27 - Semi-eixo x excentricidade após a manobra para <i>rap = 1, 1rpl</i>	37
Figura 28 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para <i>rap = 10rpl</i>	37
Figura 29 - Energia x momento angular após a manobra para <i>rap = 1, 1rpl</i>	38
Figura 30 - Energia x momento angular após a manobra para <i>rap = 10rpl</i>	38
Figura 31 – Relação de órbitas após o <i>swing-by</i> para a solução 1.....	39
Figura 32 - Relação de órbitas após o <i>swing-by</i> para a solução 2.....	40
Figura 33 – Configuração inicial da nuvem (semi-eixo maior x excentricidade antes da manobra).....	41
Figura 34 – Configuração inicial da nuvem (energia x momento angular antes da manobra).41	41
Figura 35 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade antes da manobra de <i>swingy-by</i> para <i>rap = 1, 1rpl</i>	42
Figura 36 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade devido ao <i>swingy-by</i> para <i>rap = 10rpl</i>	42
Figura 37 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para <i>rap = 1, 1rpl</i>	43
Figura 38 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para <i>rap = 10rpl</i>	43
Figura 39 - Energia x momento angular após a manobra para <i>rap = 1, 1rpl</i>	44
Figura 40 - Energia x momento angular após a manobra para <i>rap = 10rpl</i>	44

Figura 41 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $rap = 1, 1rpl$	45
Figura 42 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $rap = 10rpl$	45
Figura 43 - Energia x momento angular após a manobra para $rap = 1, 1rpl$	46
Figura 44 - Energia x momento angular após a manobra para $rap = 10rpl$	46
Figura 45 – Relação de órbitas após o <i>swing-by</i> para a solução 3	47
Figura 46 – Relação de órbitas após o <i>swing-by</i> para a solução 4	48

LISTA DE SÍMBOLOS

G	-	Constante gravitacional universal ($6,6726 \pm 0,0005$) * 10^{-11} m ³ /kg. s ²)
M_1, M_2, M_3	-	Corpos envolvidos no <i>swing-by</i>
a	-	Semi-eixo maior
e	-	Excentricidade
a_i, e_i	-	Semi-eixo maior e excentricidade antes do <i>swing-by</i>
a_f, e_f	-	Semi-eixo maior e excentricidade após o <i>swing-by</i>
$\Delta a, \Delta e$	-	Variação de semi-eixo maior e excentricidade
E	-	Energia
H, C	-	Momento angular
V, v	-	Velocidade
ΔE	-	Variação da Energia
ΔC	-	Variação do Momento Angular
ΔV	-	Variação da Velocidade
E_1, C_1	-	Energia e momento angular antes do <i>swing-by</i>
E_f, C_f	-	Energia e momento angular após o <i>swing-by</i>
θ	-	Anomalia verdadeira
μ	-	Parâmetro gravitacional
μ_1, μ_2, μ_3	-	Parâmetros gravitacionais de M_1, M_2 e M_3
r_p	-	Distância do periapsis
r_a	-	Distância do apoapsis
\vec{V}_2	-	Velocidade de M_2 em torno de M_1
$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$	-	Vetores velocidade de M_3 em relação à M_2 , antes e depois da manobra, respectivamente
δ	-	Ângulo de deflexão (ângulo entre \vec{V}_∞^- e \vec{V}_∞^+)
\vec{V}_i, \vec{V}_f	-	Vetores velocidade de M_3 em relação à M_1 , antes e depois da manobra, em um referencial inercial, respectivamente
r_{ap}	-	Distância máxima de aproximação entre M_2 e M_3
Ψ	-	Ângulo de aproximação
A, B	-	Possíveis pontos de encontro de M_2 e M_3
β	-	Ângulo entre V_i e V_2

- d_{12} - Distância média entre M_1 e M_2
- ω - Velocidade Angular
- r_{pl} - Raio equatorial do planeta

SUMÁRIO

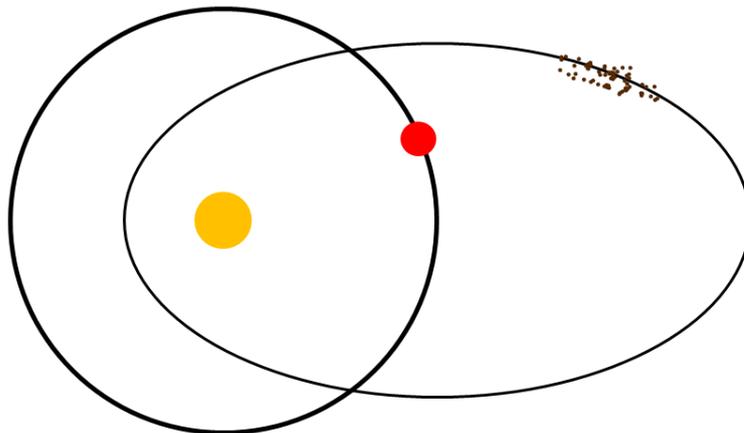
1- INTRODUÇÃO	9
1.1- Motivação.....	10
1.2- Objetivo.....	10
1.3- Metodologia	10
1.4- Conteúdo	11
2- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1- Definição de <i>Swing-by</i>	12
2.1.1- Histórico de Uso do <i>Swing-by</i>	12
2.2- Modelagem Matemática do <i>Swing-by</i>	17
2.3- <i>Swing-by</i> Objetivando Mudança de Trajetória.....	21
3- METODOLOGIA	25
3.1- Extensão do Modelo Matemático a uma Nuvem de Partículas.....	25
3.2- Estrutura do Código Fonte para <i>Swing-by</i> de Uma Nuvem de Partículas.....	25
4- RESULTADOS	28
4.1- Dados Iniciais.....	29
4.2- <i>Swing-by</i> no Sistema Sol-Marte	32
4.2.1- Resultados Solução 1 (Sol-Marte- Ψ_1)	34
4.2.2- Resultados Solução 2 (Sol-Marte- Ψ_2)	37
4.2.3- Conclusão para <i>Swing-by</i> no Sistema Sol-Marte	39
4.3- <i>Swing-by</i> no Sistema Sol-Júpiter.....	40
4.3.1- Resultados Solução 3 (Sol-Júpiter- Ψ_1)	43
4.3.2- Resultados Solução 4 (Sol-Júpiter- Ψ_2)	45
4.3.3- Conclusão para <i>Swing-by</i> no Sistema Sol-Júpiter	47
5- CONCLUSÃO	49
6- REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	51
APÊNDICE A	53

1- INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como proposta a análise das características orbitais de uma nuvem de partículas em uma possível passagem próxima a um corpo celeste. Quando se fala em nuvem de partícula, refere-se a fragmentos de asteróides, grupos de asteróides, lixo espacial, cometa fragmentados, entre outros. Todos, por mínimo que seja o risco, podem entrar em órbita de colisão com a Terra, o que se não previsto com antecedência pode acarretar perdas inestimáveis. Os sistemas de partículas em sua maioria possuem órbita periódica, ou seja, de tempos em tempos ocorrerá a passagem próxima aos planetas que sua órbita cruza. Em uma possível passagem próxima mesmo que a uma distância que impossibilite uma colisão, as características orbitais da nuvem de partículas sofrerão alterações devido a influência gravitacional do planeta, e em uma futura passagem próxima pode ser que, devido às novas configurações da órbita da nuvem, a colisão de fato ocorra.

Segundo Prado (2005) para o problema da passagem próxima da nuvem de partículas pelo corpo celeste, considera-se que ela realiza uma manobra assistida por gravidade (*swing-by*) com o corpo celeste. Para isto, assume-se que o sistema dinâmico é formado por dois corpos que estão em órbita circular em torno de um centro massa e uma nuvem de partículas que se movimenta devido à atração gravitacional dos dois corpos primários. É assumido também que o movimento de todas as partículas é planar, e para o estudo da dinâmica do sistema é usada a *patched-conic approximation* ou simplesmente abordagem *patched-conics*. Essa abordagem permite o uso de uma série de problemas de dois corpos, para gerar as equações analíticas que descrevem o problema. Uma representação básica do encontro é apresentada na Figura 1, onde são mostrados as órbitas e corpos envolvidos no sistema de estudo.

Figura 1 – Representação do encontro da nuvem de partículas com um planeta



1.1- Motivação

A importância deste estudo também é comprovada pelos inúmeros trabalhos que estudam sistemas dinâmicos com o uso do *swing-by*, como em Prado (2005) e Gomes e Prado (2009) onde foram feitos estudos para *swing-bys* envolvendo nuvem de partículas, e para sistemas de uma única partícula (nave espacial) (Broucke e Prado, 1993) e (Formiga e Prado, 2011a) e que cada vez mais vem aumentando com o crescimento das tecnologias espaciais visando uma melhora no planejamento de missões.

Quando se trata de encontros próximos, gravidade assistida e otimização de trajetória deve-se mencionar o JPL (*Jet Propulsion Laboratory*), que é um centro de desenvolvimento tecnológico que pertence a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), de onde foi idealizado o uso da gravidade assistida em missões espaciais. Esta ideia apareceu no programa espacial americano, onde inúmeras missões foram realizadas com sucesso. Entre elas destaca-se a missão Mariner 10, que realizou manobras assistidas por gravidade com os planetas Mercúrio e Venus. É possível enfatizar também a ESA (*European Space Agency*) que participou do desenvolvimento da missão Ulysses, missão essa que tinha como objetivo estudar os pólos do Sol e para isso era necessário o uso de um *swing-by* com Júpiter, e a missão Rosetta que executou *swing-bys* com Terra e Marte. Já o Brasil, possui por parte do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) uma grande quantidade de publicações nas aéreas de encontros próximos, gravidade assistida e otimização de trajetória.

1.2- Objetivo

Esse trabalho teve como objetivo analisar a passagem de uma nuvem de partículas próxima a um corpo celeste, considerando um *swing-by* entre a nuvem e o corpo celeste. Foram analisadas, após a passagem próxima, as características dos elementos orbitais de cada partícula, os possíveis ganhos ou perdas de energia juntamente com a variação do momento angular, velocidade, excentricidade e semi-eixo maior. Foi realizado também um estudo da influência da massa de cada planeta na nuvem de partículas antes e depois da passagem próxima ao corpo celeste. Finalmente foram identificadas as regiões onde ocorrem as manobras ótimas.

1.3- Metodologia

Este trabalho foi elaborado desenvolvido no INPE de São José dos Campos, onde as simulações foram feitas, com o auxílio de uma bolsa de estudos concebida pelo CNPq

(Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico). Para atingir os objetivos apresentados, foi necessário dividir este trabalho em algumas etapas para se analisar, gradativamente, as manobras orbitais abordadas. Primeiramente foi feito um levantamento bibliográfico de trabalhos envolvendo manobras de *swing-by*, depois foi feita uma abordagem matemática dessas manobras, onde, através do auxílio de um integrador numérico desenvolvido no Fortran, foi calculado o efeito *swing-by* na nuvem com alguns planetas. Após a simulação fez-se a análise dos dados encontrados referentes aos elementos orbitais que definem uma trajetória: semi-eixo maior e excentricidade, energia e momento angular.

1.4- Conteúdo

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, separados da seguinte forma:

- Primeiro capítulo – introdução ao tema do estudo, os principais objetivos a serem alcançados e a metodologia empregada;
- Segundo capítulo – apresentação do *swing-by* e seu modelo matemático;
- Terceiro capítulo – metodologia empregada na simulação numérica;
- Quarto capítulo – resultados numéricos e sua análise;
- Quinto capítulo – conclusão e propostas para trabalhos futuros.

2- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a manobra assistida por gravidade (*swing-by*), bem como o modelo matemático Prado (2001) adotado para o estudo.

2.1- Definição de *Swing-by*

Missões espaciais são de alto custo e a fim de diminuir tais gastos, são aplicados inúmeros métodos de otimização de trajetória. Entre esses métodos, existem os clássicos (transferência de Hohmann, bi-elíptica, etc) e os modernos (captura gravitacional e manobra assistida por gravidade). Neste trabalho é feita uma abordagem de trajetórias através de manobras assistidas por gravidade, também conhecidas como *swing-by*. Este estudo foi realizado em uma nuvem de partículas e um corpo celeste, onde foram analisadas as características orbitais da nuvem antes e depois da manobra.

O *swing-by* já é conhecido em Astronáutica por ser uma ótima solução para economia de combustível nas missões espaciais, e consiste em usar o movimento e a influência gravitacional do corpo celeste (Planeta, Satélites Naturais, etc) para alterar a trajetória, velocidade, energia e momento angular da nave espacial. A sua importância pode ser compreendida quando se nota o grande número de missões de sucesso que o utilizaram.

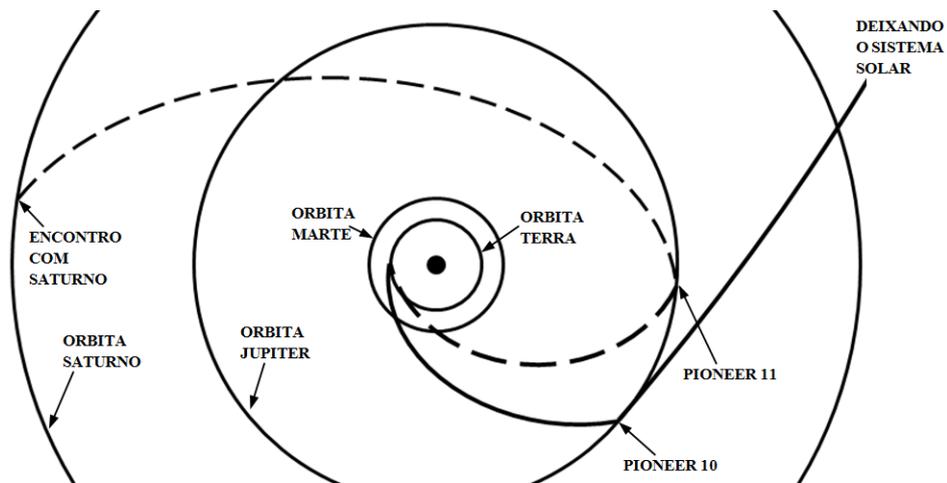
Outro tipo de manobra assistida por gravidade é o chamado *fly-by*. A diferença entre a manobra *swing-by* para o *fly-by* é que no último a espaçonave acompanha o corpo celeste por um período de tempo, antes de concluir a manobra.

2.1.1- Histórico de Uso do *Swing-by*

Para entender a importância da manobra assistida por gravidade, foi feita uma breve revisão das principais missões espaciais que se utilizaram ou estão programadas para utilizá-la:

- Pioneers 10 e 11 – Fimmel *et al.* (1977) – As sondas Pioneers 10 e 11 lançadas respectivamente em 1972 e 1973, foram as primeiras a estudar o cinturão de asteróides e os planetas gigantes Júpiter e Saturno. Pioneer 10 realizou *swing-bys* com Júpiter e Pioneer 11 com Júpiter e Saturno (Figura 2).

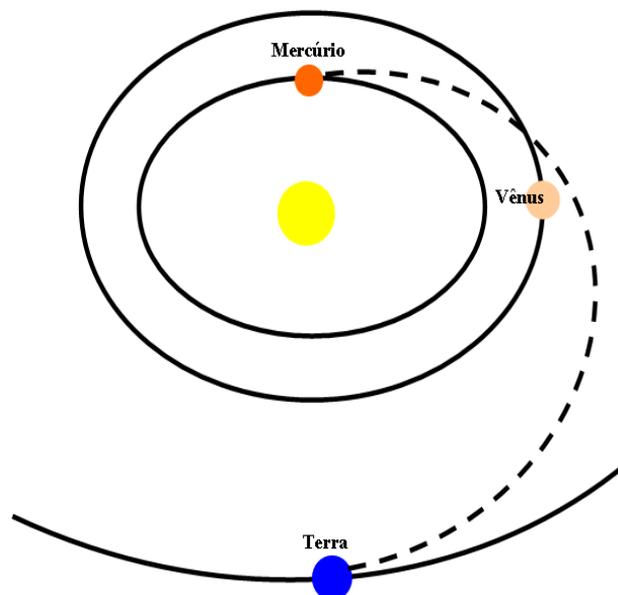
Figura 2 – Descrição Missões Pioneers



FONTE: Adaptado Fimmel *et al.* (1977)

- Mariner 10 - Dunne (1978) – Lançada em 1973, com o objetivo de realizar *swing-bys* com os planetas Mercúrio e Vênus. Enviar uma sonda diretamente para Mercúrio requer altos custos, então a melhor alternativa é enviá-la em direção ao planeta Vênus, onde ocorre o *swing-by*. Após a manobra com o planeta Vênus a sonda tem sua trajetória alterada em direção ao planeta Mercúrio (Figura 3).

Figura 3 – Missão Mariner 10

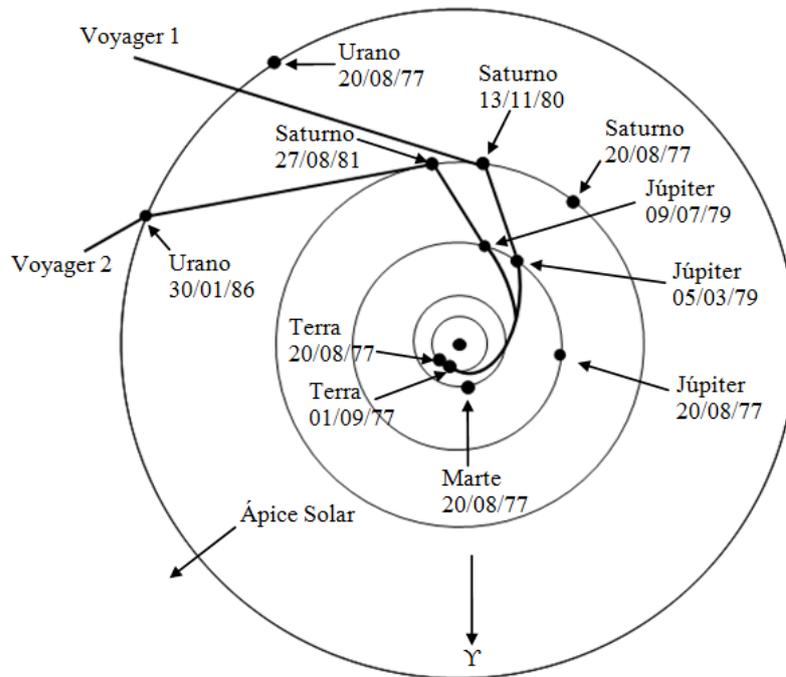


FONTE: Dunne (1970)

- Voyager 1 e 2 - Kohlhas e Penzo (1977) – As missões Voyager de 1977, são conhecidas como exemplo de sucesso no uso de sucessivos *swing-bys*. Ambas tinham como objetivo estudar diferentes planetas do sistema solar, sendo a melhor e mais econômica maneira de se fazer isso passando próximo a um planeta coletando dados, e ao mesmo tempo

aproveitar a passagem próxima para alterar sua trajetória e ganhar o impulso necessário pra ir ao próximo planeta. A Voyager 1 realizou *swing-bys* como os planetas Júpiter e Saturno, e a Voyager 2 como os planetas Júpiter, Saturno, Urano e Netuno (Figura 4).

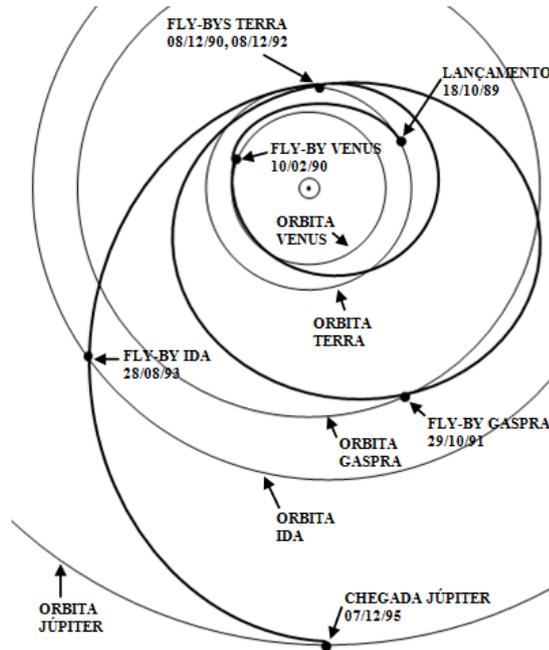
Figura 4 – Descrições das Missões Voyager



FONTE: Kohlhase e Penzo (1977)

- Galileo - D’Amario *et al.* (1992) – A sonda espacial Galileo, foi lançada em 1989 como objetivo de estudar o planeta Júpiter e suas Luas (Io, Europa, Callisto e Ganymede). Para atingir seus objetivos realizou *swing-bys* como os planetas Vênus e Terra, e *fly-bys* com os asteróides 951 – Gaspra e 243 - Ida. Como mostra a Figura 5, a sonda foi lançada em direção ao planeta Vênus, onde realizou o primeiro *swing-by*, depois realizou mais dois *swing-bys* com a Terra, entre a primeira e a segunda manobra com a Terra ela realizou um *fly-by* com o asteróide 951 – Gaspra, e após a segunda manobra quando já em trajetória em direção a Júpiter realizou um *fly-by* com o asteróide 243 – Ida e em 1995 chegou a Júpiter (Figura 5).

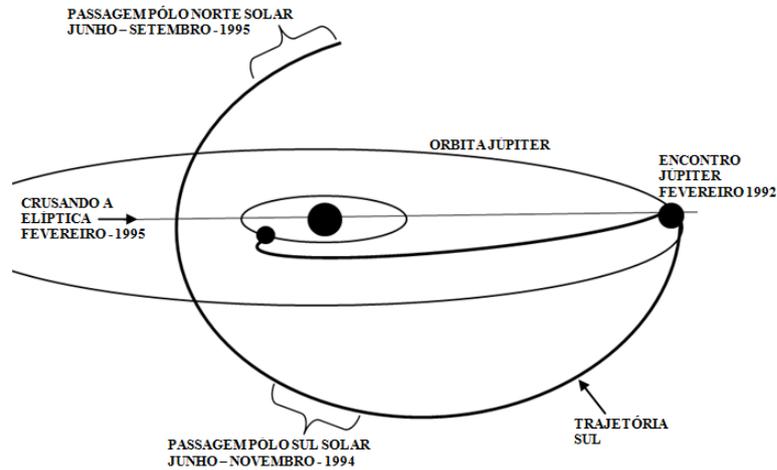
Figura 5 – Descrição missão Galileo



FONTE: D’Amario *et al.* (1992)

• Ulysses – Wenzel *et al* (1992) – Como o objetivo de estudar as regiões polares do Sol a sonda Ulysses foi lançada em direção ao planeta Júpiter onde realizou um *swing-by* que a deixou em uma órbita quase polar (Figura 6).

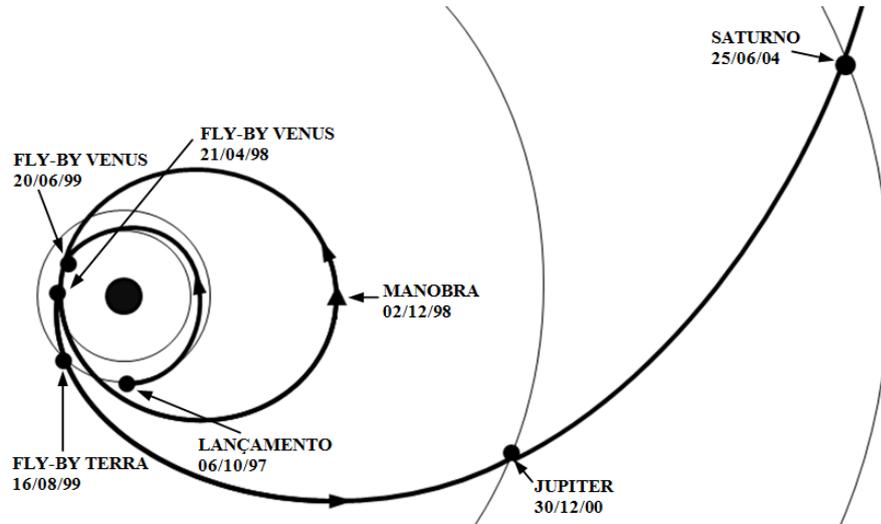
Figura 6 – Descrição missão Ulysses



FONTE: Wenzel *et al.* (1992)

• Cassini – Flanagan e Peralta (1993) – A missão Cassini tinha como objetivo estudar Saturno e seus satélites, projetada para ser lançada em 1997 realizando duas manobras assistidas por gravidade com o planeta Vênus, uma com a Lua, uma com a Terra e com Júpiter, para em fim chegar a Saturno. Entre as gravidades assistidas realizadas com a Terra e Júpiter a sonda realizaria um *fly-by* com o asteroide Masursky (Figura 7).

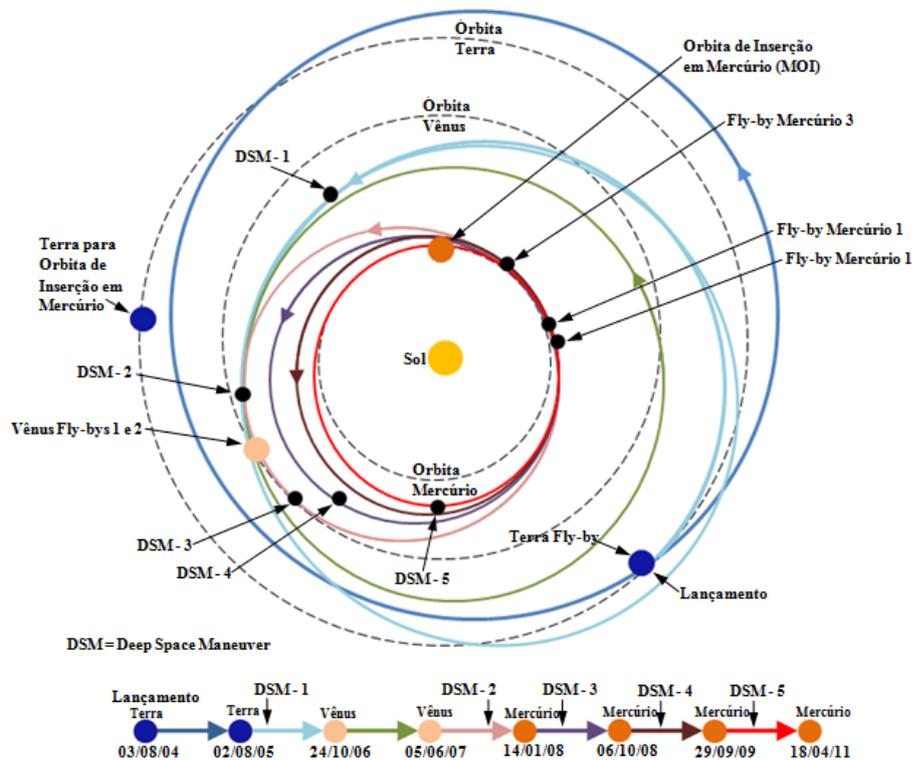
Figura 7 – Descrição missão Cassini.



FONTE: Flanagan e Peralta (1993)

• MESSENGER - McAdams (2003) e O’Shaughnessy *et al* (2011) – Projetada para estudar o planeta Mercúrio, a sonda MESSENGER foi lançada em 2004, ela realizaria uma manobra assistida por gravidade com a Terra, em seguida duas com Vênus, por fim duas com Mercúrio antes de entrar na órbita de inserção em 2009. Porém isso não ocorreu, ela realizou três manobras com Mercúrio e só entrou em órbita na órbita de inserção em 2011 (Figura 8).

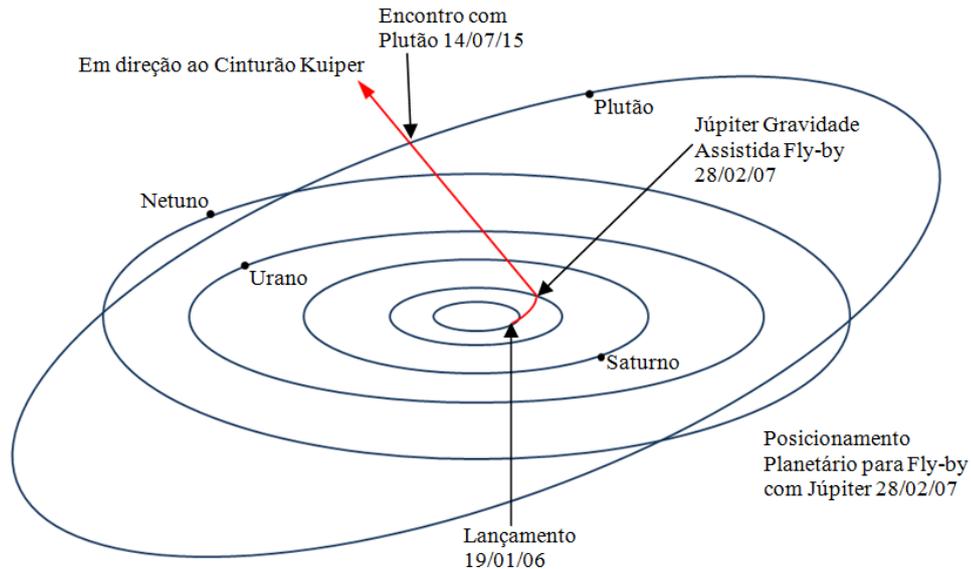
Figura 8 – Descrição missão MESSENGER



FONTE: O’Shaughnessy *et al*. (2011)

- New Horizons - Guo e Farquhar (2008) – A sonda New Horizons foi lançada em 2006, com o objetivo de estudar o planeta anão Plutão e seus satélites, podendo ser estendida também ao estudo do cinturão Kuiper. Como Plutão tem uma órbita com uma inclinação de 17° , para a sonda poder ir ao seu encontro, ela realizou um *swing-by* com o planeta Júpiter e a previsão de encontro com Plutão é para 2015 (Figura 9).

Figura 9 – Descrição Missão New Horizons



FONTE: Guo e Farquhar (2008)

2.2- Modelagem Matemática do *Swing-by*

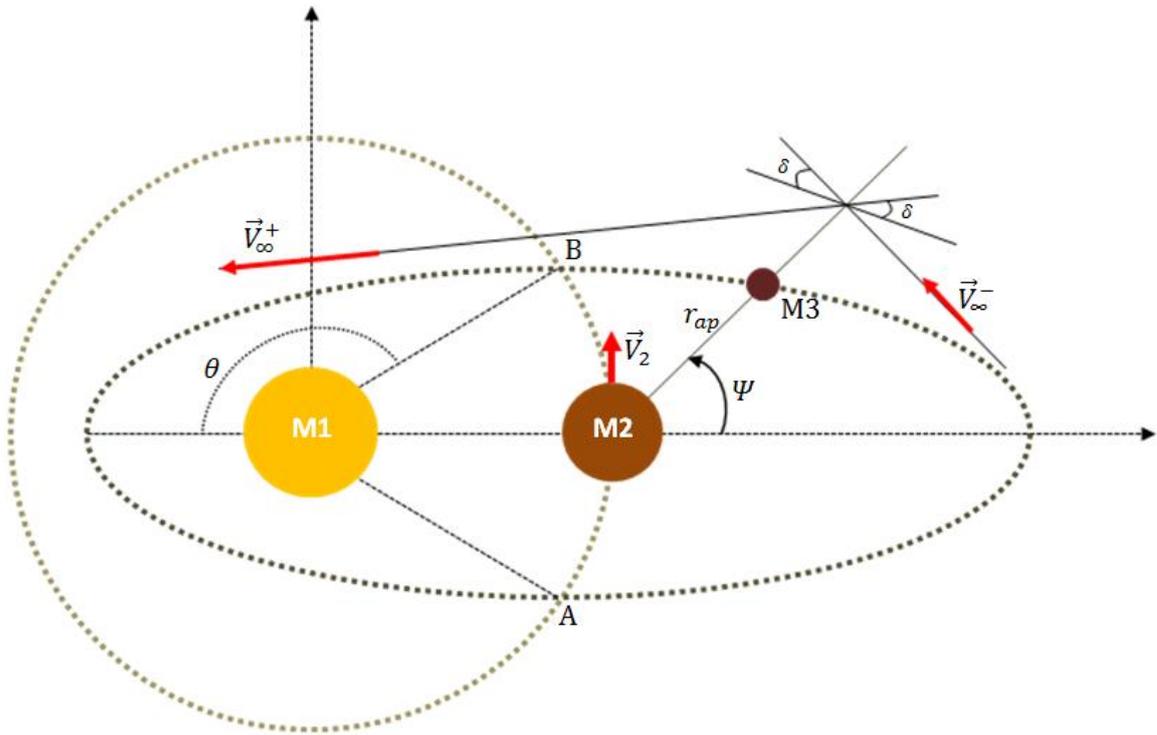
O modelo matemático mais simples encontrado para o estudo de um *swing-by*, é o modelo em duas dimensões encontrado na literatura em Broucke (1988), Prado (1993) e Prado (2001), desenvolvido através da abordagem *patched-conics*. Essa abordagem surgiu dentro do conceito de trajetórias interplanetárias para resolver os problemas relacionados aos sistemas com mais de dois corpos. Na literatura a justificativa de seu uso é descrita como:

...o cálculo de uma órbita de precisão é um procedimento de tentativa e erro que envolve a integração numérica das equações de movimento completo, onde todos os efeitos de perturbação são considerados. Para a análise da missão preliminar e estudos de viabilidade, é suficiente para ter um método de aproximação analítica para determinar o ΔV total necessário para realizar uma missão interplanetária. O melhor método disponível para tal análise é chamado de *patched-conics approximation...* (BATE *et al*, 1971).

A *patched-conics* de maneira geral divide um problema de n-corpos em diversas partes, sendo que em cada uma um modelo mais simples, o problema de dois corpos é usado como solução. Como mostra a Figura 10, o modelo considera uma partícula em órbita elíptica

que passa por um sistema de referencial inercial com dois corpos em órbita kepleriana, sendo este sistema composto por um corpo principal de grande massa (M_1) e um corpo de menor massa (M_2) e uma partícula com massa infinitesimal (M_3), quando comparada ao corpo com o qual ela realiza a manobra.

Figura 10 – Representação do *swing-by*



FONTE: Formiga e Prado (2011a)

As variáveis que descrevem a manobra são:

\vec{V}_2 - a velocidade de M_2 em torno de M_1 ;

\vec{V}_∞^- , \vec{V}_∞^+ - vetores velocidade de M_3 em relação à M_2 , antes e depois da manobra, respectivamente;

\vec{V}_i , \vec{V}_f - vetores velocidade de M_3 em relação à M_1 , antes e depois da manobra, em um referencial inercial, respectivamente;

δ - ângulo de deflexão (ângulo entre \vec{V}_∞^- e \vec{V}_∞^+);

r_{ap} - distância máxima de aproximação entre M_2 e M_3 ;

Ψ - ângulo de aproximação;

A, B - possíveis pontos de encontro M_2 e M_3 .

Se utilizando da abordagem *patch-conics* para descrever completamente a manobra, neste momento se divide a manobra nas três etapas seguintes:

1. Na primeira etapa desconsidera-se a influência gravitacional de M_2 e a órbita de M_3 ao

redor de M_1 é tomada com kepleriana;

2. Na segunda etapa M_3 entra na esfera de influência de M_2 . Então se calcula a velocidade \vec{V}_∞^- :

$$\vec{V}_\infty^- = \vec{V}_i - \vec{V}_2 \quad (1)$$

Calcula-se também a velocidade \vec{V}_∞^+ que é a velocidade da nave em relação à M_1 após a manobra, no instante em que M_3 vai deixar a esfera de influência, através da equação:

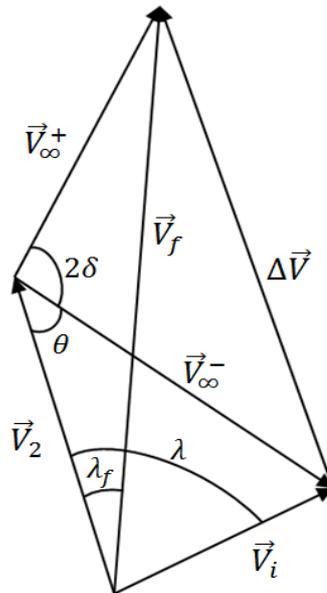
$$\vec{V}_\infty^+ = \vec{V}_f - \vec{V}_2 \quad (2)$$

3. Essa é a ultima etapa e nela considera-se o *swing-by* completo e a nave entra em uma nova órbita kepleriana e torno de M_1 .

Após o *swing-by* estar completo, é feita a comparação da órbita antes e depois da manobra ocorrer. Dessa forma, são calculadas as variações, começando pela variação da velocidade, calculada pela diferença as velocidades inerciais:

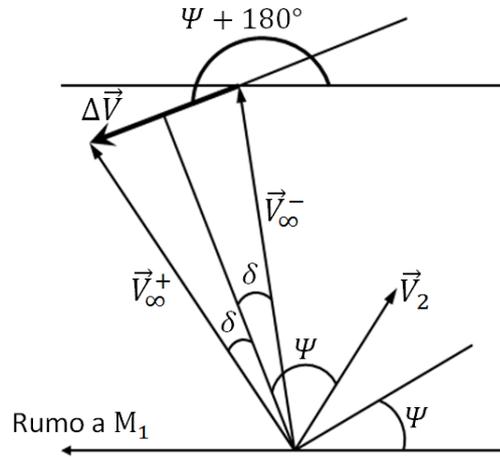
$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_f - \vec{V}_i \quad (3)$$

Figura 11 – Soma dos vetores velocidade envolvidos no *swing-by*



FONTE: Prado (2001)

Figura 12 – Vetores envolvidos no *swing-by*



FONTE: Prado (2001).

E a partir do diagrama de vetores velocidade (Figura 11) do *swing-by* é possível encontrar que (BROUCKE, 1988):

$$\Delta \vec{V} = |\Delta \vec{V}| = 2|\vec{V}_\infty| \sin(\delta) = 2V_\infty \sin(\delta) \quad (4)$$

Como mostra a Figura 12 $\Delta \vec{V}$ descreve um ângulo $\Psi + 180^\circ$ com a linha M_1 - M_2 . Isso permite encontrar os incrementos da velocidade que são:

$$\Delta \dot{X} = -2V_\infty \sin(\delta) \cos(\Psi) \quad (5)$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \quad (6)$$

O próximo passo é obter a variação de momento angular (C). Partindo de sua definição obtém-se a expressão $C = X\dot{Y} - Y\dot{X}$, que resulta na equação $\Delta C = X(\Delta \dot{Y}) + (\Delta X)\dot{Y} - Y(\Delta \dot{X}) - (\Delta Y)\dot{X}$ para a primeira variação. Sob a condição de que o encontro é instantâneo em que $\Delta X = \Delta Y = 0$, $t = 0$, $X = R$ e $Y = 0$. Obtém-se $\Delta C = R\Delta \dot{Y}$, e combinando essa equação com a expressão $\Delta \dot{Y}$:

$$\omega \Delta C = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \quad (7)$$

A terceira derivada resultante da manobra é a variação de energia, que é encontrada através da diferença que há entre a energia depois e antes da manobra, sendo respectivamente:

$$E_+ = \frac{1}{2} [(\dot{X} + \Delta \dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta \dot{Y})^2] \quad (8)$$

$$E_- = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \quad (9)$$

Que resulta em:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \sin(\delta) [2V_\infty \sin(\delta) - (\dot{X} \cos(\Psi) + \dot{Y} \sin(\Psi))] \quad (10)$$

Após simplificação de (BROUKE, 1988):

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \quad (11)$$

Analisando as equações anteriores, pode-se chegar a um resultado importante:

$$\Delta E = \omega \Delta C \quad (12)$$

Outras importantes considerações podem ser encontradas ao se estudar com mais detalhes a equação (11). Entre elas, a de que os parâmetros $|\vec{V}_2|$ e $|\vec{V}_\infty|$ que representam as magnitudes dos vetores velocidade citadas anteriormente, são quantidades positivas assim como $\sin(\delta)$ pois $0^\circ < \delta < 90^\circ$. Dessa forma, o único parâmetro que pode modificar o sinal de ΔE é $\sin(\Psi)$. Logo, para os valores de Ψ no intervalo $0^\circ < \Psi < 180^\circ$, ΔE é negativo (decrece em energia), e intervalo de $180^\circ < \Psi < 360^\circ$, ΔE é positivo (aumenta em energia). Sendo assim de (PRADO, 2001):

- Se o *swing-by* ocorre na frente de M_2 ($0^\circ < \Psi < 180^\circ$), há um decréscimo na energia de M_3 com uma perda máxima quando $\Psi = 90^\circ$;
- Se o *swing-by* ocorre atrás de M_2 ($180^\circ < \Psi < 360^\circ$), há um aumento na energia de M_3 com um ganho máximo quando $\Psi = 270^\circ$.

2.3- *Swing-by* Objetivando Mudança de Trajetória

Esse modelo foi desenvolvido para um *swing-by* de uma partícula, objetivando a mudança de órbita tendo como base um plano bidimensional. Apesar de ter sido desenvolvido para uma só partícula ele é encontrado em uma vasta literatura, sendo estendido aos mais diversos sistemas, para uma partícula (nave espacial) e um corpo celeste (planeta) [Prado (2001) e Formiga e Prado (2011a)], e para uma nuvem de partículas e um corpo celeste [Gomes e Prado (2008) e (Prado, 2005)].

Inicialmente, será necessário encontrar os elementos keplerianos de M_3 relacionados à M_1 anteriores ao encontro com M_2 . Esses elementos são semi-eixo maior (a_i), excentricidade (e_i), energia (E_i) e momento angular (C_i):

$$a_i = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (13)$$

$$e_i = 1 - \frac{r_p}{a_i} \quad (14)$$

$$E_i = -\frac{\mu_1}{2a_i} \quad (15)$$

$$C_i = \sqrt{\mu_1 a_i (1 - e_i^2)} \quad (16)$$

Onde: μ_1 - parâmetro gravitacional de M_1 , r_a - distância do apoapsi e r_p - distância do periapse.

Após o cálculo dos elementos keplerianos anteriores a passagem, desconsiderando o efeito gravitacional de M_2 , calcula-se a magnitude da velocidade de M_3 em relação à M_1 (\vec{V}_i) e a anomalia verdadeira (θ).

$$|\vec{V}_i| = \sqrt{\mu_1 \left(\frac{2}{d_{12}} - \frac{1}{a_i} \right)} \quad (17)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{1}{e_i} \left(\frac{a_i(1 - e_i^2)}{d_{12}} - 1 \right) \right] \quad (18)$$

Onde: d_{12} - distância M_1 - M_2 .

Conforme é mostrado na Figura 10, existem duas soluções (θ_A e θ_B) para a Equação (18). O próximo passo é calcular o chamado *flight path angle* (γ), que é o ângulo entre a velocidade inercial de M_3 e a velocidade de M_2 , encontrado através da Equação (19), que assim como a anomalia verdadeira, possui duas soluções (γ_A e γ_B).

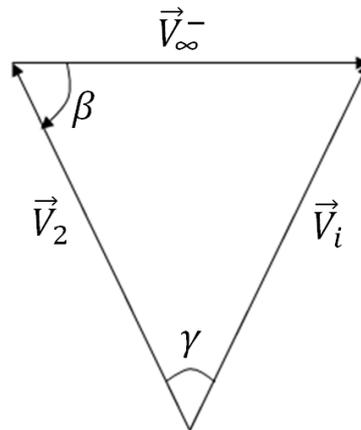
$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{e_i \sin \theta}{1 + e_i \cos \theta} \right) \quad (19)$$

E tendo por base a soma vetorial envolvida no *swing-by* (Figura 13) é calculada a velocidade de M_3 em relação à M_2 e o ângulo (β) entre ela e a velocidade de M_2 :

$$|\vec{V}_\infty^-| = \sqrt{V_i^2 + V_2^2 - 2V_iV_2 \cos \gamma} \quad (20)$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(-\frac{V_i^2 - V_2^2 - V_\infty^{-2}}{2V_2V_\infty^-} \right) \quad (21)$$

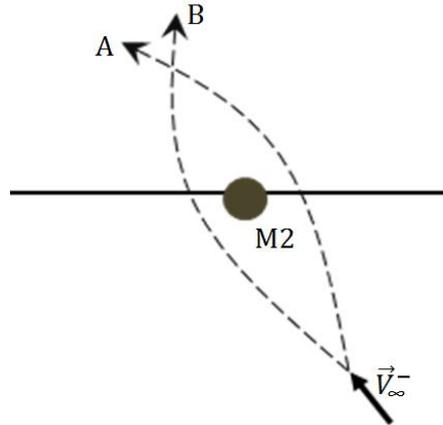
Figura 13 – Soma vetorial envolvida no *swing-by*



FONTE: Prado (2001)

Esse modelo permite dois ângulos de aproximação (Ψ_1 e Ψ_2), que são possíveis devido às duas diferentes possibilidades de deflexão da direção do vetor velocidade, conforme a geometria do encontro Figura 14.

Figura 14 – Possíveis rotações para o vetor velocidade



FONTE: Prado (2001)

$$\Psi_1 = 180^\circ + \beta + \delta \quad (22)$$

$$\Psi_2 = 360^\circ + \beta - \delta \quad (23)$$

Onde o ângulo de deflexão é dado pela equação abaixo, da literatura (Broucke, 1988):

$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{r_{ap} V_\infty^2}{\mu_2}} \right) \quad (24)$$

Onde: μ_2 - parâmetro gravitacional de M_2 .

A Equação (24) junto a Figura 10, segundo Prado (2001) revelam as variáveis independentes, que descrevem completamente a manobra, sendo elas a magnitude da velocidade de M_3 no infinito, antes ou após a manobra, distância de M_3 em relação à M_2 no instante do encontro e o ângulo de aproximação.

A partir das equações apresentadas até agora é possível, então, encontrar os valores de variação da energia (ΔE), da velocidade (ΔV), energia final (E_f) e velocidade final (V_f).

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin \delta \sin \Psi \quad (25)$$

$$E_f = E_i + \Delta E \quad (26)$$

$$\Delta V = 2V_\infty \sin \delta \quad (27)$$

$$V_f = V_i + \Delta V \quad (28)$$

E com o valor da variação da energia e tendo conhecimento da velocidade angular encontra-se a variação do momento angular (ΔC) e o momento angular final (C_f).

$$\Delta C = \frac{\Delta E}{\omega} \quad (29)$$

$$C_f = C_i + \Delta C \quad (30)$$

E por último, através das equações a seguir, acham-se os principais valores relacionados a geometria final da órbita, semi-eixo maior final (a_f) e excentricidade final (e_f).

$$a_f = -\frac{\mu_1}{2E_f} \quad (31)$$

$$e_f = \sqrt{1 - \frac{C_f^2}{\mu_1 a_f}} \quad (32)$$

Após o cálculo da manobra através do modelo matemático apresentado, pode-se fazer a análise da manobra. Para isso, utiliza-se a Tabela 1 que classifica o tipo de órbita e a Tabela 2 que define a órbita segundo energia e momento angular, assim classificando M_3 quanto à geometria de sua órbita e quanto à sua direção de rotação, que pode ser direta (sentido horário) ou retrógrada (sentido anti-horário).

Tabela 1 – Secções cônicas.

Cônica	Energia	Semi-eixo Maior	Excentricidade
Circular	< 0	r (raio)	0
Elipse	< 0	> 0	$0 < e < 1$
Parábola	0	∞	1
Hipérbole	> 0	< 0	> 1

FONTE: Silva (2001)

Tabela 2 – Classificação da órbita segundo energia e momento angular

Órbita	Energia	Momento Angular
Elíptica direta	Negativa	Positivo
Elíptica retrógrada	Negativa	Negativo
Hiperbólica direta	Positiva	Positivo
Hiperbólica retrógrada	Positiva	Negativo

FONTE: Adaptado de Prado (2001)

3- METODOLOGIA

3.1- Extensão do Modelo Matemático a uma Nuvem de Partículas

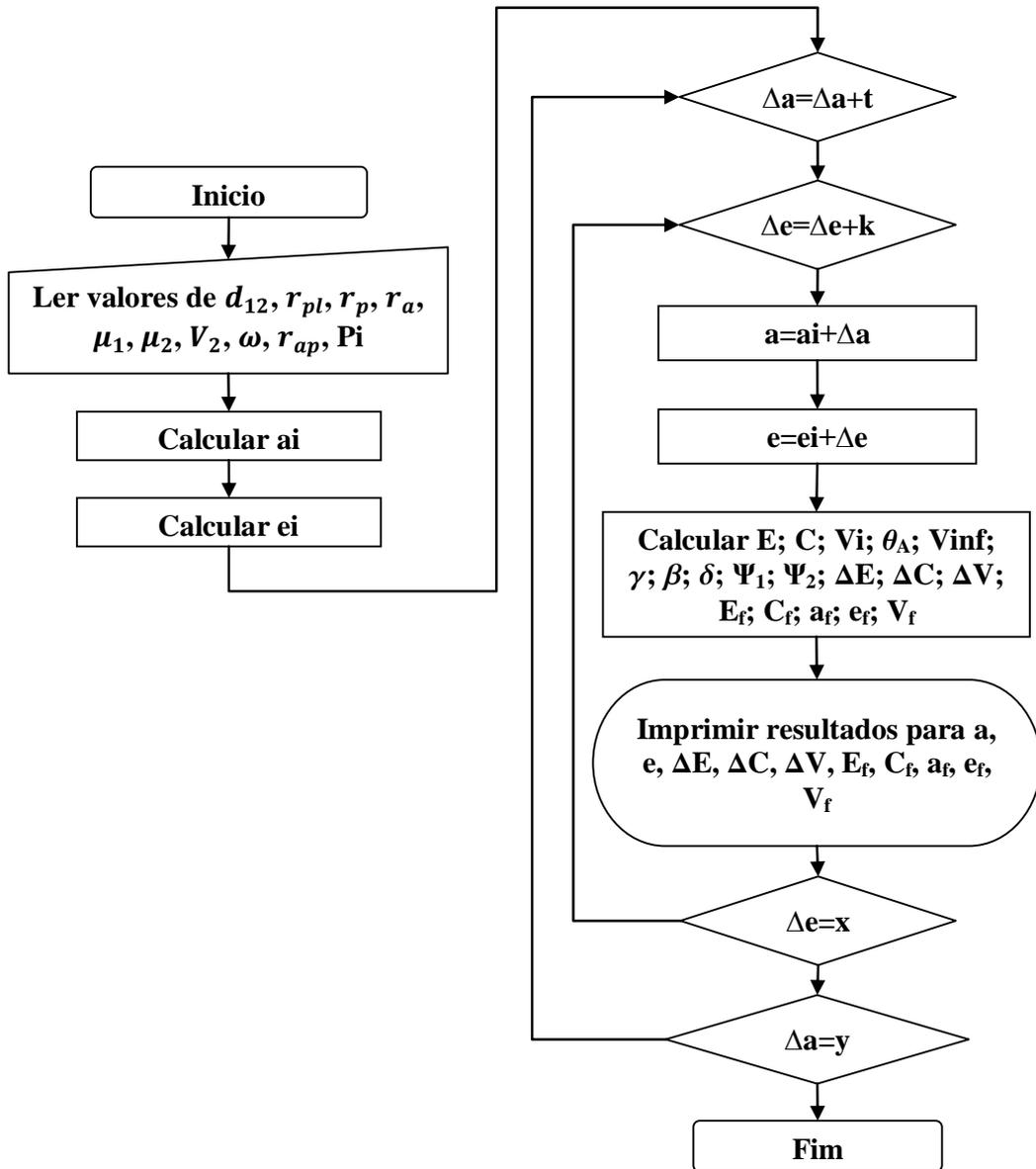
O modelo matemático Prado (2001), já apresentado anteriormente, foi desenvolvido para o cálculo do *swing-by* de uma única partícula. Para estendê-lo a uma nuvem de partículas, fez-se uso da metodologia empregada nas literaturas Gomes e Prado (2008) e Prado (2005), nas quais, a partir de uma variação no semi-eixo maior ($a \pm \Delta a$) e na excentricidade ($e \pm \Delta e$) empregadas no modelo matemático Prado (2001), foi possível estender o modelo a uma nuvem de partículas.

3.2- Estrutura do Código Fonte para *Swing-by* de Uma Nuvem de Partículas

Para gerar a nuvem de partículas através da metodologia apresentada e simular a manobra *swing-by* com um planeta, fez-se o uso do integrador numérico Fortran. O programa foi feito em linguagem Fortran 90, cuja estrutura é apresentada na Figura 15. Foi utilizada a linguagem Fortran devido a sua precisão na geração de dados e pela sua aceitação no meio acadêmico para uso em cálculos de manobras orbitais.

O programa foi desenvolvido com o objetivo de calcular o semi-eixo maior e excentricidade da partícula de referência (partícula mais próxima do corpo primário) e somar variações nos valores calculados de semi-eixo maior e excentricidade da partícula de referência. Dessa forma, é gerada a nuvem, e individualmente é calculada a manobra de cada partícula.

Figura 15 – Fluxograma da rotina em Fortran



FONTE: Autor (2012)

Como mostra o fluxograma, primeiro é necessário inserir no código fonte (Apêndice A) os valores de distância de apoapsis (r_a) e distância de periapsis (r_p) da partícula de referência; a distância máxima de aproximação (r_{ap}), o parâmetro gravitacional de M_1 (μ_1), a distância entre M_1 e M_2 (d_{12}); raio equatorial (r_{pl}), velocidade orbital do planeta (V_2), velocidade angular (ω) e parâmetro gravitacional de M_2 (μ_2).

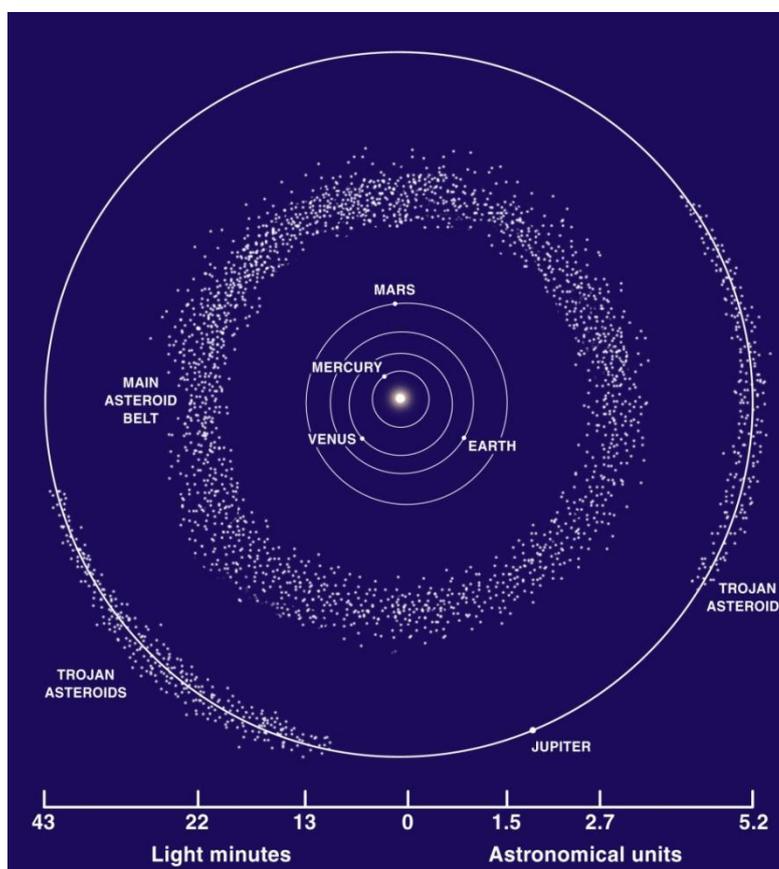
Depois da declaração dos dados iniciais, o programa faz os cálculos iniciais para semi-eixo maior e excentricidade em relação aos valores r_a e r_p da partícula mais próxima, depois se abre um laço para calcular os valores para cada partícula da nuvem, considera-se então um incremento de valores t e k com um a variação máxima de x e y para os valores de semi-eixo

maior e excentricidade. Essa variação representa as variações de partícula para partícula da nuvem, sendo que a variação máxima representa a partícula com maior semi-eixo e excentricidade. O laço terá como condição para acabar os valores máximos de variação x e y para (Δa) e (Δe) respectivamente. O comando para impressão de valores também está inserido dentro do laço e os valores serão impressos em um arquivo (.dat), que depois são apresentados na forma de gráficos para análise através do programa Origin 8. O programa completo pode ser encontrado no Apêndice A, onde outros detalhes podem ser observados.

4- RESULTADOS

A melhor maneira de se entender como ocorre um *swing-by* é aplicando numericamente o modelo matemático. Os resultados mostrados neste capítulo são baseados nos dados gerados a partir do programa apresentado no capítulo 3, feito para o modelo matemático de *swing-by* da nuvem de partículas. Para gerar os resultados, é necessário primeiro escolher quais serão os sistemas onde ocorrerá a manobra *swing-by*. Para isso, considera-se, inicialmente, uma nuvem formada por fragmentos de asteróide. Sabe-se que a maior concentração de asteróides está no chamado cinturão principal de asteróides (*main asteroid belt*), e este se encontra entre os planetas Marte e Júpiter (Figura 16). Sendo assim escolheu-se para o estudo numérico o sistema Sol (M_1), Marte (M_2) e nuvem de partículas (M_3), e o sistema composto por Sol (M_1), Júpiter (M_2) e nuvem (M_3). Os resultados de ambos serão apresentados separadamente. É também importante escolher o local onde ocorrerá o encontro (Figura 10), sendo sua ocorrência possível em dois pontos. No presente estudo será considerado que a manobra ocorrerá no ponto A.

Figura 16 – Cinturão principal de asteróides



FONTE: NASA (2012)

4.1- Dados Iniciais

Conforme mostrado no capítulo 3, para se calcular a manobra deve-se conhecer inicialmente alguns valores, estes referentes à nuvem, ao planeta do sistema e ao Sol. O único valor inicial relacionado ao Sol é seu parâmetro gravitacional ($\mu_1 = 1,33 * 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$). Para os planetas do sistema (Marte ou Júpiter), é apresentada a Tabela 3, que contém além dos principais valores referentes a eles, valores referentes à Terra, que serão usados na análise dos resultados.

Tabela 3 - Dados dos planetas Terra, Marte e Júpiter

	Terra	Marte	Júpiter
Semi-eixo Maior (a) [km]	149.598.261	227.939.150	778.547.200
Excentricidade (e)	0,01671123	0,093315	0,048775
Inclinação [graus]	7,155	1,850	1,3
Velocidade Orbital (V_2) [km/s]	29,78	24,077	13,10
Período Orbital [dias]	365,2564	686,971	4.331,572
Massa [kg]	$5,9736*10^{24}$	$6,4185*10^{23}$	$1,8986*10^{27}$
Raio Equatorial (r_{pl}) [km]	6.378,1	3.396,2	71.492
Distância do Apoapses (r_a) [km]	147.098.290	249.209.300	816.520.800
Distância do Periapses (r_p) [km]	152.098.232	206.669.000	740.573.600
Distância Média do Sol (d_{12}) [km]	149.597.870	227.940.000	$7.783*10^8$
Parâmetro Gravitacional (μ) [km^3/s^2]	$3,986*10^5$	$4,28389*10^4$	$1,26*10^8$
Velocidade Angular (ω) [rad/s]	$1,99*10^{-7}$	$1,06*10^{-7}$	$1,68*10^{-8}$

FONTE: Adaptado de Jones (2007) e McFadden *et al.*(2007)

Conforme mostrado no capítulo 3, a geração da nuvem antes do *swing-by* é feita pela relação $e \pm \Delta e$ para a excentricidade e $a \pm \Delta a$ para o semi-eixo maior. Para isso, será necessário definir valores iniciais aos quais as variações serão somadas, para assim gerar a nuvem. Estes valores serão os da partícula com menor excentricidade e menor semi-eixo maior, chamada partícula de referência (Tabela 4). Os dados da partícula de referência foram baseados nos dados das órbitas de Marte e Júpiter, mais especificamente a suas distâncias médias ao Sol (d_{12}), onde $r_p = 0,15d_{12}$ e $r_a = 1,2d_{12}$. Também será necessário definir a taxa de variação (Δa e Δe) e a variação máxima (Δa_m e Δe_m) do semi-eixo maior e da excentricidade, para assim gerar a nuvem de partículas. A variação adotada para a excentricidade será de $\Delta e = 0,001$ para a taxa de variação (incremento) e variação máxima de

$\Delta e_m = 0,01$, ou seja, a partícula de referência possui excentricidade igual a e e a partícula com maior excentricidade possui $e + \Delta e_m$, as demais partículas estão dentro deste intervalo. O mesmo acontece para o semi-eixo maior, onde a é o semi-eixo maior da partícula de referência e $a + \Delta a_m$ é a partícula com maior semi-eixo maior, e as outras partículas estão dentro deste intervalo. Os valores referentes às variações de semi-eixo maior são apresentados na Tabela 5 e foram relacionados a distância média entre o planeta e o Sol.

Tabela 4 - Dados iniciais da nuvem para *swing-by* com Marte e Júpiter

	$r_p (=0,15d_{12})$ [km]	$r_a (= 1,2d_{12})$ [km]
Marte	$3,4191 \cdot 10^7$	$2,73528 \cdot 10^8$
Júpiter	$1,16745 \cdot 10^8$	$1,40094 \cdot 10^8$

Fonte: Autor (2012)

Tabela 5 – Variações para a geração da nuvem

	Marte Δa [km]	Júpiter Δa [km]
Taxa de Variação (Δa) [= $0,001d_{12}$]	$2,2794 \cdot 10^3$	$7,783 \cdot 10^5$
Variação Máxima (Δa_m) [= $0,01d_{12}$]	$2,2794 \cdot 10^6$	$7,783 \cdot 10^3$

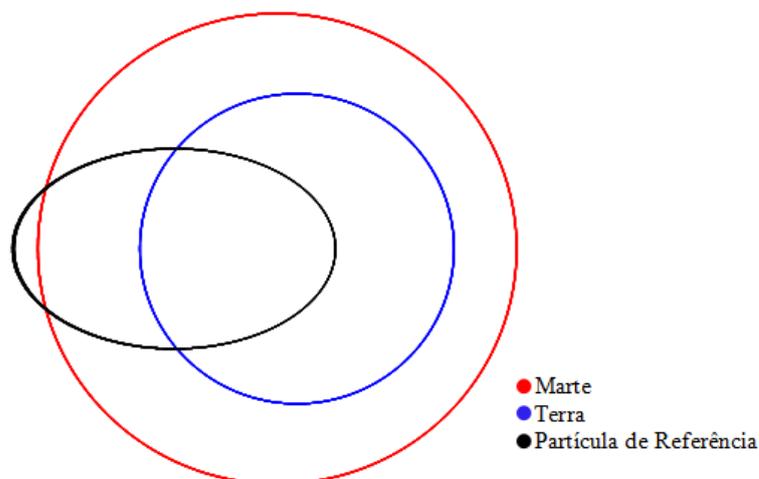
FONTE: Autor (2012)

A partir dos dados iniciais apresentados nas tabelas anteriores, fez-se uma relação das principais órbitas do sistema em estudo, com a ajuda do *software* Mathematica, utilizando a equação polar das cônicas, solução do problema de dois corpos, dada por (SILVA, 2001):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (33)$$

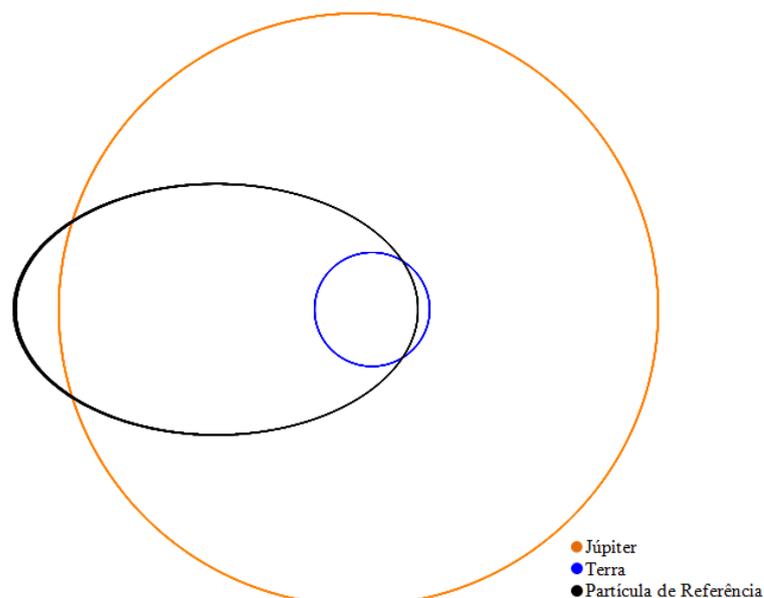
A Figura 17 mostra as órbitas para o sistema Sol-Marte e a Figura 18 para o sistema Sol-Jupiter. Pode-se ver que, em ambos os sistemas, a órbita da partícula de referência cruza com a da Terra, assim provavelmente todas as partículas da nuvem também cruzam com a órbita da Terra. Isso se deve à combinação de semi-eixo e excentricidade escolhidos para a nuvem.

Figura 17 – Órbitas sistema Sol-Marte



FONTE: Autor (2012)

Figura 18 – Órbitas sistema Sol-Júpiter



FONTE: Autor (2012)

Outro importante parâmetro inicial que se deve conhecer é a distância máxima de aproximação entre M_2 e M_3 (r_{ap}), e para melhor entendimento de sua influência nos resultados finais do *swing-by*, foram considerados valores diferentes para ela (Tabela 6): $r_{ap} = 1,1r_{pl}$ e $r_{ap} = 10r_{pl}$. Onde r_{pl} é o raio equatorial do planeta.

Tabela 6 – Distâncias de aproximação

Distância máxima de aproximação (r_{ap})	Marte [km]	Júpiter [km]
$r_{ap} = 1,1r_{pl}$	3,73582E3	7.86412E4
$r_{ap} = 10r_{pl}$	3,396E4	7,1492E5

FONTE: Autor (2012)

A partir de todos os dados apresentados nesta parte do trabalho, já é possível calcular a manobra da nuvem de partículas, e apresentar em forma de gráficos, os resultados encontrados. Foram encontrados os resultados para os dois possíveis ângulos de aproximação Ψ_1 e Ψ_2 . A fim de se organizar melhor os resultados, eles serão divididos da seguinte forma:

- Solução 1 – resultados no sistema Sol-Marte para o ângulo de aproximação Ψ_1 ;
- Solução 2 – resultados no sistema Sol-Marte para o ângulo de aproximação Ψ_2 ;
- Solução 3 – resultado no sistema Sol-Júpiter para o ângulo de aproximação Ψ_1 ;
- Solução 4 – resultados no sistema Sol-Júpiter para o ângulo de aproximação Ψ_2 .

4.2- *Swing-by* no Sistema Sol-Marte

Os resultados a seguir são para um *swing-by* de uma nuvem de partículas no sistema Sol-Marte, considerando as soluções 1 e 2. As Figuras 19 e 20, mostram a configuração da nuvem anterior ao encontro, sendo a mesma para ambas as soluções. Conforme o modelo matemático apresentado no capítulo 2, os valores dos elementos orbitais da nuvem anteriores a manobra são os mesmos para Ψ_1 e Ψ_2 , a influência do ângulo de aproximação se dá somente nos valores dos elementos orbitais encontrados após o *swing-by*, com exceção ao valor de variação da velocidade que é a mesma nas duas soluções.

Figura 19 – Configuração inicial da nuvem (semi-eixo maior x excentricidade antes da manobra)

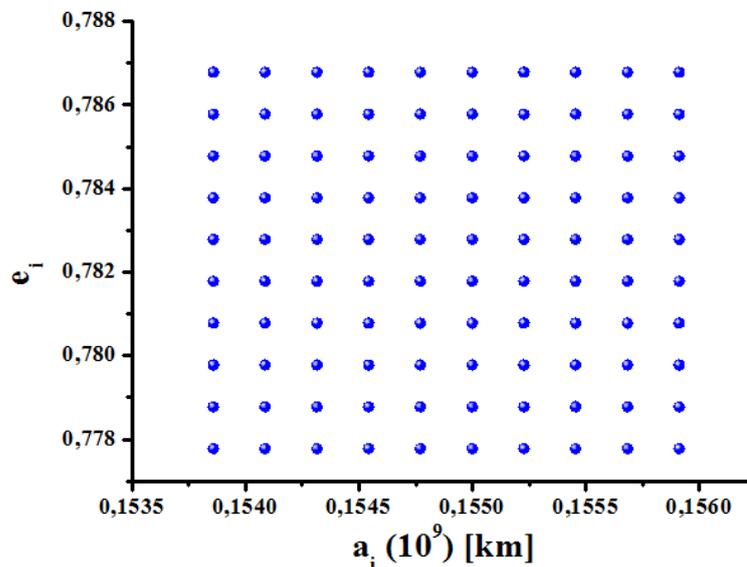
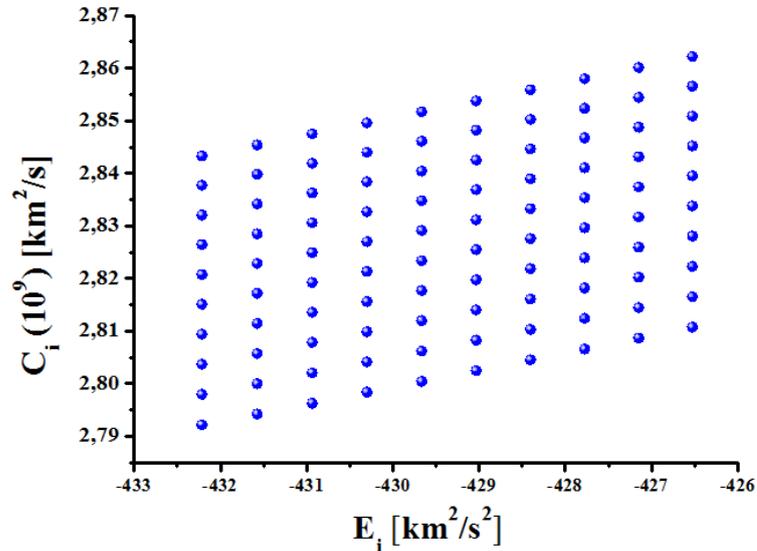


Figura 20 – Configuração inicial da nuvem (energia x momento angular antes da manobra)



Através da Figura 19 é visto que a nuvem, inicialmente, se encontra em uma órbita fechada elíptica, o que pode ser afirmado com base na Tabela 1, em que $0 < e < 1$ e $a > 0$. A Figura 20, além de mostrar que se trata de uma órbita elíptica, também mostra que é uma elíptica direta, pois $E_i < 0$ e $C_i > 0$, conforme Tabela 2.

Conforme citado anteriormente a variação na velocidade é a mesma nas duas soluções de ângulo de aproximação, e seus resultados podem ser vistos para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$ na Figura 21 e para $r_{ap} = 10r_{pl}$ na Figura 22.

Figura 21 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade devido ao *swingy-by* para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$

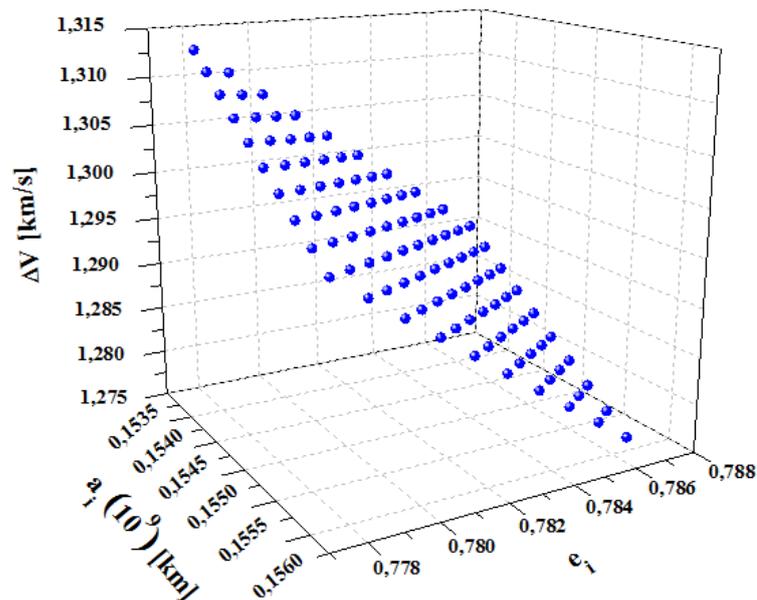
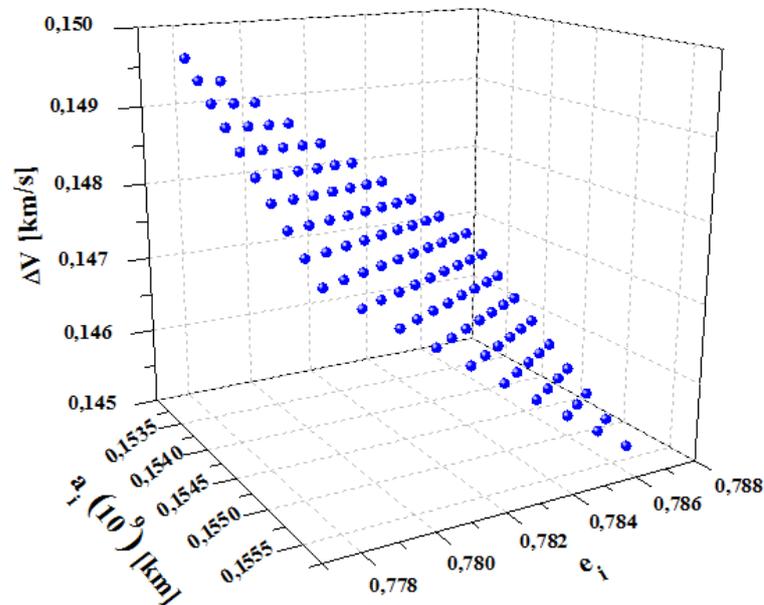


Figura 22 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade devido ao *swingy-by* para $r_{ap} = 10r_{pl}$



As Figuras 21 e 22 mostram também que, para manobras no sistema Sol-Marte, quanto menor o semi-eixo maior e menor a excentricidade anteriores à manobra, maior será a variação da velocidade. Nota-se também que, quanto mais próximo a nuvem passar do planeta, ou seja, quanto menor a distância máxima de aproximação, maior a variação na velocidade. Isto é possível devido ao efeito gravitacional que o planeta exerce sobre as partículas.

4.2.1- Resultados Solução 1 (Sol-Marte- Ψ_1)

Nesta parte do trabalho apresentam-se os resultados da manobra *swing-by* no sistema Sol-Marte referentes ao ângulo de aproximação Ψ_1 , para as duas distâncias máxima de aproximação escolhidas.

Figura 23 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 1, 1r_{pl}$

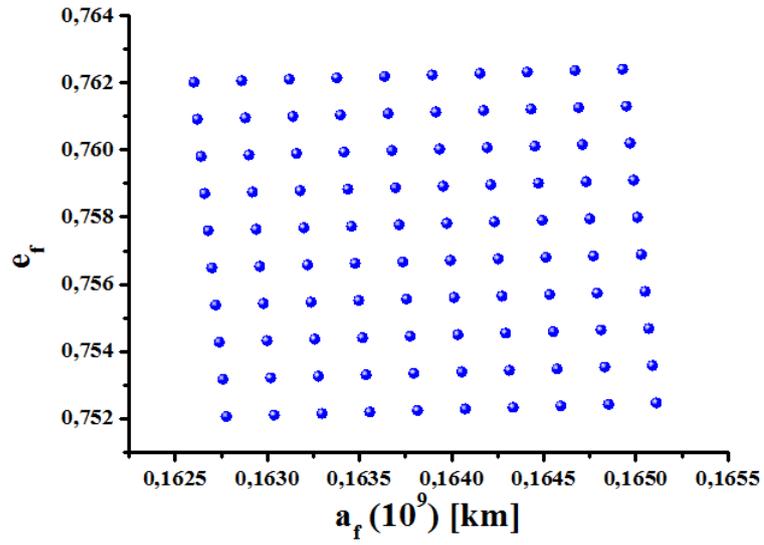


Figura 24 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$

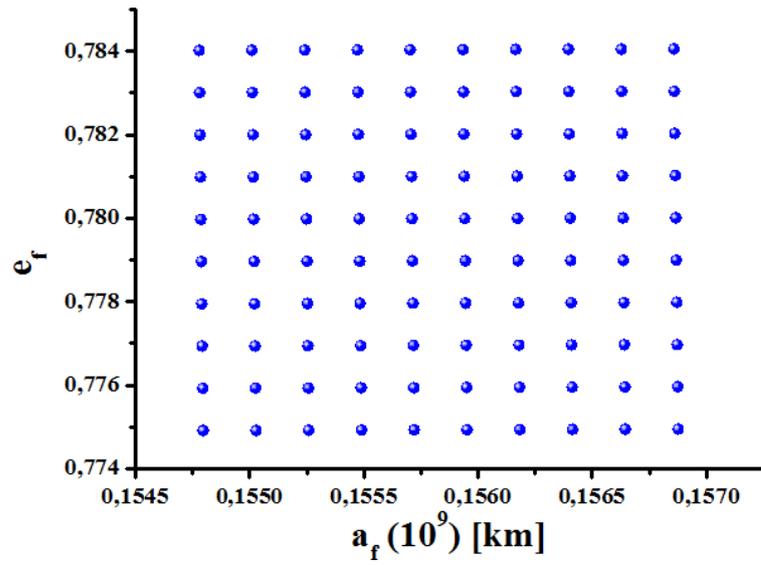


Figura 25 – Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 1, 1r_{pl}$

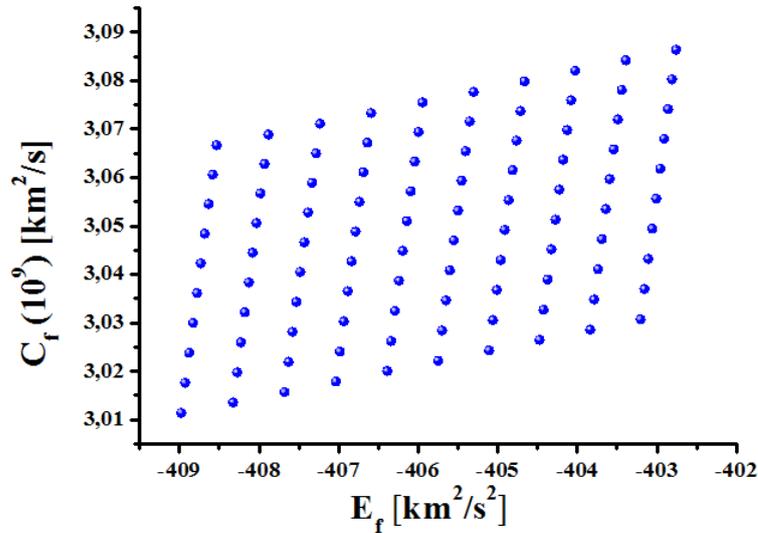
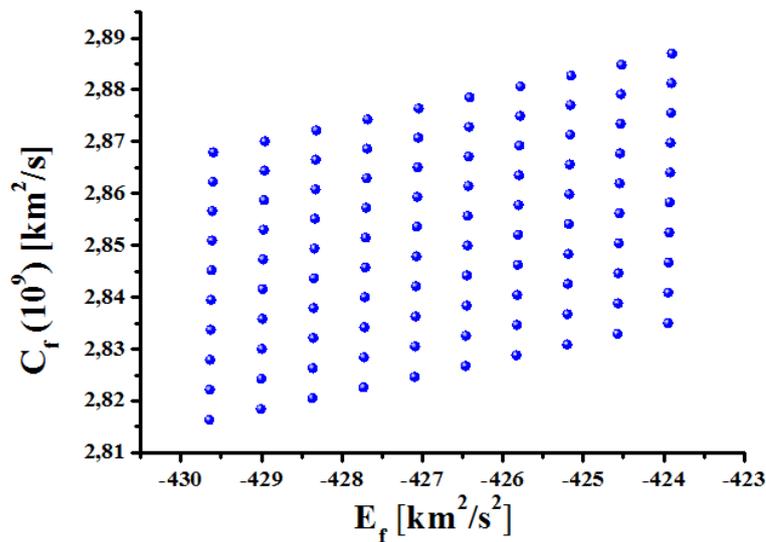


Figura 26 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Como pode ser notado através das Figuras 23 e 24 as partículas continuaram em órbita elíptica, as variações de semi-eixo maior e excentricidade em ambas r_{ap} escolhidas foram muito pequenas.

Já analisando as Figuras 25 e 26, e comparando as a Figura 20, nota-se que após a manobra para a solução 1 no sistema Sol-Marte, para os parâmetros iniciais escolhidos no início deste capítulo, mostram um pequeno ganho de energia, e as partículas continuam em órbitas elípticas diretas. Esse ganho para as duas distâncias de aproximação (r_{ap}) escolhidas, não foi o suficiente para que as partículas mudassem sua trajetória para órbitas hiperbólicas. Também pode ser visto que quanto menor a r_{ap} maior é o ganho de energia, pois a influência do planeta sobre as partículas é maior.

4.2.2- Resultados Solução 2 (Sol-Marte- Ψ_2)

Agora serão apresentados os resultados para o *swing-by* no sistema Sol-Marte referentes ao ângulo de aproximação Ψ_2 , e as duas distâncias de aproximação escolhidas anteriormente.

Figura 27 - Semi-eixo x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 1, 1r_{pl}$

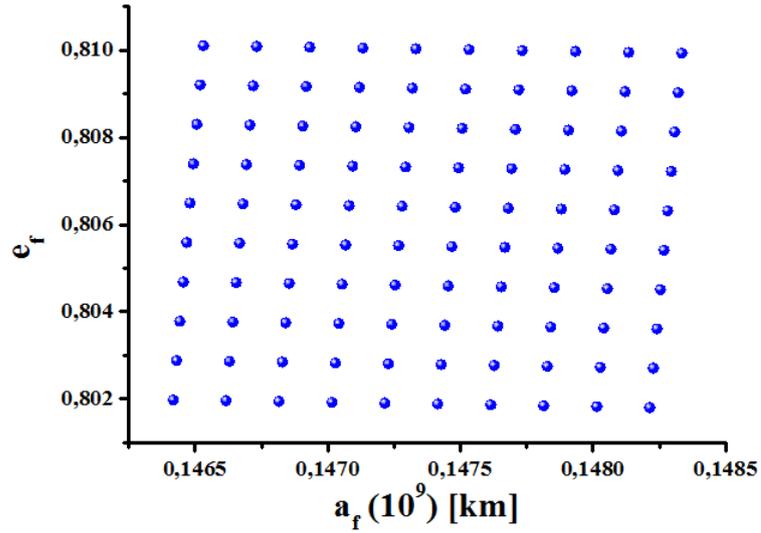


Figura 28 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$

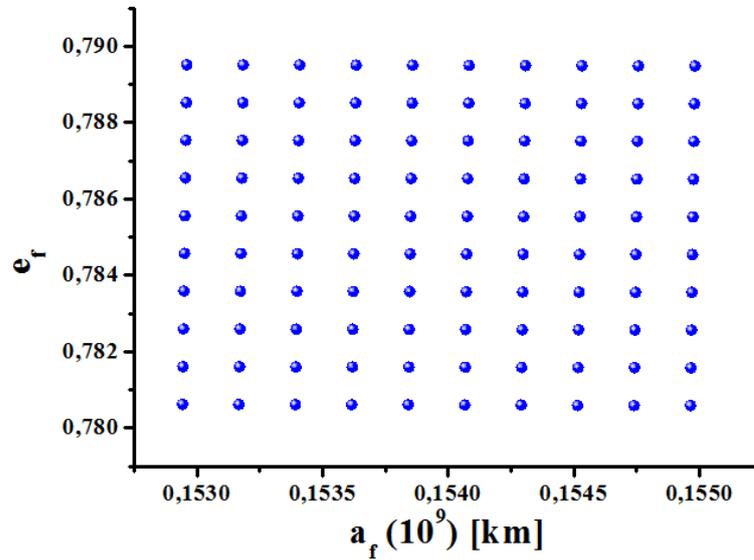


Figura 29 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$

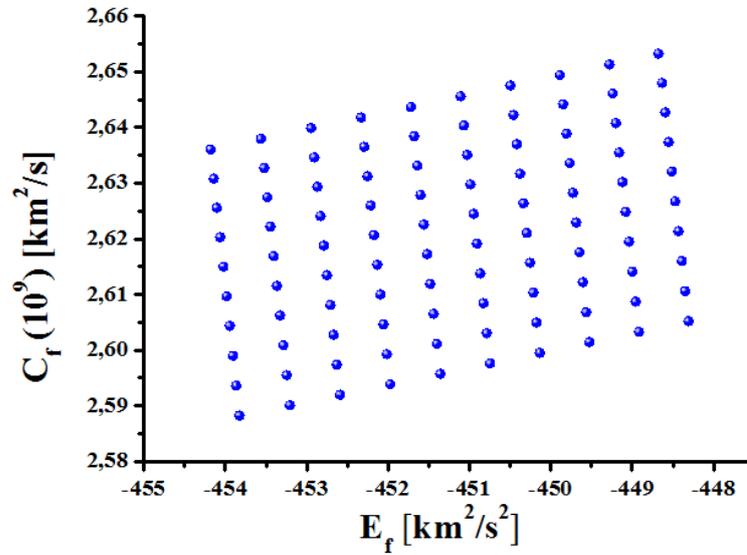
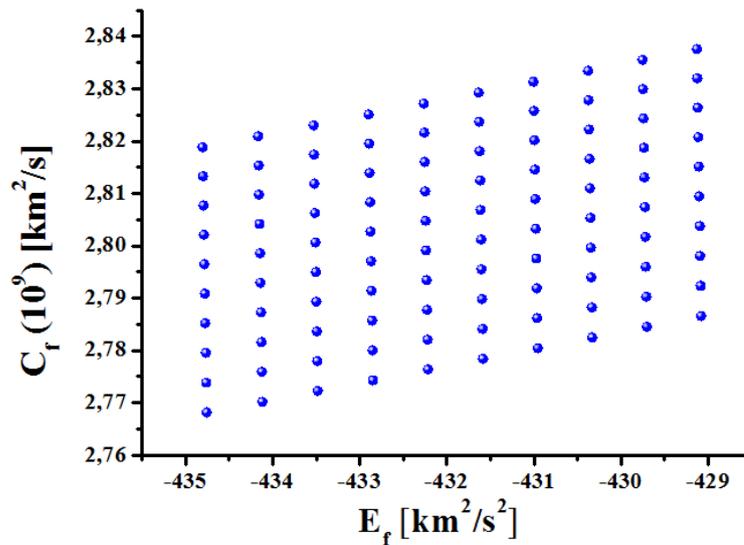


Figura 30 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Ao analisar os resultados para a solução 2 as partículas continuaram em órbita elíptica. Conforme Figuras 27 e 28, ocorreram variações de semi-eixo maior e excentricidade nas duas r_{ap} escolhidas, sendo esta variação maior para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$, onde houve um aumento na excentricidade e diminuição no semi-eixo maior, em comparação com os valores anteriores a manobra (Figura 19). Através da análise das Figuras 29 e 30 pode-se dizer que as partículas permaneceram em uma órbita elíptica direta. Pode ser visto que assim como houve uma maior variação de semi-eixo maior e excentricidade quando $r_{ap} = 1,1r_{pl}$, para esta r_{ap} também há uma maior variação de energia, mais especificamente uma diminuição dela.

4.2.3- Conclusão para *Swing-by* no Sistema Sol-Marte

Como era esperado, tanto na solução 1 quanto na solução 2, as maiores variações podem ser notadas quando a passagem ocorre mais próximas ao planeta Marte, como é sabido da lei da gravitação universal, quanto menor a distância entre os corpos, maior é a força de atração entre eles, logo os valores finais obtidos em um *swing-by* para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$ apresenta variações mais perceptíveis, independentemente de ser a solução 1 ou 2.

Como foi mostrado no início deste capítulo, os valores iniciais da nuvem foram escolhidos de modo que a órbita das partículas antes do *swing-by*, cruzassem com a órbita da Terra (Figura 17). E ao se analisar os resultados obtidos após o *swing-by*, pode-se através dos valores de semi-eixo maior e excentricidade apresentados pelas Figuras 23 e 24 para a solução 1, e Figuras 27 e 28 para solução 2, notar que devido a pouca variação para as r_{ap} escolhidas, a órbita das partículas ainda continuam a cruzar com as órbitas de Terra e Marte. A fim de tornar este resultado mais visível, fez-se uma relação de órbitas utilizando o *software* Mathematica, onde a chamada Partícula 1 é a que possui o maior semi-eixo maior após a manobra e a Partícula 2 é a que possui o menor semi-eixo maior depois do *swing-by*. Esta relação de orbitas é mostrada pela Figura 31 para solução 1 e pela Figura 32 para a solução 2.

Figura 31 – Relação de órbitas após o *swing-by* para a solução 1

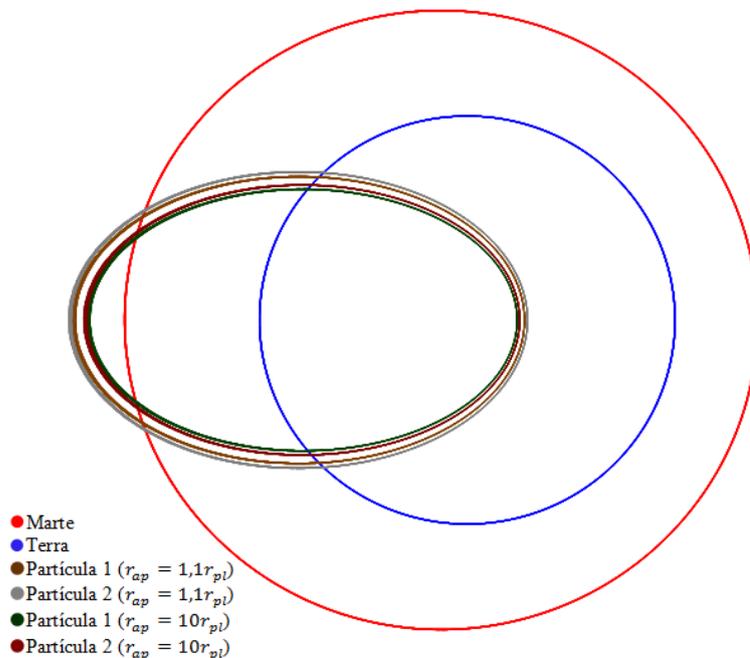
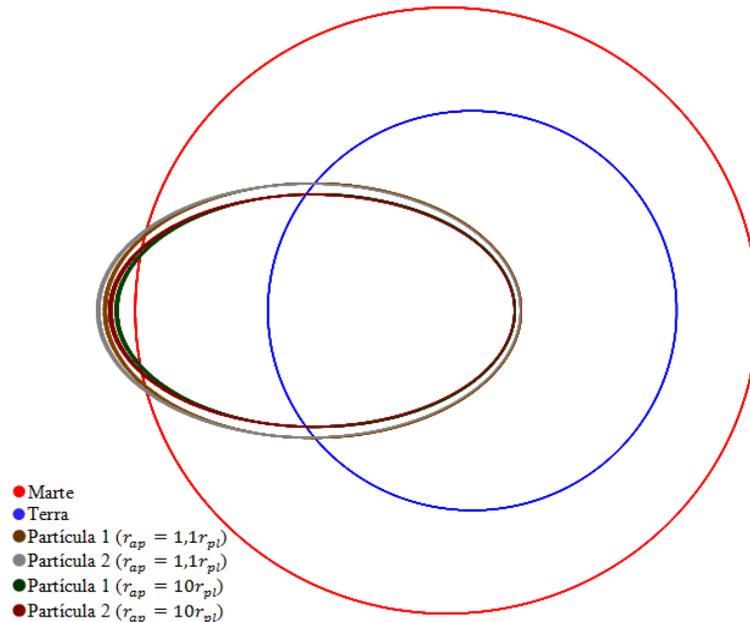


Figura 32 - Relação de órbitas após o *swing-by* para a solução 2



Ao se analisar os resultados procurando por regiões de manobras ótimas, pode-se afirmar com base nas Figuras 21 e 22, que para manobras com o planeta Marte, configurações de órbitas iniciais com os menores semi-eixos maior e as menores excentricidades, geraram maiores incrementos na velocidade.

4.3- *Swing-by* no Sistema Sol-Júpiter

Serão apresentados agora os resultados para um *swing-by* de uma nuvem de partículas no sistema Sol-Júpiter, as aqui abordadas foram inicialmente definidas como soluções 3 e 4. A configuração da nuvem antes da manobra *swing-by* apresentada pelas Figuras 33 e 34 é a mesma para ambas as soluções. Assim como explicado anteriormente, o ângulo de aproximação somente influencia os valores dos elementos orbitais encontrados após a manobra. A Figura 33 mostra que as partículas possuem excentricidades menores que um e os semi-eixos maiores estão em um intervalo positivo, isso indica se tratar de uma órbita elíptica. Já ao se analisar a Figura 34 pode-se ver que os momentos angulares são positivos e as energias negativas, mostrando que as partículas estão em órbitas elípticas com sentido de rotação direto (horário). As partículas estão uniformemente distribuídas em relação à energia, porém não existem na nuvem duas partículas com o mesmo momento angular.

Figura 33 – Configuração inicial da nuvem (semi-eixo maior x excentricidade antes da manobra)

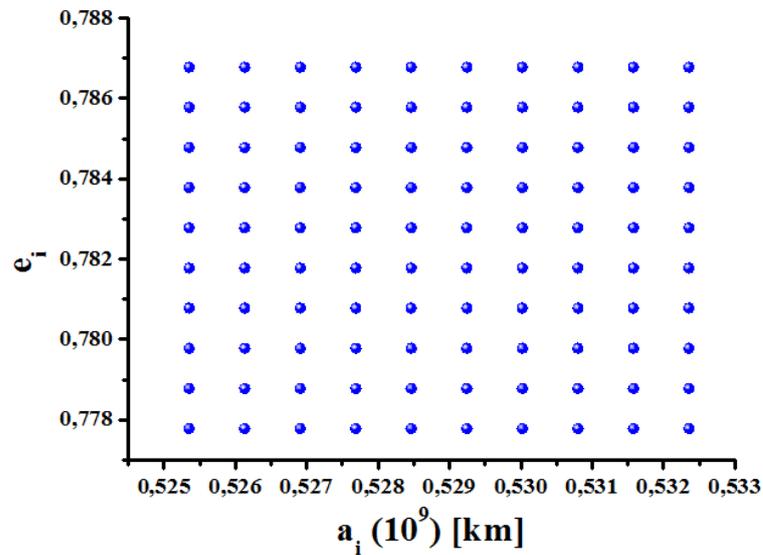
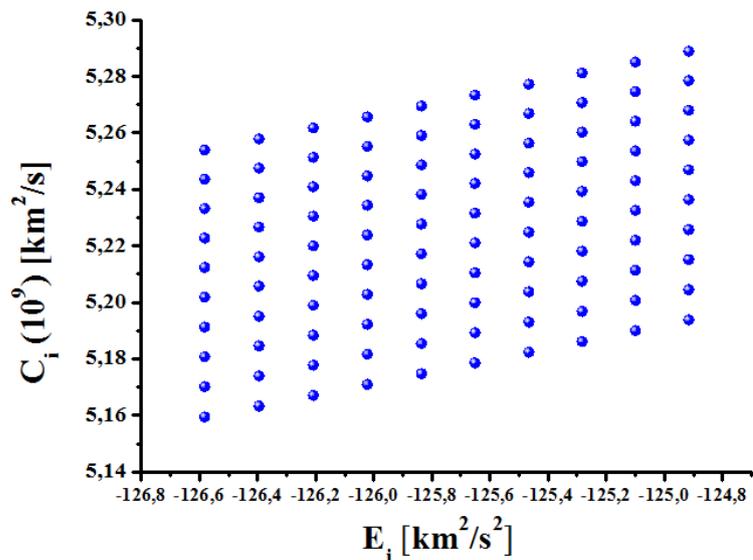


Figura 34 – Configuração inicial da nuvem (energia x momento angular antes da manobra)



Como citado anteriormente os valores para variação da velocidade são os mesmos em ambos os ângulos de aproximação. É possível observar os resultados para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$ na Figura 35 e para $r_{ap} = 10r_{pl}$ na Figura 36. Os resultados apresentados pela Figura 35 mostram variações maiores da velocidade em relação aos apresentados pela Figura 36, isso era esperado, pois para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$, há uma maior influência do planeta sobre as partículas, pois elas passam mais próximas a ele.

Figura 35 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade antes da manobra de *swingy-by* para $r_{ap} = 1, 1r_{pl}$

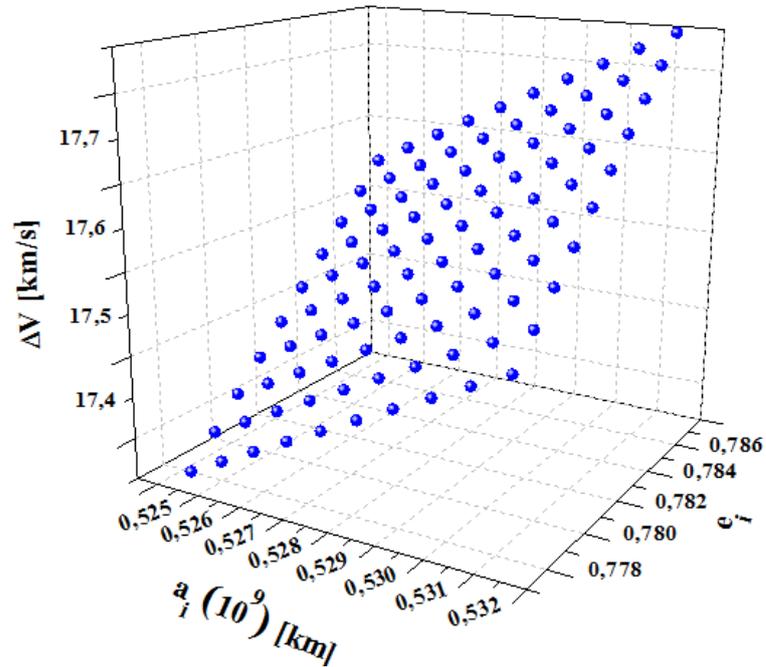
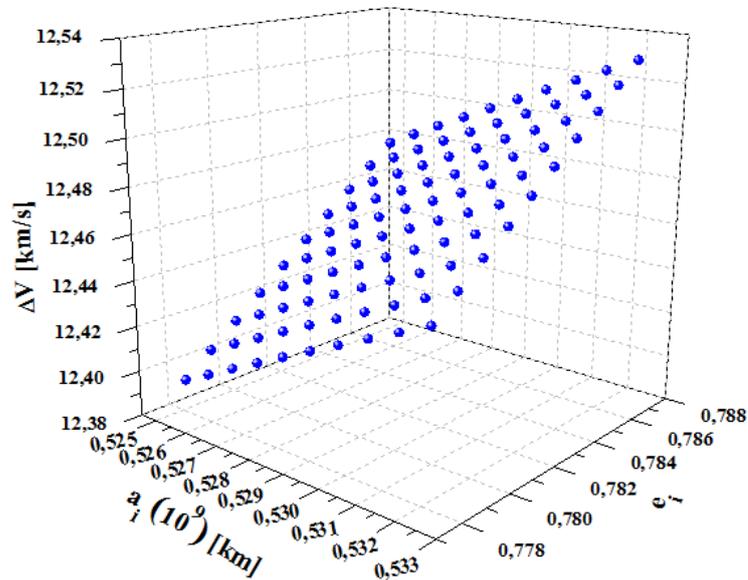


Figura 36 – Semi-eixo maior antes da manobra x excentricidade antes da manobra x variação da velocidade devido ao *swingy-by* para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Com a análise das Figuras 35 e 36 é possível verificar que para manobras *swing-by* no sistema Sol-Júpiter, quanto maior a excentricidade e o semi-eixo antes da manobra, maior será os incrementos de velocidade gerado pelo *swing-by*.

4.3.1- Resultados Solução 3 (Sol-Júpiter- Ψ_1)

Agora serão apresentados os resultados específicos para a Solução 3, feita para o ângulo de aproximação Ψ_1 . A primeira observação que pode feita é que tanto para semi-eixo maior e excentricidade após a manobra (Figuras 37 e 38), quanto para energia e momento angular após a manobra (Figuras 39 e 40) há uma tendência dos resultados se apresentarem em diagonais, onde ocorre um crescimento linear dos elementos orbitais.

Figura 37 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$

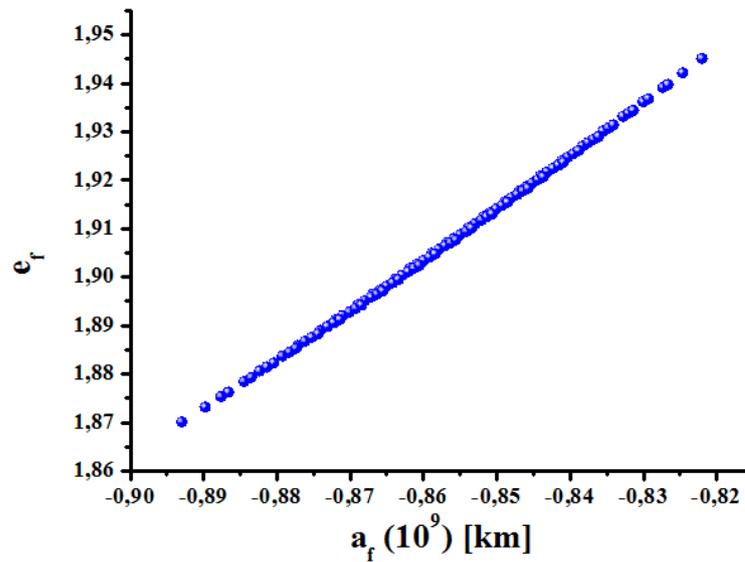
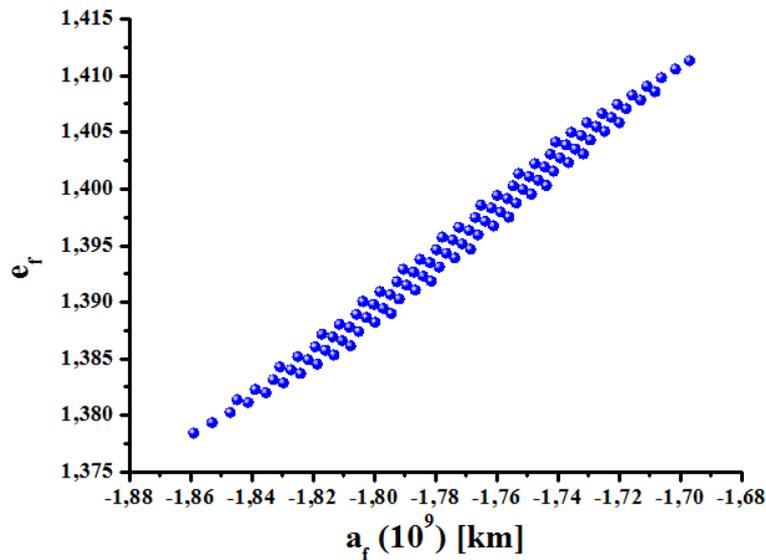


Figura 38 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Nas duas possíveis distâncias máxima de aproximação apresentadas no estudo é notável a tendência das partículas se agruparem na diagonal, isso é mais revelador quando $r_{ap} = 1,1r_{pl}$, ou seja, quanto mais próximo a nuvem passar do planeta mais linear será o crescimento de semi-eixo maior e excentricidade das partículas. Outro ponto importante é o

dos valores finais encontrados para semi-eixo maior serem negativos, o que indica que as partículas estão em órbita aberta hiperbólica. Sabendo disso pode-se afirmar que as energias encontradas devem estar compreendidas em um intervalo positivo. E em ambas as Figuras 39 e 40, pode ser notado que as energias se encontram em um intervalo positivo, indicando também que as partículas se encontram agora em órbitas abertas hiperbólicas.

Figura 39 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$

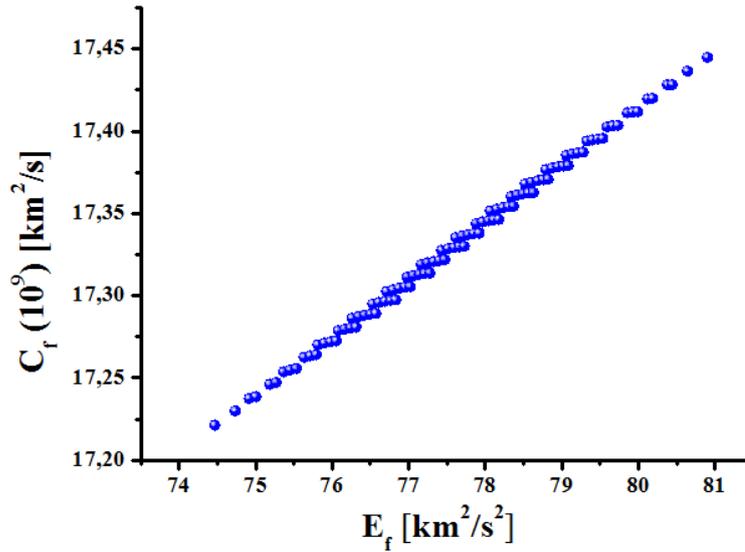
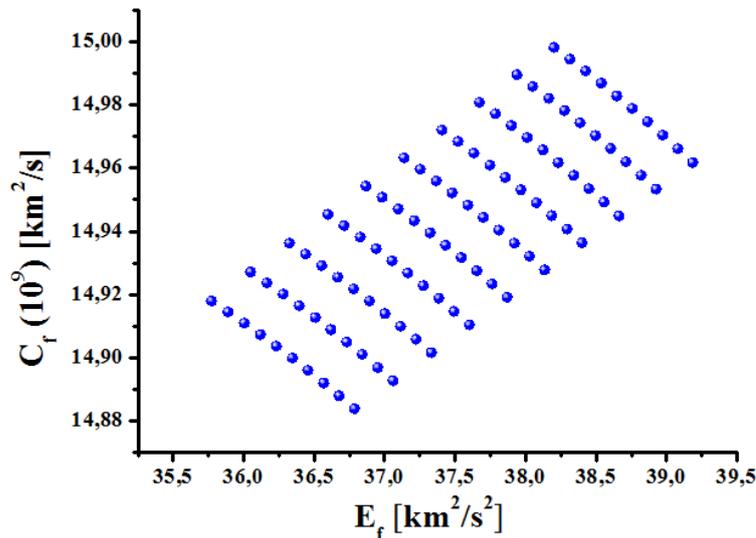


Figura 40 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Em relação ao sentido de rotação das partículas em suas respectivas órbitas, com base na Tabela 2, pode-se dizer que todas elas estão em órbitas hiperbólicas diretas. Já quanto às variações encontradas para a energia e momento angular para a solução 3, elas são maiores quanto mais próximo as partículas passarem de Júpiter. A Figura 39 que apresenta os resultados para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$, mostra as partículas mais agrupadas na diagonal, onde os

resultados acabam se sobrepondo. Já na Figura 40 apesar de uma menor variação na energia em relação à Figura 39, ambas em relação aos valores anteriores ao encontro (Figura 34) possuem variação positiva.

4.3.2- Resultados Solução 4 (Sol-Júpiter- Ψ_2)

Os últimos resultados apresentados são referentes a solução 4, a qual está definida para o *swing-by* no sistema Sol-Júpiter, com ângulo de aproximação Ψ_2 . Analisando as Figuras 41 e 42 pode-se notar que as partículas continuam em órbitas elípticas diretas, com semi-eixos maiores negativos, excentricidades entre um e zero. Já ao se analisar as Figuras 43 e 44 pode-se ver que todas as partículas se encontram em um intervalo de energias negativas e momentos angulares positivos, assim suas órbitas são classificadas como elípticas diretas.

Figura 41 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 1, 1r_{pl}$

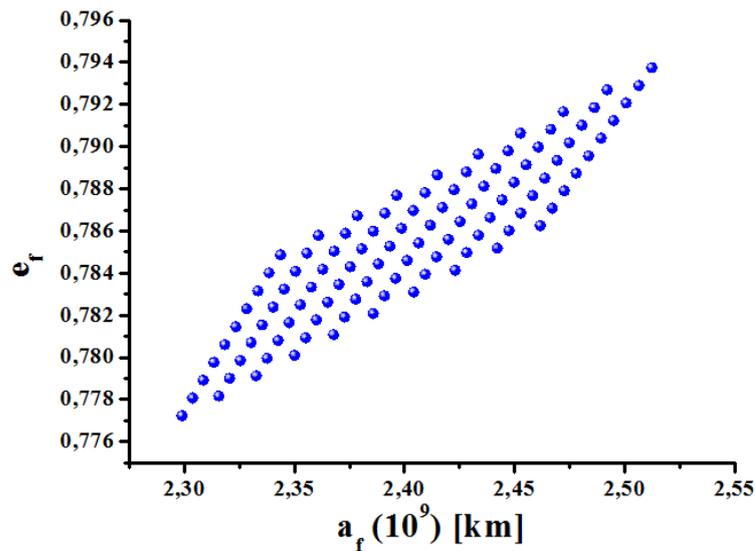
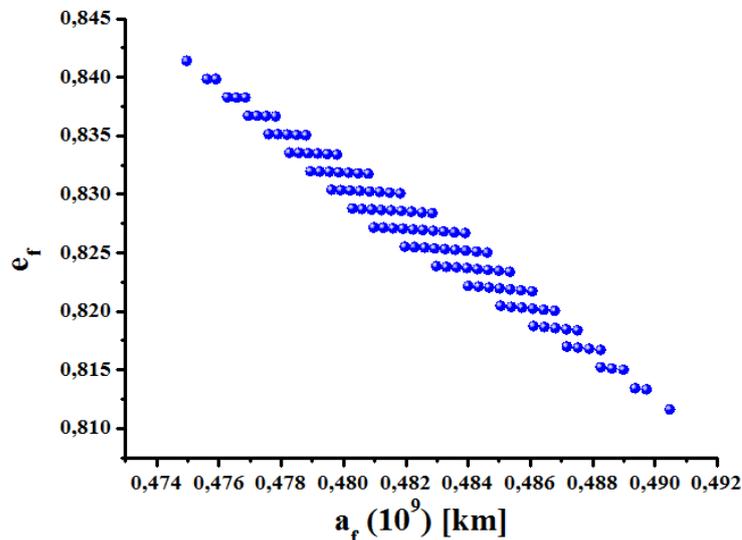


Figura 42 - Semi-eixo maior x excentricidade após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Nota-se ao analisar a Figura 41 a tendência dos valores de semi-eixo maior e excentricidade crescerem linearmente, assim a partícula da nuvem que possui o maior semi-eixo maior é a que também possui a maior a excentricidade. Agora ao se estudar a Figura 42, feita para $r_{ap} = 10r_{pl}$ o crescimento da excentricidade é inversamente proporcional ao crescimento do semi-eixo maior, ou seja, quanto maior o semi-eixo maior de uma partícula menor sua excentricidade, sendo $r_{ap} = 10r_{pl}$ a única variável diferente da simulação apresentada pela Figura 41, é possível afirmar que estes valores encontrados estão relacionados á distância máxima de aproximação escolhida.

Figura 43 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$

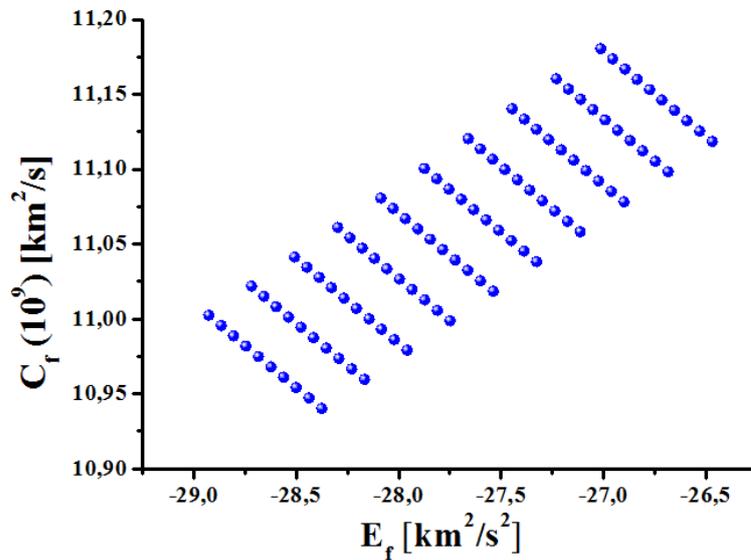
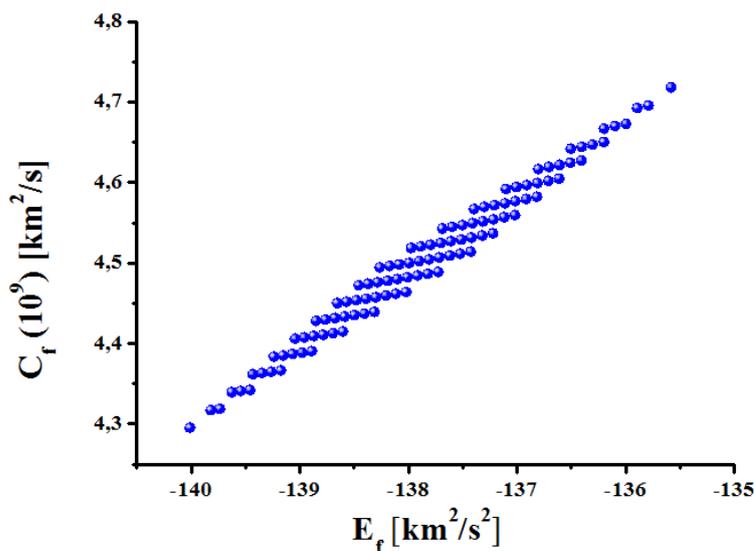


Figura 44 - Energia x momento angular após a manobra para $r_{ap} = 10r_{pl}$



Na Figura 43 para um *swing-by* com $r_{ap} = 1,1r_{pl}$, pode-se ver que as energias finais encontradas tiveram variação positiva, e ainda assim, esta variação não foi suficiente para que

as partículas deixassem de ter suas órbitas elípticas. Pelos valores de momento angular encontrados, pode-se classificar as órbitas resultantes do *swing-by* como sendo elípticas com rotação direta. Já a Figura 44 para uma manobra com $r_{ap} = 10r_{pl}$, nota-se uma variação negativa da energia e momentos angulares positivos, o que indica tratar-se de órbitas elípticas diretas.

4.3.3- Conclusão para *Swing-by* no Sistema Sol-Júpiter

Os resultados apresentados para o *swing-by* no sistema Sol-Júpiter, inicialmente confirmam as afirmações de Santos (2009) através das Figuras 42 e 43, de que quanto maior a excentricidade, maior é a variação da velocidade, ou seja, maior é o ganho de velocidade. Também pode ser notado que, assim como nas simulações feitas para Marte, as maiores variações ocorreram para a menor distância máxima de aproximação $r_{ap} = 1,1r_{pl}$.

Agora a fim de melhor analisar os resultados encontrados, assim como para Marte, procurando por órbitas resultantes do *swing-by* que cruzem a órbita da Terra na solução 4, foram usados os resultados apresentados pelas Figuras 41 e 42 e com a ajuda do *software* Mathematica, e usando novamente a Equação 33, fez-se a relação de algumas órbitas (Figuras 45 e 46). Sabendo que a órbitas de todas as partículas está em um intervalo bem definido de semi-eixo maior, chama-se de Partícula 1 a partícula com menor semi-eixo maior e Partícula 2 a com maior semi-eixo maior, e faz-se a relação de suas órbitas com a órbita da Terra e de Júpiter.

Figura 45 – Relação de órbitas após o *swing-by* para a solução 3

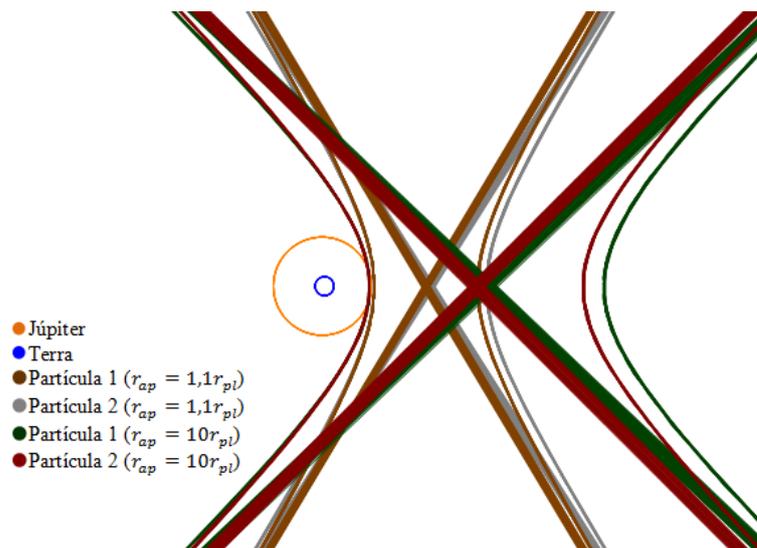
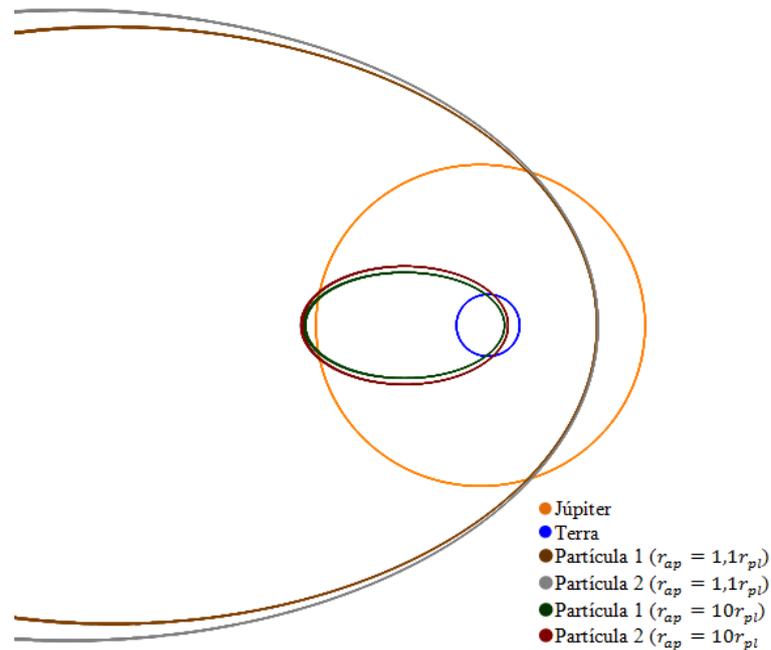


Figura 46 – Relação de órbitas após o *swing-by* para a solução 4



Os resultados para a solução 3 (Figuras 37 e 36) e a Figura 45 mostram que as partículas tiveram tanto para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$ quanto para $r_{ap} = 10r_{pl}$, suas órbitas finais alteradas para órbita hiperbólicas ($a < 0$ e $e > 1$), assim elas deixaram o sistema, logo não vão mais cruzar com as órbitas da Terra e de Júpiter;

Os resultados para a solução 4 (Figuras 41 e 42), junto a Figura 46 revelam que as órbitas resultantes do *swing-by* são órbitas elípticas. Nestas simulações a distância máxima de aproximação teve um papel muito importante, onde para $r_{ap} = 1,1r_{pl}$ (Figura 41) as partículas foram lançadas a órbitas com semi-eixo maiores muito grandes, comparados aos iniciais (Figura 33), logo elas deixaram de cruzar com a órbita da Terra, porém ainda assim, devido a excentricidade permanecer alta, elas continuaram a cruzar com a órbita de Júpiter. Agora os resultados de $r_{ap} = 10r_{pl}$ (Figura 42), devido à variação negativa do semi-eixo maior, todas as partículas continuaram a cruzar com as órbitas da Terra e de Júpiter, conforme Figura 46.

5- CONCLUSÃO

Conforme a proposta apresentada para o estudo da passagem próxima de uma nuvem de partículas a um corpo celeste, através da análise das variações dos elementos orbitais que fizessem com que sua órbita viesse a se chocar com a órbita da Terra. A outra proposta era apontar possíveis regiões de manobras ótimas.

Após as simulações para os planetas Marte e Júpiter, e conforme os resultados apresentados e comentados no capítulo 4, pode-se dizer que manobras *swing-by* de nuvem de partículas para um planeta com maior massa, no caso Júpiter, são encontradas variações maiores dos elementos orbitais, em comparação aos resultados encontrados para um planeta menor como Marte.

No caso apresentado para Marte a influência dele sobre as partículas da nuvem é tão pequena em comparação à influência de Júpiter, que em nenhum dos dois possíveis ângulos de aproximação ocorreu de partículas entrarem em órbitas hiperbólicas e escaparem da nuvem. O mesmo ocorreu na manobra com Júpiter, porém somente com o ângulo de aproximação Ψ_2 . Já no caso da manobra da nuvem com o planeta Júpiter para os resultados encontrados com Ψ_1 , as partículas entraram em órbita hiperbólicas e escaparam do sistema.

As conclusões que podem ser retiradas, comuns aos dois casos apresentados, (manobras com Sol-Marte e Sol-Júpiter), indiferente ao ângulo de aproximação, são as de que passagens que ocorrem mais próximas aos planetas, ou seja, com uma menor distância máxima de aproximação, causam variações maiores quando comparadas a uma passagem mais distante.

Através da simulação do *swing-by* para nuvem de partículas, fica mais fácil encontrar regiões de manobras ótimas, ou que atendam às especificações de uma missão. A análise de manobras para nuvem de partículas, durante a elaboração do projeto inicial de uma missão espacial, serve para se ter uma primeira impressão de possíveis resultados futuros. Torna-se mais fácil encontrar soluções, dentro dos resultados da manobra de uma nuvem, do que se fossem analisar caso a caso.

Ao final deste trabalho, nota-se que outros estudos podem ser realizados com base neste. Assim propõem-se os seguintes trabalhos a serem realizados futuramente:

- i. Simular múltiplos *swing-bys* da nuvem de partículas, a fim de analisar até que ponto todas as partículas irão continuar em órbitas fechadas;

- ii. Realizar o mesmo estudo em sistemas diferentes, como em um sistema com a Terra como corpo primário e a Lua como o secundário;
- iii. Desenvolver um estudo em que, além de atribuir diferentes semi-eixo maiores e excentricidade para formar a nuvem inicial, também se utilizar de diferentes distâncias máxima de aproximação para cada partícula;
- iv. Realizar o estudo do *swing-by* de uma nuvem de partículas em três dimensões espaciais.
- v. Realizar um estudo considerando forças perturbadoras no sistema, como por exemplo: pressão de radiação solar e a presença de outros corpos no sistema.

6- REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. *Fundamentals of astrodynamics*. New York: Dover Publications, 1971. 470 p.

BROUCKE, R.A. The celestial mechanics of gravity assist. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, 1988. Proceedings. Washington, DC: AIAA, 1988. p. 83-85.

BROUCKE, R.A.; PRADO, A.F.B.A. Jupiter swing-by trajectories passing near the earth. *Advances in the Astronautical Sciences*. v. 82, n. 2, p.1159-1176. 1993.

D'AMARIO, L. A.; BRIGHT, L. E.; WOLF, A. A., Galileo trajectory design. *Space science reviews*. v. 60, n. 1-4, p.23-78. 1992.

DUNNE, J. A.; BURGESS, E. *The voyage of mariner 10: Mission to Venus and Mercury*. Washington, D.C.: JPL/NASA, 1978. 224 p.

FIMMEL, R. O.; SWINDELL, W.; BURGESS, E. *Pioneer odyssey*. Washington, D.c.: Nasa, 1977. 217 p.

FLANAGAN, S.; PERALTA F. Cassini 1997 VVEJGA Trajectory Launch/Arrival Space Analysis, AAS Paper 93-684, AAS/AIAA Astrodynamics Conference, Victoria, Canada, Ago. 1993. 25p.

FORMIGA, J. K. S.; PRADO, A. F. B. A. A study of the effects of a close approach between a planet and a particle. In: 22 INTERNATIONAL SIMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, v. 12, p. 1-10, 2011a.

FORMIGA, J. K. S.; PRADO, A. F. B. A. Orbital characteristics due to the three dimensional swing-by in the sun-jupiter system. In: 10 INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE MAN-MACHINE SYSTEMS AND CYBERNETICS, 2011, Jakarta. *Recent researches in environmental science and landscaping*. Jakarta: World Scientific And Engineering Academy And Society, p.61-69, 2011b.

GOMES, V. M.; PRADO, A. F. B. A. Swing-by maneuvers for a cloud of particles with planets of the solar system. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, v. 3, n. 11, p. 859-868, 2008.

GOMES, V. M. ; PRADO, A.F.B.A. A Study of the Close Approach Between a Planet and a Cloud of Particles. In: 8th WSEAS International Conference on SIGNAL PROCESSING, ROBOTICS and AUTOMATION, 2009, Cambridge. *Recent Advances in Signal Processing, Robotics and Automation*. Cambridge : WSEAS Press, 2009. v. 1. p. 126-131.

GUO, Y.; FARQUHAR, R. W. New horizons mission design. *Space science reviews*, v. 140, n. 1, p.49-74. Out. 2008.

JONES, B. W. *Discovering the solar system*. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007. 453 p.

KOHLHASE, C.E.; PENZO, P.A. Voyager Mission Description. *Space Science Reviews*, Vol. 21, N. 2, p.77-101, 1977.

LUNAR AND PLANETARY INSTITUTE. The asteroid belt.2012. 1 ilustração, color. Disponível em: <http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?Category=Planets&IM_ID=850>. Acesso em 13 jun.2012.

- MCADAMS, J. V. Messenger Mission Overview and Trajectory Design. *Advances In The Astronautical Sciences*. v. 116, n. 3, p.643-662. 2003.
- MCFADDEN, L.; WEISSMAN, P. R.; JONHSON, T. V. *Encyclopedia of the solar system* . 2. ed. San Diego: Elsevier, 2007. 966 p.
- O'SHAUGHNESSY, D. J.; MCADAMS J. V.; BEDINI P. D.; CALLOWAY A. B. ; WILLIAMS K. E. ; PAGE B. R. MESSENGER's use of solar sailing for cost and risk reduction, 9 Low-Cost Planetary Missions Conference, International Academy of Astronautics, 8 p., Laurel, MD, Jun. 2011.
- PRADO, A. F. B. A. Optimal transfer and swing-by orbits in the two- and three-body problems. 1993. Dissertação (Doutorado em Ciências de Engenharia Aeroespacial) - Universidade do Texas. Austin.
- PRADO, A. F. B. A. *Trajetórias espaciais e manobras assistidas por gravidade*. São José dos Campos: Inpe, 2001. 169 p.
- PRADO, A.F.B.A. A Patched Conics Description of the Swing-By of a Group of Particles. *Nonlinear Dynamics and System Theory, Kiev*, v. 5, n. 3, p. 265-271, 2005.
- SILVA, W. C. C. Movimento orbital. In: PRADO, A. F. B. A.; KUGA, H. K. *Fundamentos de tecnologia espacial*. São José dos Campos: INPE, 2001. cap. 1, p.9-24.
- WENZEL, K. P.; MARSDEN, R. G.; PAGE, D. E.; SMITH, E. J. The ULYSSES mission. *Astronomy and astrophysics supplement*. v. 92, n. 2, p.207-219. Jan. 1992.

APÊNDICE A

Rotina em Fortran para o *Swing-By* de uma Nuvem De Partículas

```
program calculo !programa para calculo de swing-by de uma nuvem de particulas
implicit real*8(a-z)      !declaracao do tipo de variaveis
!declaracao de valores
d12=      !distancia media entre M1 e M2
rp=      !distancia de periapsis da particula de referencia
ra=      !distancia de apoapsis da particula de referencia
Mi1=     !parametro gravitacional de M1
Mi2=     !parametro gravitacional de M2
V2=     !velocidade orbital de M2
r=      !fator de raios de M2
rpl=    !raio equatorial de M2
rap=r*rpl      !distancia máxima de aproximação entre M2 e M3
w=      !velocidade angular de M2
Pi=4.0D0*datan(1.0D0)      !constante Pi
k=0.01*d12      !variacao máxima do semi-eixo maior
i=0.001*d12      !taxa de variacao do semi-eixo maior
ai=(ra+rp)/2      !calculo do semi-eixo maior da particular de referencia
ei=1-(rp/ai)      !calculo da excentricidade da particular de referencia
!Calculo do swing-by para Psi1
open(2,file='Psi1.dat')      !gera o arquivo .dat para Psi1
do da=0,K,i      !abre o laco para o semi-eixo maior
do de=0,0.01,0.001      !abre o laço para a excentricidade
a=ai+da      !gera a nuvem
e=ei+de      !gera a nuvem
Eg=-((Mi1/(2*a))      !energia de M3
C=sqrt(Mi1*a*(1-(e**2)))      !momento angular de M3
Vi=sqrt(Mi1*((2/d12)-(1/a)))      !velocidade de M3 em relacao a M1
Teta=acos((1/e)*((a*(1-(e**2))/d12)-1))      !anomalia verdadeira de M3 no instante
do encontro
Gama=atan((e*sin(Teta))/(1+(e*cos(Teta))))      !flight path angle
```

```

Vinf=sqrt(((Vi**2)+(V2**2))-(2*Vi*V2*(cos(Gama))))      !velocidade de M3 em
relação a M2
Beta=acos(-((Vi**2)-(V2**2)-(Vinf**2))/(2*V2*Vinf))    !angulo entre Vi e V2
Delta=asin(1/(1+((rap*(Vinf**2))/Mi2)))                !angulo de deflexao
Psi1=Pi+Beta+Delta      !rotacao do vetor velocidade Psi1
DEg1=-2*V2*Vinf*(sin(Delta))*(sin(Psi1))              !variacao da energia para Psi1
DC1=DEg1/w      !variacao do momento angular para Psi1
DV1=2*Vinf*(sin(Delta))      !variacao da velocidade
Egf1=Eg+DEg1      !energia final para Psi1
Cf1=C+DC1      !momento angular final para Psi1
af1=-(Mi1/(2*Egf1))      !semi-eixo maior final para Psi1
ef1=sqrt(1-((Cf1**2)/(Mi1*af1)))      !excentricidade final para Psi1
Vf1=Vi+DV1      !velocidade final
write(2,10)a,e,Eg,C,af1,ef1,Egf1,Cf1,Vf1,DV1,Psi1*180/Pi      !imprime valores no
arquivo .dat para Psi1
end do      !fecha laço da excentricidade
end do      !fecha laço do semi-eixo maior
continue
!Calculo do swing-by para Psi2
open(3,file='Psi2.dat')
do da=0,K,i
do de=0,0.01,0.001
a=ai+da
e=ei+de
Eg=-((Mi1)/(2*a))
C=sqrt(Mi1*a*(1-(e**2)))
Vi=sqrt(Mi1*((2/d12)-(1/a)))
Teta=acos((1/e)*((a*(1-(e**2))/d12)-1))
Gama=atan((e*sin(Teta))/(1+(e*cos(Teta))))
Vinf=sqrt(((Vi**2)+(V2**2))-(2*Vi*V2*(cos(Gama))))
Beta=acos(-((Vi**2)-(V2**2)-(Vinf**2))/(2*V2*Vinf))
Delta=asin(1/(1+((rap*(Vinf**2))/Mi2)))
Psi2=(2*Pi)+Beta-Delta      !rotacao do vetor velocidade Psi2

```

```

DEg2=-2*V2*Vinf*(sin(Delta))*(sin(Psi2))      !variacao da energia para Psi2
DC2=DEg2/w      !variacao do momento angular para Psi2
DV2=2*Vinf*(sin(Delta))      !variacao da velocidade
Egf2=Eg+DEg2      !energia final para Psi2
Cf2=C+DC2      !momento angular final para Psi2
af2=-(Mi1/(2*Egf2))      !semi-eixo maior final para Psi2
ef2=sqrt(1-((Cf2**2)/(Mi1*af2)))      !excentricidade final para Psi2
Vf2=Vi+DV2      !velocidade final
write(3,10)a,e,Eg,C,af2,ef2,Egf2,Cf2,Vf2,DV2,Psi2*180/Pi      !imprime valores no
arquivo .dat para Psi2
10 format(5X,18E18.10)      !formato de saida dos valores nos arquivos .dat gerados
end do
end do
end      !encerra o programa

```