



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**PROPAGAÇÃO NUMÉRICA DA ALTITUDE DE SATÉLITES
ARTIFICIAIS COM QUATÉRNIONS E TORQUE DE PRESSÃO
DE RADIAÇÃO SOLAR**

**RELATÓRIO FINAL DO PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Laís Emy Ishibashi (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
Email: lais_ishibashi@hotmail.com

Dr. Valcir Orlando (CCS/INPE, Orientador)
E-mail: valcir@ccs.inpe.br

Prof^a. Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi (DMA/UNESP, Co-orientadora)
E-mail: cecilia@feg.unesp.br

Julho 2012

Relatório corrigido e aprovado.

Valcir Orlando
Orientador

Maria Cecília F. P. S. Zanardi
Co-orientadora

Laís Emy Ishibashi
Orientada

AGRADECIMENTOS

Ao CONSELHO NACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO - CNPq
pelo apoio financeiro recebido através da Bolsa de Iniciação Científica junto ao
Programa PIBIC do INPE.

RESUMO

Este trabalho, iniciado em agosto de 2011, foi dividido em seis fases com duração de um ano e tem por objetivo verificar a influência do torque de pressão de radiação solar direta (TRS) no movimento rotacional de um satélite artificial, utilizando parametrização por quatérnions para representar a orientação espacial (atitude) do satélite. Um modelo matemático é apresentado para o TRS, considerando que o satélite está sempre iluminado. As equações do movimento são dadas pelas equações de Euler, que relacionam as taxas de variação das componentes da velocidade de rotação do satélite com os torques externos atuantes no veículo, e pelas equações cinemáticas de atitude, que relacionam as taxas de variação das componentes do quatérnion com as componentes da velocidade de rotação. Para a determinação das componentes do torque de radiação solar é suposto um satélite de forma cilíndrica, de modo que a componente deste torque no eixo z do sistema fixo no satélite seja nula, já que o módulo da velocidade de rotação não é afetado por este torque. Aplicações são realizadas para dois satélites de pequeno porte com características similares ao primeiro e segundo satélites brasileiros de coleta de dados ambientais: SCD1 e SCD2. São utilizados dados reais destes satélites, fornecidos pelo Centro de Rastreo e Controle de Satélites do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (CRC/INPE). Duas abordagens são consideradas. A primeira aplica uma atualização diária do processo de propagação de atitude, a partir dos dados reais fornecidos pelo CRC. Nos testes de aplicação foi considerado um intervalo de tempo total de 40 dias. A segunda abordagem, não utiliza nenhum processo de atualização do estado propagado. Em ambas as abordagens, como esperado, os resultados numéricos apontam uma variação pequena nos ângulos de ascensão reta e declinação do eixo de rotação do satélite, devido à diminuta ordem de grandeza do torque de pressão de radiação solar (10^{-9} Nm), no intervalo de simulação considerado. Os resultados das simulações sem a atualização dos dados apontam que os erros são mantidos dentro da precisão requerida pelo CRC para intervalos de até cinco dias consecutivos para o SCD1 e para intervalos ainda maiores para o SCD2. Comparações dos resultados com trabalhos anteriores nos quais foram estudados os efeitos de outros torques externos são apresentadas.

PALAVRAS-CHAVE: torque de radiação solar, satélites estabilizados por rotação, atitude.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
2	DESENVOLVIMENTO.....	15
2.1	Elementos orbitais.....	15
2.2	Representação da atitude.....	15
2.2.1	Matriz de rotação.....	16
2.2.2	Representação da atitude de em termo dos quatérnions.....	18
2.2.3	Relação entre os Sistemas de Coordenadas.....	19
2.3	Equações do Movimento Rotacional.....	20
2.3.1	Equações Dinâmicas.....	20
2.3.2	Equações Cinemáticas em termos dos quatérnions.....	21
2.4	Torque de radiação solar direta.....	21
2.4.1	Pressão de Radiação Solar.....	21
2.4.2	Força de Pressão de Radiação Solar.....	22
2.4.3	Torque de Radiação Solar (TRS) e suas componentes.....	23
2.4.4	Aplicação ao satélite cilíndrico.....	27
3	resultados.....	30
3.1	Abordagem com atualização diária dos dados.....	31
3.1.1	SCD1.....	31
3.1.2	SCD2.....	34
3.1.2.1	Análise em cada intervalo sem atuação do controle de atitude.....	36
3.2	Abordagem sem atualização diária dos dados.....	38
3.2.1	SCD 1.....	39
3.2.1.1	Para os dias: 21/08/1993 – 25/08/1993.....	41
3.2.1.2	Para o intervalo de 19/08/1993 – 22/08/1993.....	44
3.2.2	SCD2.....	47
3.2.2.1	Análise em cada intervalo sem atuação do controle de atitude.....	50
4	CONCLUSÃO.....	53
5	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	54

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Elementos Orbitais.	15
Figura 2 – Geometria da incidência da luz solar sobre o elemento de superfície. (REAL, 2002)	23
Figura 3 – Posicionamento do CM do satélite e do elemento de superfície em relação ao Sol (REAL, 2002).	24
Figura 4 – Disposição dos vetores que unem o satélite, a Terra e o Sol. Adaptado de (REAL, 2002).	24
Figura 5 – Superfícies iluminadas do satélite cilíndrico. Adaptado de (REAL, 2002). .	27
Figura 6 – Coordenadas cilíndricas para a base (S_1) do satélite.(REAL, 2002)	27
Figura 7 – Esquemática lateral iluminada S_2 . (REAL, 2002)	28
Figura 8 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, com atualização diária.	32
Figura 9 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, com atualização diária. ..	32
Figura 10 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD1, com atualização diária.	33
Figura 11 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD1, com atualização diária.	33
Figura 12 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD2, com atualização diária.	35
Figura 13 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD2, com atualização diária. 35	
Figura 14 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD2, com atualização diária.	35
Figura 15 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD2, com atualização diária.	36
Figura 16 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD2, com atualização diária no intervalo: 12/02/2002 – 23/02/2002.	37
Figura 17 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD2, com atualização diária no intervalo: 12/02/2002 – 23/02/2002.	37
Figura 18 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD2, com atualização diária no intervalo: 24/02/2002 – 28/02/2002.	38

Figura 19 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD2, com atualização diária no intervalo: 24/02/2002 – 28/02/2002.....	38
Figura 20 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, sem atualização diária.....	40
Figura 21 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, sem atualização diária..	40
Figura 22 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD1, sem atualização diária.....	40
Figura 23 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD1, sem atualização diária.....	41
Figura 24 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, sem atualização diária para o intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.....	42
Figura 25 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.....	43
Figura 26 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.....	43
Figura 27 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.....	44
Figura 28 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/993 – 22/08/1993.....	45
Figura 29 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/993 – 22/08/1993.....	46
Figura 30 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/1993 – 22/08/1993.....	46
Figura 31 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/1993 – 22/08/1993.....	47
Figura 32 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD2, sem atualização diária.....	48
Figura 33 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD2, sem atualização diária..	49
Figura 34 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD2, sem atualização diária.....	49
Figura 35 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD2, sem atualização diária.....	49
Figura 36 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 12/02/2002 - 23/02/2002.	50

Figura 37 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 12/02/2002 – 23/02/2002.....	51
Figura 38 – Gráfico da diferença entre o α do estimado e do INPE do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 24/02/2002 - 28/02/2002.	51
Figura 39 – Gráfico da diferença entre o δ do estimado e do INPE do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 24/02/2002 – 28/02/2002.....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1, com atualização diária. ...	31
Tabela 2 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD2 com atualização diária.	34
Tabela 3 – Médias e desvios-padrão com atualização diária em cada intervalo sem atuação do controle	36
Tabela 4 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1 sem atualização diária.....	39
Tabela 5 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.....	42
Tabela 6 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/1993 – 22/08/1993.....	45
Tabela 7 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD2, sem atualização diária.....	48
Tabela 8 – Médias e desvios-padrão sem atualização em cada intervalo, sem atuação do controle.....	50

LISTA DE SÍMBOLOS

I_x, I_y e I_z	-	momentos principais de inércia do satélite
\hat{i}, \hat{j} e \hat{k}	-	vetores unitários do sistema Inercial
\hat{i}, \hat{j} e \hat{k}	-	vetores unitários no Sistema Principal ou Sistema Girante
\vec{i}_o, \vec{j}_o e \vec{k}_o	-	vetores unitários do Sistema Orbital
N_x, N_y e N_z	-	componentes dos torques externos atuantes no satélite no sistema do satélite
O	-	centro de massa do Satélite
CM	-	centro de massa
O'	-	centro de massa da Terra
OXYZ	-	Sistema do Satélite
Oxyz	-	Sistema Principal ou Sistema Girante
OZ	-	eixo de maior momento principal de inércia
O'Z	-	eixo de direção ao Pólo Norte Terrestre
O'XYZ	-	Sistema Inercial
XY	-	plano coincidente com o plano do Equador
O'X	-	eixo na direção da intersecção entre o plano do Equador e o da eclíptica
O' $x_o y_o z_o$	-	Sistema Orbital
p, q e r	-	componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite
q_i	-	quatérnion de atitude
\bar{S}	-	fluxo de energia radiante
a_s	-	uma unidade astronômica
S_0	-	constante solar
p	-	Pressão de Radiação Solar
R	-	distância da superfície atingida pelo fluxo ao Sol
c	-	velocidade da luz.
R_T	-	raio equatorial da Terra
\vec{r}	-	vetor posição do centro de massa do satélite ao centro de massa da Terra

γ	-	coeficiente de reflexão total.
β	-	coeficiente de reflexão especular.
\hat{n}	-	vetor unitário da direção normal à superfície.
\hat{u}	-	vetor unitário na direção de incidência do fluxo de radiação solar sobre o elemento de superfície dS .
$d\vec{N}$	-	elemento de Torque de Radiação Solar em torno do centro de massa do satélite (CM)
\vec{F}	-	força de pressão de radiação solar
dS	-	elemento de área do satélite em relação à origem de um sistema de referência, o qual está fixado no satélite.
\vec{R}	-	o vetor de posição do Sol
θ	-	ângulo de incidência entre \hat{u} e \hat{n}
X, Y, Z	-	coordenadas de um vetor no sistema inercial
x, y, z	-	coordenadas de um vetor no sistema de eixos principais
α	-	ascensão reta do eixo de rotação
δ	-	declinação do eixo de rotação
α_s	-	ascensão reta
δ_s	-	declinação do Sol
ϕ	-	ângulo de rotação

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

UNESP - Universidade Estadual Paulista

CRC - Centro de Rastreamento e Controle

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

TRS - Torque de Radiação Solar

SCD1 - Primeiro Satélite de Coleta de Dados Brasileiro

SCD2 - Segundo Satélite de Coleta de Dados Brasileiro

1 INTRODUÇÃO

O projeto “Propagação Numérica da Atitude de Satélites Artificiais com Quatérnions e Torque de Pressão de Radiação Solar” foi dividido em seis fases, com duração total de um ano. Este relatório apresenta as atividades realizadas pelo bolsista no período de Agosto/2011 até Junho/2012, pois esta bolsista solicitou o cancelamento em junho de 2012.

O desenvolvimento do projeto envolveu, inicialmente, um estudo do movimento rotacional e translacional de satélites artificiais, do torque de pressão de radiação solar direta (TRS) e a determinação de suas componentes no sistema de eixos principais. A seguir foi efetuada a adaptação do programa numérico para o cálculo do TRS, a realização de simulações numéricas, análise dos resultados e confecção do relatório final.

O estudo do movimento rotacional e translacional de satélites artificiais consistiu da leitura e análise de bibliografia técnica disponibilizada pelos orientadores, que continham assuntos sobre as leis de Kepler, a lei da gravitação universal de Newton, os elementos orbitais clássicos, matrizes de rotação, ângulos de Euler, quatérnions e equações do movimento rotacional. Em paralelo a estes estudos, houve também a leitura de referências sobre os Satélites de Coleta de Dados SCD1 e SCD2 (KUGA et al., 1999; LOPES et al., 1994; ORLANDO, 1994; ORLANDO et al., 2007).

Na determinação das componentes do Torque de Radiação Solar Direta (TRS), no sistema de eixos principais do satélite, foram utilizadas as matrizes de rotação descritas em termos de quatérnions de atitude. Sobre este assunto, o relatório primeiramente apresenta alguns conceitos sobre o TRS, introduz o modelo matemático para o TRS para um satélite de geometria qualquer e, finalmente, apresenta o desenvolvimento dessas equações aplicadas a um satélite cilíndrico.

Após a adaptação do programa numérico para a inclusão das componentes do TRS nas equações do movimento, foram realizadas simulações numéricas, utilizando os dados dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados – SCD1 e SCD2, fornecidos pelo Centro de Controle de Satélites do INPE (CCS/INPE), através de duas abordagens distintas, para a análise da influência do TRS na atitude desses satélites, usados como exemplos de aplicação. Na primeira abordagem os dados propagados de atitude e órbita foram atualizados a cada 24 horas com os dados fornecidos pelo CRC/INPE. Na segunda abordagem os dados propagados não são atualizados diariamente, permitindo a

especificação do intervalo de tempo em que a teoria utilizada pode ser aplicada na análise da missão do satélite, de modo a manter a precisão desejada na propagação que, tanto no caso do SCD1 quanto no do SCD2 é de $0,5^\circ$ para os ângulos de atitude envolvidos.

Os resultados obtidos nas simulações estão apresentados e discutidos neste relatório.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Elementos orbitais

Os elementos orbitais são seis valores numéricos que permitem definir a órbita de um corpo celeste em torno de outro. São eles: a (semi-eixo maior da órbita), e (excentricidade), I (inclinação da órbita), Ω (longitude do nodo ascendente), ω (argumento do perigeu) e v (anomalia verdadeira). A figura 1 apresenta a visualização dos elementos angulares I , ω , Ω e v .

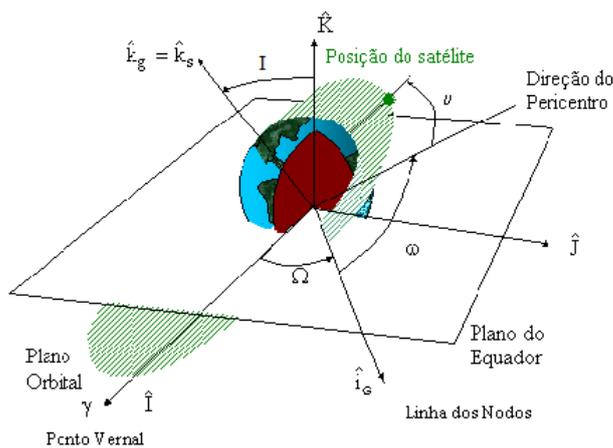


Figura 1 – Elementos Orbitais.

2.2 Representação da atitude

A atitude de um satélite artificial refere-se à maneira como ele está orientado no espaço. Para analisar a orientação do veículo espacial são relacionados dois sistemas de coordenadas com origem (O) coincidente com o centro de massa (CM) do satélite. O primeiro sistema, denominado Sistema Principal ou Sistema Girante (Oxyz), tem seus eixos coincidindo com as direções dos eixos principais de inércia do satélite, sendo seus versores (vetores unitários) representados por \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} . O outro sistema, tido como referência e aqui denominado Sistema do Satélite (OXYZ), tem seus eixos paralelos aos eixos do Sistema Inercial (O'XYZ) e seus versores são \hat{I} , \hat{J} e \hat{K} . O Sistema Inercial, também chamado de Sistema Equatorial, possui a origem no CM da Terra (O'), eixo O'Z em direção ao Pólo Norte Terrestre e o plano XY coincidente com o plano do Equador e com o eixo O'X na direção da intersecção entre o plano do Equador e o da eclíptica. Os sistemas são relacionados utilizando a matriz de atitude entre estes dois sistemas. Os elementos da matriz de rotação podem ser obtidos por diferentes

parametrizações, (MOORE; PISACANE, 1994; SHUSTER, 1993; ZANARDI, 2005), tais como os ângulos de Euler, os quatérnions e as variáveis de Andoyer.

Outro sistema de coordenadas, também utilizado neste projeto, é o Sistema Orbital ($O' x_o y_o z_o$) que possui sua origem no CM da Terra e seu plano de referência é dado pelo plano orbital do satélite, com o eixo x_o na direção do vetor posição em relação à Terra e o eixo z_o perpendicular ao plano orbital, sendo \vec{i}_o , \vec{j}_o e \vec{k}_o os vetores unitários do sistema.

2.2.1 Matriz de rotação

A matriz de rotação (ou matriz de atitude) transforma as coordenadas do Sistema do Satélite nas coordenadas do Sistema Principal e é formada pelas componentes dos vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} no sistema principal.

$$\hat{I} = i_x \hat{i} + i_y \hat{j} + i_z \hat{k} \quad (1)$$

$$\hat{J} = j_x \hat{i} + j_y \hat{j} + j_z \hat{k} \quad (2)$$

$$\hat{K} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k} \quad (3)$$

Sendo, portanto a matriz de atitude, A, representada por:

$$A = \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z \\ j_x & j_y & j_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

Esta matriz se caracteriza por ser uma matriz ortogonal (SHUSTER, 1993; ZANARDI, 1990), com transformação ortogonal preservando o produto escalar, deve-se verificar que:

- A soma dos quadrados dos elementos de uma coluna (ou linha) é igual a 1, porque os vetores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são unitários.

- A soma dos produtos dos elementos de duas colunas (ou linhas) é igual a zero, porque os vetores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são ortogonais.

- O determinante de A é igual a 1.

O teorema de Euler (SHUSTER, 1993) estabelece que alguma rotação finita de um corpo rígido pode ser expressa como uma rotação de um ângulo ϕ em torno de uma direção \hat{n} , a qual não é afetada pela rotação e, portanto, suas componentes são as mesmas nos sistemas de referência envolvidos. A matriz de atitude pode ser

representada em termos do vetor de rotação definido por $\hat{n}\phi$. Essa representação é denominada vetor de rotação ou fórmula de Euler e dada por (WERTZ, 1978; SHUSTER, 1993):

$$A(\hat{n}, \Phi) = \cos \Phi I + (1 - \cos \Phi) \hat{n}(\hat{n})^t + \text{sen} \Phi [[\hat{n}]] \quad (5)$$

Em que: I é uma matriz identidade de ordem 3, e $[[\hat{n}]]$ é a matriz anti-simétrica com as componentes de \hat{n} , sendo:

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

e

$$[[\hat{n}]] = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Assim, é possível obter as componentes da matriz de atitude A associada a uma rotação em um eixo qualquer \hat{n} :

$$A(\hat{n}, \Phi) = \begin{bmatrix} c + n_1^2(1-c) & n_2n_1(1-c) + n_3s & n_3n_1(1-c) - n_2s \\ n_2n_1(1-c) - n_3s & c + n_2^2(1-c) & n_3n_2(1-c) + n_1s \\ n_3n_1(1-c) + n_2s & n_3n_2(1-c) - n_1s & c + n_3^2(1-c) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Em que: $c = \cos \Phi$ e $s = \text{sen} \Phi$.

Se os elementos da matriz de rotação $A(i, j)$ são conhecidos, então, o ângulo de rotação e o eixo de rotação podem ser obtidos pelas seguintes expressões:

$$\cos \Phi = \frac{1}{2}(A(1,1) + A(2,2) + A(3,3) - 1) \quad (9)$$

Após a escolha de Φ , determina-se o eixo de rotação e se:

a) $\text{sen} \Phi \neq 0$

$$\hat{n} = \frac{1}{2\text{sen} \Phi} \begin{bmatrix} A(2,3) - A(3,2) \\ A(3,1) - A(1,3) \\ A(1,2) - A(2,1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

b) $\Phi = 0^\circ$ então \hat{n} é indefinido e não existe significado físico, uma vez que o ângulo de rotação é nulo.

c) $\Phi = 180^\circ$, a matriz de rotação assume a forma:

$$A(\hat{n}, \Phi) = -I + 2\hat{n}(\hat{n})^t \quad (11)$$

tal que os elementos da diagonal da matriz $A(i, j) + I$ são proporcionais às componentes na direção \hat{n} . Neste caso, as componentes de \hat{n} são determinadas por:

$$n_i^2 = (1 + A(i, i)) / 2, i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

2.2.2 Representação da atitude de em termo dos quatérnions

Se ϕ é o ângulo de rotação e $\hat{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^t$ é o vetor unitário ao longo do eixo de rotação, sendo t a transposta da matriz, o quatérnion (q) é uma matriz (4x1) definida por (WERTZ, 1978; PISACANE e MOORE, 1994):

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

onde: \vec{q} representa a parte vetorial do quatérnion e q_4 a parte escalar, sendo:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{n} \text{ e } q_4 = \text{cos}\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (14)$$

Uma das propriedades do quatérnion é o seu módulo unitário, de tal maneira que todos os elementos do quatérnion satisfazem:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (15)$$

A matriz de atitude correspondente a uma rotação ϕ em torno do eixo $\hat{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^t$, em termos do quatérnion de rotação é dada por (SHUSTER, 1993):

$$A = \left(q_4^2 - \left| \vec{q} \right|^2 \right) I + 2 \vec{q} \left(\vec{q} \right)^t - 2q_4 \left[\begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \right] \quad (16)$$

Em que:

$$\left[\begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Logo:

$$A = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_4q_3) & 2(q_1q_3 - q_4q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_4q_3) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_3 + q_4q_2) \\ 2(q_1q_3 + q_4q_2) & 2(q_1q_2 - q_4q_3) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Conhecendo-se os elementos $A(i, j)$ da matriz de atitude A , obtêm-se as componentes do quatérnion (SHUSTER, 1993):

a) Para $q_4 \neq 0$,

$$q_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + A(1,1) + A(2,2) + A(3,3)} \quad (19)$$

$$q_1 = \frac{1}{4q_4} [A(2,3) - A(3,2)] \quad (20)$$

$$q_2 = \frac{1}{4q_4} [A(3,1) - A(1,3)] \quad (21)$$

$$q_3 = \frac{1}{4q_4} [A(1,2) - A(2,1)] \quad (22)$$

b) Para o caso em que $q_4 = 0$, obtêm-se as componentes do quatérnion de outras maneiras (ZANARDI, 2005).

2.2.3 Relação entre os Sistemas de Coordenadas

A relação entre o Sistema do Satélite e o Sistema Principal em termos dos quatérnions já foi estudada na seção anterior e está dada na equação (18)

A matriz de rotação que relaciona o Sistema Inercial e o Sistema Orbital é dada por (PRADO e KUGA, 2001):

$$R = \begin{bmatrix} c(w+\nu)c(\Omega) - s(w+\nu)c(I)s(\Omega) & c(w+\nu)s(\Omega) + s(w+\nu)c(I)c(\Omega) & s(w+\nu)s(I) \\ -s(w+\nu)c(\Omega) - c(w+\nu)c(I)s(\Omega) & -s(w+\nu)s(\Omega) + c(w+\nu)c(I)c(\Omega) & c(w+\nu)s(I) \\ s(I)s(\Omega) & -s(I)c(\Omega) & c(I) \end{bmatrix} \quad (23)$$

onde $c = \text{cosseno}$ e $s = \text{seno}$.

Seja S o Sistema Principal considerado, de vetores unitários $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, que se relaciona com o Sistema Orbital através de uma matriz de rotação \bar{A} , dada por:

$$[S] = \bar{A} [S_{Orbital}] \quad (24)$$

Em que:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Os elementos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ e a_{33} são determinados em função das componentes do quatérnio de atitude (q_1, q_2, q_3, q_4) utilizando a matriz A e dos elementos orbitais angulares (I, w, v, Ω) utilizando a matriz R. Para determinar a matriz \bar{A} , sabemos que o Sistema Inercial se relaciona com o Sistema Orbital através da matriz R e o Sistema Principal se relaciona com sistema do Satélite através da matriz A. Lembrando que o sistema do Satélite possui a mesma orientação do sistema Inercial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Inercial} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Inercial} \end{bmatrix} = R' \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Principal} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Satélite} \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Principal} \end{bmatrix} = AR' \begin{bmatrix} \text{Sistema} \\ \text{Orbital} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ou seja: $\bar{A} = AR'$

Substituindo a matriz A dada por (18) e a matriz R dada por (23), tem-se que::

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A(1,1)R_{11}' + A(1,2)R_{21}' + A(1,3)R_{31}' & A(1,1)R_{12}' + A(1,2)R_{22}' + A(1,3)R_{32}' & A(1,1)R_{13}' + A(1,2)R_{23}' + A(1,3)R_{33}' \\ A(2,1)R_{11}' + A(2,2)R_{21}' + A(2,3)R_{31}' & A(2,1)R_{12}' + A(2,2)R_{22}' + A(2,3)R_{32}' & A(2,1)R_{13}' + A(2,2)R_{23}' + A(2,3)R_{33}' \\ A(3,1)R_{11}' + A(3,2)R_{21}' + A(3,3)R_{31}' & A(3,1)R_{12}' + A(3,2)R_{22}' + A(3,3)R_{32}' & A(3,1)R_{13}' + A(3,2)R_{23}' + A(3,3)R_{33}' \end{bmatrix} \quad (28)$$

2.3 Equações do Movimento Rotacional

2.3.1 Equações Dinâmicas

As equações dinâmicas do movimento rotacional de satélites artificiais descritas no Sistema Principal (Oxyz), são dadas por (WERTZ,1978):

$$\dot{p} = \frac{N_x}{I_x} + \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) qr \quad (29)$$

$$\dot{q} = \frac{N_y}{I_y} + \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) pr \quad (30)$$

$$\dot{r} = \frac{N_z}{I_z} + \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) pq \quad (31)$$

Onde: I_x, I_y e I_z são os momentos principais de inércia do satélite;

p, q e r são as componentes da velocidade de rotação no sistema do satélite;

N_x , N_y e N_z são componentes dos torques externos atuantes no sistema do satélite.

2.3.2 Equações Cinemáticas em termos dos quatérnions

As equações cinemáticas que descrevem a taxa de variação das componentes do quatérnion de atitude, devido à rotação do satélite, são dadas por (MOORE; PISACANE, 1994):

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}[pq_4 - qq_3 + rq_2] \quad (32)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}[qq_4 - rq_1 + pq_3] \quad (33)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}[rq_4 - pq_2 + qq_1] \quad (34)$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{2}[pq_1 + qq_2 + rq_3] \quad (35)$$

Nas equações cinemáticas com os quatérnions, não existe a possibilidade de ocorrer um denominador nulo, o que evita as singularidades, como as que ocorrem nos Ângulos de Euler (ZANARDI, 2005; SHUSTER, 1993).

2.4 Torque de radiação solar direta

A Pressão de Radiação Solar é gerada pelo contínuo fluxo de fótons que se chocam com a superfície do satélite. A taxa da quantidade de movimento de todos os fótons incidentes na superfície do satélite origina a *Força de Radiação Solar*, a qual pode causar consideráveis perturbações em órbitas de veículos espaciais de grande razão área por massa, bem como pode gerar um torque (Torque de Radiação Solar – TRS) (ZANARDI, 1993). Neste trabalho é considerada apenas a influência da radiação solar que incide diretamente no satélite.

2.4.1 Pressão de Radiação Solar

O fluxo de energia radiante (\bar{S}) corresponde à taxa de variação de energia radiante por

unidade de área. Esse fluxo quando incide em um elemento de superfície a uma distância de uma unidade astronômica ($a_s = 1,49597870 \times 10^{11}$ m,) é chamado constante solar (S_0) e equivale a $1,353 \text{ kW/m}^2$, segundo a NASA TN D-604, com erro de $\pm 1,5\%$. O fluxo de energia radiante é dado por:

$$\bar{S} = S_0 \left(\frac{a_s}{R} \right)^2 \quad (36)$$

onde: R é a distância da superfície atingida pelo fluxo ao Sol.

Dessa maneira, pode-se determinar a Pressão de Radiação Solar (p) quando o fluxo de energia radiante for perpendicular à superfície considerada:

$$p = \frac{\bar{S}}{c} \quad (37)$$

em que: c é a velocidade da luz.

A expressão da Pressão de Radiação Solar também pode ser escrita da seguinte forma:

$$p = \frac{\bar{K}}{R^2}, \quad (38)$$

$$\text{onde: } \bar{K} = \frac{S_0 a_s^2}{c} = 1,01 \times 10^{17} \text{ kg m/s.} \quad (39)$$

2.4.2 Força de Pressão de Radiação Solar

Caso seja considerado que uma parcela γ de todos os fótons que chocam com a superfície é refletida difusamente ou especularmente e a outra parte ($1 - \gamma$) é absorvida pela superfície e novamente irradiada isotropicamente na vizinhança do espaço; que $\beta\gamma$ é o total de fótons refletidos especularmente pela superfície; e que os fótons refletidos difusamente obedecem à *Lei de Lambert*, tem-se uma expressão para a Força Elementar de Pressão de Radiação Solar sobre um infinitesimal de área (dS) dada por (ZANARDI, 1993):

$$d\vec{F} = -\frac{\bar{K}}{R^2} \left\{ \left[\frac{2\gamma}{3} (1 - \beta) \cos \theta + 4\beta\gamma \cos^2 \theta \right] \hat{n} + [(1 - \beta\gamma) \cos \theta] \hat{u} \right\} dS \quad (40)$$

sendo: γ o coeficiente de reflexão total;

β o coeficiente de reflexão especular;

\hat{n} o vetor unitário da direção normal à superfície e

\hat{u} o vetor unitário na direção de incidência do fluxo de radiação solar sobre o elemento de superfície dS .

Os vetores unitários estão de tal forma como mostrada na figura 2.

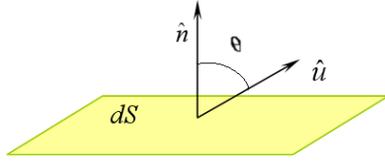


Figura 2 – Geometria da incidência da luz solar sobre o elemento de superfície. (REAL, 2002)

Portanto, a Força de Pressão de Radiação Solar sobre toda a Superfície do satélite é dada pela integral sobre toda a superfície do satélite na qual há a incidência da luz solar (ZANARDI,1993):

$$\vec{F} = -\int_s \frac{\bar{K}}{R^2} \left\{ \left[\frac{2\gamma}{3}(1-\beta)\cos\theta + 4\beta\gamma\cos^2\theta \right] \hat{n} + \left[(1-\beta\gamma)\cos\theta \right] \hat{u} \right\} dS \quad (41)$$

2.4.3 Torque de Radiação Solar (TRS) e suas componentes

O elemento de Torque de Radiação Solar ($d\vec{N}$) em torno do centro de massa do satélite (CM) devido à força de pressão de radiação solar (\vec{F}) é dada por:

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} \quad (42)$$

em que \vec{r} é o vetor posição de um elemento de área dS do satélite em relação à origem (CM) de um sistema de referência, o qual está fixado no satélite.

Então, ao realizar o produto vetorial e efetuar a integral sobre toda a superfície do satélite na qual há a incidência da luz solar, obtém-se o TRS total sobre o Satélite:

$$\vec{N} = -\int_s \frac{\bar{K}}{R^2} \left\{ \left[\frac{2\gamma}{3}(1-\beta)\cos\theta + 4\beta\gamma\cos^2\theta \right] \vec{r} \times \hat{n} + \left[(1-\beta\gamma)\cos\theta \right] \vec{r} \times \hat{u} \right\} dS \quad (43)$$

Entretanto, este torque nem sempre irá existir na trajetória do satélite, pois há partes do seu percurso em que a Terra produz sombra. Para introduzir a descontinuidade do TRS nas equações do movimento, é necessária a utilização da chamada Função Sombra (VILHENA DE MORAES; ZANARDI, 1997) que será desconsiderada neste projeto.

Para a obtenção das componentes do torque no sistema de eixos principais é preciso determinar a direção de incidência da luz (\hat{u}), a direção normal à superfície (\hat{n}),

o vetor posição (\vec{r}) do elemento de área dS com relação ao centro de massa (CM) do satélite, o vetor de posição (\vec{R}) do Sol em relação ao elemento de área dS e o ângulo de incidência (θ) entre \hat{u} e \hat{n} , desenvolvendo-os no Sistema de Eixos Principais do Satélite, em termos do quatérnion de atitude, dos elementos orbitais e do posicionamento do Sol. Para isso algumas considerações são necessárias:

1. Considera-se que o vetor posição \vec{R} é o próprio vetor que une o Sol ao CM do satélite (\vec{R}'), pois as dimensões do satélite são desprezíveis em relação a distância deste ao Sol.

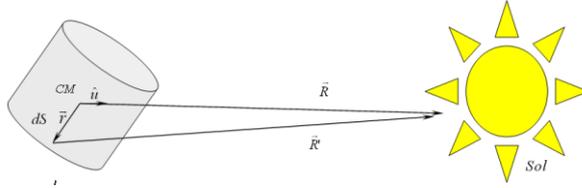


Figura 3 – Posicionamento do CM do satélite e do elemento de superfície em relação ao Sol (REAL, 2002).

2. Os vetores \vec{r} e \hat{n} dependem da forma do satélite. Suas componentes são representadas no Sistema Principal em termos da base do Sistema Principal do satélite: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k} \quad (44)$$

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} \quad (45)$$

3. Por conveniência, o vetor do Sol (\vec{R}) em relação ao centro de massa (CM) do satélite é representado em termos do vetor que une a Terra e o Sol (\vec{R}_s) e o vetor que une o CM do satélite e ao CM da Terra (\vec{r}'), como mostra a Figura 4.

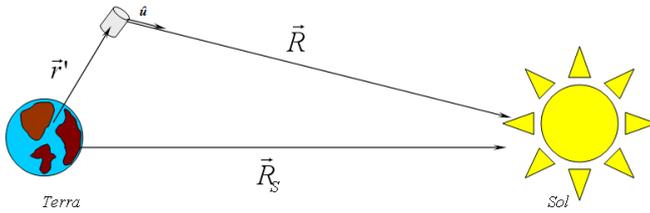


Figura 4 – Disposição dos vetores que unem o satélite, a Terra e o Sol. Adaptado de (REAL, 2002).

A partir da figura 4, obtém-se:

$$\vec{R} = \vec{R}_s - \vec{r} \quad (46)$$

$$R^2 = R_s^2 + r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}_s \quad (47)$$

Nestas equações:

a) Vetor posição do *CM* do satélite em relação ao *CM da Terra* (\vec{r}')

Seja o Sistema Orbital ($Ox_o y_o z_o$) e o Sistema Principal ($Oxyz$), cujos vetores unitários são dados, respectivamente, por \vec{i}_o, \vec{j}_o e \vec{k}_o e \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} . Através da matriz de rotação entre os dois sistemas apresentada na seção 2.2.3, tem-se (Zanardi, 1993):

$$\vec{r}' = -r' \vec{i} = -r' \left(a_{11} \vec{i}_o + a_{21} \vec{j}_o + a_{31} \vec{k}_o \right) \quad (48)$$

sendo $r' = \frac{a(1-e)}{1+e \cos \nu}$, a o semi-eixo maior da órbita do satélite, e a excentricidade, e ν a anomalia verdadeira e a_{11}, a_{21} e a_{31} elementos da matriz \bar{A} apresentada na seção 2.2.3.

b) Vetor posição do Sol em relação ao *CM da Terra* (\vec{R}_s)

Pode-se utilizar a matriz de rotação entre o Sistema Principal e o Sistema Inercial de acordo com a seção 2.2.3, resultando em (Zanardi, 1993):

$$\vec{R}_s = a_s \left(R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \right). \quad (49)$$

onde:

$$R_x = A(1,1) \cos \delta_s \cos \alpha_s + A(1,2) \cos \delta_s \text{sen} \alpha_s + A(1,3) \text{sen} \delta_s \quad (50)$$

$$R_y = A(2,1) \cos \delta_s \cos \alpha_s + A(2,2) \cos \delta_s \text{sen} \alpha_s + A(2,3) \text{sen} \delta_s \quad (51)$$

$$R_z = A(3,1) \cos \delta_s \cos \alpha_s + A(3,2) \cos \delta_s \text{sen} \alpha_s + A(3,3) \text{sen} \delta_s \quad (52)$$

α_s é a ascensão reta e δ_s é a declinação do Sol (sendo estes dois últimos variáveis lineares com o tempo) e A é a matriz de rotação que relaciona o Sistema Principal e o do Satélite em termo dos quatérnions.

Com isso, é possível finalizar a determinação do módulo de \vec{R} :

$$R^2 = a_s^2 + r'^2 + 2a_s r' \left(a_{11} R_x + a_{21} R_y + a_{31} R_z \right) \quad (53)$$

A direção (\hat{u}) e o ângulo (θ) de incidência da luz solar, representados nas Figuras 4 e 2 respectivamente, são dados por:

$$\hat{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} = \frac{1}{R} (a_s R_x + r' a_{11}) \vec{i} + \frac{1}{R} (a_s R_y + r' a_{21}) \vec{j} + \frac{1}{R} (a_s R_z + r' a_{31}) \vec{k} \quad (54)$$

$$\cos \theta = \hat{u} \cdot \hat{n} = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z \quad (55)$$

com a_{11} , a_{21} e a_{31} sendo os elementos da matriz de rotação \bar{A} e u_x , u_y e u_z são dados por:

$$u_x = \frac{1}{R}(a_s R_x + r' a_{11}) \quad (56)$$

$$u_y = \frac{1}{R}(a_s R_y + r' a_{21}) \quad (57)$$

$$u_z = \frac{1}{R}(a_s R_z + r' a_{31}) \quad (58)$$

Como todos os parâmetros já estão definidos no Sistema de Eixos Principais, eles podem ser substituídos na expressão (43):

$$\vec{N} = N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k} \quad (59)$$

$$N_x = -\frac{\bar{K}}{R^2} \left\{ \begin{aligned} & u_x \int_S a_1 b_x dS + u_y \int_S a_1 b_y dS + u_z \int_S a_1 b_z dS + u_x^2 \int_S a_1 b_{xx} dS + u_y^2 \int_S (a_1 b_{yy} - \bar{b} n_y r_z) dS + \\ & + u_z^2 \int_S (a_1 b_{zz} - \bar{b} n_z r_y) dS + u_x u_y \int_S (a_1 b_{xy} - \bar{b} n_x r_z) dS + u_x u_z \int_S (a_1 b_{xz} - \bar{b} n_x r_y) dS \\ & + u_y u_z \int_S [(a_1 b_{yz} - \bar{b} (n_y r_y - n_z r_z))] dS \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$N_y = -\frac{\bar{K}}{R^2} \left\{ \begin{aligned} & u_x \int_S a_2 b_x dS + u_y \int_S a_2 b_y dS + u_z \int_S a_2 b_z dS + u_y^2 \int_S a_2 b_{yy} dS + u_x^2 \int_S (a_2 b_{xx} - \bar{b} n_x r_z) dS \\ & + u_z^2 \int_S (a_2 b_{zz} - \bar{b} n_z r_x) dS + u_x u_y \int_S (a_2 b_{xy} - \bar{b} n_y r_z) dS + u_y u_z \int_S (a_2 b_{yz} - \bar{b} n_y r_x) dS + \\ & + u_x u_z \int_S [(a_2 b_{xz} - \bar{b} (n_z r_z - n_x r_x))] dS \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$N_z = -\frac{\bar{K}}{R^2} \left\{ \begin{aligned} & u_x \int_S a_3 b_x dS + u_y \int_S a_3 b_y dS + u_z \int_S a_3 b_z dS + u_x^2 \int_S (a_3 b_{xx} - \bar{b} n_x r_y) dS + u_z^2 \int_S a_3 b_{zz} dS + \\ & + u_y^2 \int_S (a_3 b_{yy} - \bar{b} n_y r_x) dS + u_x u_z \int_S (a_3 b_{xz} - \bar{b} n_z r_y) dS + u_y u_z \int_S (a_3 b_{yz} - \bar{b} n_z r_x) dS + \\ & + u_x u_y \int_S [(a_3 b_{xy} - \bar{b} (n_x r_x - n_y r_y))] dS \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

sendo que,

$$\bar{a} = \frac{2\gamma}{3}(1-\beta); \bar{b} = (1-\beta\gamma); \bar{c} = 2\beta\gamma \quad (63)$$

$$a_1 = r_y n_z - n_y r_z; a_2 = r_z n_x - n_z r_x; a_3 = r_x n_y - n_x r_y \quad (64)$$

$$b_x = \bar{a} n_x; b_y = \bar{a} n_y; b_z = \bar{a} n_z \quad (65)$$

$$b_{xx} = 2\bar{c} n_x^2; b_{yy} = 2\bar{c} n_y^2; b_{zz} = 2\bar{c} n_z^2 \quad (66)$$

$$b_{xz} = 4\bar{c} n_x n_z; b_{xy} = 4\bar{c} n_x n_y; b_{yz} = 4\bar{c} n_y n_z; \quad (67)$$

\bar{K} , R^2 , u_x , u_y e u_z são definidos nas Equações (39), (47), (56), (57) e (58).

2.4.4 Aplicação ao satélite cilíndrico

Para aplicar as equações do torque devem-se conhecer as características geométricas e orbitais e momentos de inércia do satélite. O modelo aqui apresentado é de um satélite cilíndrico, com raio σ e altura h , com os momentos de inércia em relação aos eixos x e y semelhantes, porém menor em relação ao eixo z , sendo z o eixo longitudinal do cilindro, isto é, perpendicular às bases. Com isso, o CM do satélite coincide com o seu centro geométrico. Não será considerada a Função Sombra, ou seja, admite-se que o satélite está sempre iluminado. As variações na ascensão reta e na declinação do Sol são assumidas lineares no tempo, devido ao tempo de simulação considerado (ZANARDI, 1993).

As superfícies iluminadas do satélite cilíndrico são a base (S_1) e parcialmente a lateral (S_2), como ilustra a Figura 5 (ZANARDI, 1993).

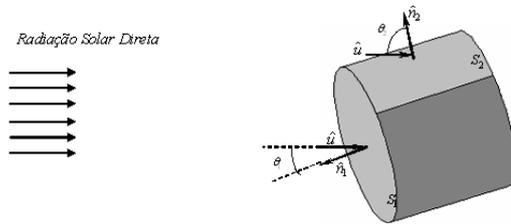


Figura 5 – Superfícies iluminadas do satélite cilíndrico. Adaptado de (REAL, 2002).

Cada superfície será analisada separadamente. A representação de cada uma delas pode ser feita em termo de coordenadas cilíndricas no Sistema de Eixos Principais (Fig. 6).

▪ Superfície S_1 (base)

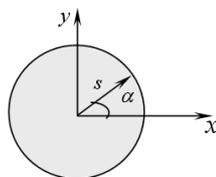


Figura 6 – Coordenadas cilíndricas para a base (S_1) do satélite.(REAL, 2002)

Os intervalos de variação das coordenadas cilíndricas são os seguintes:

$$0 \leq s \leq \sigma \tag{68}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi \tag{69}$$

$$z = \frac{h}{2}$$

(70)

Expressando \hat{n}_1 e \vec{r}_1 em termos de coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\hat{n}_1 = \vec{k}_g \quad (71)$$

$$\vec{r}_1 = s \cos \alpha \vec{i}_g + s \operatorname{sen} \alpha \vec{j}_g + \frac{h}{2} \vec{k}_g \quad (72)$$

Portanto, a expressão do TRS para a base (S_1) fica dada por(ZANARDI, 1993):

$$N_{1x} = -\frac{\bar{K}}{R^2} (1 - \beta_1 \gamma_1) \frac{h}{2} \pi \sigma^2 u_y u_z \quad (73)$$

$$N_{1y} = -\frac{\bar{K}}{R^2} (1 - \beta_1 \gamma_1) \frac{h}{2} \pi \sigma^2 u_x u_z \quad (74)$$

$$N_{1z} = 0 \quad (75)$$

É interessante observar que β_1 e γ_1 podem variar no intervalo de tempo considerado, porém adotou-se valores médios fixos conhecidos para estes coeficientes para que possam ser considerados constantes no processo de integração.

▪ Superfície S_2 (lateral)

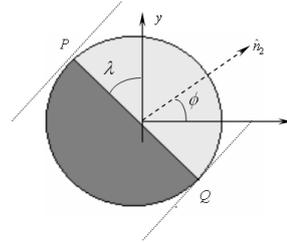


Figura 7 – Esquemática lateral iluminada S_2 . (REAL, 2002)

As retas que tangenciam a lateral do corpo cilíndrico pelos pontos P e Q limitam a região iluminada. Para a determinação destes, considerou-se o plano que contém o eixo principal de inércia Oz e a direção de incidência da luz solar \hat{u} . Os pontos em que este plano tangencia a superfície pertencem às essas retas, sendo P e Q os pontos na base do cilindro. O parâmetro λ e a variação de ϕ são dados por:

$$\tan \lambda = \frac{u_y}{u_x} \quad (77)$$

$$\lambda - 90^\circ \leq \phi \leq \lambda + 90^\circ$$

Expressando \hat{n}_2 e \vec{r}_2 em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\hat{n}_2 = \cos \phi \vec{i}_g + \operatorname{sen} \phi \vec{j}_g \quad (78)$$

$$\vec{r}_2 = \sigma \cdot \cos \phi \vec{i}_g + \sigma \cdot \sin \phi \vec{j}_g + z \vec{k}_g \quad (79)$$

onde $-h/2 \leq z \leq h/2$.

Substituindo os termos das expressões (78) e (79), a expressão do TRS para a superfície lateral (S_2) fica (ZANARDI, 1993):

$$N_{2x} = -\frac{\bar{K}}{R^2} (1 - \beta_2 \gamma_2) \frac{h}{2} \pi \sigma^2 u_y u_z \quad (80)$$

$$N_{2y} = \frac{\bar{K}}{R^2} (1 - \beta_2 \gamma_2) \frac{h}{2} \pi \sigma^2 u_x u_z \quad (81)$$

$$N_{2z} = 0 \quad (82)$$

A mesma observação feita para a superfície S_1 é válida para a superfície S_2 , ou seja, valores médios fixos serão assumidos para β_2 e γ_2 .

Para concluir, deve-se somar as expressões para as superfícies S_1 e S_2 . Então, o Torque Radiação Solar Direta Total (TRS) \vec{N} sobre o satélite cilíndrico é, segundo a equação (59), dado por:

$$\vec{N} = N_x \vec{i}_g + N_y \vec{j}_g + N_z \vec{k}_g \quad (83)$$

ou

$$\vec{N} = \vec{N}_x + \vec{N}_y + \vec{N}_z \quad (84)$$

onde:

$$N_x = -\frac{\bar{K}}{R^4} (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2) \frac{h}{2} \pi \sigma^2 \{ a_s^2 R_y R_z + a_s r' (R_y a_{31} + R_z a_{21}) + r'^2 a_{21} a_{31} \} \quad (85)$$

$$N_y = \frac{\bar{K}}{R^4} (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2) \frac{h}{2} \pi \sigma^2 \{ a_s^2 R_x R_z + a_s r' (R_x a_{31} + R_z a_{11}) + r'^2 a_{11} a_{31} \} \quad (86)$$

$$N_z = 0 \quad (87)$$

sendo que \bar{K} , r' , R_x , R_y , R_z , a_{11} , a_{21} e a_{31} são dados respectivamente pelas equações (39), (48), (50), (51), (52), (66), (69) e (28).

Pode-se observar que a componente no eixo Oz é nula. Isso se dá devido à simetria geométrica e da distribuição de massa uniforme do satélite. Com isso, o satélite oscila em torno deste eixo. Nota-se também que o torque de pressão de radiação solar pode se anular no caso o produto entre os parâmetros de reflexão β_j e γ_j , $j = 1, 2$, forem iguais, sendo então um caso particular de reflexão especular total nas duas superfícies.

Saliente-se também que como a componente do TRSD no eixo Oz é nula, a componente da velocidade de rotação neste eixo não é influenciada pelo TRS, conforme indica a equação (31).

3 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos nas simulações numéricas para as duas abordagens realizadas para a integração numérica das equações do movimento rotacional, equações (29) – (35), com a inclusão das componentes do TRS, dadas pelas equações (85) – (87).

Foram utilizados os dados dos satélites SCD1 (para um período de 14 dias) e SCD2 (para um período de 17 dias) fornecidos pelo CRC/INPE (MOTTA,2011). Assim os dados iniciais são fornecidos em termos da ascensão reta e declinação do eixo de rotação e da magnitude da velocidade de rotação, sendo então obtidos os quatérnions de atitude (ZANARDI et al., 2011). A principal diferença entre estes dois satélites é que o SCD2 possui um sistema de controle da intensidade de sua velocidade de rotação, ao contrário do SCD1. Sempre que a velocidade de rotação do satélite cai para 32 rpm, o sistema de controle atua no sentido de elevar a velocidade a 36 rpm. Ambos os satélites, porém, possuem um sistema controle de apontamento do eixo de rotação, cuja finalidade é permitir a reorientação deste eixo, a partir de manobras executadas de solo, por telecomandos, de modo a evitar orientações específicas que podem danificar o satélite, devido à efeitos térmicos. Assim, nas simulações é necessário reiniciar o processo durante os períodos em que manobras foram executadas com os satélites reais, uma vez que as equações do movimento aqui utilizadas não incluem um torque de controle.

A integração numérica é realizada com as equações de Euler e as equações cinemáticas em termos dos quatérnions. Para fins de comparação com os dados reais dos satélites é feita a conversão de quatérnions para ascensão reta e declinação do eixo de rotação e da magnitude da velocidade de rotação (ZANARDI et al., 2011).

O método numérico de integração utilizado foi o Runge-Kutta de 8ª ordem na linguagem de programação FORTRAN.

Em todas as simulações foi observado que a velocidade de rotação não se alterava, o que se justifica já que a componente do TRS ser nula neste eixo (Eq. 87)..

Conforme já mencionado anteriormente, duas abordagens são realizadas, de modo a determinar um intervalo válido para a teoria desenvolvida. Na primeira abordagem os dados propagados de atitude e órbita são atualizados a cada 24 horas

(abordagem com atualização diária dos dados) a partir dos dados reais fornecidos pelo CRC/INPE. Na segunda abordagem os dados de atitude e órbita não são atualizados diariamente, expandindo o intervalo de aplicação da teoria para alguns dias. Os resultados foram analisados de acordo com a precisão do INPE de $\pm 0,5^\circ$.

3.1 Abordagem com atualização diária dos dados

A abordagem tratada nesta seção aplica uma atualização diária do processo de propagação de atitude a partir dos dados reais fornecidos pelo CRC/INPE. As estimativas resultantes da simulação numérica serão apresentadas, assim como a diferença entre a estimativa e o dado fornecido.

3.1.1 SCD1

Esta seção tratará dos dados do Primeiro Satélite de Coleta de Dados SCD1, para o intervalo de 14 dias entre 17/08/1993 e 31/08/1993. Na tabela 1, a primeira coluna fornece os dias em que a simulação foi feita. A segunda e a terceira colunas apresentam os dados fornecidos pelo CRC/INPE. A quarta e a quinta colunas, por suas vezes, mostra os resultados obtidos na simulação numérica. As duas últimas colunas apresentam a diferença entre os valores simulados e os reais para a ascensão reta e declinação, ou seja, a diferença entre a quarta coluna e a segunda e entre a quinta e a terceira, respectivamente. Esta tabela também apresenta as médias e os desvios-padrão das diferenças no intervalo.

Tabela 1 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1, com atualização diária.

Dia	α_{INPE} ($^\circ$)	δ_{INPE} ($^\circ$)	Ascensão Reta ($^\circ$)	Declinação ($^\circ$)	Ascensão $\Delta\alpha$ ($^\circ$)	Declinação $\Delta\delta$ ($^\circ$)
17/08/1993	280,09	81,10	280,09	81,10	0	0
18/08/1993	281,01	80,82	280,08989	81,09998	-0,92011	0,27998
19/08/1993	281,74	80,53	281,0099	80,819982	-0,7301	0,289982
20/08/1993	282,24	80,23	281,73991	80,52998	-0,50009	0,29998
21/08/1993	282,57	79,93	282,239924	80,22998	-0,33008	0,29998
22/08/1993	282,70	79,64	282,569934	79,929986	-0,13007	0,289986

23/08/1993	282,67	79,35	282,69994	79,639987	0,02994	0,289987
24/08/1993	283,50	79,22	282,669952	79,349988	-0,83005	0,129987
25/08/1993	283,01	78,95	283,499958	79,219989	0,489958	0,269989
26/08/1993	282,43	78,70	283,009965	78,94999	0,579965	0,24999
27/08/1993	281,76	78,48	282,42997	78,69999	0,66997	0,21999
28/08/1993	281,01	78,27	281,759975	78,47999	0,749975	0,20999
29/08/1993	280,18	78,08	281,00998	78,26999	0,82998	0,18999
30/08/1993	279,29	77,91	280,17998	78,07999	0,88998	0,16999
31/08/1993	278,34	77,78	279,289985	77,90999	0,949985	0,12999
MÉDIA					0,11661748	0,221320693
DESVIO					0,66615263	0,085591533

As figuras 8 e 9 apresentam os dados da tabela 1, comparando, respectivamente, a ascensão reta e a declinação reais com as estimadas pela simulação numérica.

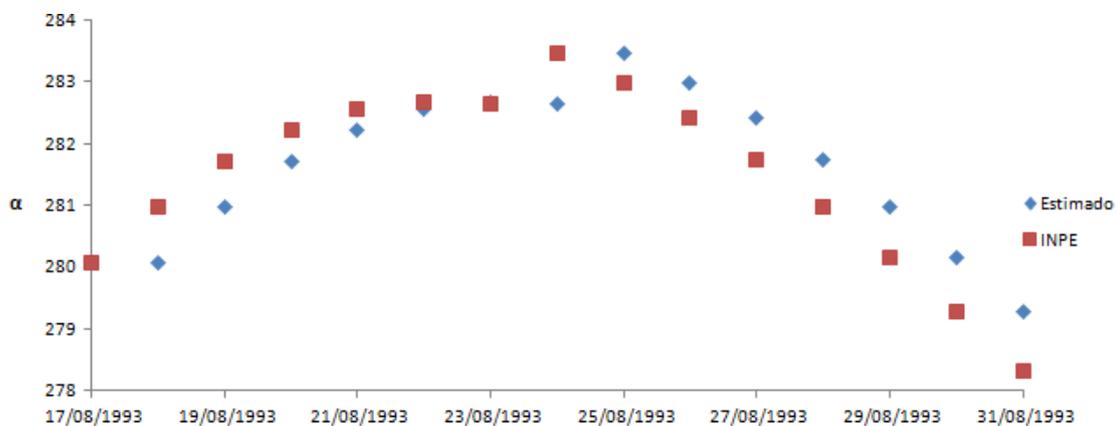


Figura 8 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, com atualização diária.

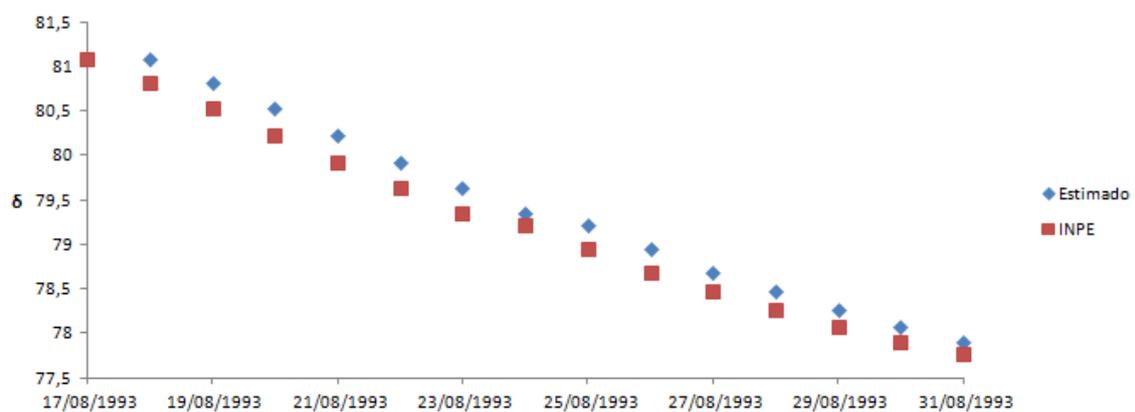


Figura 9 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, com atualização diária.

As figuras 10 e 11 ilustram, respectivamente, as diferenças entre a ascensão reta e declinação estimadas e reais da tabela 1, sendo também indicado o valor médio (linha em preto) e o desvio-padrão (linha em vermelho).

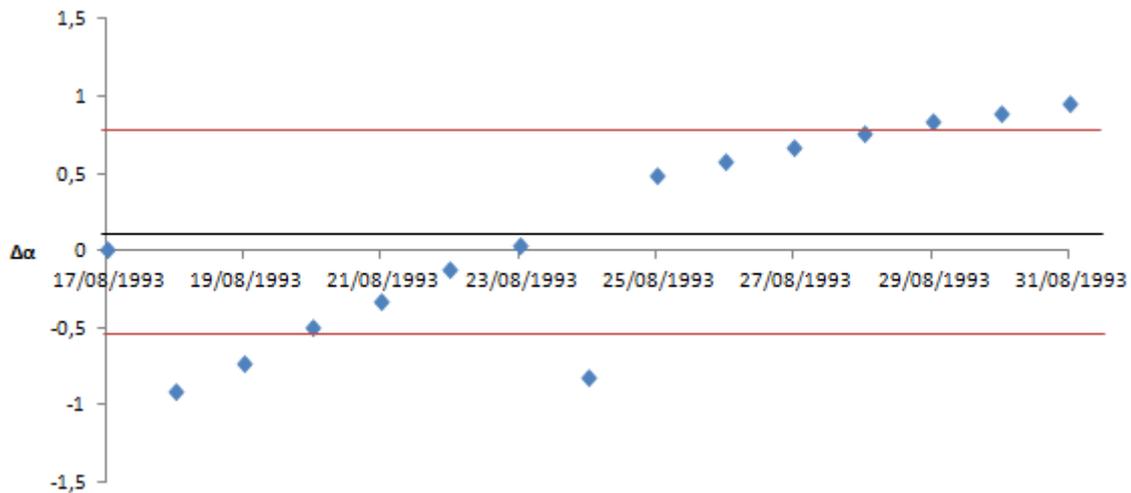


Figura 10 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD1, com atualização diária.

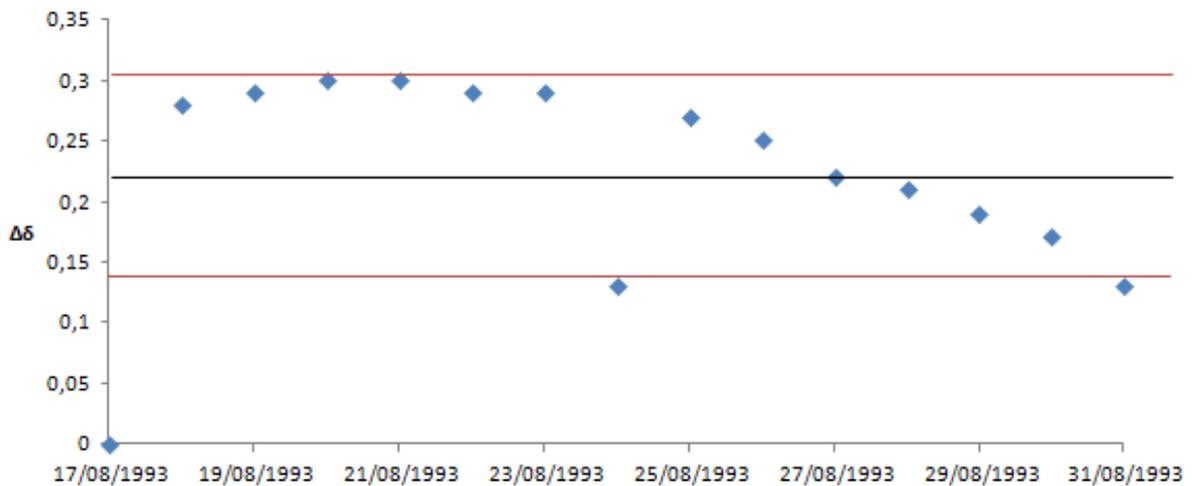


Figura 11 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD1, com atualização diária.

Pelos resultados obtidos verifica-se que a média (μ) das diferenças se encontram dentro da precisão do INPE, que é de $0,5^\circ$, e pelos desvios-padrão (σ) obtidos, a maioria das diferenças para ascensão reta e declinação permanece dentro da faixa de $\mu \pm \sigma$.

3.1.2 SCD2

Esta seção tratará dos dados do Satélite de Coleta de Dados SCD2, para um intervalo de 17 dias entre 12/02/2002 e 28/02/2002. Na tabela 2, a primeira coluna fornece os dias em que a simulação foi feita, a segunda e a terceira colunas apresentam os dados fornecidos pelo CRC/INPE e a quarta e quinta colunas mostram os resultados da simulação numérica. As duas últimas colunas apresentam a diferença entre os valores simulados e os reais para a ascensão reta e declinação, ou seja, a diferença entre a quarta e a segunda coluna e entre a quinta e terceira coluna, respectivamente. Os dias que foram marcados em amarelo representam os dias de controle do satélite, tendo sido o processo reiniciado no dia 24/02/2002.

Tabela 2 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD2 com atualização diária.

Dia	α_{INPE} (°)	δ_{INPE} (°)	Ascensão Reta (°)	Declinação (°)	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)
12/02/2002	278,71	63,47	278,71	63,47	0	0
13/02/2002	278,73	63,5146	278,7100731	63,47003	-0,01993	-0,04457
14/02/2002	278,74	63,4636	278,7300718	63,51463	-0,00993	0,05103
15/02/2002	278,74	63,409	278,7400711	63,46363	7,11E-05	0,054631
16/02/2002	278,72	63,357	278,7400701	63,40903	0,02007	0,052031
17/02/2002	278,68	63,316	278,7200704	63,35703	0,04007	0,041033
18/02/2002	278,63	63,2964	278,6800679	63,31603	0,050068	0,019632
19/02/2002	278,57	63,2926	278,6300664	63,29643	0,060066	0,003833
20/02/2002	278,5	63,3014	278,5700649	63,29263	0,070065	-0,00877
21/02/2002	278,42	63,317	278,5000629	63,30143	0,080063	-0,01557
22/02/2002	278,33	63,3421	278,420061	63,31703	0,090061	-0,02507
23/02/2002	278,23	63,359	278,3300591	63,34213	0,100059	-0,01687
24/02/2002	276,6	61,22	276,6	61,22	0	0
25/02/2002	276,42	61,1443	276,6000544	61,22004	0,180054	0,075738
26/02/2002	276,2	60,9304	276,4200517	61,14434	0,220052	0,213937
27/02/2002	275,94	60,7028	276,2000496	60,93044	0,26005	0,227637
28/02/2002	275,64	60,4678	275,940047	60,70284	0,300047	0,235037
				MÉDIA	0,08476126	0,050806
				DESVIO	0,0982411	0,08954172

As figuras 12 e 13 representam os dados da tabela 2, comparando, respectivamente, a ascensão reta e a declinação reais com as estimadas pela simulação numérica.

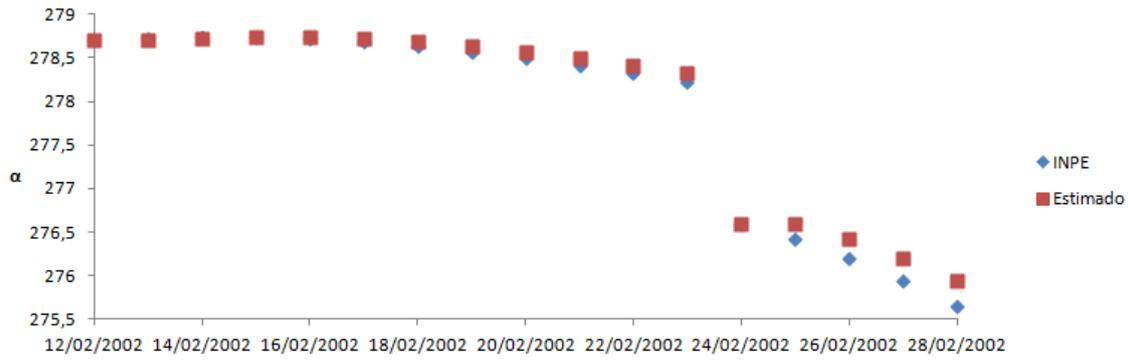


Figura 12 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD2, com atualização diária.

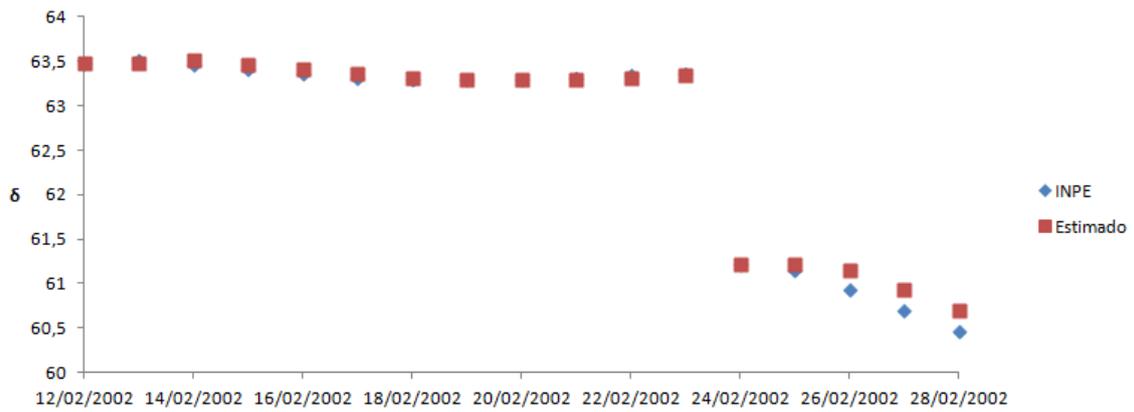


Figura 13 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD2, com atualização diária.

As figuras 14 e 15 mostram, respectivamente, as diferenças entre a ascensão reta e declinação estimadas e reais da tabela 2, sendo também indicado o valor médio (linha em preto) e o desvio-padrão (linha em vermelho).

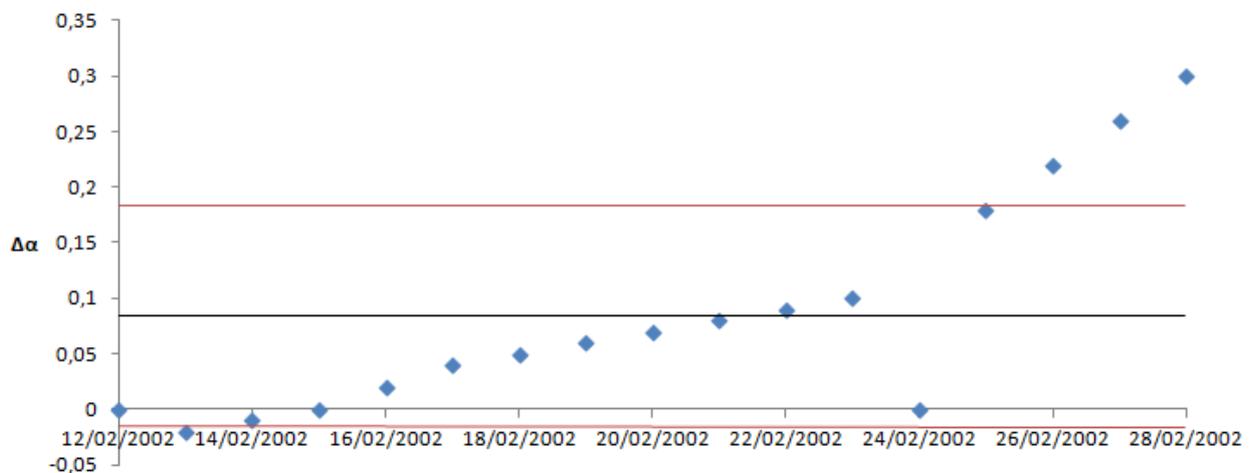


Figura 14 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD2, com atualização diária.

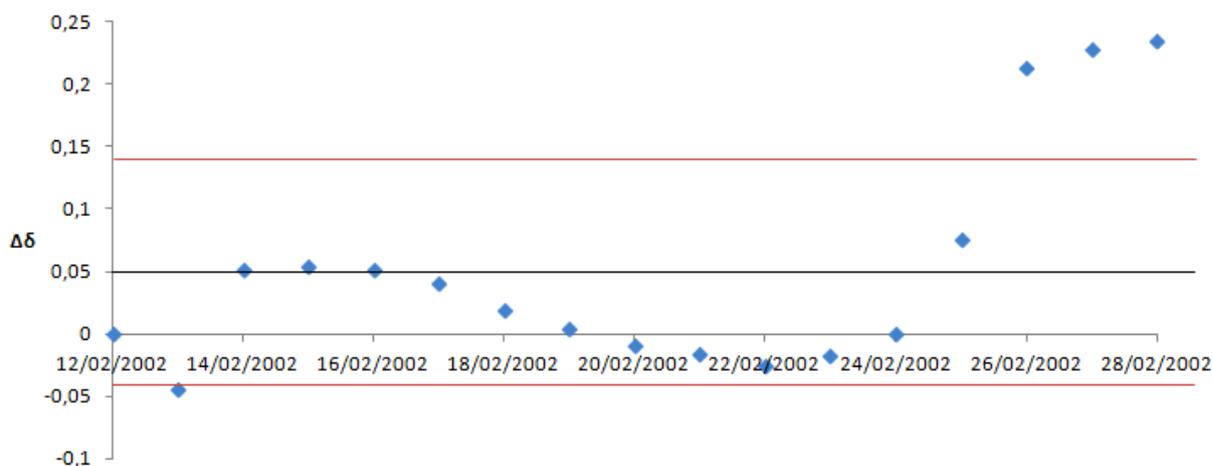


Figura 15 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD2, com atualização diária.

Pelos resultados obtidos para o SCD2 verifica-se que as médias (μ) das diferenças se encontram dentro da precisão do INPE, e pelos desvios-padrão (σ) obtidos, a maioria das diferenças para ascensão reta e declinação permanece dentro da faixa de $\mu \pm \sigma$. Os três últimos dias estão fora da faixa de $\mu \pm \sigma$, sendo que no dia 01/03/2002 houve atuação do controle de atitude (MOTTA,2011).

3.1.2.1 Análise em cada intervalo sem atuação do controle de atitude

Nesta seção são avaliadas as diferenças entre a ascensão reta (Figuras 16 e 18) e declinação (Figuras 17 e 19) em cada intervalo em que não houve atuação do controle de atitude. Dessa forma, como o controle ocorreu no dia 24/02/2002, existem dois intervalos: 12/02/2002 a 23/02/2002 e 24/02/2002 a 28/02/2002, em que não ocorreram manobras, cujas médias e desvios-padrão para ascensão reta e declinação estão assinalados na tabela 3 e nas figuras 16 e 17, para o primeiro intervalo, e 18 e 19, para o segundo intervalo.

Tabela 3 – Médias e desvios-padrão com atualização diária em cada intervalo sem atuação do controle

	12/02/2002 – 23/02/2002		24/02/2002 – 28/02/2002	
	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)
MÉDIA	0,040062	0,009279	0,192041	0,15047
DESVIO	0,041343	0,033797	0,116295	0,10649

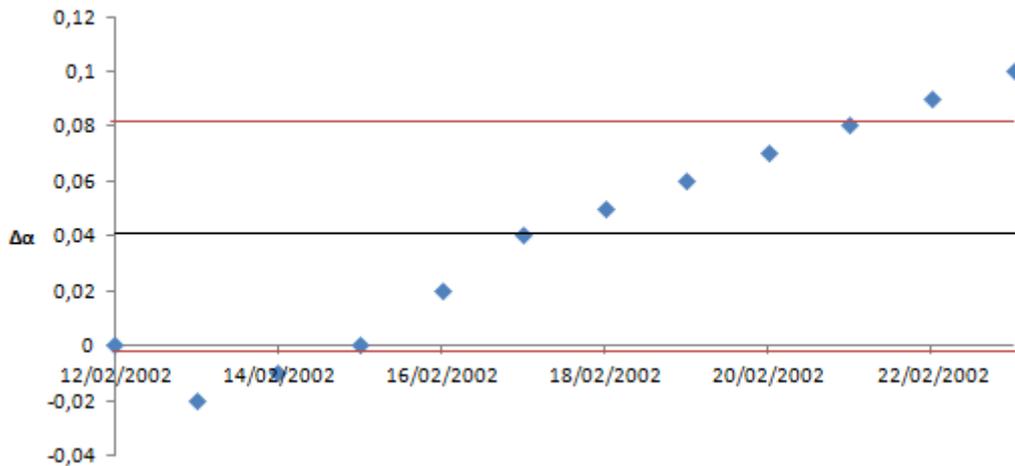


Figura 16 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD2, com atualização diária no intervalo: 12/02/2002 – 23/02/2002.

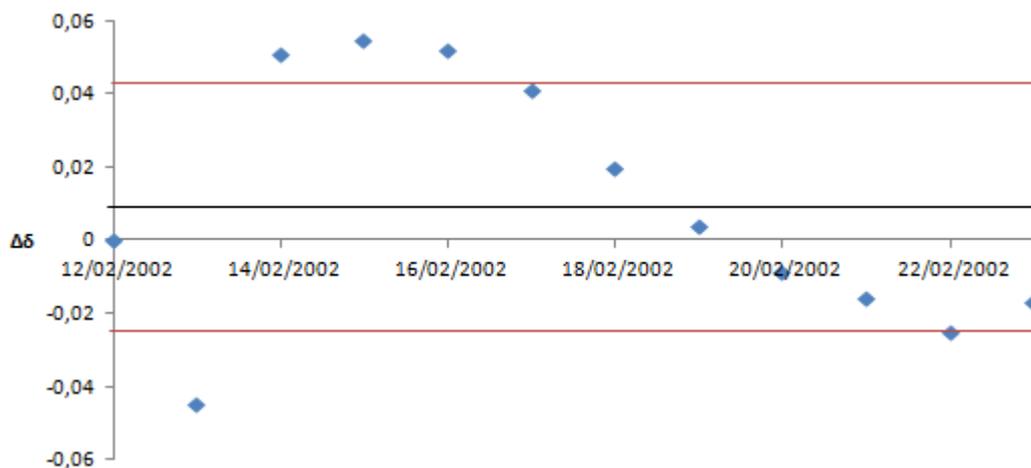


Figura 17 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD2, com atualização diária no intervalo: 12/02/2002 – 23/02/2002.

Para este primeiro intervalo (12/02/2002 – 23/02/2002) sem atuação do controle observa-se que a média das diferenças é mais adequada para os valores assumidos pela ascensão reta e declinação, permanecendo dentro da precisão do INPE. Para os últimos dias do intervalo as diferenças entre a ascensão reta estimada e real aumentaram, tendo sido, na realidade, necessária a atuação do controle no dia 24/02/2002.

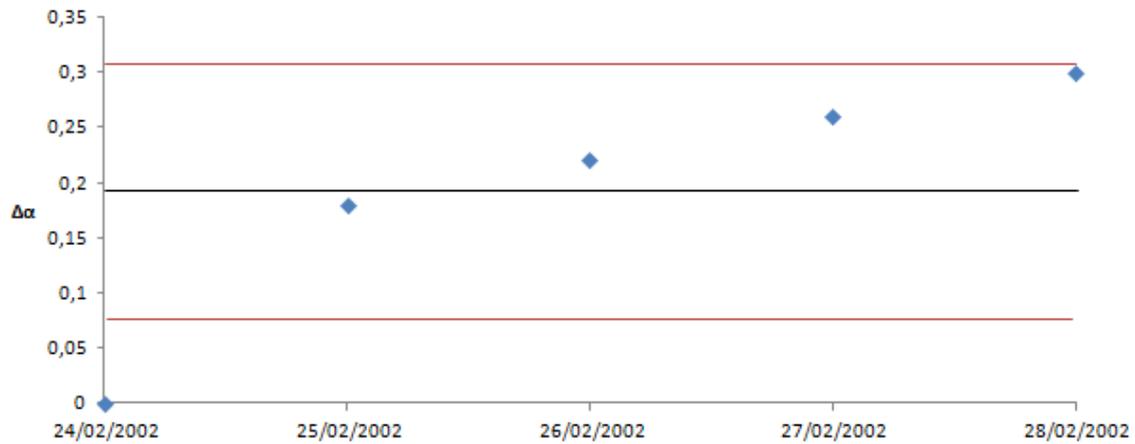


Figura 18 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD2, com atualização diária no intervalo: 24/02/2002 – 28/02/2002.

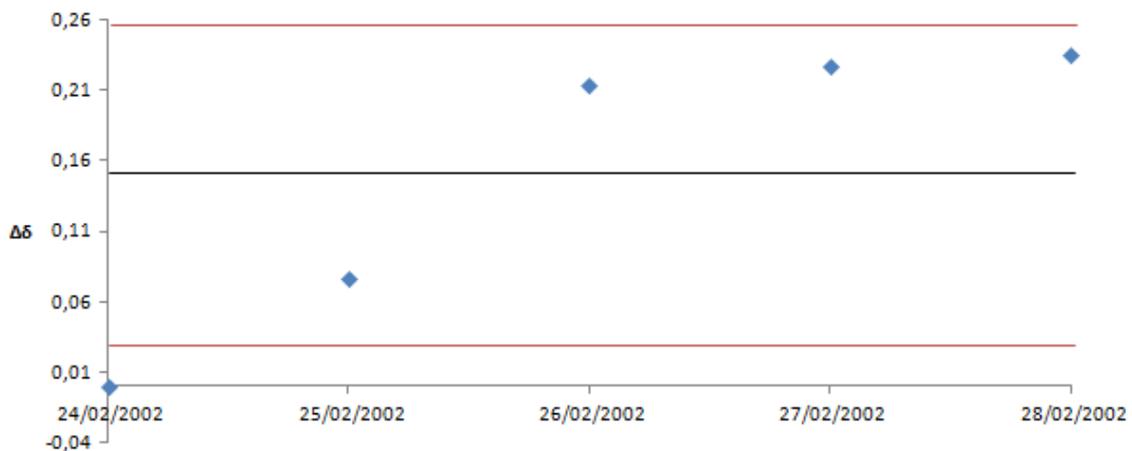


Figura 19 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD2, com atualização diária no intervalo: 24/02/2002 – 28/02/2002.

Para o segundo intervalo (24/02/2002 – 28/02/2002) sem atuação do controle, também se observa que a média das diferenças é maior, mas adequada para os valores assumidos pela ascensão reta e declinação, permanecendo ainda dentro da precisão do INPE. No entanto para todo o intervalo, as diferenças entre a ascensão reta estimada e real aumentaram, tendo sido, na realidade, necessária a atuação do controle no dia 01/03/2002.

3.2 Abordagem sem atualização diária dos dados

A abordagem tratada nesta seção aplica a simulação sem a atualização diária do processo de propagação de atitude a partir dos dados reais fornecidos pelo CRC/INPE. As estimativas resultantes da simulação numérica serão apresentadas, assim como a diferença entre as estimativas e os dados reais correspondentes.

3.2.1 SCD 1

Esta seção tratamos dados do SCD1, para o intervalo de 14 dias entre 17/08/1993 e 31/08/1993. Na tabela 4, a primeira coluna fornece os dias em que a simulação foi feita, a segunda e a terceira coluna apresentam os dados fornecidos pelo CRC/INPE e a quarta e quinta coluna os resultados da simulação numérica. As duas últimas colunas apresentam a diferença entre os valores simulados e os reais para a ascensão reta e declinação, ou seja, a diferença entre a quarta e segunda colunas e entre a quinta e terceira colunas, respectivamente. Nesta tabela também são apresentadas as médias e os desvios-padrão das diferenças no intervalo.

Tabela 4 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1 sem atualização diária.

Dia	α_{INPE} (°)	δ_{INPE} (°)	Ascensão Reta (°)	Declinação (°)	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)
17/08/1993	280,09	81,1	280,09	81,1	0	0
18/08/1993	281,01	80,82	280,08989	81,09998	-0,92011	0,27998
19/08/1993	281,74	80,53	280,0898	81,0999614	-1,6502	0,569961
20/08/1993	282,24	80,23	281,73991	80,52998	-0,50009	0,29998
21/08/1993	282,57	79,93	281,73982	80,5299666	-0,83018	0,599967
22/08/1993	282,7	79,64	282,56993	79,9299856	-0,13007	0,289986
23/08/1993	282,67	79,35	282,56986	79,9299712	-0,10014	0,579971
24/08/1993	283,5	79,22	282,66995	79,3499875	-0,83005	0,129987
25/08/1993	283,01	78,95	282,66989	79,3499751	-0,34011	0,399975
26/08/1993	282,43	78,7	283,00996	78,94999	0,579965	0,24999
27/08/1993	281,76	78,48	283,00992	78,9499788	1,249919	0,469979
28/08/1993	281,01	78,27	281,75998	78,47999	0,749975	0,20999
29/08/1993	280,18	78,08	281,75994	78,4799809	1,57994	0,399981
30/08/1993	279,29	77,91	280,17998	78,07999	0,88998	0,16999
31/08/1993	278,34	77,78	280,17996	78,0799825	1,839955	0,299982
MÉDIA					0,105919	0,329981
DESVIO					1,010912	0,173936

As figuras 20 e 21 apresentam, graficamente, os dados da tabela 4, comparando, respectivamente, a ascensão reta e declinação real com a estimada pela simulação numérica.

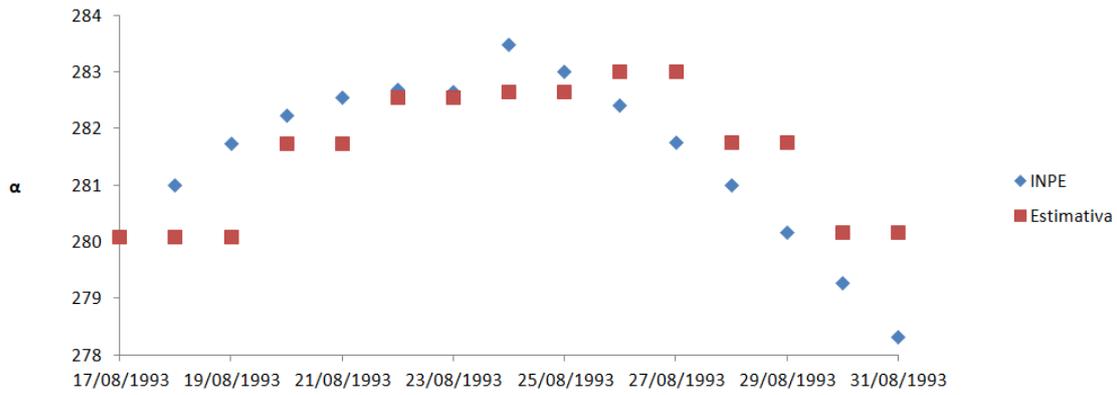


Figura 20 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, sem atualização diária.

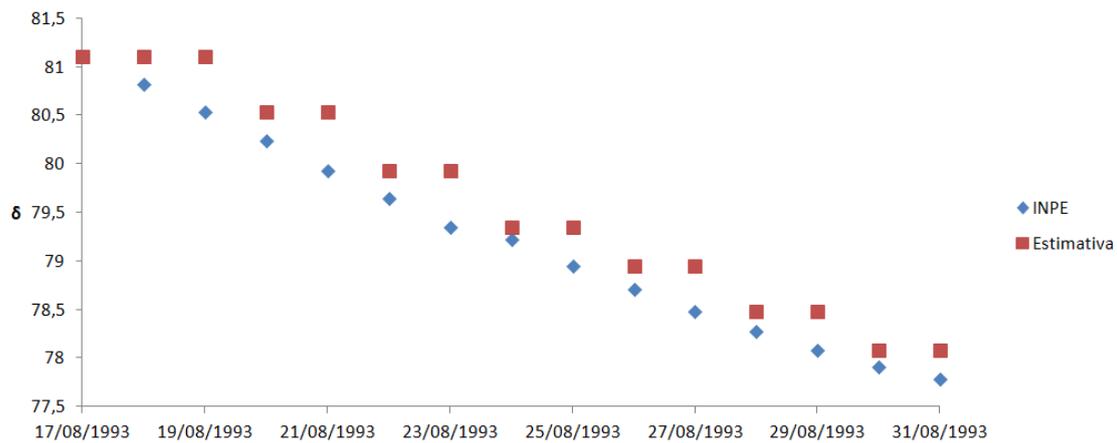


Figura 21 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, sem atualização diária.

As figuras 22 e 23 mostram, respectivamente, as diferenças entre a ascensão reta e declinação estimada e real da tabela 4, sendo também indicado o valor médio (linha em preto) e o desvio-padrão (linha em vermelho).

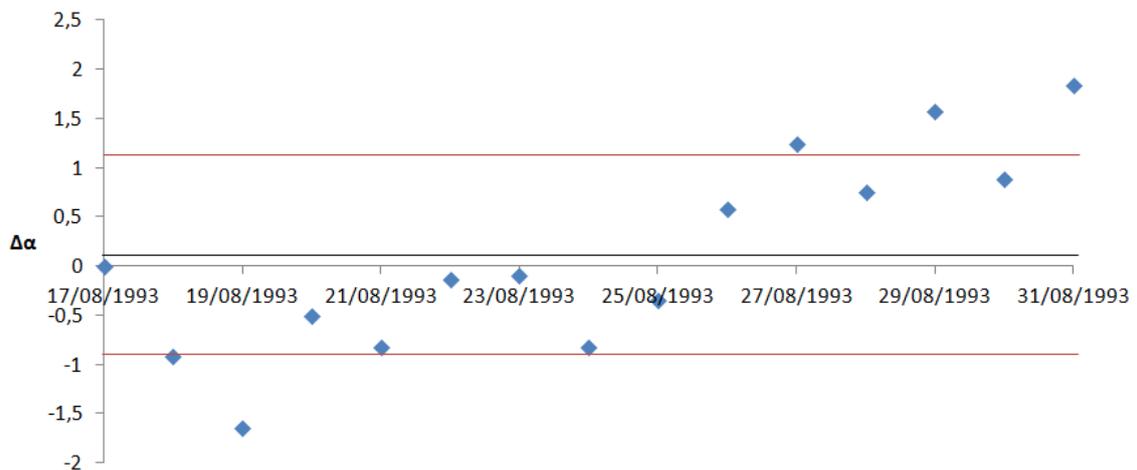


Figura 22 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD1, sem atualização diária.

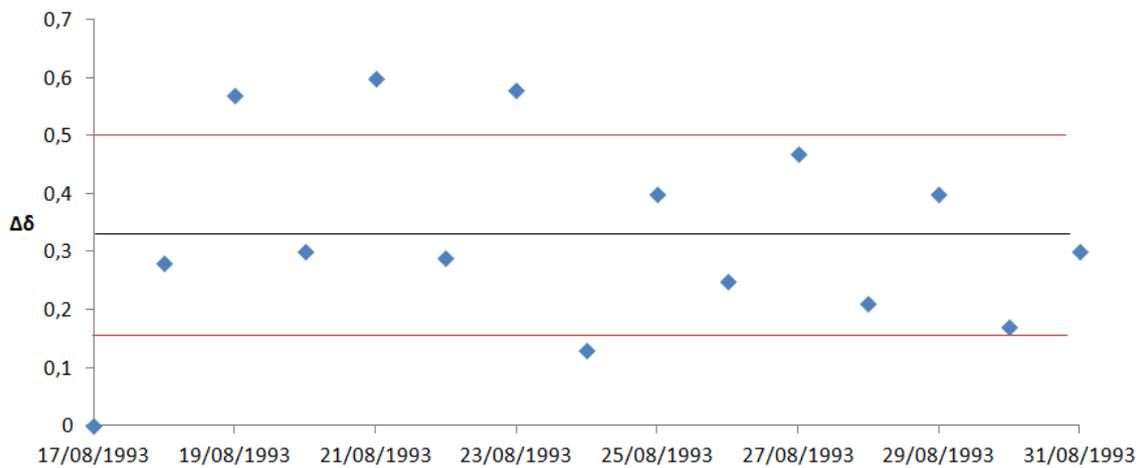


Figura 23 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD1, sem atualização diária.

Observa-se que apesar das médias das diferenças no intervalo estarem dentro da precisão do INPE, o desvio padrão para a ascensão reta foi muito alto, comprometendo os resultados. Assim, foram analisados intervalos de tempo em que os resultados permaneceriam mais adequados sem a atualização diária dos dados.

3.2.1.1 Para os dias: 21/08/1993 – 25/08/1993

Pelas figuras 20 e 21 pode-se observar um intervalo com diferenças menores para a ascensão reta e declinação.

A tabela 5 contém os resultados do dia 21 ao dia 25 cujos dados não foram atualizados diariamente. A primeira coluna fornece os dias em que a simulação foi feita, a segunda e a terceira coluna apresentam os dados reais fornecidos pelo CRC/INPE e a quarta e quinta coluna os resultados da simulação numérica. As duas últimas colunas apresentam a diferença entre os valores simulados e os reais para a ascensão reta e declinação, ou seja, a diferença entre a quarta e segunda colunas e entre a quinta e terceira colunas, respectivamente. Esta tabela também apresenta as médias e os desvios-padrão das diferenças no intervalo.

Tabela 5 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.

Dia	α_{INPE} ($^{\circ}$)	δ_{INPE} ($^{\circ}$)	Ascensão Reta ($^{\circ}$)	Declinação ($^{\circ}$)	Ascensão $\Delta\alpha$ ($^{\circ}$)	Declinação $\Delta\delta$ ($^{\circ}$)
21/08/1993	282,57	79,93	282,57	79,93	0	0
22/08/1993	282,7	79,64	282,5699	79,92999	-0,1301	0,28999
23/08/1993	282,67	79,35	282,56849	79,92971	-0,1015	0,57971
24/08/1993	283,5	79,22	282,56774	79,929568	-0,9323	0,70957
25/08/1993	283,01	78,95	282,56698	79,929425	-0,443	0,97942
MÉDIA					-0,3214	0,51174
DESVIO					0,379541	0,378661

As figuras 24 e 25 representam os dados da tabela 5, comparando, respectivamente, a ascensão reta e declinação real e a estimada pela simulação numérica.

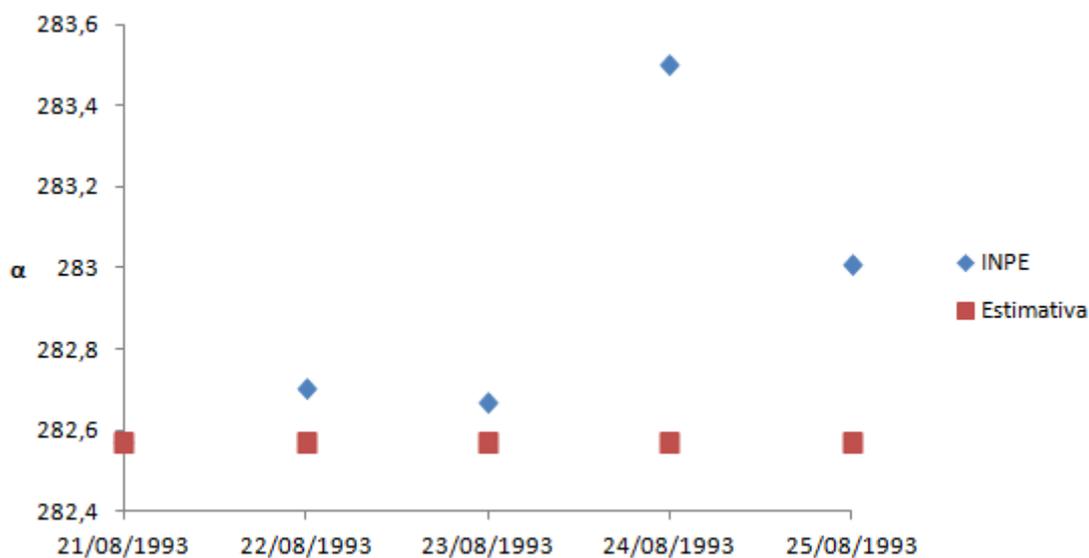


Figura 24 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, sem atualização diária para o intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.

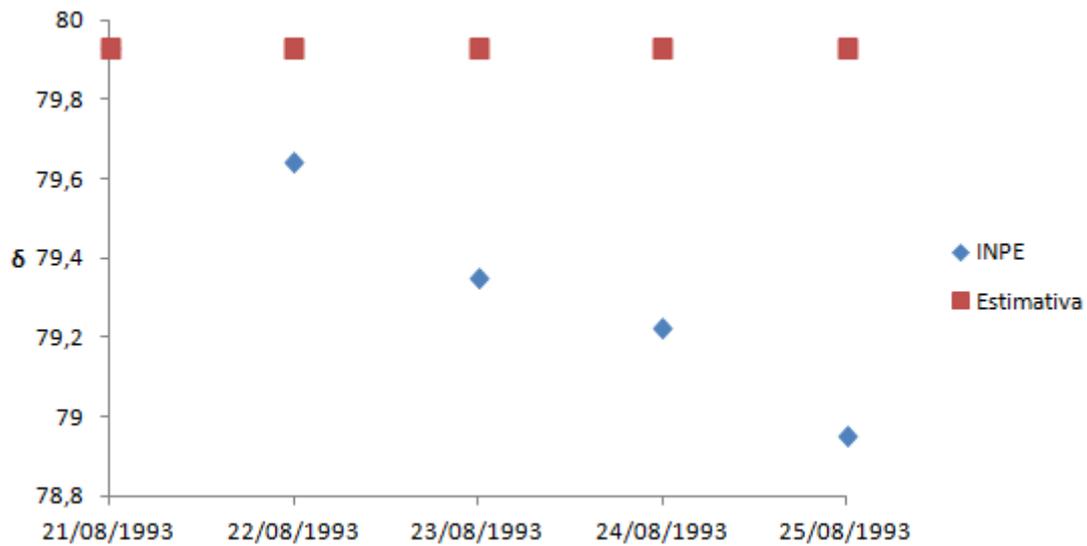


Figura 25 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.

As figuras 26 e 27 mostram, respectivamente, as diferenças entre a ascensão reta e declinação estimada e real da tabela 5, sendo também indicado o valor médio (linha em preto) e o desvio-padrão (linha em vermelho).

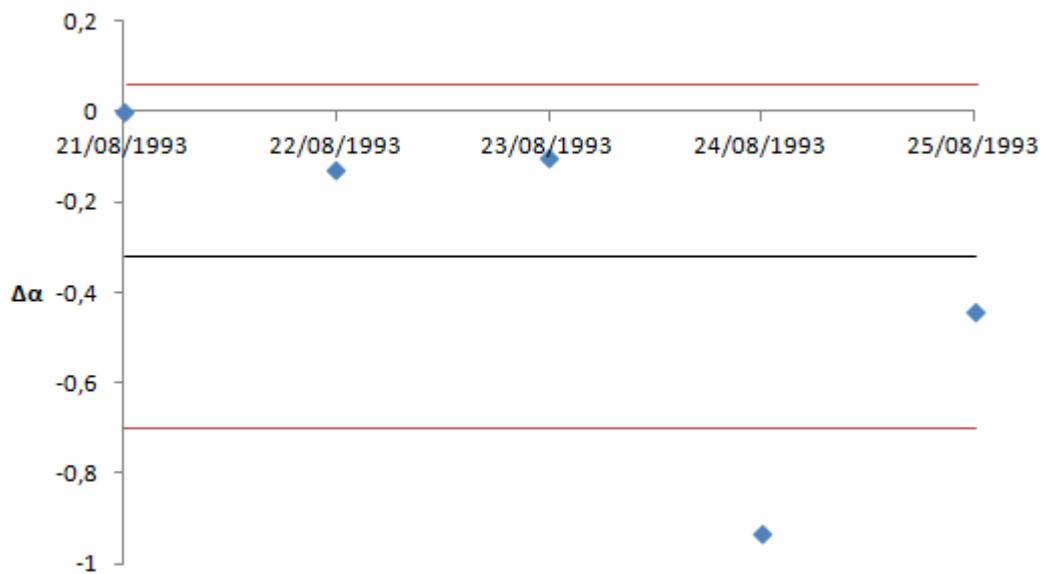


Figura 26 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.

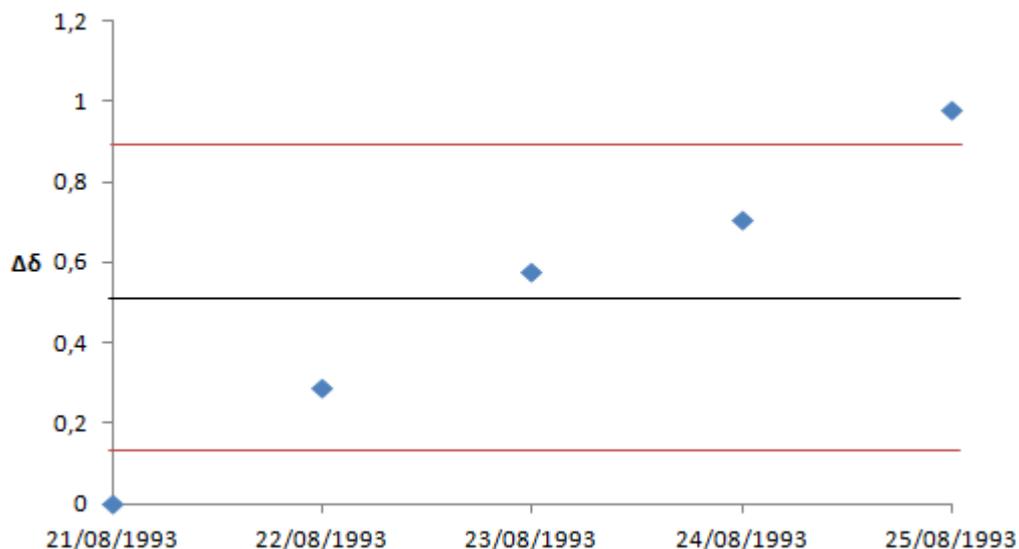


Figura 27 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 21/08/1993 – 25/08/1993.

Para este intervalo observa-se que tanto a média quanto o desvio-padrão da ascensão reta encontram-se dentro da precisão do INPE, enquanto que, para a declinação, a média é um pouco superior a precisão. De um modo geral os resultados mostram-se adequados, validando a teoria para um intervalo de 5 dias.

3.2.1.2 Para o intervalo de 19/08/1993 – 22/08/1993

Pelas figuras 8 e 9 observa-se também que os resultados com atualização de dados apresentam um bom comportamento entre 19/08/1993 e 22/08/1993. Assim foi analisada a abordagem sem atualização para este intervalo.

A tabela 6 contém os resultados para o intervalo do dia 19 a 22 cujos dados não foram atualizados diariamente. A primeira coluna fornece os dias em que a simulação foi feita, a segunda e a terceira coluna apresentam os dados reais fornecidos pelo CRC/INPE e a quarta e quinta coluna os resultados da simulação numérica. As duas últimas colunas apresentam a diferença entre os valores simulados e os reais para a ascensão reta e declinação, ou seja, a diferença entre a quarta e segunda colunas e entre a quinta e terceira colunas, respectivamente. Esta tabela também apresenta as médias e os desvios-padrão das diferenças no intervalo.

Tabela 6 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/1993 – 22/08/1993.

Dia	α_{INPE} ($^{\circ}$)	δ_{INPE} ($^{\circ}$)	Ascensão Reta ($^{\circ}$)	Declinação ($^{\circ}$)	Ascensão $\Delta\alpha$ ($^{\circ}$)	Declinação $\Delta\delta$ ($^{\circ}$)	
19/08/1993	281,74	80,53	281,74	80,53	0	0	
20/08/1993	282,24	80,23	281,73904	80,52983	-0,50096	0,299833	
21/08/1993	282,57	79,93	281,73807	80,52967	-0,83193	0,599666	
22/08/1993	282,7	79,64	281,73711	80,5295	-0,96289	0,8895	
					MÉDIA	-0,57395	0,44725
					DESVIO	0,429176	0,383223

As figuras 28 e 29 apresentam os dados da tabela 6, comparando, respectivamente, a ascensão reta e declinação real e a estimada pela simulação numérica.

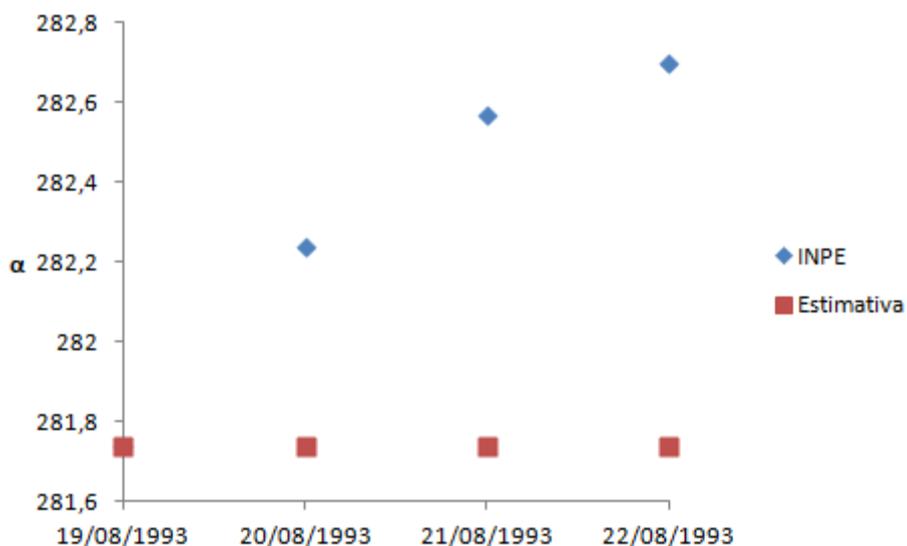


Figura 28 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/993 – 22/08/1993.

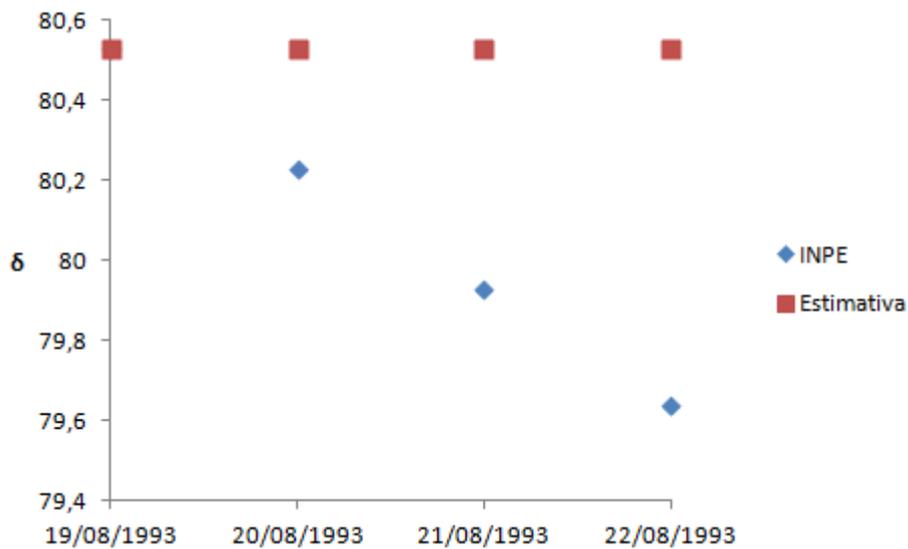


Figura 29 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/993 – 22/08/1993.

As figuras 30 e 31 mostram, respectivamente, as diferenças entre a ascensão reta e declinação estimada e real da tabela 6, sendo também indicado o valor médio (linha em preto) e o desvio-padrão (linha em vermelho).

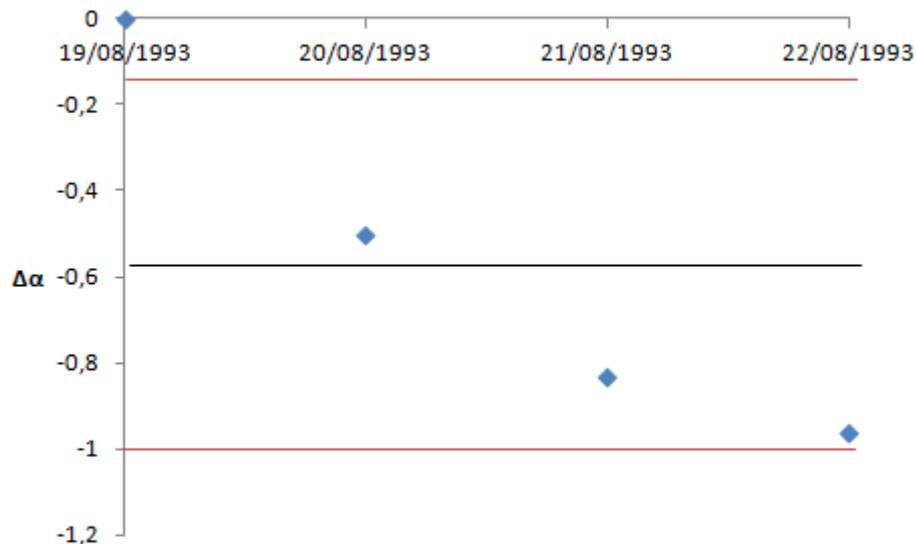


Figura 30 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/1993 – 22/08/1993.

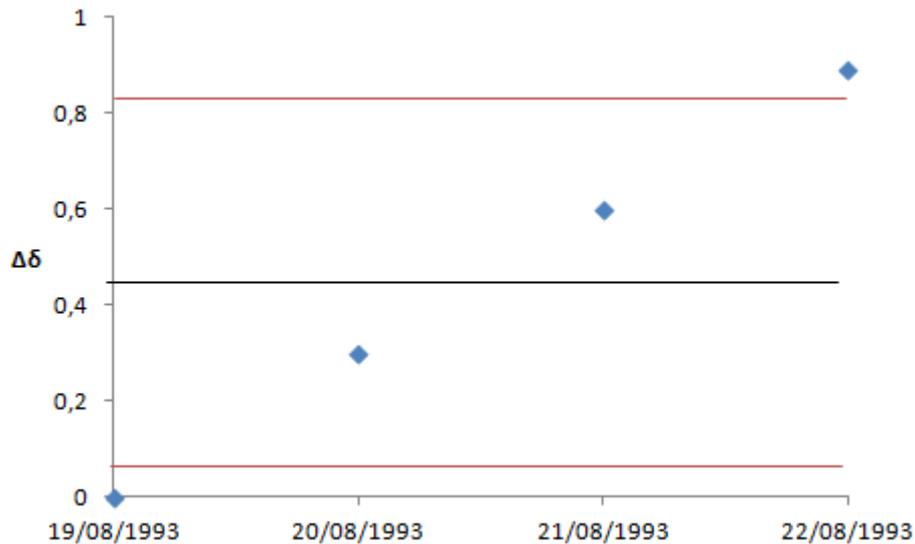


Figura 31 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD1, sem atualização diária no intervalo: 19/08/1993 – 22/08/1993.

Pelos resultados obtidos, apesar da expectativa inicial, os resultados não foram adequados, com a média da ascensão reta ultrapassando a precisão requerida, embora os desvios padrão e a média da declinação tenham se mantido dentro da faixa. Deste modo, o intervalo de validade da teoria fica restrito a três dias, com a média da ascensão reta de $0,4443^\circ$ e da declinação de $0,2998^\circ$.

3.2.2 SCD2

Esta seção tratará dos dados do Satélite de Coleta de Dados SCD2, para um intervalo de 17 dias entre 12/02/2002 e 28/02/2002. A tabela 7 contém dados que foram atualizados apenas nos dias de controle. A primeira coluna fornece os dias em que a simulação foi feita, a segunda e a terceira colunas apresentam os dados fornecidos pelo CRC/INPE e a quarta e quinta colunas os resultados da simulação numérica. As duas últimas colunas representam a diferença entre os valores simulados e os reais para a ascensão reta e declinação, ou seja, a diferença entre a quarta e segunda colunas e entre a quinta e terceira colunas, respectivamente. Esta tabela também apresenta as médias e os desvios-padrão das diferenças no intervalo.

Tabela 7 – Valores da ascensão reta e declinação do SCD2, sem atualização diária.

Dia	α_{INPE} (°)	δ_{INPE} (°)	Ascensão Reta (°)	Declinação (°)	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)
12/02/2002	278,71	63,47	278,71	63,47	0	0
13/02/2002	278,73	63,5146	278,7107	63,47032	-0,01929	-0,04428
14/02/2002	278,74	63,4636	278,7114	63,47066	-0,02858	0,007056
15/02/2002	278,74	63,409	278,7121	63,47098	-0,02788	0,061983
16/02/2002	278,72	63,357	278,7128	63,47131	-0,00718	0,114311
17/02/2002	278,68	63,316	278,7135	63,47164	0,033527	0,155639
18/02/2002	278,63	63,2964	278,7142	63,47197	0,08423	0,175567
19/02/2002	278,57	63,2926	278,7149	63,47229	0,144933	0,179694
20/02/2002	278,5	63,3014	278,7156	63,47262	0,215637	0,171222
21/02/2002	278,42	63,317	278,7163	63,47295	0,29634	0,15595
22/02/2002	278,33	63,3421	278,7170	63,47328	0,387044	0,131178
23/02/2002	278,23	63,359	278,7177	63,47361	0,487747	0,114606
24/02/2002	276,6	61,22	276,6	61,22	0	0
25/02/2002	276,42	61,1443	276,6005	61,22042	0,180505	0,07612
26/02/2002	276,2	60,9304	276,6010	61,22084	0,401001	0,290441
27/02/2002	275,94	60,7028	276,6015	61,22126	0,661496	0,518461
28/02/2002	275,64	60,4678	276,6020	61,22168	0,961991	0,753881
MÉDIA					0,221854	0,168343
DESVIO					0,282059	0,199336

As figuras 32 e 33 apresentam os dados da tabela 7, comparando, respectivamente, a ascensão reta e declinação real e a estimada pela simulação numérica.

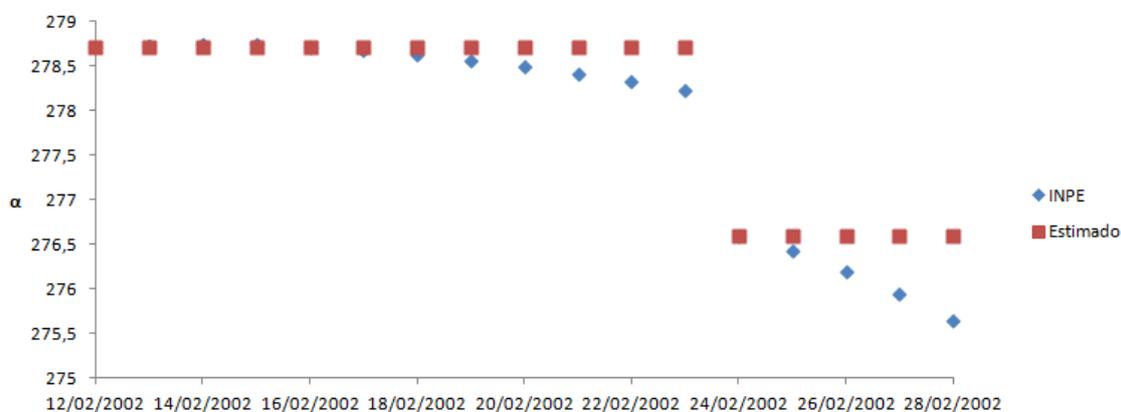


Figura 32 – Gráfico comparativo da ascensão reta (α) do SCD2, sem atualização diária.

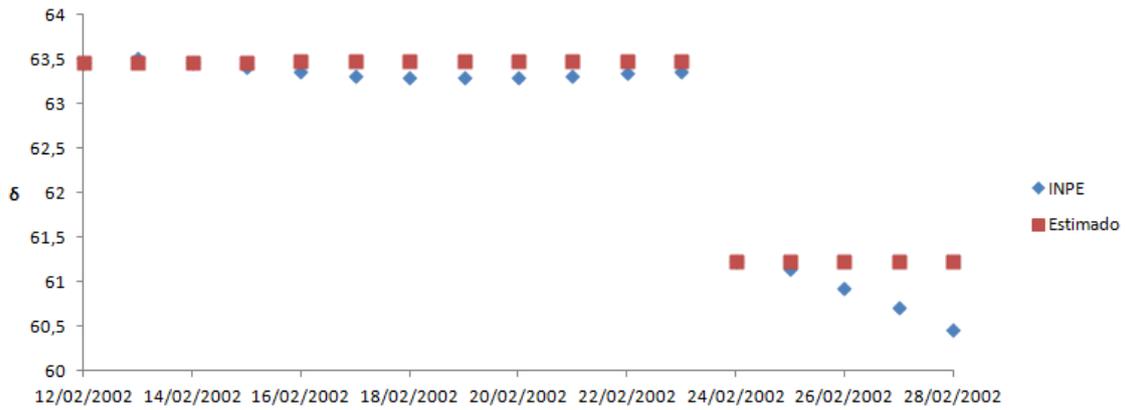


Figura 33 – Gráfico comparativo da declinação (δ) do SCD2, sem atualização diária.

As figuras 34 e 35 mostram, respectivamente, as diferenças entre a ascensão reta e declinação estimada e real da tabela 7, sendo também indicado o valor médio (linha em preto) e o desvio-padrão (linha em vermelho).

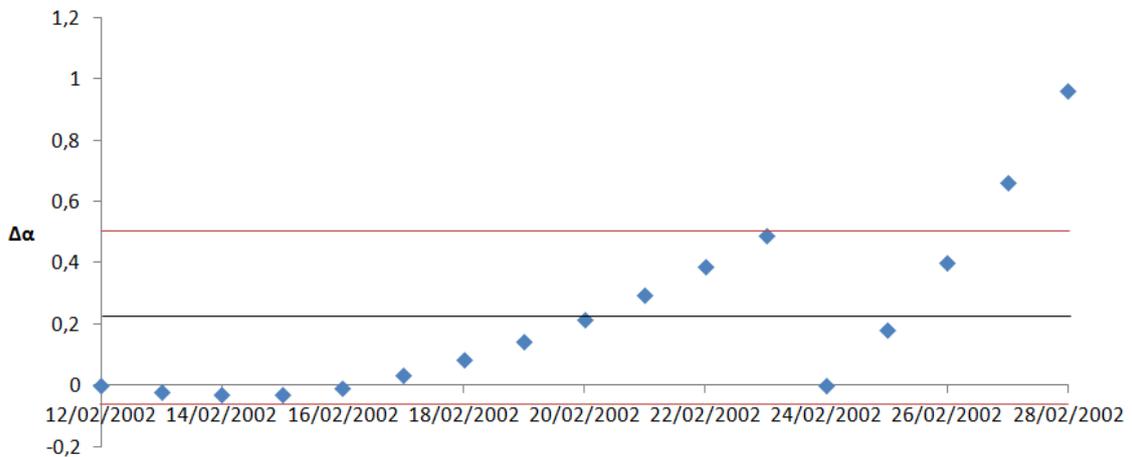


Figura 34 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD2, sem atualização diária.

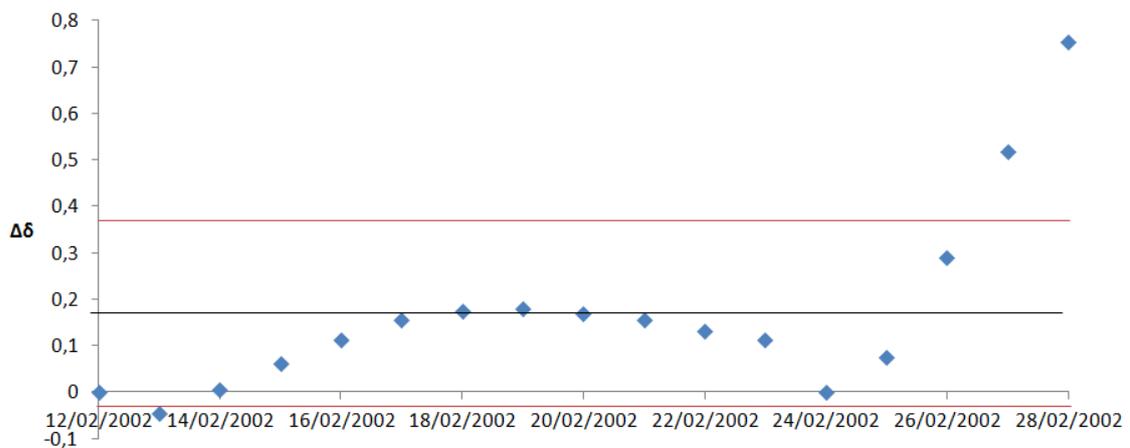


Figura 35 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD2, sem atualização diária.

Pelos resultados obtidos observa-se que as médias e desvios padrão permaneceram dentro da precisão do INPE, embora sejam maiores do que na abordagem com a atualização dos dados.

3.2.2.1 Análise em cada intervalo sem atuação do controle de atitude

Nesta seção são avaliadas as diferenças entre a ascensão reta (Figura 36 e 38) e declinação (Figura 37 e 39) nos intervalos sem a atuação do controle, que corresponderam a dois intervalos, com o controle atuando no dia 24/02/2002.

Tabela 8 – Médias e desvios-padrão sem atualização em cada intervalo, sem atuação do controle.

	12/02/2002 – 23/02/2002		24/02/2002 – 28/02/2002	
	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)	Ascensão $\Delta\alpha$ (°)	Declinação $\Delta\delta$ (°)
MÉDIA	0,130544	0,10191	0,440999	0,327781
DESVIO	0,17806	0,077229	0,382096	0,312285

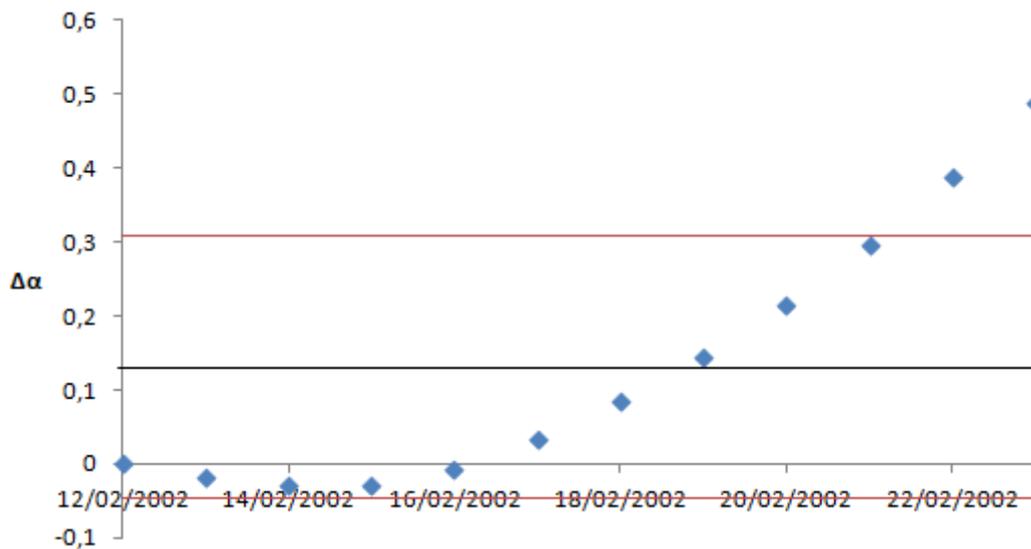


Figura 36 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 12/02/2002 - 23/02/2002.

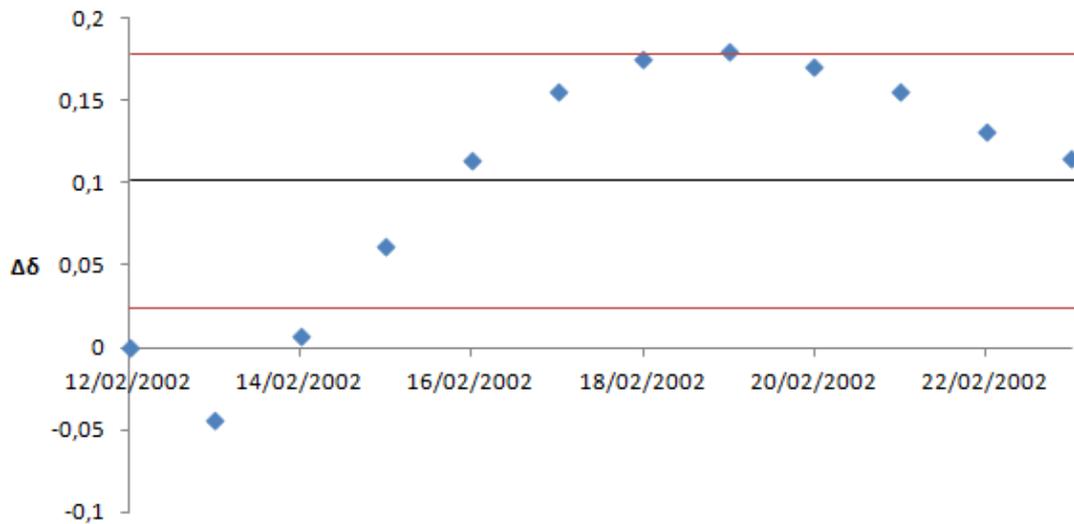


Figura 37 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 12/02/2002 – 23/02/2002.

Para o primeiro intervalo as médias e desvios padrão permaneceram dentro da precisão do INPE. Para a ascensão reta observa-se um aumento linear nas diferenças, tendo sido necessário a atuação do controle no dia 24/02.

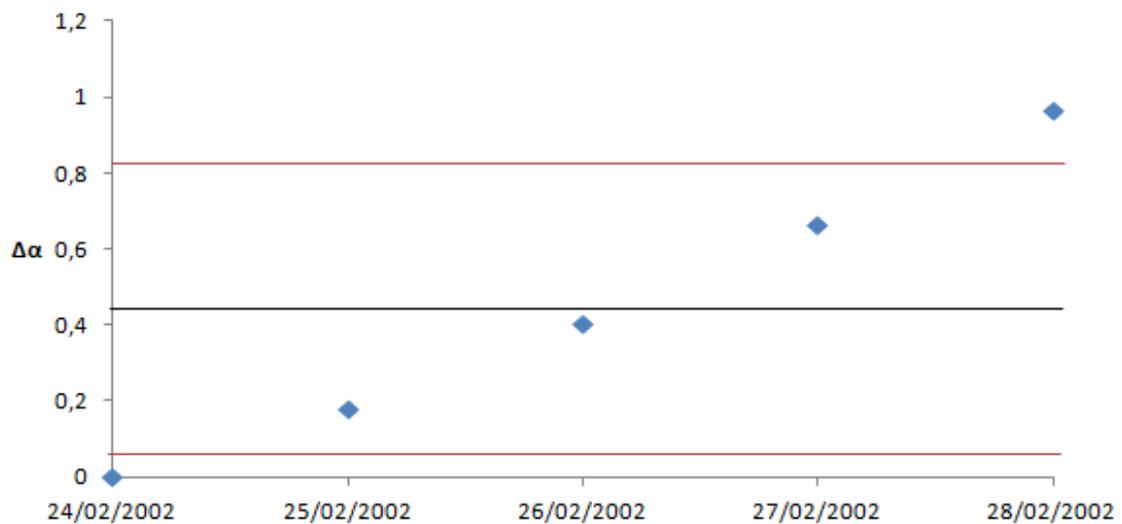


Figura 38 – Gráfico da diferença entre os valores de α estimados e reais do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 24/02/2002 - 28/02/2002.

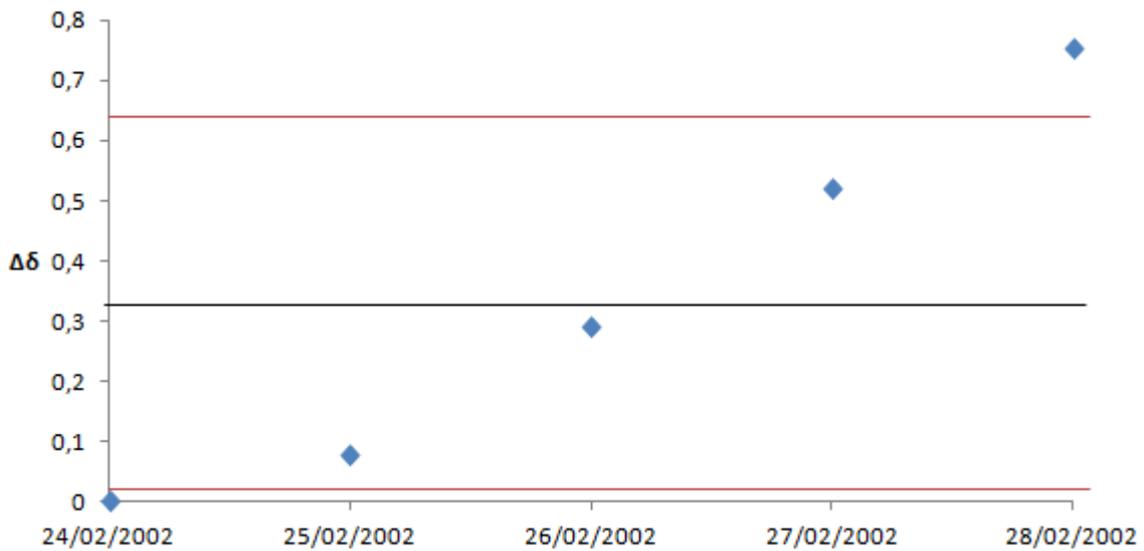


Figura 39 – Gráfico da diferença entre os valores de δ estimados e reais do SCD2, sem atualização diária no intervalo: 24/02/2002 – 28/02/2002

Para o segundo intervalo as médias e desvios-padrão foram maiores, mas ainda permaneceram dentro da precisão do INPE. No entanto, para todo o intervalo observa-se uma tendência de crescimentos nas diferenças, sendo que nos dois últimos dias as diferenças ultrapassaram a precisão do INPE, tendo sido necessária a atuação do controle no dia 01/03/2002. De qualquer forma, a teoria continua adequada para o intervalo cinco dias.

4 CONCLUSÃO

Em geral, pode-se concluir que o método utilizado é pertinente, pois a maior parte dos resultados encontrou-se dentro da precisão do INPE, validando a teoria para intervalos de até cinco dias para o SCD1 e doze dias para o SCD2.

Na primeira abordagem, com a atualização diária dos dados, as médias e os desvios-padrões das diferenças entre os valores estimados e os reais, fornecidos pelo CRC/INPE, estão dentro do intervalo de $-0,5^\circ$ e $+0,5^\circ$; sendo que para o SCD2, a análise dos resultados em cada intervalo se mostrou mais adequada. Além disso, observou-se que no segundo intervalo do SCD2, 24/02/2002 a 28/02/2002, ocorreu um aumento dos valores das médias e desvios-padrões, tendo sido necessária a atuação do controle no dia 01/03/2002.

Na segunda abordagem, sem a atualização diária dos dados, nem todas as médias e desvios-padrões das diferenças entre os valores estimados e os reais ficaram dentro da precisão do INPE. Na simulação de todos os dados do SCD1, as médias das diferenças encontraram-se dentro da precisão, no entanto, o desvio-padrão da ascensão reta ultrapassou o valor de $0,5^\circ$. Os resultados do SCD1 no intervalo dos dias 21/08/1993 a 25/08/1993 e 19/08/1993 a 22/08/1993 validaram a teoria para um intervalo de cinco e três dias, respectivamente. Na simulação de todos os dados do SCD2, as médias e desvios padrões permaneceram dentro da precisão do INPE, embora tenham se apresentado maiores do que na abordagem com a atualização dos dados. Na análise dos resultados do SCD2 em cada intervalo, as médias e desvios-padrão ficaram dentro da precisão do INPE; no entanto, para o segundo intervalo observa-se uma tendência de crescimento nas diferenças, sendo que foi necessária a atuação do controle no dia 01/03/2002. Em geral, para o SCD2 a teoria continua adequada para o intervalo doze dias.

Em trabalhos futuros, é interessante a simulação numérica utilizando outros torques em conjunto com o TRS (que possui uma pequena ordem de grandeza, da ordem de 10^{-9} Nm), como o torque gradiente de gravidade, o torque magnético, o torque aerodinâmico e o torque elétrico. Com esta inclusão ao programa numérico, os resultados da simulação devem se tornar mais próximos ao real, ou seja, a teoria ficará adequada para maiores intervalos trazendo maior confiabilidade nos resultados obtidos.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOTTA, G. B. **Satélites estabilizados por rotação e torque de pressão de radiação solar direta**. Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Engenharia, UNESP. Guaratinguetá, 2011.

MOORE, R. C.; PISACANE V. L. **Fundamentals of space systems**. New York: Oxford University Press, 1994.

PRADO, A. F. B. A.; KUGA, H. K. **Fundamentos de Tecnologia Espacial**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos. 2001.

PRADO, A. F. A., **Advances in Space Dynamics**. São José dos Campos, 2000. p 503-516.

REAL, F. F. **Modelagem de Torques Ambientais Atuantes em Satélites Artificiais**. Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Engenharia, UNESP. Guaratinguetá, 2002.

SHUSTER, M. D. A survey of attitude representation. **Journal of Astron. Sciences**. v. 41. 4, 1993.

VILHENA DE MORAES , R.; ZANARDI, M. C. F. P. S. Influence of Earth's Shadow in the Rotational Motion of an Artificial Satellite Perturbed by Solar Radiation Torque. **Advances Space Research**, v. 19, n. 11, p. 1715-1718, 1997.

WERTZ, J. R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**. Kluwer Academic Publishers, 1978.

ZANARDI, M. C. **Fundamentos de Astronáutica**. Apostila do Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos, 1990.

ZANARDI, M. C. **Influência do Torque de Radiação Solar na Atitude de um Satélite Artificial**. Tese de Doutorado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos, 1993.

ZANARDI, M. C.; BENTO, P. R. S. P.; ORLANDO, V.; SILVA, M. F. Spin Stabilized

Satellites Attitude Propagation with Quaternions, **Proceedings of the 22nd International Symposium on Space Flight Dynamics**, São José dos Campos, 2011. p. 1-15.

ZANARDI, M. C.; LOPES, R. V. F. Spacecraft attitude representation, propagation and determination: theory and some applications on the brazilian space program, In:

ZANARDI, M. C. **Dinâmica da Atitude de Satélites Artificiais**. (Tese de Livre Docência). Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.