



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

ESTUDO DE TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS UTILIZANDO ALGORITMO GENÉTICO

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Noemi dos Santos Araújo (UNIFESP/SJC/ICT, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail – noemi.araujo@unifesp.br

Denilson Paulo Souza dos Santos (DMC/INPE, Orientador)
E-mail – denilson@dem.inpe.br

Julho de 2012

"A educação não transforma o mundo.

Educação muda pessoas.

Pessoas transformam o mundo."

Paulo Freire

"Tomou tempo"

Albert Einstein

(referindo-se ao Problema de N Corpos como
um dos mais importantes aspectos da criação científica)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela oportunidade de estudos e utilização de suas instalações.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo apoio financeiro recebido por meio da bolsa de Iniciação Científica, junto ao programa PIBIC/INPE.

Ao orientador Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos pela dedicação, apoio e interesse no processo de ensino.

Aos professores do INPE pelos conhecimentos compartilhados.

A meus pais e meu irmão, que edificaram e orientaram minha vida em todos os sentidos.

Aos familiares e amigos pelo incentivo e pela contribuição, direta ou indiretamente, para a conclusão deste trabalho. Agradeço a todas as pessoas que me ajudaram a vencer mais esta etapa.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a continuidade ao projeto de Iniciação Científica, iniciado em agosto de 2010. O trabalho realizado no período de agosto de 2010 a agosto de 2011 tratou do estudo para otimização de manobras de transferência, visando ao menor consumo de combustível, por meio da implementação de um algoritmo de resolução fundamentado na técnica dos algoritmos genéticos. O sistema analisado não considerou as perturbações existentes no meio. Modelou-se o problema dentro da dinâmica clássica de dois corpos, na qual o veículo espacial é suposto mover-se em torno de um corpo celeste considerado como um ponto de massa em órbitas keplerianas. Como resultado, obteve-se o código para o cálculo do mínimo incremento total de velocidade necessário para realizar as transferências orbitais analisadas, sendo que esta rotina está fundamentada nos conceitos dos algoritmos genéticos. O trabalho atual concentra-se na análise de manobras de transferência, considerando-se as perturbações presentes no sistema. Analisaram-se os efeitos perturbadores devido a um terceiro corpo, utilizando a modelagem conhecida como “*Problema Restrito de Três Corpos*” no qual um ponto de massa desprezível (no caso, o veículo espacial) se move atraído pela força da gravitação de dois outros corpos. Essa perturbação deve ser considerada quando o terceiro corpo estiver próximo ou for massivo o suficiente para afetar a órbita do satélite. Considerou-se que apenas forças gravitacionais atuam no sistema. As manobras orbitais analisadas neste trabalho são baseadas no modelo de propulsão com empuxo infinito. As rotinas foram implementadas utilizando-se o *software* MATLAB. Do presente trabalho, obteve-se os algoritmos para o cálculo do potencial perturbador e da força específica atuante no satélite. Obteve-se também o programa que calcula os elementos orbitais e o impulso total necessário para realizar as manobras de transferência em um sistema perturbado por um terceiro corpo, sendo que este código foi desenvolvido com base no trabalho anterior. Foram desenvolvidas rotinas auxiliares de transformação de tempo, efemérides lunissolares e coordenadas.

ABSTRACT

The present work aims to continue the project of Scientific Initiation, initiated in August 2010. The work carried out from August 2010 to August 2011 dealt with the study for optimization of transfer maneuvers, in order to lower fuel consumption through the implementation of a resolution algorithm based on the technique of genetic algorithms. The system analyzed did not consider the environment disturbances. The problem was modeled into the classical dynamics of two bodies' problem, in which the space vehicle is supposed to move around a celestial body considered as a point of mass into Keplerian orbits. As a result, was obtained the code for calculating the minimum speed increment needed to perform orbital transfers, and this routine is based on genetic algorithms concepts. The present study focuses on the analysis transfer maneuvers, considering disturbance in the system. We analyzed the disturbing effects due to a third body, using the model known as "Restricted Problem of Three Bodies," in which a point of mass (in this case, the spacecraft) moves attracted by the gravitational force of two other bodies . This disturbance should be considered when the third body is near or is massive enough to affect the orbit of the satellite. It was considered that gravitational forces only act in the system. The orbital maneuvers analyzed in this paper are based on the type of propulsion with infinity thrust. The routines were implemented using MATLAB software. From this study, we obtained the algorithms for calculating the potential and the disturbing specific force acting on the satellite. We obtained also the program that calculates the orbital elements and the total impulse required to perform the transfer maneuvers in a system perturbed by a third body, and this code was developed based on previous work. Routines are designed auxiliary processing time and ephemeris lunisolar coordinates.

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1 - Sistema de N corpos.....	5
Fig. 2.2 - Sistema de coordenadas para o Problema Restrito de Três Corpos Fonte: adaptado de Prado (2001)	12
Fig. 2.3 - Representação do movimento em uma das possíveis configurações do Problema Plano-Circular de Três Corpos. Nesta imagem, $m_1:m_2:m_3 = 3:2:1$	13
Fig. 2.4 - Localização dos Pontos Lagrangianos	20
Fig. 2.5 - Curva de velocidade zero e Pontos Lagrangianos para o Problema Restrito de Três Corpos. Fonte: Formiga (2009)	20
Fig. 2.6 - Representação do movimento em uma das possíveis configurações do Problema Plano-Elíptico de Três Corpos. Nesta imagem, $m_1:m_2:m_3 = 3:2:1$	23
Fig. 2.7 - Representação do Problema Restrito Tridimensional de Três Corpos. M_3 movimenta-se sobre a reta que passa por O e é ortogonal ao plano de movimento dos corpos primários	24
Fig. 2.8 - Transferência orbital com ΔV mínimo vista do referencial girante. Fonte: Prado (1993)	25
Fig. 2.9 - Transferências saindo da Lua e retornando a ela. Fonte: Prado(1993).....	25
Fig. 2.10 - Esquema de um Algoritmo Genético simples.....	28

LISTA DE SÍMBOLOS

G - constante de gravitação universal

m_0 - massa inicial do veículo espacial

m_1 - massa de M_1

m_2 - massa de M_2

m_3 - massa de M_3

m_f - massa final do veículo espacial

M_1 - corpo 1

M_2 - corpo 2

M_3 - corpo 3

r_0 - posição inicial

r_f - posição final

t_0 - instante de tempo inicial

t_f - instante de tempo final

v_0 - velocidade inicial do veículo espacial

v_f - velocidade final do veículo espacial

ΔV - impulso total de velocidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVOS	2
1.2	MOTIVAÇÃO	2
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
2.1	MANOBRAS ORBITAIS	3
2.2	PROBLEMA DE N CORPOS	4
2.2.1	EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA DE N CORPOS	5
2.2.1.1	AS DEZ INTEGRAIS DO MOVIMENTO	6
2.2.1.2	FUNÇÃO – FORÇA	8
2.3	PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	9
2.3.1	SOLUÇÕES DE LAGRANGE PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	10
2.3.2	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS	10
2.4	PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	11
2.4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	12
2.4.1.1	PROBLEMA RESTRITO PLANO-CIRCULAR DE TRÊS CORPOS 12	
2.4.1.1.1	A INTEGRAL DE JACOBI	16
2.4.1.1.2	SISTEMA DE UNIDADES CANÔNICAS	17
2.4.1.1.3	OS PONTOS LAGRANGIANOS	18
2.4.1.2	PROBLEMA RESTRITO PLANO-ELÍPTICO DE TRÊS CORPOS	21
2.4.1.2.1	SISTEMA FIXO	21
2.4.1.2.2	SISTEMA GIRANTE E PULSANTE	22
2.4.1.3	PROBLEMA RESTRITO TRIDIMENSIONAL DE TRÊS CORPOS 23	
2.4.2	TRAJETÓRIAS NO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	24
2.5	ALGORITMOS GENÉTICOS	26

2.5.1	FUNCIONAMENTO DOS ALGORÍTIMOS GENÉTICOS	26
2.6	MÉTODO NUMÉRICO DE INTEGRAÇÃO DE ÓRBITA	28
2.6.1	RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM.....	29
3	METODOLOGIA	31
4	RESULTADOS PARCIAIS E CONCLUSÕES	33
5	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	34

1 INTRODUÇÃO

No primeiro ano deste projeto de pesquisa, realizou-se um levantamento bibliográfico dos principais tópicos de mecânica celeste aplicados aos problemas envolvendo manobras de veículos espaciais. Iniciou-se o estudo por meio da compreensão das três Leis de Newton, além da Lei da Gravitação Universal, teorias estas que explicam as mais significativas propriedades do movimento planetário e de satélites artificiais. Estudou-se também a solução para o “*Problema de Dois Corpos*”, o qual consiste em determinar a trajetória de um ponto material sujeito à ação de um campo de força central, desconsiderando qualquer tipo de perturbação. Foram realizados estudos do movimento elíptico para determinar o posicionamento de um satélite por meio de seus elementos keplerianos, elementos estes que determinam a forma, a dimensão e o posicionamento da órbita do veículo espacial. Os principais conceitos relacionados aos Algoritmos Genéticos também foram estudados, permitindo o desenvolvimento do código para o cálculo do mínimo incremento de velocidade necessário para realizar tanto as transferências do tipo Hohmann quanto as transferências do tipo Bi-elípticas e Tri-impulsivas, sendo que esses dois tipos de transferências também foram analisados. Os resultados obtidos neste projeto podem ser verificados no Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (Araújo, 2011).

Ao término do primeiro ano de pesquisa, iniciou-se a análise do “*Problema de N Corpos*”, concentrando o estudo no caso conhecido como “*Problema Restrito de Três Corpos*”, modelo este que tem importante aplicação em trajetórias lunares, interplanetárias e no movimento de cometas e asteróides. No Problema Restrito de Três Corpos, supõe-se que existem dois corpos M_1 e M_2 de massas finitas e deseja-se estudar o movimento de um terceiro corpo M_3 de massa desprezível que orbita o sistema formado pelos dois outros corpos (Szebehely, 1967). Utilizando-se os resultados obtidos no trabalho anterior, considerou-se a influência dos corpos citados como uma perturbação, buscando-se otimizar (em relação ao menor consumo de combustível) as transferências orbitais realizadas nesse sistema. Para melhor entendimento da dinâmica do problema, estudaram-se os tópicos a ele relacionados, dos quais cita-se: sistemas dinâmicos, teoria do caos, transformações canônicas e teoria de perturbações.

1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo o estudo para a otimização de manobras de transferência, visando ao menor consumo de combustível, por meio do desenvolvimento e implementação de um algoritmo de resolução baseado na técnica dos Algoritmos Genéticos.

Para a dinâmica do problema, utilizou-se o modelo conhecido como Problema Restrito de Três Corpos, no qual dois corpos de massas finitas perturbam o movimento de um terceiro corpo de massa desprezível (veículo espacial).

A partir dos resultados e dos códigos desenvolvidos no trabalho anterior, o qual não considerava as perturbações presentes no sistema, espera-se desenvolver um modelo mais próximo da realidade para analisar transferências de órbita, permitindo a otimização dos parâmetros do problema em questão e encontrando soluções melhoradas.

1.2 MOTIVAÇÃO

O estudo e a exploração de ambientes espaciais são prioridades para os países que querem dominar e aprimorar tecnologias espaciais. Nas atividades espaciais, é de extrema importância a realização de manobras orbitais na medida em que, por vezes, necessita-se transferir o satélite de uma órbita para outra ou executar correções nos parâmetros orbitais do veículo espacial, dependendo dos objetivos da missão. Contudo, é importante levar em consideração os gastos com combustível, fato este que incentiva a busca por soluções que minimizem esses custos.

Quanto ao estudo do Problema de N Corpos, um dos problemas fundamentais da Mecânica Celeste, sua resolução foi motivada pela necessidade de se compreender o movimento do Sol, dos planetas e das estrelas, sendo que a busca por respostas serviu como desafio aos matemáticos por gerações, contribuindo para o avanço da Matemática.

Com esta motivação, o presente trabalho está concentrado no estudo dessas trajetórias e na otimização das mesmas, objetivando encontrar soluções que possibilitem o menor consumo de combustível em meio a um sistema perturbado por dois outros corpos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MANOBRAS ORBITAIS

Realizar uma manobra orbital significa transferir o satélite de um ponto para outro no espaço entre órbitas diferentes, alterando seu estado inicial (posição, velocidade e massa) de r_0 , v_0 e m_0 no instante t_0 , para r_f , v_f e m_f no instante t_f ($t_f > t_0$). Conceitualmente, o menor gasto de combustível ocorre quando $(m_0 - m_f)$ é mínimo (Prado, 2001). A transferência torna-se necessária quando ocorrem desvios nos parâmetros orbitais do satélite, fazendo com que ele se encontre em uma órbita diferente da nominal, podendo ainda estar prevista na própria missão (Kuga e Rao, 2001).

As aplicações para o problema de transferência orbital são muito variadas. De acordo com Prado (2001), quanto ao tipo de manobra envolvida, existem duas categorias principais:

- a) Transferências de órbita: manobras de grande amplitude. Têm por objetivo alterar significativamente a órbita do satélite. Como exemplo, temos a transferência de um veículo espacial de uma órbita baixa para uma órbita mais alta (como a geoestacionária).
- b) Correções de órbita: manobras de pequena amplitude. Destinam-se a manter o satélite em determinada órbita, compensando efeitos perturbadores que tendem a alterar a órbita nominal do veículo espacial.

O problema da transferência ótima de um veículo espacial entre dois pontos teve em R. H. Goddard (1919) um de seus primeiros estudiosos. Em seu trabalho foram propostas soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete a grandes altitudes. A seguir veio o trabalho de Hohmann (1925), que obteve solução ótima para o problema de transferir um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre em um campo de força central Newtoniano (Santos, 2005). Uma explicação mais detalhada sobre transferências orbitais encontra-se no Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (Araújo, 2011).

2.2 PROBLEMA DE N CORPOS

O problema de N corpos puntiformes, primeiramente formulado por Isaac Newton (1643-1727) em seu "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", pode ser enunciado como: "Conhecidas as massas de N corpos que se movem governadas pela gravitação mútua e dadas suas respectivas posições e velocidades num determinado instante, calcular suas posições e velocidades num instante futuro.". Consiste em um problema difícil, já que, num sistema de N corpos, existem múltiplas quase colisões que tornam o problema muito complexo. Mesmo versões simplificadas, como o Problema de Três Corpos, são muito mais complexas que o Problema de Dois Corpos (Roig, 2011). O Problema de N Corpos permanece sem solução analítica até hoje, contudo, ao longo de quase trezentos anos de estudo, foram obtidos alguns resultados importantes. Na tentativa de solucionar este problema, vários ramos da Matemática e da Mecânica se desenvolveram, sendo que os resultados destes estudos têm sido aproveitados em diversas áreas além da Mecânica Celeste.

Uma abordagem comum de tratar o problema de N corpos é estudá-lo como um problema de dois corpos perturbados pelos demais $N - 2$ corpos. Como exemplo, pode-se considerar o movimento da Terra em torno do Sol como sendo um problema de dois corpos perturbado pelos demais planetas. A órbita dada pelo modelo de dois corpos é chamada de "órbita de referência", com elementos orbitais constantes. A órbita perturbada é, em geral, expressa como uma longa série de termos para as variações dos elementos da órbita de referência. Este modelo é conhecido como "Teoria das Perturbações Gerais" (Prado, 2001).

Outro método para resolução deste problema é dado pela "Teoria de Perturbações Especiais", envolvendo basicamente a integração numérica das equações de movimento dos N corpos considerados. Embora este método seja aplicável a qualquer situação, não é possível tirar conclusões gerais a partir dos seus resultados, existindo ainda a necessidade de se calcular posições e velocidades em todos os instantes intermediários (Prado, 2001).

De acordo com Prado (2001), quanto às perturbações, dividem-se em seculares e periódicas. As seculares são aquelas cujos desvios são proporcionais ao tempo. As

periódicas são aqueles desvios da órbita nominal que se repetem a dados intervalos de tempo, podendo ser classificadas em periódicas de curto período (período menor que um período orbital) e periódicas de longo período (período maior que um período orbital).

2.2.1 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA DE N CORPOS

O problema de N corpos consiste no estudo do movimento de N pontos em interação gravitacional mútua, cada um com massa m_i , cujas posições são descritas pelos vetores de coordenadas cartesianas $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}, i = 0, \dots, N$. A base teórica deste problema fundamenta-se nos princípios de inércia (Primeira Lei de Newton), ação e reação (Terceira Lei de Newton), Lei da Gravitação Universal e no princípio de equivalência (estabelecido por Einstein) em que a massa inercial é equivalente à massa gravitacional. A combinação destes postulados leva à descrição do movimento dos N corpos através de um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem (Roig, 2011). A Figura 2.1 ilustra o sistema e apresenta algumas das variáveis utilizadas.

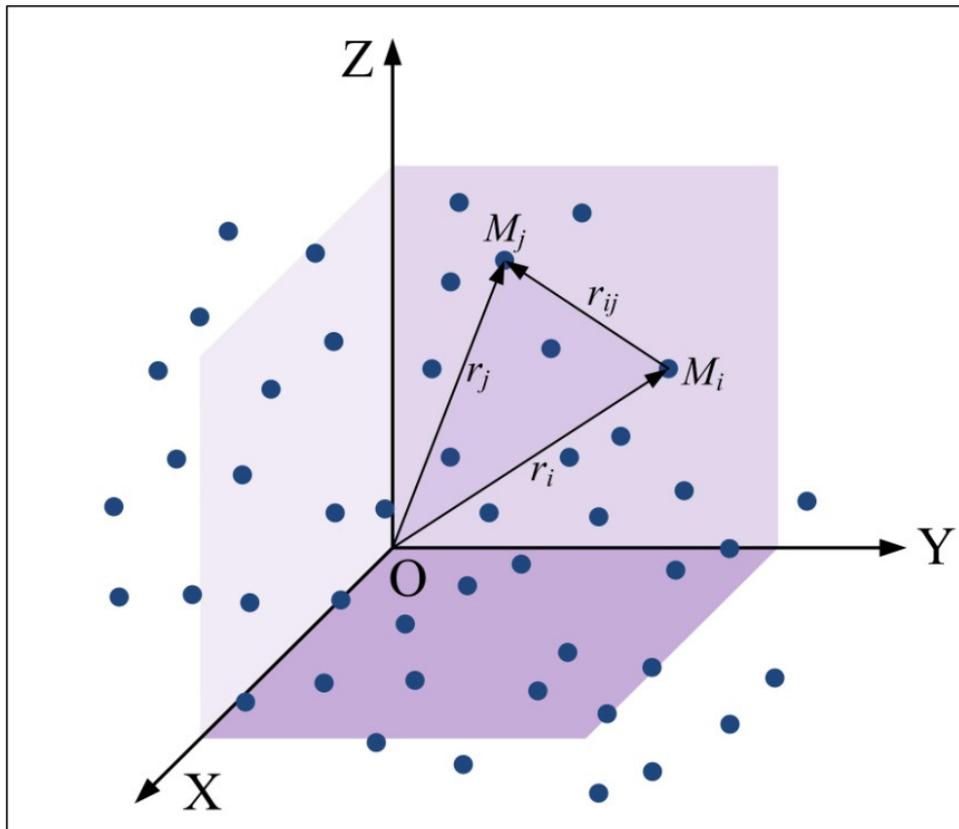


Fig. 2.1 - Sistema de N corpos.

Nesta figura, \vec{r}_i corresponde ao raio-vetor da i -ésima partícula em relação ao referencial inercial OXYZ e $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ é o raio-vetor que aponta de M_i para M_j . A partir da Lei da Gravitação Universal de Newton, temos que a equação de movimento para o corpo de massa m_i (M_i) é (Prado, 2001):

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (j \neq i, i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

Da definição de \vec{r}_{ij} , temos:

$$\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji} \quad (2.2)$$

2.2.1.1 AS DEZ INTEGRAIS DO MOVIMENTO

De acordo com Prado (2001), somando membro a membro as equações (2.1) para todas as partículas e considerando a equação (2.2), temos:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (2.3)$$

Os termos do lado direito se cancelam mutuamente. Integrando (2.3) uma vez no tempo, temos:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{a} \quad (2.4)$$

Integrando uma segunda vez no tempo temos que:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{a}t + \vec{b} \quad (2.5)$$

Utilizando a definição de centro de massa, temos:

$$M\vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (2.6)$$

Na qual $M = \sum_{i=1}^N m_i$ e \vec{r} é o raio-vetor do centro de massa.

Combinado as equações anteriores, obtemos:

$$\vec{r} = (\vec{a}t + \vec{b}) \frac{1}{M} \text{ e } \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{a}}{M} \quad (2.7)$$

Essas equações indicam que o centro de massa do sistema formado por N corpos se move com velocidade constante no espaço. Elas também nos fornecem as primeiras seis integrais do movimento (as três componentes do vetor \vec{a} e as três componentes do vetor \vec{b}).

Partindo da equação (2.1), multiplicando-a vetorialmente por \vec{r}_i e somando membro a membro, obtemos mais três integrais do movimento:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} \quad (j \neq i) \quad (2.8)$$

Com o resultado do produto vetorial de $\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij}$ e de $\vec{r}_j \times \vec{r}_{ji}$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} &= \vec{r}_i \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \vec{r}_i \times \vec{r}_j \\ \vec{r}_j \times \vec{r}_{ji} &= \vec{r}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{r}_j \times \vec{r}_i = -\vec{r}_i \times \vec{r}_j \end{aligned}$$

Executando o duplo somatório da equação (2.8), os elementos do lado direito se cancelam dois a dois. Logo:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (2.9)$$

Integrando no tempo, temos:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{H} \quad (2.10)$$

Essa equação pode ser derivada em relação ao tempo fornecendo o resultado $\dot{\vec{H}} = \vec{0}$, o que equivale a dizer que o momento angular total do sistema formado pelos N corpos é

constante, obtendo-se, assim, mais três integrais do movimento, as três componentes do vetor \vec{H} . É preciso salientar que o vetor \vec{H} define o chamado “plano invariante de Laplace” perpendicular a ele.

Para determinar a décima constante do movimento, calcula-se o produto escalar da equação (2.1) por $\dot{\vec{r}}_i$, somando todos os valores de i :

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_{ij} \quad (j \neq i) \quad (2.11)$$

Integrando a equação (2.11), temos:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E \quad (j \neq i) \quad (2.12)$$

Usando a nomenclatura tradicional em Mecânica, temos que:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \text{energia cinética do sistema}$$

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \text{energia potencial do sistema}$$

Temos que $T - U = E =$ energia total do sistema. E corresponde a décima integral do movimento. Nenhuma outra integral do movimento foi descoberta posteriormente, embora muitos estudos tenham sido realizados. As principais aplicações das integrais de movimento são: verificar a precisão de integrações numéricas, eliminar variáveis, reduzir a dimensão do espaço, etc.

2.2.1.2 FUNÇÃO – FORÇA

Considere a função dada pela expressão (Prado, 2001):

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (2.13)$$

Essa função permite a existência das dez integrais do movimento. As primeiras nove são advindas da propriedade de invariância de U com relação à rotação dos eixos ou translações da origem. A conservação da energia vem do fato de que U não depende explicitamente do tempo. Por meio desta função, as equações do movimento podem ser escritas como:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{\nabla}_i U \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

2.3 PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Na história da ciência este foi um problema muito estudado. Baseado em suas leis de movimento, Isaac Newton, em 1687, estudou o movimento de dois corpos, levando em consideração apenas a atração gravitacional entre eles, problema solucionado facilmente, explicando com boa aproximação as órbitas da Lua ao redor da Terra. Adicionando-se mais um corpo, imaginou-se que não haveria tantas complicações. Contudo, o problema se torna bastante complexo.

Em 1890, Poincaré descobriu e demonstrou que, considerando três corpos celestes em interação gravitacional, as equações newtonianas tornam-se insolúveis por quadratura, sendo necessário utilizar uma série de aproximações para a resolução do problema. De acordo com Gomes (2004), essas pequenas variações podem tanto provocarem pequenos efeitos quanto causarem perturbações que levam a, por exemplo, um planeta mudar de órbita e escapar do sistema solar.

Muitos matemáticos se dedicaram ao problema de três corpos e obtiveram vários resultados importantes. Em 1765, Euler mostrou a existência de soluções particulares em que os três corpos permanecem alinhados em cada instante. Considerando o problema restrito (onde um dos corpos possui massa infinitesimal) Lagrange, em 1772, mostrou matematicamente a existência de cinco pontos onde o corpo infinitesimal permanecia estável. Tais pontos de estabilidade entre dois corpos são chamados hoje de

Pontos Lagrangianos. Pontos como esses existem entre a Terra e o Sol e mesmo entre a Lua e a Terra e são pontos onde, especula-se, poder-se-iam construir bases espaciais. Essa foi a primeira grande contribuição do problema dos três corpos para a ciência fora da Matemática. Outra aplicação para o Problema de Três Corpos consiste no estudo de sistemas estelares.

2.3.1 SOLUÇÕES DE LAGRANGE PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

De acordo com Prado (2001), existem dois casos particulares para a geometria do problema de três corpos em que a configuração geométrica do sistema não muda (desconsiderando as situações em que possa existir uma constante real que multiplica todas as distâncias envolvidas):

- a) As três partículas ocupando os vértices de um triângulo equilátero. Esse caso tem grande importância na Mecânica Celeste, sendo confirmada experimentalmente pela observação dos asteroides troianos que acompanham Júpiter em seu movimento em torno do Sol, 60° à frente e 60° atrás do planeta;
- b) As três partículas ocupando posições colineares;

Lagrange mostrou que essas situações ocorrem se as seguintes condições forem obedecidas simultaneamente (Prado, 2001):

- a) A força resultante em cada corpo passa através do centro de massa do sistema;
- b) A força resultante é diretamente proporcional à distância de cada corpo ao centro de massa do sistema;
- c) As velocidades iniciais têm magnitude proporcional às distâncias das partículas ao centro de massa e fazem ângulos iguais com os raios-vetores partícula-centro de massa.

2.3.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Sejam \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 as posições de três massa finitas, m_1 , m_2 , m_3 , respectivamente. Temos (Gomes, 2004):

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \\
\ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\
\ddot{\vec{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

O sinal da segunda parcela do segundo membro das equações tem sinal positivo devido à inversão de posições entre os dois vetores posição no numerador. Essas equações derivam imediatamente de (2.1) e valem para qualquer sistema de três corpos. As dez integrais do movimento também se aplicam a esse sistema pois ele é um caso particular do Problema de N Corpos (N=3).

2.4 PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Este caso particular é um dos mais investigados em Mecânica Celeste, sendo que muitos trabalhos a respeito foram publicados. O Problema Restrito de Três Corpos consiste no estudo do movimento de um corpo com massa desprezível em torno de dois outros corpos com massas finitas, constituindo uma versão ainda mais simplificada do caso N=3.

O Problema Restrito de Três Corpos é muito rico em aplicações práticas, das quais podemos citar (Prado, 2001):

- a) Estudo do movimento de cometas e asteroides. Supondo-se que o Sol e Júpiter dominam o movimento de um cometa ou asteroide de massa desprezível, pode-se obter excelentes resultados;
- b) Análise da trajetória de um veículo espacial se dirigindo ao sistema solar exterior, por exemplo, Júpiter;
- c) Trajetória de uma sonda lunar na qual M_1 =Terra e M_2 =Lua;
- d) Esse modelo também pode ser utilizado no estudo de manobras gravitacionalmente assistidas (também chamada de Swing-By, é a manobra em

que o veículo espacial se utiliza de uma passagem próxima a um corpo celeste para ganhar ou perder energia, velocidade e momento angular (Santos, 2005));

2.4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Existem diversas versões do Problema Restrito de Três Corpos, variando de acordo com a modelagem adotada (Szebehely, 1967). Neste projeto, foi estudado o movimento restrito plano-circular, plano-elíptico e tridimensional de três corpos. Contudo, primeiramente será apresentada a formulação do problema restrito plano-circular de três corpos para um melhor entendimento da dinâmica geral do problema.

2.4.1.1 PROBLEMA RESTRITO PLANO-CIRCULAR DE TRÊS CORPOS

Este pode ser formulado como: “Deseja-se conhecer o movimento de um corpo M_3 , de massa infinitesimal, em torno de um sistema composto por M_3 e dois outros corpos M_1 e M_2 (primários) com massas finitas. Considera-se que apenas forças gravitacionais atuem no sistema, que as órbitas de M_1 e M_2 em torno do centro de massa sejam circulares e que M_3 se mova apenas no plano das órbitas de M_1 e M_2 ” (Prado, 2001). A Figura 2.2 ilustra a situação descrita.

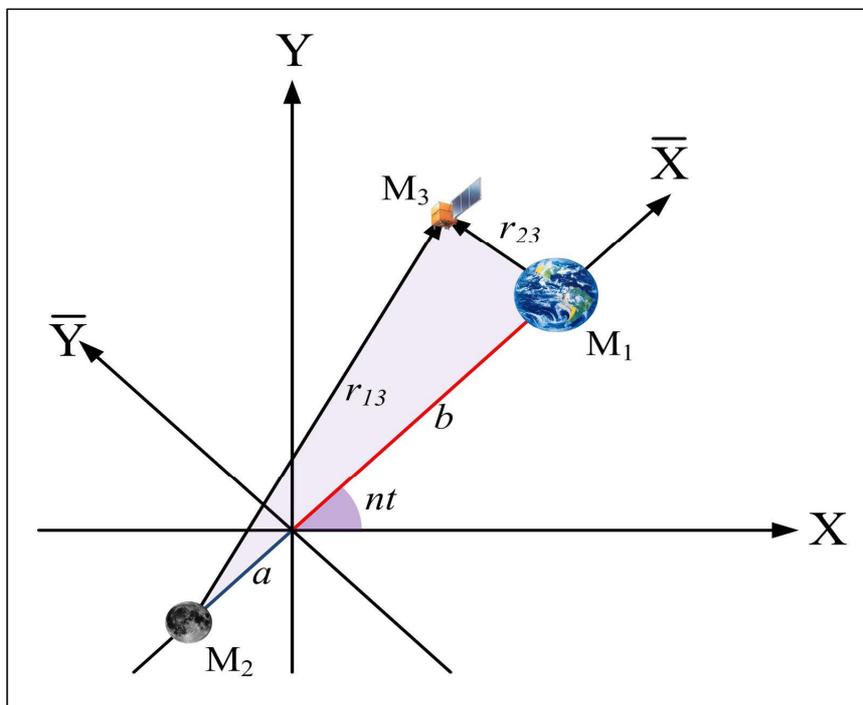


Fig. 2.2 - Sistema de coordenadas para o Problema Restrito de Três Corpos. Fonte: adaptado de Prado (2001).

A Figura 2.3 apresenta uma possível configuração para o Problema Restrito Plano-Circular de Três Corpos.

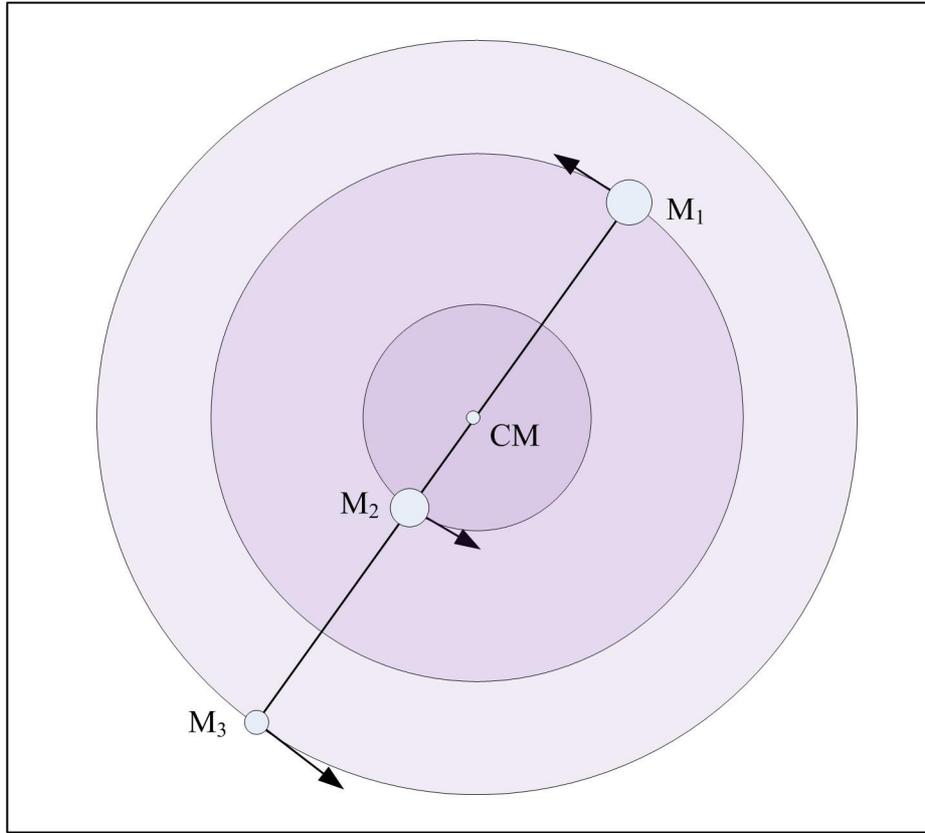


Fig. 2.3 - Representação do movimento em uma das possíveis configurações do Problema Plano-Circular de Três Corpos. Nesta imagem, $m_1:m_2:m_3 = 3:2:1$.

Para o equacionamento do problema, fazemos a aproximação $m_3 \rightarrow 0$ nas duas primeiras equações de (2.15), cancelando dois termos de cada uma das equações (Prado, 2001):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\end{aligned}\tag{2.16}$$

A terceira equação permanece inalterada. A transformação do sistema de equações (2.15) para (2.16) permite o desacoplamento das equações que formam o sistema (2.15), pois é possível determinar o movimento dos dois primários e depois estudar o movimento do terceiro corpo. A solução para o movimento de M_1 e M_2 é dada pelo

problema de dois corpos. Isso ocorre porque a massa do corpo M_3 não perturba o movimento dos primários, sendo apenas perturbado por eles. Com isso, o sistema dado pelas equações (2.15), que é de ordem 12 no caso plano, fica reduzido a um sistema de ordem 4.

Supõe-se que as órbitas circulares de M_1 e M_2 tenham raios a e b , respectivamente, como mostra a Figura 2.2. Nesta figura, $X-Y$ é um sistema de coordenada fixo (ou inercial), $\bar{X}-\bar{Y}$ é um sistema que gira com velocidade angular n de forma a acompanhar o movimento de M_1 e M_2 (ou seja, M_1 e M_2 permanecem fixos nesse sistema de referência) e t é o tempo.

Com as definições de a e b e, igualando a força centrífuga à força gravitacional, temos:

$$\frac{Gm_1m_2}{(a+b)^2} = m_1an^2 = m_2bn^2 \quad (2.17)$$

A terceira lei de Kepler toma a forma:

$$Gm_1m_2 = n^2(a+b)^3 \quad (2.18)$$

Definindo a terminologia $m = m_1 + m_2$ e $L = a + b$, podemos dizer que:

$$a = \frac{m_2L}{m} \text{ e } b = \frac{m_1L}{m} \quad (2.19)$$

Fazendo $\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ e $\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$, a força sofrida pelo corpo M_3 no referencial inercial corresponde a:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} \quad (2.20)$$

Considerando a posição \vec{r}_3 de M_3 no referencial inercial como (x,y) , a posição de M_1 (\vec{r}_1) como (x_1,y_1) e a posição de M_2 (\vec{r}_2) como (x_2,y_2) , podemos dizer que:

$$\begin{aligned} x_1 &= -a \cos(nt) & y_1 &= -a \sin(nt) \\ x_2 &= b \cos(nt) & y_2 &= b \sin(nt) \end{aligned}$$

Logo, a equação (2.20) pode ser separada em duas componentes:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -G \left[m_1 \frac{(x + a \cos(nt))}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(x - b \cos(nt))}{r_{23}^3} \right] \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -G \left[m_1 \frac{(y + a \sin(nt))}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(y - b \sin(nt))}{r_{23}^3} \right]\end{aligned}\quad (2.21)$$

Estas são as equações de movimento de M_3 no sistema fixo de referência. Transportando para o sistema sinódico de referência (que gira com M_1 e M_2), pode-se eliminar explicitamente o tempo, já que no referencial girante as posições de M_1 e M_2 permanecem fixas. A partir da Figura 2.2, podemos concluir que as equações que transformam um sistema em outro são:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cos(nt) - \bar{y} \sin(nt) \\ y &= \bar{x} \sin(nt) + \bar{y} \cos(nt)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Essas equações podem ser colocadas na forma exponencial pela expressão:

$$S = se^{jnt}, \text{ na qual } s = \bar{x} + j\bar{y}, S = x + jy, j = \sqrt{-1}\quad (2.23)$$

S e s indicam a posição do corpo M_3 nos dois sistemas de referência utilizados. A partir da equação (2.23), pode-se concluir que:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{ds}{dt} e^{jnt} + se^{jnt} (jn) \\ \frac{d^2S}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} e^{jnt} + \frac{ds}{dt} e^{jnt} (jn) + \frac{ds}{dt} e^{jnt} (jn) + se^{jnt} (jn)^2 \\ &= \left[\frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} (jn) - sn^2 \right] e^{jnt}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Nessas variáveis, as demais expressões necessárias são:

$$\begin{aligned}r_{13} &= |S - S_1| \\ r_{23} &= |S - S_2|\end{aligned}\quad (2.25)$$

Nas quais $S_1 = -ae^{jnt}$ é a posição de M_1 e $S_2 = be^{jnt}$ é a posição de M_2 . Da geometria da Figura 2.2, temos:

$$\begin{aligned} r_{13} &= \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2} \\ r_{23} &= \sqrt{(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Combinando as expressões (2.21) e (2.24), temos:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \left[\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} (jn) - n^2 s \right] e^{jnt} = -G \left[m_1 \frac{(s+a)}{|s+a|^3} + m_2 \frac{(s-b)}{|s-b|^3} \right] e^{jnt}$$

Separando a parte real e imaginária:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt} - n^2 \bar{x} &= -G \left[m_1 \frac{(\bar{x} + a)}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(\bar{x} - b)}{r_{23}^3} \right] \\ \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} - 2n \frac{d\bar{x}}{dt} - n^2 \bar{y} &= -G \left(\frac{m_1 \bar{y}}{r_{13}^3} + \frac{m_2 \bar{y}}{r_{23}^3} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nota-se que o lado direito dessas equações não depende explicitamente do tempo. Em compensação, surgiram novos termos do lado esquerdo. A vantagem do referencial sinódico é mais evidente quando deriva-se a constante de Jacobi, que consiste em uma integral do movimento, sendo mais facilmente deduzida nesse referencial. Ela é a única integral de movimento associada ao Problema Restrito Circular de Três Corpos (PRCTC).

Definindo a função-força para as equações de movimento. Seja:

$$F = \frac{n^2}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + G \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) \quad (2.28)$$

As equações (2.27) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt} - n^2 \bar{x} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \\ \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} - 2n \frac{d\bar{x}}{dt} - n^2 \bar{y} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.4.1.1.1 A INTEGRAL DE JACOBI

Segundo Prado (2001), para obtermos a integral de Jacobi, devemos multiplicar a primeira das equações (2.29) por $\frac{d\bar{x}}{dt}$, a segunda por $\frac{d\bar{y}}{dt}$, somar os resultados e integrar no tempo. Procedendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \right) \frac{d\bar{x}}{dt} + \left(\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} \right) \frac{d\bar{y}}{dt} \right] dt &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right) dt = F - \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Lembrando que $dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} d\bar{y}$.

Essa expressão pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right] &= \bar{V}^2 = 2F - C \\ \bar{V}^2 &= n^2 \bar{r}^2 + 2G \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) - C \end{aligned} \quad (2.31)$$

Esse resultado, conhecido como “Integral de Jacobi”, foi primeiro descoberto por Jacobi em 1836.

2.4.1.1.2 SISTEMA DE UNIDADES CANÔNICAS

Par simplificar as equações de movimento utiliza-se quantidades adimensionais. Definindo as seguintes grandezas (Prado, 2001):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad t^* = nt \\ r_1 &= \frac{r_{13}}{L}, \quad r_2 = \frac{r_{23}}{L}, \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$F_a = \frac{F}{L^2 n^2}$$

Considerando que os subscritos x e y indicam derivadas parciais de Ω , as equações de movimento ficam:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \\ \Omega &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\end{aligned}\tag{2.33}$$

Assim, a integral de Jacobi fica:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2F_a - C\tag{2.34}$$

Ao escolher o sistema adimensional acima, ficam implícitas as seguintes regras:

- 1) A unidade de distância passa a ser a distância entre M_1 e M_2 .
- 2) A unidade de massa corresponde a $m = m_1 + m_2$.
- 3) A velocidade angular do movimento de M_1 e M_2 torna-se unitária.
- 4) A constante gravitacional se torna $G=1$.
- 5) O período do movimento angular M_1 - M_2 resulta 2π .

Escolhendo o sistema de unidades canônicas, pode-se simplificar a expressão do potencial Ω , bastando definir μ como sendo a massa do menor primário. A massa do maior primário será $\mu_1=1-\mu$. Com isso, a expressão do potencial fica:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \\ r_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - 1 + \mu)^2 + y^2\end{aligned}\tag{2.35}$$

2.4.1.1.3 OS PONTOS LAGRANGIANOS

Pontos Lagrangianos (ou pontos estacionários) são os pontos de equilíbrio do Problema Restrito de Três Corpos, pontos estes em que a equação $\Omega_x=\Omega_y=0$ é satisfeita. Observando as equações (2.33), nota-se que uma partícula colocada num ponto de

equilíbrio com velocidade inicial nula irá permanecer nesse ponto indefinidamente. Efetuando as derivadas de Ω em relação a x e y , para obtermos a posição desses pontos, temos:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0 \\ \Omega_y &= y \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0\end{aligned}\tag{2.36}$$

Podemos, então, observar dois tipos de solução:

- a) Para $y = 0$, a segunda equação fica satisfeita e a primeira equação transforma-se em uma equação em x . Resolvendo-se essa equação, obtêm-se os três pontos de equilíbrio colineares L_1 , L_2 e L_3 . A Figura 2.4 mostra a posição aproximada desses pontos, mas a posição exata depende do valor de μ .
- b) Para $y \neq 0$, a única maneira de satisfazer a segunda equação é fazer $r_1=r_2=1$. Essa solução também satisfaz a primeira equação e fornece mais dois pontos de equilíbrio (L_4 e L_5), sendo que estes são denominados pontos triangulares pois, junto com M_1 e M_2 , formam um triângulo equilátero.

A determinação das condições para a estabilidade também é importante pois determina o que acontece a uma partícula quando esta é colocada em um ponto de equilíbrio e sofre um pequeno deslocamento. A bibliografia básica trata desse assunto e tem por conclusão:

- a) Os pontos colineares são sempre instáveis.
- b) Os pontos triangulares são estáveis se $\mu < 0,0385$.

A Figura 2.5 apresenta um gráfico com as curvas de velocidade zero para os Pontos Lagrangianos.

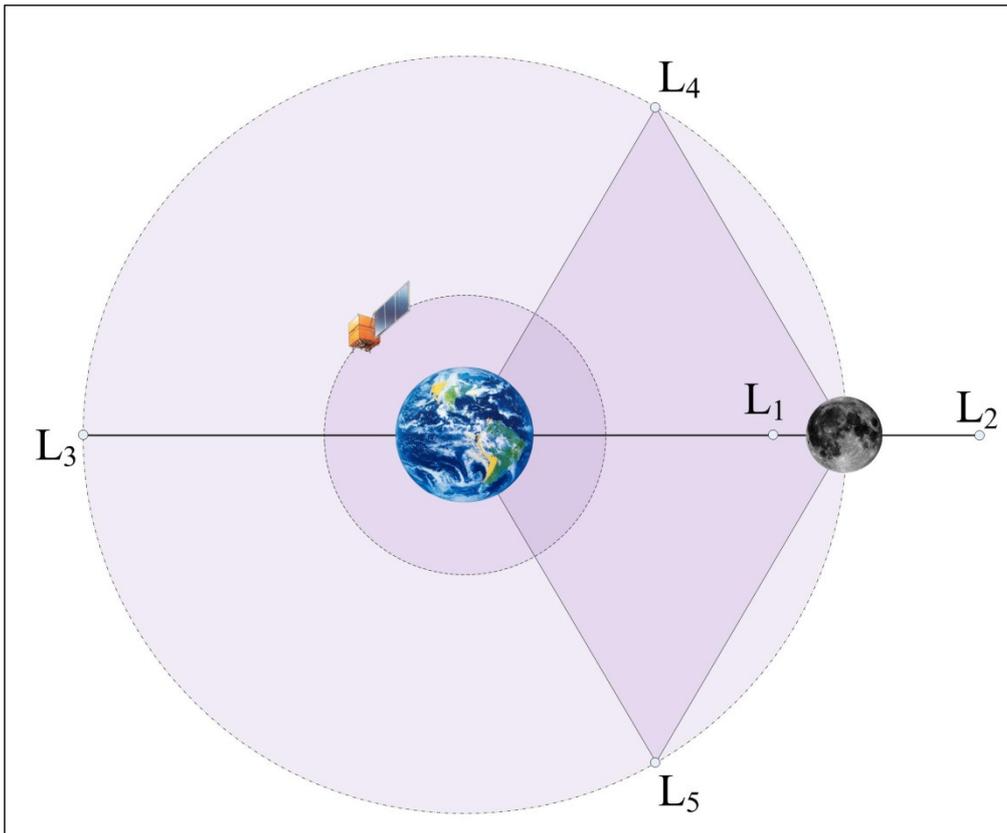


Fig. 2.4 - Localização dos Pontos Lagrangianos.

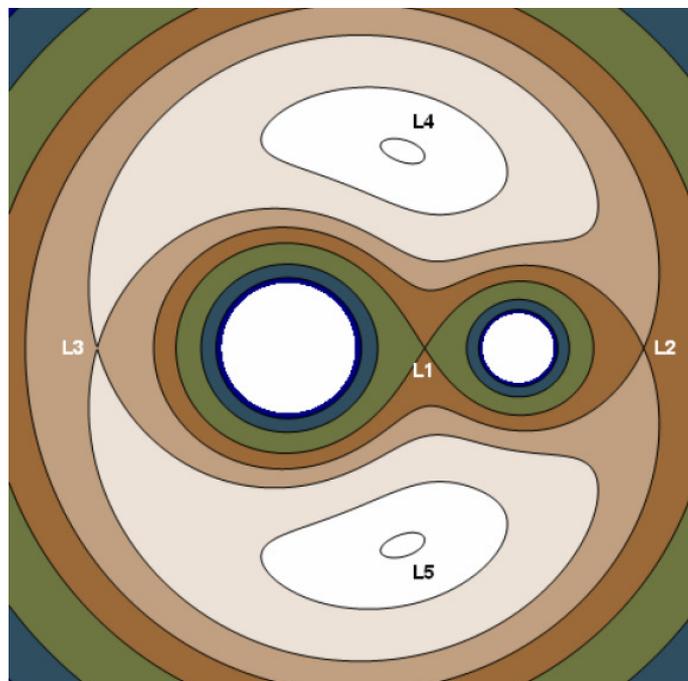


Fig. 2.5 - Curva de velocidade zero e Pontos Lagrangianos para o Problema Restrito de Três Corpos. Fonte: Formiga (2009).

2.4.1.2 PROBLEMA RESTRITO PLANO-ELÍPTICO DE TRÊS CORPOS

Nesta versão do problema, considera-se que os dois primários do sistema descrevem órbitas elípticas em torno de centro de massa comum (Gomes, 2004). De acordo com Prado (2001), as seguintes hipóteses são assumidas:

- 1) A unidade de distância corresponde ao semi-eixo maior da órbita de M_1 e M_2 .
- 2) A velocidade angular (ω) do movimento de M_1 e M_2 é unitária.
- 3) A massa do menor primário (M_2) é dada por $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, sendo que m_1 e m_2 são as massas reais de M_1 e M_2 , respectivamente, e a massa de M_1 é $1 - \mu$ para a massa total ser unitária.
- 4) A unidade de tempo é definida de tal maneira que o período do movimento dos primários é 2π .
- 5) A constante de gravitação é unitária.

A seguir, serão apresentados dois sistemas de referência que podem ser utilizados para descrever esse tipo de problema. Lembrando que existem outros sistemas de referência.

2.4.1.2.1 SISTEMA FIXO

Neste sistema de referência, as posições de M_1 e M_2 são dadas por (Prado, 2001):

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= -\mu r \cos v \\ \bar{y}_1 &= -\mu r \operatorname{sen} v \\ \bar{x}_2 &= (1 - \mu)r \cos v \\ \bar{y}_2 &= (1 - \mu)r \operatorname{sen} v\end{aligned}\tag{2.37}$$

A origem fica localizada no baricentro dos dois corpos massivos M_1 e M_2 . O eixo horizontal \bar{x} é a linha conectando M_1 e M_2 (no instante inicial) e o eixo vertical é perpendicular ao eixo \bar{x} . Nas equações acima, r é a distância entre os dois primários

dada por $r = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}$ e v corresponde a anomalia verdadeira de M_2 .

As equações de movimento da partícula de massa infinitesimal são dadas por:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{x}} &= \frac{-(1-\mu)(\bar{x}-\bar{x}_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\bar{x}-\bar{x}_2)}{r_2^3} \\ \ddot{\bar{y}} &= \frac{-(1-\mu)(\bar{y}-\bar{y}_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\bar{y}-\bar{y}_2)}{r_2^3}\end{aligned}\quad (2.38)$$

Nas quais r_1 e r_2 são as distâncias da partícula até M_1 e M_2 , dadas por:

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (\bar{x}-\bar{x}_1)^2 + (\bar{y}-\bar{y}_1)^2 \\ r_2^2 &= (\bar{x}-\bar{x}_2)^2 + (\bar{y}-\bar{y}_2)^2\end{aligned}\quad (2.39)$$

2.4.1.2.2 SISTEMA GIRANTE E PULSANTE

Neste sistema, a origem também fica localizada no baricentro dos dois corpos massivos M_1 e M_2 . O eixo horizontal x permanece sobre a linha conectando M_1 e M_2 , girando juntamente com esses dois corpos com uma velocidade angular variável. Para que as coordenadas de M_1 e M_2 fiquem constantes nesse sistema, o eixo horizontal sofre uma contração pelo fator instantâneo r (Gomes, 2004). A versão planar do problema possui as seguintes equações de movimento (Prado, 2001):

$$\begin{aligned}x'' - 2y' &= \frac{r}{p} \left(x - m_1 \frac{x-x_1}{r_1^3} - m_2 \frac{x-x_2}{r_2^3} \right) \\ y'' + 2x' &= \frac{r}{p} \left(y - m_1 \frac{y}{r_1^3} - m_2 \frac{y}{r_2^3} \right) \\ r'' &= \frac{-2}{p} r^3 + \frac{3}{p} r^2 - r \\ t' &= \frac{r^2}{(p)^{1/2}}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Nessas equações, $p = 1 - e^2$ corresponde ao *semilatus rectum* da órbita elíptica dos dois primários, x_1 é a abscissa de M_1 , x_2 é a abscissa de M_2 , t é o tempo e as derivadas apresentadas (primeira e segunda) estão relacionadas à anomalia verdadeira.

A Figura 2.6 ilustra uma possível configuração do Problema Restrito Plano-Elíptico de Três Corpos.

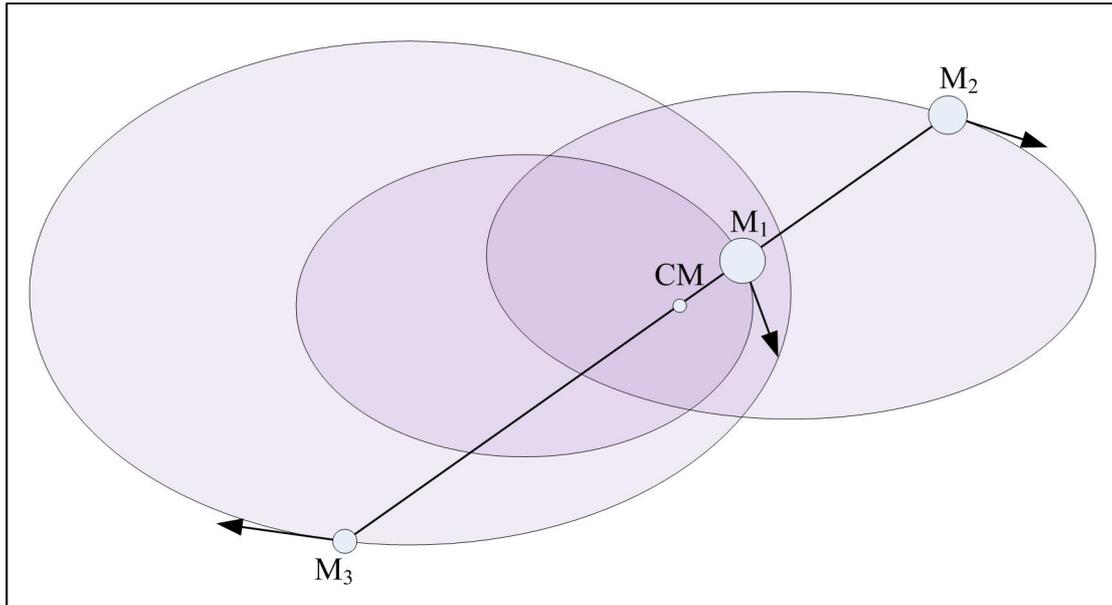


Fig. 2.6 - Representação do movimento em uma das possíveis configurações do Problema Plano-Elíptico de Três Corpos. Nesta imagem, $m_1:m_2:m_3 = 3:2:1$.

2.4.1.3 PROBLEMA RESTRITO TRIDIMENSIONAL DE TRÊS CORPOS

As equações de movimento deste sistema, deduzidas a partir das leis de Newton e da lei da gravitação universal, são (Szebehely, 1967):

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} \\
 \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\
 \ddot{z} &= -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Sendo que:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= ((x+y)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\
 r_2 &= ((x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}
 \end{aligned}$$

A Figura 2.7 apresenta uma possível configuração para o Problema Restrito Tridimensional de Três Corpos.

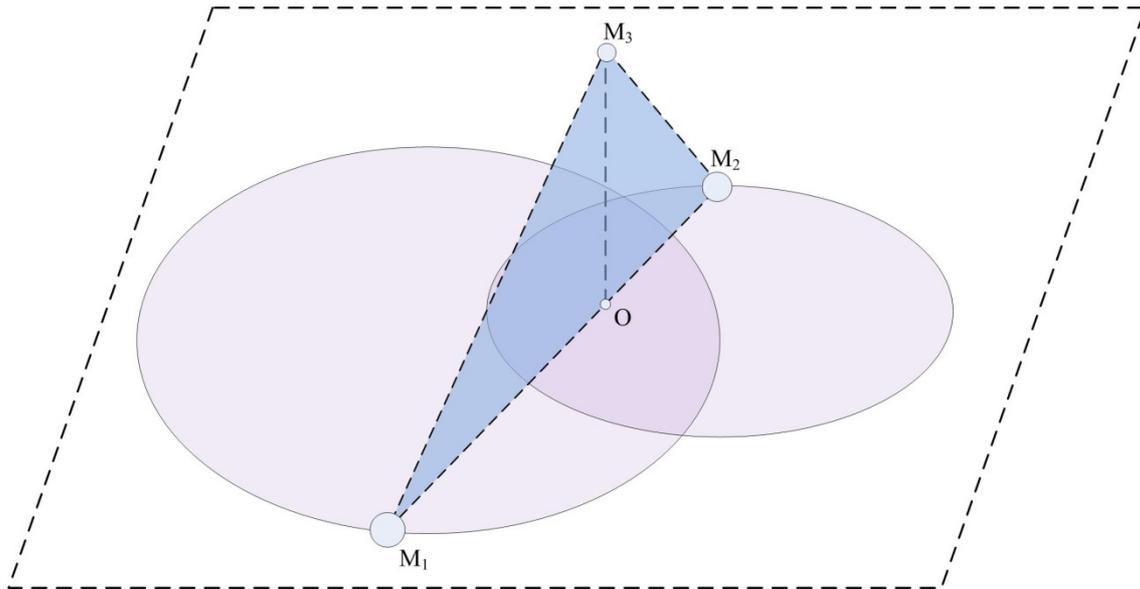


Fig. 2.7 - Representação do Problema Restrito Tridimensional de Três Corpos. M_3 movimenta-se sobre a reta que passa por O e é ortogonal ao plano de movimento dos corpos primários.

2.4.2 TRAJETÓRIAS NO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Em Prado (1993) e Prado e Broucke (1995 e 1996) mostrou-se uma transferência orbital com ΔV próximo de zero utilizando a modelagem do Problema Restrito de Três Corpos (PRTC) apresentada nas seções anteriores. O problema consistiu em transferir um veículo espacial partindo da Terra para uma trajetória em torno do Sol, retornando, em seguida, para as proximidades da Terra.

A Figura 2.8 mostra uma trajetória desse tipo (no sistema girante de referência). O impulso (ΔV) necessário para obter um escape da Terra é de 0,3735 unidades canônicas, sendo este o valor mínimo supondo-se válida a modelagem de dois corpos para qualquer transferência a partir da Terra. O ΔV encontrado no trabalho citado foi de 0,3839 unidades canônicas, apenas levemente superior ao mínimo absoluto.

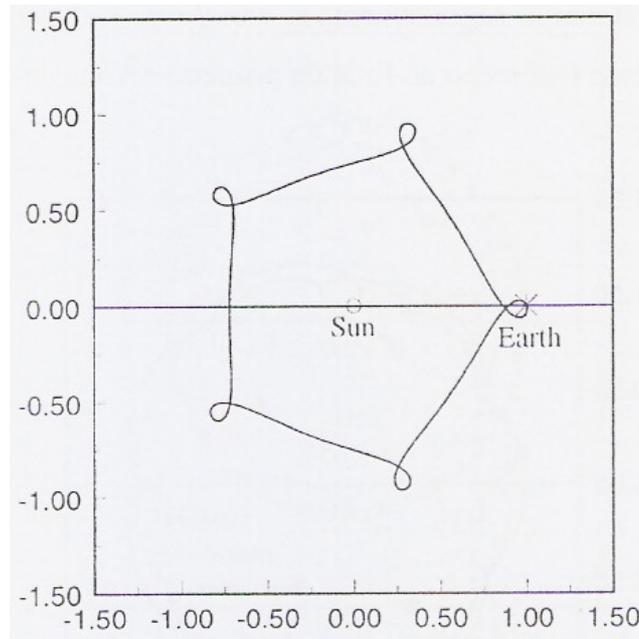


Fig. 2.8 - Transferência orbital com ΔV mínimo vista do referencial girante. Fonte: Prado (1993).

Outro exemplo de aplicação do modelo do PRTC apresentado nos trabalhos mencionados consiste em uma trajetória no sistema Terra-Lua em que o veículo espacial parte da Lua (M_2), faz uma trajetória em torno da Terra (M_1) e, em seguida, retorna à Lua. O impulso requerido para iniciar essa transferência é muito próximo do mínimo dado pela mecânica celeste de dois corpos. A Figura 2.9 ilustra essas trajetórias.

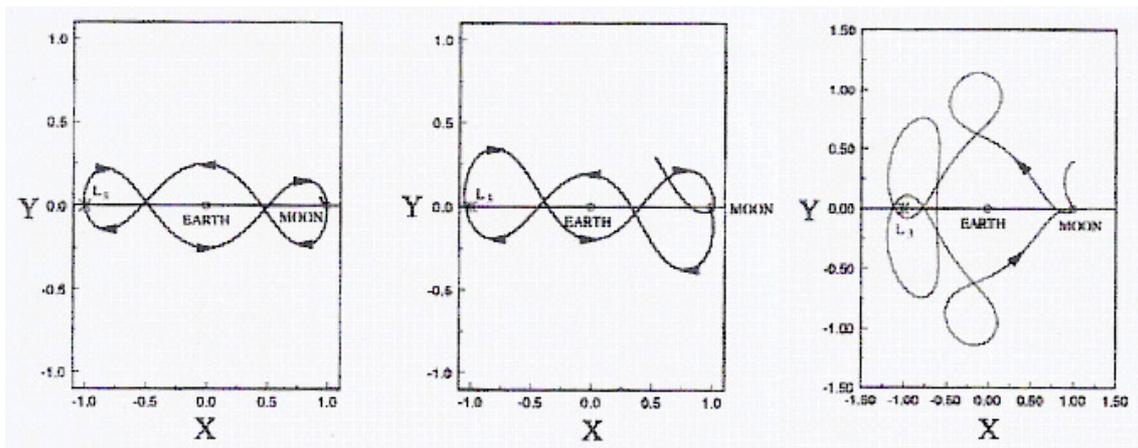


Fig. 2.9 - Transferências saindo da Lua e retornando a ela. Fonte: Prado(1993).

2.5 ALGORITMOS GENÉTICOS

Inspirado na maneira como o darwinismo explica o processo de evolução das espécies, John Holland desenvolveu os Algoritmos Genéticos (AGs). Holland acreditava que a incorporação das características naturais de evolução em um computador poderia produzir uma técnica para solucionar problemas da mesma maneira como funcionam na natureza os processos de seleção e adaptação, o que resultou no livro "*Adaption in Natural and Artificial Systems*", publicado em 1975 (Linden, 2003).

Algoritmo Genético consiste em uma técnica de busca e otimização com a troca de informação de uma forma estruturada, pré-m aleatória. Essa ferramenta se mostra eficiente quando não se tem o domínio completo do problema e/ou quando se tem um espaço de busca muito grande, pois os AGs não usam apenas informações locais, explorando o maior espaço de busca possível. Os AGs são geralmente utilizados para solucionar problemas de difícil otimização (com muitas restrições), e quando não existe nenhuma outra técnica específica para resolver tal problema.

2.5.1 FUNCIONAMENTO DOS ALGORÍTIMOS GENÉTICOS

O problema de otimização pode ser representado da seguinte forma (Brandão e Saramago, 2011):

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x) & \text{sujeito a } \begin{array}{l} c_i(x) = 0, i \in I \\ c_i(x) \geq 0, i \in D \end{array} \end{array} \quad (2.42)$$

Sendo que:

- a) x é o vetor das variáveis de projeto (ou parâmetros do projeto);
- b) f é a função objetivo;
- c) c_i são funções de restrição (funções escalares de x que definem certas equações ou inequações que as variáveis devem obedecer);
- d) I e D representam os conjuntos de índices das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente;

De acordo com Linden (2003), a implementação de um algoritmo genético inicia-se com uma população aleatória de cromossomos (ou indivíduos), que correspondem a um ponto no espaço de soluções do problema em questão. O processo de solução adotado nos algoritmos genéticos consiste em gerar um grande número de indivíduos (população) de forma a promover uma varredura tão extensa quanto necessária do espaço de soluções.

Essas estruturas são avaliadas e associadas a uma probabilidade de reprodução de tal forma que as maiores probabilidades são associadas aos cromossomos que representam uma melhor solução para o problema de otimização do que aqueles que representam uma solução pior. Este método é conhecido por método de seleção por roleta (o qual foi utilizado neste projeto). A aptidão da solução é tipicamente definida com relação à população corrente e é calculada por meio da função objetivo do problema. (Linden, 2003).

Cada iteração do algoritmo genético corresponde à aplicação de um conjunto de quatro operações básicas: cálculo de aptidão, seleção, cruzamento e mutação. Ao fim destas operações cria-se uma nova população, chamada de geração que, espera-se, representa uma melhor aproximação da solução do problema de otimização que a população anterior (Lucas, 2002).

A regra de cada iteração k para minimizar uma função por meio de uma busca aleatória é (Brandão e Saramago, 2011):

$$x^{k+1} = \begin{cases} x^k + z^k & \text{se } f(x^k + z^k) \leq f(x^k) \text{ sucesso} \\ x^k & \text{caso contrário falha} \end{cases} \quad (2.43)$$

O vetor aleatório z^k que, nesta notação, efetua mudanças no vetor x^k , pertence à distribuição normal $(0, \sigma^2)$ com esperança $\xi = 0$ e variância σ^2 que, no caso mais simples, é a mesma para todas as componentes. Pode-se, assim, considerar $\sigma\sqrt{n}$ como um tipo de comprimento do passo médio. A direção de z^k é uniformemente distribuída em \mathfrak{R}^n , ou seja, sua escolha é puramente aleatória.

Como critérios de parada do algoritmo em geral são usados a aptidão do melhor indivíduo em conjunto com a limitação do número de gerações. Outros critérios podem envolver, por exemplo, um erro abaixo de um valor especificado para um determinado parâmetro do problema (Linden, 2003).

O esquema de um AG simples é apresentado na Figura 2.10.

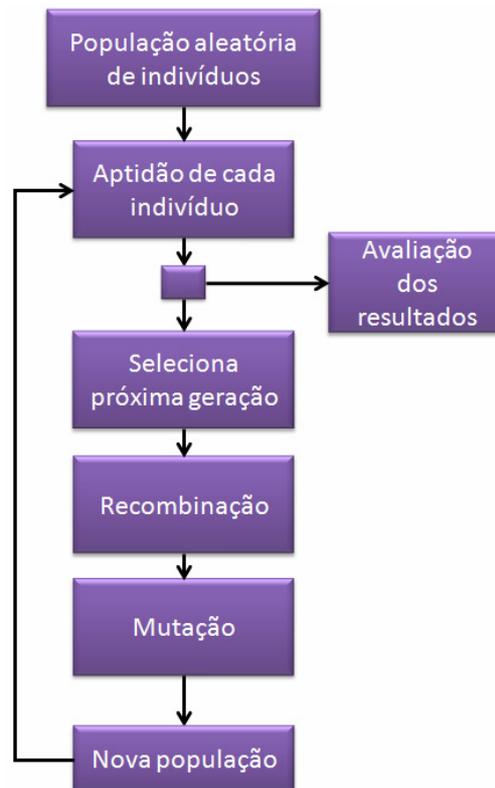


Fig. 2.10 - Esquema de um Algoritmo Genético simples.

Mais detalhes sobre o funcionamento e a teoria dos Algoritmos Genéticos podem ser encontrados no Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (Araújo, 2011).

2.6 MÉTODO NUMÉRICO DE INTEGRAÇÃO DE ÓRBITA

Para a resolução das equações diferenciais de segunda ordem que modelam o movimento no Problema Restrito de Três Corpos, utilizou-se um método numérico pra integração. O método numérico, também chamado de método de perturbação especial, tem a capacidade de lidar com qualquer tipo de situação com uma precisão arbitrária, utilizando procedimentos de cálculo passo a passo. Este método é bastante utilizado

quando se requer precisão ou o número de revoluções da órbita a ser integrada é limitado, porque sua maior desvantagem reside na lentidão do método devido à sequência de cálculos passo a passo. Basicamente tais métodos tentam fazer aproximações polinomiais da trajetória e, portanto, integram exatamente um polinômio de certo grau a menos de erros de discretização.

Neste projeto, utilizou-se o método numérico conhecido como *Runge-Kutta de Quarta Ordem* pra integrar equações diferenciais.

2.6.1 RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Essa técnica aproxima a função de derivadas em série de Taylor para calcular as primeiras derivadas em pontos dentro do intervalo de extrapolação. A forma genérica do Runge-Kutta é dada por (Barroso *et al*, 1987):

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^R w_i k_i \quad (2.44)$$

Na qual w_i são pesos, R o número de avaliações de f , e k_i são funções dadas por:

$$k_i = hf \left(t_n + c_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) \quad (2.45)$$

Com $c_1 = 0$, $i = 1, 2, \dots, R$. Logo:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \\ k_2 &= hf(t_n + c_2 h, x_n + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + c_3 h, x_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

O método de Runge-Kutta é estável e não exige um procedimento de inicialização. Ele é relativamente simples, fácil de implementar, produz um pequeno erro de truncamento, e o tamanho do passo é fácil de ser mudado. Uma das desvantagens é que não existe um caminho simples para determinar o erro de truncamento, logo, é tarefa difícil determinar o tamanho do passo adequado. Uma característica óbvia é que as informações usadas se referem somente ao passo de integração atual (Barroso *et al*, 1987).

A formulação para o Runge-Kutta de ordem 4 (RK4) é (Barroso *et al*, 1987):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.46)$$

Na qual:

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3)$$

3 METODOLOGIA

O problema foi modelado dentro da dinâmica do Problema Restrito de Três Corpos, assumindo-se que o veículo espacial constitui o corpo de massa infinitesimal ($m \rightarrow 0$) e seu movimento é perturbado pelos outros corpos primários presentes no sistema. Consideraram-se atuadores dotados de sistema propulsivo de empuxo infinito (no qual assume-se que o motor seja capaz de aplicar um empuxo instantâneo de magnitude infinita, sendo que o efeito desse impulso é medido através de uma variação instantânea na velocidade do veículo espacial, que é suposto ter uma trajetória contínua). Essa consideração simplifica o problema, mantendo uma precisão razoável. As fases sem propulsão são adotadas como órbitas keplerianas, perturbadas apenas pelo potencial gravitacional dos primários.

A trajetória estudada foi uma manobra orbital descrita por um veículo espacial que, a princípio, orbita a Terra. No instante inicial da manobra, um impulso de velocidade (ΔV) é aplicado, deslocando o veículo de sua trajetória para uma órbita de transferência que o levará até a Lua, contornando-a e voltando para a Terra.

Os algoritmos desenvolvidos estão na forma de *scripts* do MATLAB. Para o algoritmo genético, considerou-se uma população de 100 indivíduos, probabilidade de *crossover* (ou recombinação) de 70% e probabilidade de mutação correspondente a 0,5%. Utilizou-se codificação binária, sendo que cada solução do espaço de projeto corresponde a uma *string* de 16 bits.

Como função objetivo utilizaram-se as equações (2.33), (2.38) e (2.41) para os movimentos modelados no Problema Restrito Plano-Circular de Três Corpos, Problema Restrito Plano-Eliptico de Três Corpos e Problema Restrito Tridimensional de Três Corpos, respectivamente. Essas equações, ao serem integradas, fornecem a trajetória do veículo espacial. Foram feitas as devidas transformações de coordenadas necessárias em cada caso. Buscou-se otimizar os parâmetros das equações citadas, minimizando a trajetória descrita e os impulsos de velocidade necessários para completar a manobra.

A função objetivo é construída a partir dos parâmetros envolvidos no problema, permitindo o cálculo da aptidão bruta de cada indivíduo, valor este que será utilizado no cálculo de sua probabilidade de ser selecionado para participar do processo reprodutivo

nas próximas gerações. A avaliação de cada indivíduo é independente, mas a qualidade do seu grau de adaptação ao ambiente vai depender dos demais indivíduos da população. Os resultados serão apresentados de acordo com o número de avaliações da função objetivo durante as gerações avaliadas.

Quanto aos *scripts* desenvolvidos para modelagem do Problema Restrito de Três Corpos, estes simulam a situação anteriormente descrita em que o veículo percorre a trajetória Terra-Lua-Terra. Os seguintes dados foram empregados:

- Terra (M_1):
 - Raio = 6378 km;
 - Massa = $5,97 \cdot 10^{24}$ kg;
- Lua (M_2):
 - Raio = 1737 km;
 - Massa = $7,36 \cdot 10^{22}$ kg;
- Veículo espacial (M_3):
 - Massa = 1450 kg;
- Distância Terra-Lua: 384400 km;
- Constante de Gravitação Universal (G): $6,6742 \cdot 10^{-20}$

Para as comparações de resultados, utilizaram-se códigos em MATLAB disponíveis em Curtis (2009).

4 RESULTADOS PARCIAIS E CONCLUSÕES

Neste trabalho foram estudados os principais conceitos relacionados ao Problema de N Corpos, focando no Problema Restrito de Três Corpos. Abordou-se toda a teoria envolvida neste sistema dinâmico. Estudou-se a teoria de perturbações de órbita, teoria do caos, transformações canônicas, teoria de controle ótimo e integrabilidade, conceitos estes que caracterizam uma dinâmica diferente do trabalho anteriormente realizado, o qual concentrou-se no sistema envolvendo dois corpos, desconsiderando perturbações.

No desenvolvimento dos algoritmos deste trabalho, foram utilizadas as ferramentas de programação estruturada CodeBlocks que possui interligação com o compilador MinGW e o MatLab para análise, modelamento e plotagem de gráficos.

O algoritmo genético foi inicialmente desenvolvido em MATLAB®, e estudado uma variante na linguagem C. Tanto a resolução do Problema Restrito de Três Corpos quanto o algoritmo genético foram desenvolvidos em módulos segmentados e independentes. Foram realizados testes em diversas condições separadamente, comparando os resultados obtidos com valores apresentados na literatura e utilizando funções-teste.

Contudo, na integração dos módulos, não foi possível acoplar ao algoritmo genético a função de resolução do Problema de Três Corpos, de forma, assim, a deixar esta atividade como trabalho futuro, completando o processo de otimização (mínimo consumo de combustível) de transferências orbitais neste modelo. Os resultados simulados serão comparados com o caso ideal (sem perturbação).

C) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, N. S. Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, Projeto: Estudo de Transferências Orbitais Utilizando Algoritmo Genético, INPE, S. J. Campos – SP, 2011.

BARROSO, L.C., BARROSO, M.M.A.,CAMPOS, F.F, CARVALHO, M.L.B., MAIA, M.L. Cálculo Numérico (Com Aplicações), 2ª Edição, Editora Harbra, São Paulo – SP, 1987.

BRANDÃO, M. A. L., SARAMAGO, S. F. P. Métodos Estocásticos de Otimização: Algoritmos Genéticos e Evolução Diferencial, Faculdade de Matemática, UFU, São Carlos – SP, 2011.

CARRARA, V., KUGA, H. K., RAO, K. R. Introdução à Mecânica Orbital, 2ª Edição, INPE, S. J. Campos – SP, 2008.

CARVALHO, F. C. Transferências Ótimas a Baixo Empuxo e Potência Limitada Entre Órbitas Elípticas Quaisquer, Tese de Doutorado, INPE, S. J. Campos – SP, 2010.

CHOBOTOV, V. A. (Editor). Orbital Mechanics, 2nd Edition. AIAA Education Series, 1996.

CURTIS, H. D. Orbital Mechanics for Engineering Students, Second Edition, 2009

FORMIGA, J. K. S. Formas Normais no Estudo da Estabilidade para L4 no Problema Fotogravitacional, Tese de Doutorado, INPE, S. J. Campos – SP, 2009.

GOBETZ, F. W., DOLL, J. R. A Survey of Impulsive Trajectories. AIAA Journal, v. 7, p.801-834, 1969.

GODDARD, R. H. A Method of Reaching Extreme Altitudes. Smithsonian Institute Public Miscelanea Collect, v. 71, n. 2, 1919.

GOMES, G. Estudo do Problema dos Três Corpos, Dissertação de Mestrado, UFPE, Recife – PE, 2004.

HOELKER, R.F., SILBER, R. The Bi-Elliptic Transfer Between Circular Coplanar Orbits. Alabama: Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Jan. 1959. (DA Tech Memo 2-59).

HOHMANN, W. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper. Oldenbourg, Munique: [s.n.], 1925.

HOLLAND, J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. MIT Press, 1975.

KUGA, H. K., RAO, K. R. Introdução a Determinação de Órbitas e Manobras Orbitais. In: PRADO, A. F. B. A., KUGA, H. K. (Eds). Fundamentos de Tecnologia Espacial. S. J. Campos – SP: INPE, 2001. p. 38-49

LINDEN, R. Algoritmos Genéticos: Uma Importante Ferramenta da Inteligência Computacional, 2ª Edição. Brasport, Rio de Janeiro, 2008.

LUCAS, D. C. Algoritmos Genéticos: Uma Introdução. UFRGS, 2002.

MARCHAL, C., Transferts Optimaux Entre Orbites Elliptiques Coplanaires (Durée Indifférente), Astronautica Acta, v. 11, p. 432-445, 1965.

MICENA, F. P. Problema Restrito dos Três Corpos, Dissertação de Mestrado, USP, São Carlos – SP, 2007.

OBITKO, M., SLAVÍK, P. Visualization of Genetic Algorithms in a Learning Environment. In: Spring Conference on Computer Graphics, SCCG'99. Bratislava: Comenius University, 1999, p. 101-106. ISBN 80-223-1357-2.

PRADO, A. F. B. A., KUGA, H. K. (Eds). Fundamentos de Tecnologia Espacial. São José dos Campos – SP: INPE, 2001.

PRADO, A.F.B.A., BROUCKE, R. A. Transfer Orbits in the Earth-Moon System Using a Regularized Model. Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 19, No. 4, p. 929-933, 1996.

PRADO, A.F.B.A., BROUCKE, R. A. Transfer Orbits in Restricted Problem. Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 18, No. 3, p. 593-599, 1995.

PRADO, A.F.B.A., RIOS-NETO, A. Um Estudo Bibliográfico sobre o Problema de Transferências de Órbitas. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. XV, No. 1, 1993, pp. 65-78 (INPE-5601-PRE/1816).

PRADO, A.F.B.A. Análise, Seleção e Implementação de Procedimentos que Visem Manobras Ótimas de Satélites Artificiais, Dissertação de Mestrado, INPE, S. J. Campos, SP, 1989.

ROCCO, E.M., PRADO, A.F.B.A., SOUZA, M.L.O. Bi-Impulsive Orbital Transfers Between Non-Coplanar Orbits with Time Limit. Applied Mechanics in the Americas, Vol. 6, 1999, pp. 259-262. Editores: Djenane Pamplona, Charles Steele, Hans I. Weber, Paulo B. Gonçalves, Iwona Jasiuk, Luiz Bevilacqua. ISBN: 85-900726-1-4.

ROIG, F. V. Sistemas Dinâmicos: Problema de N Corpos. Disponível em: <http://staff.on.br/froig/apostilas/ncorpos.pdf>. Acessado em: 02/07/2011.

SANTOS, D. P. S. Aplicações em Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontros, Dissertação de Mestrado, INPE, S. J. Campos, 2005.

SZEBHELY, V. G. Theory of Orbits. New York: Academic Press, 1967.

TING, L. Optimum Orbital Transfer by Several Impulses. Astronautical Acta, Vol. 6, No. 5, 1960, pp. 256-265.