

# ESTIMAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE MASSA DE UMA MESA AEROSTÁTICA COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

**Alexandre Macedo de Oliveira**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle, INPE, alexandre@dem.inpe.br

**Hélio Koiti Kuga**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle, INPE, hkk@dem.inpe.br

**Valdemir Carrara**

Divisão de Mecânica Espacial e Controle, INPE, val@dem.inpe.br

**Resumo:** *Mancais aerostáticos têm sido utilizados para testes de sistemas de controle de atitude de satélites e para a verificação do software e da eletrônica embarcada há mais de 50 anos. Para a validação do ambiente de simulação do sistema de controle de atitude, é necessário o conhecimento acurado das características de massa do conjunto: momentos de inércia e centro de gravidade. A caracterização destas propriedades é muito importante, uma vez que um desalinhamento entre este centro e o centro de rotação do mancal provoca torques indesejados na mesa, que podem ser superiores às perturbações normalmente encontradas no ambiente espacial. Nesse artigo, é proposto um método para estimação das características de massa (matriz de inércia e posição do centro de gravidade) de uma mesa aerostática com três graus de liberdade. O método utiliza medidas de velocidades angulares provenientes de um sensor inercial, fixo ao corpo, e é capaz de estimar a atitude, momentos de inércia e centro de gravidade do conjunto. O algoritmo é baseado na dinâmica não-linear do movimento de atitude de um corpo rígido em conjunto com técnicas não-lineares de estimação.*

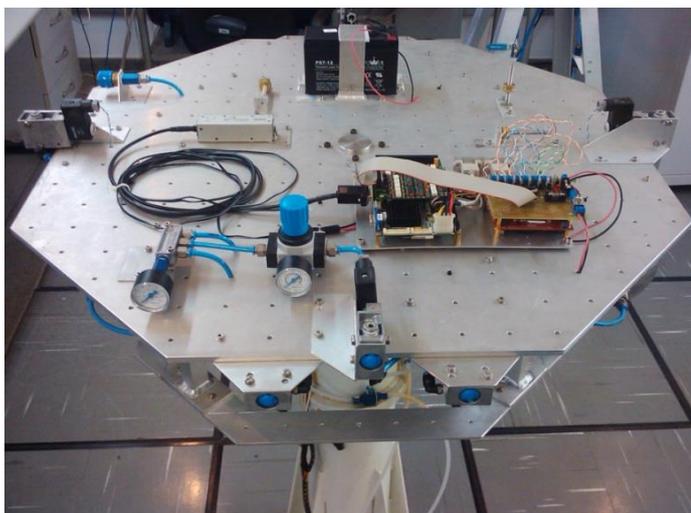
**Keywords:** *filtragem não-linear, estimação de parâmetros, mancal aerostático, sistemas inerciais.*

## 1 Introdução

Mancais aerostáticos têm sido utilizados para testes de sistemas de controle de atitude de satélites e para a verificação do software e da eletrônica embarcada há mais de 50 anos, coincidindo com o início da corrida espacial. Essa tecnologia foi sendo usada, à época, pelos Estados Unidos e pela antiga União Soviética, porém são poucas as informações encontradas deste último. Nos Estados Unidos, os primeiros registros de um mancal de três eixos para simulação do movimento de atitude de um satélite datam de 1959, em uma instalação militar (U.S. Army Ballistic Missile Agency) que foi incorporada posteriormente ao Marshall Space Flight Center da NASA. Em meados de 1990, o uso dessa tecnologia para simulação de um ambiente livre de torques já era bem comum em várias universidades espalhadas pela América do Norte, Europa e Japão (Schwartz et al, 2003). Os experimentos básicos realizados pelas universidades estão ligados às áreas de controle de atitude (Rizos et al, 1971), estimação de parâmetros (Agrawal e Rasmussen, 2001; Kim et al, 2001; Schwartz e Hall, 2003) e validação dos subsistemas espaciais, incluindo atuadores e sensores em geral.

No Brasil, o uso de mancais aerostáticos em aplicações espaciais está restrito ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e ao Instituto de Aeronáutica e Espaço, órgão filiado ao Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (IAE/DCTA). O Laboratório de Simulações (LABSIM) da Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC) do INPE possui, dentre outros equipamentos, três mesas aerostáticas para testes de sistemas de controle de atitude e para validação de componentes de um sistema inercial. A Figura 1 apresenta uma fotografia do mancal semiesférico de três eixos, usado no experimento relatado aqui.

A modelagem dos torques encontrados no ambiente espacial é importante, pois permite o que o sistema de controle seja projetado adequadamente. Estes modelos são igualmente empregados na propagação e determinação tanto da atitude quanto da órbita. Um satélite está sujeito a torques ambientais de diferentes origens. Pode-se citar o torque de gradiente de gravidade para corpos não simétricos, o torque de pressão de radiação solar, o torque aerodinâmico (também chamado de arrasto atmosférico), o torque causado por campos magnéticos residuais da eletrônica embarcada, entre outros (Wertz, 1978).



**Figura 1. Mancal aerostático semiesférico com três graus de liberdade (LABSIM/INPE).**

A simulação do desempenho do sistema de controle de atitude é essencial para o projeto e desenvolvimento deste sistema. É durante a simulação que os algoritmos de controle e manutenção da atitude são aprimorados e testados. Uma das formas disponíveis para se efetuar esta simulação é por meio de mesas de mancal aerostático, que simulam o ambiente espacial por apresentarem baixo atrito no mancal (tipicamente menor do que  $10^{-4}$  Nm).

As características da distribuição de massa (momentos de inércia e centro de gravidade) do conjunto formado pela mesa e equipamentos fixados a ela devem ser estimadas para que o sistema de controle seja ajustado adequadamente. A importância desta estimativa é fundamental quando se observa que um desalinhamento do centro de massa do conjunto com relação ao centro de rotação do mancal provoca torques indesejados na mesa, que podem ser superiores às perturbações normalmente encontradas no ambiente espacial.

Para a validação do algoritmo de estimativa, várias simulações da dinâmica de atitude foram feitas utilizando a biblioteca PROPAT (Carrara, 1999), uma ferramenta open-source para simulação e propagação de atitude e órbita de satélites.

A dinâmica de atitude de um corpo rígido é não linear e, portanto, necessita de um estimador de mesma classe. O Filtro de Kalman Estendido (FKE) é o filtro sequencial mais comumente usado para estimativa “online” da dinâmica de atitude de satélites (Schwartz e Hall, 2003), mesmo sendo de difícil implementação. O FKE é a linearização do Filtro de Kalman e incorpora ruídos no modelo da dinâmica do sistema e no modelo de observações. A solução das equações do filtro, ou seja, da melhor estimativa para o estado, é obtida em cada instante de amostragem das medidas. A versão linearizada do Filtro de Kalman, diferente da sua versão linear, não é ótima, visto que os termos de ordem superior não são considerados no método.

A principal vantagem em se usar o Filtro de Kalman a outros métodos é que este possui características de tempo real, visto que o processo de estimativa é feito na mesma frequência em que as medidas chegam ao computador de bordo e, por esse motivo, pode ser facilmente incorporado ao sistema de controle embarcado.

O algoritmo de filtragem deste artigo foi desenvolvido utilizando o software Matlab. O algoritmo utiliza de medidas de girômetros para a estimativa da matriz de inércia e da posição do centro de gravidade. O método será descrito na Seção 2.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Equações da Dinâmica de Atitude

A dinâmica de atitude de um corpo rígido, quando expressa em um referencial fixo ao corpo, é representada pela equação (1):

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}, \quad (1)$$

em que:  $\mathbf{I}$  é a matriz de inércia do corpo, definida por:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$\mathbf{w}$  é o vetor velocidade angular, definido por:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

e  $\mathbf{T}$  é o somatório dos torques externos, definido por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{amb} + \mathbf{T}_{con}, \quad (4)$$

em que  $\mathbf{T}_{amb}$  é o torque causado por características ambientais e  $\mathbf{T}_{con}$  é o torque de controle, aplicado por propulsores, rodas de reação ou bobinas magnéticas. Sendo assim, a dinâmica do corpo rígido é função não linear das velocidades angulares e dos torques externos, no tempo:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1} [(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}], \quad (5)$$

e portanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{T}, t). \quad (6)$$

A atitude de um veículo espacial pode ser representada por uma matriz de rotação, que permite relacionar coordenadas expressas em dois sistemas de coordenadas distintos. Normalmente, nas aplicações espaciais, a matriz de rotação associa um sistema móvel (satélite ou sonda) a um sistema fixo (inercial). Supondo um sistema de coordenadas móvel fixado no centro de massa do satélite, a matriz de rotação que associa os co-senos diretores desse sistema ao sistema inercial pode ser expressa através do quatérnio de atitude  $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\epsilon} \ \eta)$ , e é representada por:

$$\mathbf{C}_{bi} = (\eta^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^T - 2\eta \boldsymbol{\epsilon}^\times, \quad (7)$$

em que  $\boldsymbol{\epsilon}^\times$  representa a matriz antissimétrica do vetor  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\eta$  é a parte real do quatérnio e  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade de ordem 3. Definindo uma nova grandeza  $\boldsymbol{\Omega}$  por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}^\times & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

a cinemática, então, é propagada através da equação (9):

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q}. \quad (9)$$

## 2.2 Equações do Filtro de Kalman Estendido

O FKE é um algoritmo de estimação de estados que, com alguns ajustes, pode ser usado também para estimação de parâmetros. A maioria das referências sobre o assunto divide o algoritmo em duas fases: propagação e atualização/correção (Maybeck, 1979 e Aguirre, 2007).

Define-se um sistema genérico, com vetor de entrada  $\mathbf{u}$  e vetor de estados  $\mathbf{x}$ , vetor de observações  $\mathbf{y}$ , que pode ser descrito pelas equações (10) e (11):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{w} \quad (10)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (11)$$

As funções  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{h}$  são as funções não lineares que associam o vetor de estados  $\mathbf{x}$  à dinâmica e à observação, respectivamente. O ruído do processo e o ruído da observação são representados pelas variáveis aleatórias  $\mathbf{w} = \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ , distribuições normais de média nula e covariância  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , nesta ordem. Nota-se que a dinâmica do sistema é contínua e a observação é discreta.

Para um vetor  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ , a matriz de covariância  $\mathbf{P}$  tem dimensão  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$  e é definida como:

$$\mathbf{P} = \text{cov}[\mathbf{x}] = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^T] = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] - E[\mathbf{x}]E[\mathbf{x}^T]. \quad (12)$$

### 2.2.1 Propagação

A primeira fase do FKE baseia-se inteiramente na dinâmica do sistema. Dado o vetor de estados inicial  $\mathbf{x}_0$ , no tempo  $t_0$ , e conhecendo a entrada  $\mathbf{u}$  aplicada ao longo do tempo, os estados do sistema podem ser propagados e, portanto, preditos em qualquer tempo  $t_1$ , com  $t_1 > t_0$ . Essa propagação, portanto, é feita através de integração numérica da equação (6).

Para a propagação da covariância, utiliza-se a Equação de Ricatti contínua:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T, \quad (13)$$

em que a matriz  $\mathbf{G}$  associa o ruído do processo à covariância propagada e  $\mathbf{F}$  é a matriz jacobiana de  $\mathbf{f}$ , definida por:

$$\mathbf{F} = \text{Df}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Ao final do processo de propagação, obtém-se o vetor de estados  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  e a matriz de covariância  $\bar{\mathbf{P}}_{k+1}$ .

### 2.2.2 Atualização/Correção

O processo de atualização/correção é feito através da comparação da medida predita  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  com o valor real  $\mathbf{y}_{k+1}$ , obtido pelo sensor no instante  $t_1$ , com  $t_1 > t_0$ . O fator peso dado à medida propagada e à medida real é obtido pelo ganho de Kalman  $\mathbf{K}_{k+1}$ . Sendo assim, as equações que sintetizam o processo de atualização/correção são:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{P}}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \bar{\mathbf{P}}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \bar{\mathbf{P}}_{k+1} \quad (16)$$

$$\mathbf{Res}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Res}_{k+1}. \quad (18)$$

O vetor  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  é a melhor estimativa para as medidas no instante  $k + 1$ . O resíduo  $\mathbf{Res}_{k+1}$  é definido como a diferença entre a medida do sensor e o valor da função não linear  $\mathbf{h}$ , aplicada em  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$ . A matriz  $\mathbf{H}$  é a jacobiana de  $\mathbf{h}$ , aplicada no ponto  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$ , definida por:

$$\mathbf{H} = \text{Dh}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

A partir das medidas de  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  e  $\hat{\mathbf{P}}_{k+1}$ , o algoritmo é realimentado, iniciando novamente a propagação e, posteriormente, a atualização/correção.

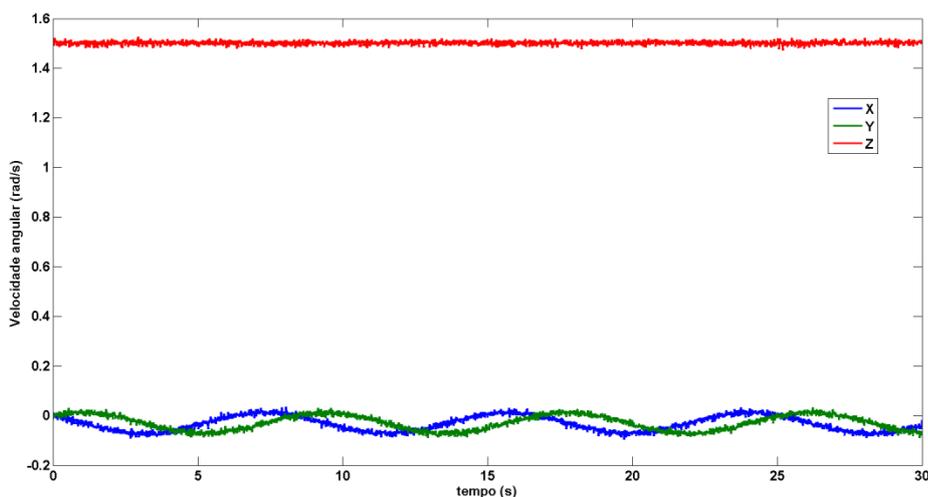
## 3 Desenvolvimento

O primeiro teste do algoritmo de filtragem foi feito utilizando dados de uma simulação gerada com o software PROPAT. A Tabela 1 mostra os dados utilizados para o integrador de atitude.

**Tabela 1. Dados iniciais para o integrador de atitude.**

	Condições Iniciais
Ângulos de Euler (graus)	$\theta_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$
Velocidade Angular (rad/s)	$w_0 = [0 \ 0 \ 1.5]^T$
Matriz de Inércia (Nm)	$I = \begin{bmatrix} 8.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 8.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 12.0 \end{bmatrix}$
Posição do CG (m)	$R_{CG} = [0.001 \ 0.001 \ 0]^T$

O tempo de simulação usado foi de 30 s, com o passo de integração de 0.01 s. Um ruído  $w = N(0, 4.9 \cdot 10^{-5})$  foi adicionado aos dados das velocidades angulares geradas pelo integrador. A massa do corpo usado na simulação é de 40 kg e a gravidade local foi considerada 10 m/s<sup>2</sup>. A Figura 2 mostra o gráfico com as velocidades angulares geradas.



**Figura 2. Velocidades angulares ruidosas geradas com o software PROPAT.**

Em cada instante de integração, a matriz de rotação é calculada a partir do quatérnio de atitude, através das equações (6) e (9). Então, a matriz de rotação é usada para levar o vetor correspondente à aceleração da gravidade do sistema inercial para o sistema fixo ao corpo. Assim, o torque correspondente ao deslocamento do CG poderá ser calculado nesse sistema de referência. O ruído adicionado aos dados representa agora o erro associado à medida do sensor inercial para o FKE.

Em seguida, o algoritmo de filtragem é executado e a fase de refinamento é iniciada. O tuning (como é chamado na literatura) é talvez a parte mais importante de um filtro de Kalman, visto que as escolhas da matriz de covariância inicial, condições iniciais e ruído dinâmico afetam fortemente o processo e a velocidade de convergência do filtro.

#### 4 Resultados

O vetor de estados  $X$  a ser estimado é:

$$X = [w_x w_y w_z I_{xx} I_{yy} I_{zz} I_{xy} I_{xz} I_{yz} mgR_x mgR_y mgR_z]^T, \tag{20}$$

composto pelas velocidades angulares, os momentos de inércia e a posição do CG. Por ser um sistema rígido, os momentos de inércia e a posição do CG são constantes.

##### 4.1 Resultados da simulação com o PROPAT

Várias simulações foram feitas a fim de encontrar as melhores condições para que o filtro convirja de forma satisfatória. A Tabela 2 mostra as condições iniciais e os valores esperados para as estimações do FKE.

**Tabela 2. Dados iniciais para o FKE aplicado aos dados da simulação com o PROPAT.**

	Condições Iniciais	Valores Esperados
Velocidade Angular (rad/s)	$\mathbf{w}_0 = [0 \ 0 \ 1.575]^T$	
Matriz de Inércia (Nm)	$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 8.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 8.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 12.6 \end{bmatrix}$	$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 8.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 8.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 12.0 \end{bmatrix}$
Torque do CG (kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$mg\mathbf{R}_{CG} = [-0.44 \ 0.44 \ 0.11]^T$	$mg\mathbf{R}_{CG} = [-0.4 \ 0.4 \ 0]^T$
Covariância (rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\mathbf{P} = \text{diag} [0.3 \ 0.3 \ 0.5 \ 1.0 \ 1.0 \ 2.0 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]$	
Ruído Dinâmico	$\mathbf{GQG}^T = \text{diag} [10^{-8} \ 10^{-8} \ 10^{-8} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$	
Ruído da Observação	$\mathbf{R} = \text{diag} [0.007 \ 0.007 \ 0.007]$	

O ruído adicionado aos dados simulados com o PROPAT foi escolhido com base na variância das medidas do sensor inercial, obtidas experimentalmente. O ruído dinâmico foi adicionado apenas nas equações da dinâmica de atitude. Os momentos de inércia escolhidos para iniciar o filtro estão com os valores 5% maiores que o esperado. As Figuras 3 e 4 mostram a variação dos momentos de inércia e da posição do CG estimados durante os 30 segundos de filtragem, com os respectivos desvios-padrões associados.

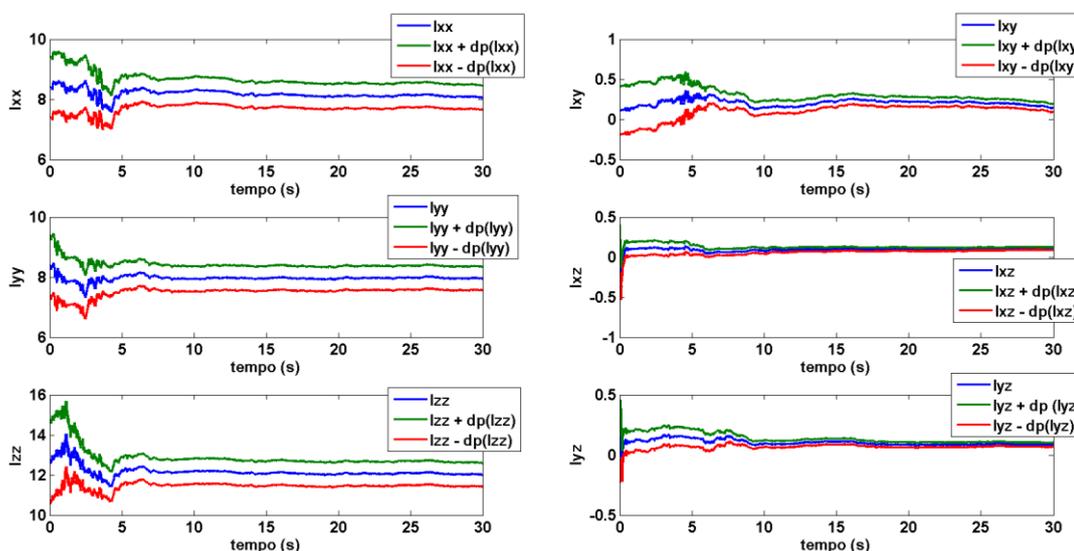


Figura 3. Estimação dos momentos de inércia para os dados simulados do PROPAT.

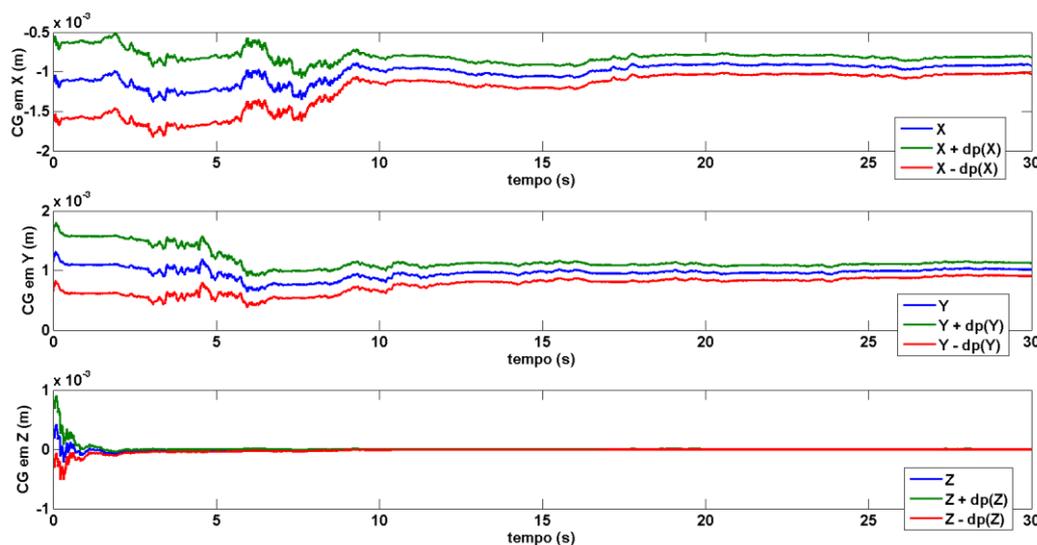


Figura 4. Estimação da posição do centro de gravidade para os dados simulados do PROPAT.

A Tabela 3 mostra os valores da estimativa encontrada para os parâmetros após a simulação. Percebe-se, por estes dados, que o filtro convergiu de forma satisfatória. Os valores estimados estão dentro da faixa especificada pelos dados da simulação. Outro fato que comprova a convergência do filtro é a faixa dos desvios-padrões que diminuem ao longo da estimação.

A melhor estimativa final do estado está fortemente associada à precisão da medida do sensor. Como o sensor utilizado neste experimento é pouco preciso, as covariâncias finais são relativamente altas.

**Tabela 3. Melhor estimativa do FKE aplicado aos dados do PROPAT.**

	$\hat{\mathbf{X}}$	$\hat{\mathbf{P}}$
Matriz de Inércia	$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 8.04162 & 0.14109 & 0.10449 \\ 0.14109 & 7.94414 & 0.08625 \\ 0.10449 & 0.08625 & 11.98892 \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0.1638 & 0.0025 & 0.0003 \\ 0.0025 & 0.1542 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0003 & 0.3527 \end{bmatrix}$
Posição do CG	$\hat{\mathbf{R}}_{CG} = [0.92 \times 10^{-3} \ 1.01 \times 10^{-3} \ 2.29 \times 10^{-5}]^T$	$\mathbf{P}_{CG} = [1.10 \times 10^{-8} \ 1.18 \times 10^{-8} \ 8.35 \times 10^{-12}]^T$

#### 4.2 Experimento com a mesa aerostática de três eixos

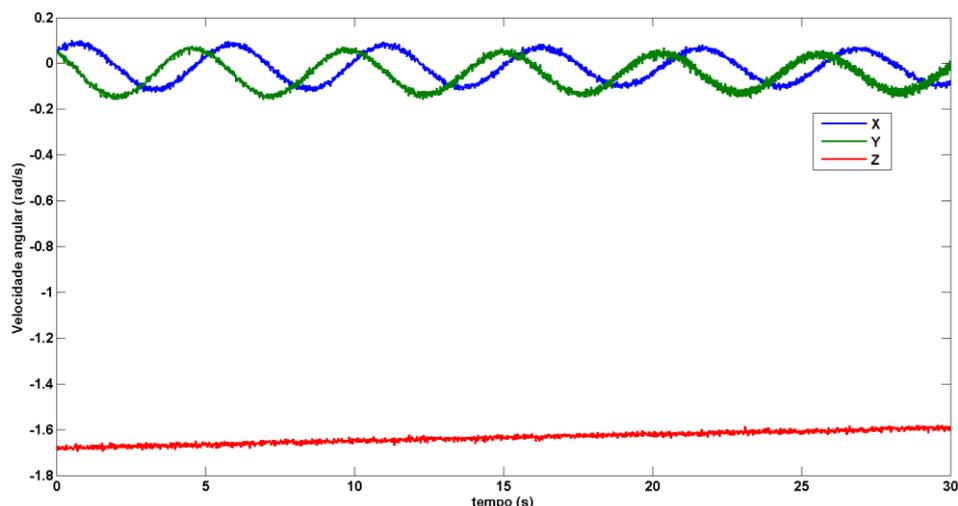
Para o experimento real, o sensor inercial Innalabs AHRS M2-M foi fixado à mesa. Apesar de possuir acelerômetros, girômetros e magnetômetros nos três eixos, apenas as medidas dos três girômetros foram utilizadas. A comunicação com o sensor inercial foi feita via porta RS-232 de um PC/104 com processador de 500 MHz, rodando um sistema operacional Linux, kernel v.2.6, com a interface de tempo real Orocos v.1.12.1 (Open Robot Control Software) para garantir a precisão na amostragem das medidas. A Tabela 4 mostra os dados estatísticos das medidas dos girômetros. Os dados foram calculados através de um experimento estático de 2 horas com o sensor para estimar de forma rápida o desvio-padrão de cada um dos girômetros e do bias de cada um deles. A Figura 3 mostra o gráfico com as velocidades angulares coletadas pelo sensor inercial com os valores já ajustados pelos dados estatísticos.

**Tabela 4. Dados estatísticos dos girômetros do sensor inercial.**

	GyroX	GyroY	GyroZ
Média (bias) (graus/s)	0.3039	-0.0372	-0.0593
Desvio-Padrão (graus/s)	0.4000	0.4008	0.3632

Os torques aplicados ao mancal são dois: o torque causado pelo deslocamento do CG e o torque de atrito causado pelo arrasto atmosférico, quando a mesa possuir velocidade angular não nula. Percebe-se que em 30 segundos de dados, a velocidade angular no eixo Z diminuiu em torno de 0.1 rad/s. Sendo assim, o torque de atrito não pode ser desconsiderado. O torque aerodinâmico é do tipo viscoso e possui um comportamento quadrático com a velocidade angular. Para baixas velocidades pode-se considerá-lo linear. No entanto, apesar de ter sido considerado, os resultados correspondentes não serão apresentados neste artigo.

Após girar a mesa manualmente para garantir uma estabilidade giroscópica, o experimento foi iniciado e as medidas de velocidade angular nos três eixos foram coletadas.



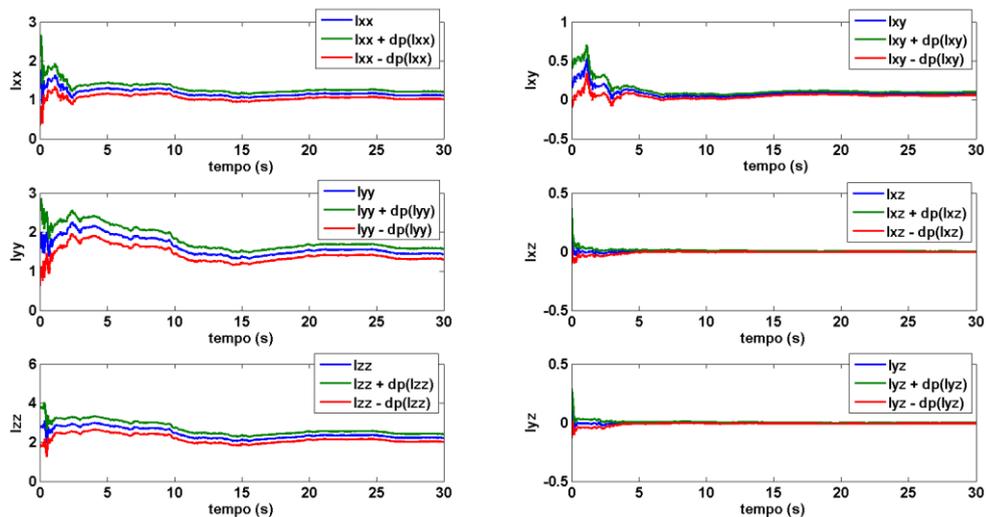
**Figura 3. Velocidades angulares medidas pelo sensor inercial Innalabs AHRS M2-M.**

A Tabela 5 mostra as condições iniciais utilizadas no experimento da mesa aerostática de três eixos. A incerteza das observações foi escolhida de forma experimental, como descrito anteriormente. O ruído dinâmico também foi adicionado apenas às equações da dinâmica de atitude. As condições iniciais para os momentos de inércia e para a posição do CG foram escolhidas com base em um modelo CAD, que utiliza o Teorema dos Eixos Paralelos para calcular o momento de inércia de cada componente sobre a mesa relativo a outro eixo de rotação, coincidente com o centro de rotação do mancal.

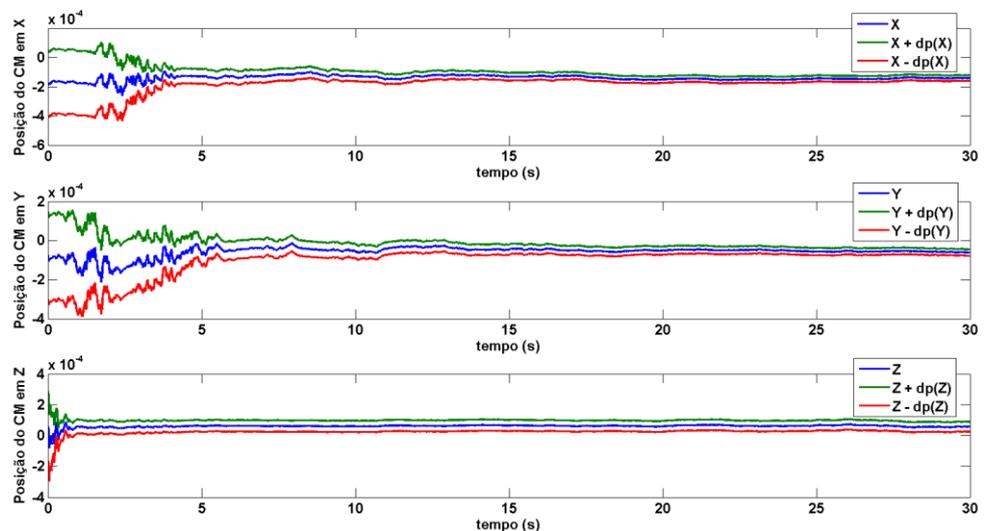
**Tabela 5. Dados iniciais para o FKE aplicado ao experimento na mesa aerostática de três eixos.**

	Condições Iniciais
Velocidade Angular (rad/s)	$w_0 = [-0.04 \ 0.58 \ -1.68]^T$
Matriz de Inércia (Nm)	$\hat{I} = \begin{bmatrix} 2.1863 & -0.0907 & 0.0168 \\ -0.0907 & 1.9732 & 0.0024 \\ 0.0168 & 0.0024 & 2.1748 \end{bmatrix}$
Posição do CG (kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$mgR_{CG} = [0.079 \ -0.034 \ -0.027]^T$
Covariância (rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$P = \text{diag} [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$
Ruído Dinâmico	$GQG^T = \text{diag} [1 \times 10^{-5} \ 1 \times 10^{-5} \ 1 \times 10^{-5} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$
Ruído da Observação	$R = \text{diag} [0.00698 \ 0.00699 \ 0.00634]$

As Figuras 5 e 6 mostram a estimativa dos momentos de inércia e da posição do CG estimados com o FKE ao longo dos 30 segundos de experimento na mesa, também com os respectivos desvios-padrões associados a cada parâmetro. A Tabela 6 mostra os valores da estimativa encontrada para os parâmetros após o algoritmo de filtragem.



**Figura 5. Estimação dos momentos de inércia da mesa aerostática de três eixos.**



**Figura 6. Estimação da posição do centro de gravidade da mesa aerostática de três eixos.**

**Tabela 6. Melhor estimativa das características de massa da mesa aerostática de três eixos.**

	$\hat{\mathbf{X}}$	$\hat{\mathbf{P}}$
Matriz de Inércia	$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1.108 & 0.080 & -0.001 \\ 0.080 & 1.437 & -0.004 \\ -0.001 & -0.004 & 2.211 \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0.0190 & 0.0012 & 0.0003 \\ 0.0012 & 0.0352 & 0.0002 \\ 0.0003 & 0.0002 & 0.0770 \end{bmatrix}$
Posição do CG	$\hat{\mathbf{R}}_{CG} = [-1.4 \times 10^{-4} \quad -6.2 \times 10^{-5} \quad 8.7 \times 10^{-5}]^T$	$\hat{\mathbf{P}}_{CG} = [8.55 \times 10^{-8} \quad 6.68 \times 10^{-10} \quad 5.20 \times 10^{-10}]^T$

A Tabela 7 mostra um comparativo dos valores obtidos com o modelo CAD e os obtidos experimentalmente. A estimação dos momentos de inércia da mesa aerostática está extremamente ligada à correta estimação da posição do centro de gravidade e vice-versa. Uma pequena variação na posição estimada do centro de gravidade provoca variações consideráveis nos momentos de inércia correspondentes. Isso é observado na diferença entre os valores dos parâmetros obtidos pelo modelo CAD e os valores estimados pelo FKE.

O valor escolhido para o bias do girômetro do eixo X também é muito importante, visto que uma pequena variação nessa medida influencia diretamente na medida da velocidade angular sobre este eixo, levando a imprecisões na estimação da inércia e, por conseguinte, na posição do CG. Outro fator indispensável à análise é a estimação do atrito. O sensor é pouco preciso e muito ruidoso para estimar de forma precisa um coeficiente de atrito muito pequeno, da ordem de  $10^{-2}$ .

**Tabela 7. Comparativo dos valores estimados no experimento com os valores obtidos através do CAD.**

	Modelo CAD	Valores Experimentais
Matriz de Inércia	$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 2.1863 & -0.0907 & 0.0168 \\ -0.0907 & 1.9732 & 0.0024 \\ 0.0168 & 0.0024 & 2.1748 \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1.108 & 0.080 & -0.001 \\ 0.080 & 1.437 & -0.004 \\ -0.001 & -0.004 & 2.211 \end{bmatrix}$
Posição do CG	$\hat{\mathbf{R}}_{CG} = [-3.77 \times 10^{-4} \quad -6.11 \times 10^{-4} \quad -4.16 \times 10^{-2}]^T$	$\hat{\mathbf{R}}_{CG} = [-1.4 \times 10^{-4} \quad -6.2 \times 10^{-5} \quad 8.7 \times 10^{-5}]^T$

A diferença entre os valores de inércia estimados pelo FKE e os valores do modelo CAD é considerável sobre os eixos principais de inércia. Normalmente, o próximo passo seria ajustar as condições iniciais com base nas estimativas feitas pelo FKE. No entanto, o foco deste trabalho é estimar as características de massa e compará-las com o melhor modelo pré-existente da mesa, sendo, portanto, o modelo CAD.

A maior velocidade no processo de convergência do experimento real, em comparação ao experimento com os dados simulados, é explicada pela menor incerteza no modelo de observações.

## 5 Conclusão

O uso do Filtro de Kalman Estendido mostrou-se eficaz para o experimento simulado de uma mesa de 40 kg sem atritos e com um deslocamento conhecido entre o centro de gravidade em relação ao centro de rotação do mancal. O conhecimento acurado da dinâmica de atitude sem o atrito viscoso fez com que a incerteza em relação à dinâmica do sistema fosse bem menor, se comparado com o experimento real em que o atrito não pode ser desconsiderado.

No caso do experimento com os dados reais utilizando o sensor inercial fixo à mesa, pode-se afirmar que um melhor resultado seria esperado se esta medida fosse mais precisa. De qualquer forma, o não conhecimento dos coeficientes de atrito da mesa fez com que a estimativa inicial desses parâmetros fosse dificultada. Para compensar esse fato, a incerteza do modelo foi considerada bem alta, em comparação com os dados do experimento simulado. Apesar de ser um experimento que utiliza dados reais, a confiabilidade dos seus resultados é diminuída devido a esses fatores.

A correta caracterização do sensor é necessária para ter um melhor modelo de observações e, por conseguinte, menor incerteza nas medidas. Os ruídos do sensor poderiam ser modelados através do cálculo da Variância de Allan, diminuindo a incerteza das observações (Hou e El-Sheimy, 2003).

O FKE precisa de boas estimativas iniciais para que convirja de forma satisfatória. Para o experimento real, a observação e o modelo possuem incertezas muito grandes, fazendo com que as estimativas finais das características de massa possuam variâncias consideráveis.

De qualquer modo, futuros experimentos serão feitos nesta mesa aerostática a fim de melhorar a estimação do atrito nos três eixos de rotação do mancal, que poderá diminuir as incertezas em relação ao modelo da dinâmica da mesa e, por conseguinte, levar a melhores resultados no processo de estimação das características de massa do sistema.

Esse processo de estimação visa melhorar a acurácia das características de massa para a malha do sistema de controle de atitude. Pequenas variações nesses parâmetros precisam ser compensadas no controle. Obviamente, a melhor estimativa deles também indica para uma melhor robustez do sistema de controle de atitude.

### Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela FUNDEP, por meio do Projeto SIA (Sistemas Inerciais Avançados para Aplicação Aeroespacial) e pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, instituições as quais agradecemos.

### Referências Bibliográficas

- Agrawal, B., Rasmussen, R., "Air Bearing Based Satellite Attitude Dynamics Simulator for Control Software Research and Development", Proceedings of the SPIE Conference on Technologies for Synthetic Environments, Vol. 6, Washington, USA, pp. 204–214, 2001.
- Aguirre, L. A., "Introdução a Identificação de Sistemas", 3ª Edição, Ed. UFMG, Minas Gerais, Brazil, 730p, 2007.
- Carrara, V., "PROPAT: Satellite Attitude and Orbit Toolbox for Matlab", 19 Abr. 2012, <http://www2.dem.inpe.br/val/projetos/propat/>, 1999.
- Hou, H., El-Sheimy, N., "Inertial Sensors Errors Modeling Using Allan Variance", Proceedings of the ION GPS/GNSS, Portland-OR, USA, pp. 2860-2867, 2003.
- Huges, P. C., "Spacecraft Attitude Dynamics", Ed. Dover Publications, New York, USA, 592p, 1986.
- Kim, B., Velenis, E., Kriengsiri, P., Tsiotras, P., "A Spacecraft Simulator for Research and Education", Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, No. AAS 01-367, Quebec, Canada, pp. 897–914, 2001.
- Maybeck, P. S., "Stochastic Models, Estimation, and Control", Ed. Academic Press, Vol. 1, New York, USA, 423p, 1979.
- Rizos, I., Arbes, J., and Raoult, J., "A Spherical Air Bearing Supported Test Facility for Performance Testing of Satellite Attitude Control Systems," Proceedings of the 4th International Federation of Automatic Control Symposium on Automatic Control in Space, Austria, pp. 341–348, 1971.
- Schwartz, J. L., Peck, M. A., Hall, C. D., "Historical Survey of Air-Bearing Spacecraft Simulators", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 26, No 4, pp. 513-522, 2003.
- Schwartz, Jana L., Hall, Christopher D., "Comparison of System Identification Techniques for a Spherical Air-Bearing Spacecraft Simulator", Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference, No. AAS 03-611, Montana, USA, 2003.
- Wertz, J. R., 1978, "Spacecraft Attitude Determination and Control", Ed. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 876p, 1978.