



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2013/11.13.16.01-TDI

## UM NOVO MÉTODO PARA O CÁLCULO DOS FUNDOS ESTOCÁSTICOS EM ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR SISTEMAS BINÁRIOS COMPACTOS

Edgard de Freitas Diniz Evangelista

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr. José Carlos Neves de Araújo, aprovada em 21 de novembro de 2013.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3F7TS9H>>

INPE  
São José dos Campos  
2013

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2013/11.13.16.01-TDI

## UM NOVO MÉTODO PARA O CÁLCULO DOS FUNDOS ESTOCÁSTICOS EM ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR SISTEMAS BINÁRIOS COMPACTOS

Edgard de Freitas Diniz Evangelista

Tese de Doutorado do Curso de  
Pós-Graduação em Astrofísica, ori-  
entada pelo Dr. José Carlos Neves  
de Araújo, aprovada em 21 de no-  
vembro de 2013.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3F7TS9H>>

INPE  
São José dos Campos  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Evangelista, Edgard de Freitas Diniz.

Ev14u Um novo método para o cálculo dos fundos estocásticos em ondas gravitacionais gerados por sistemas binários compactos / Edgard de Freitas Diniz Evangelista. – São José dos Campos : INPE, 2013.

xx + 118 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2013/11.13.16.01-TDI)

Tese (Doutorado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013.

Orientador : Dr. José Carlos Neves de Araújo.

1. relatividade geral. 2. ondas gravitacionais. 3. fundos estocásticos. 4. sistemas binários. I.Título.

CDU 52-336

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Doutor(a)** em  
**Astrofísica**

Dr. Odylio Denys de Aguiar



---

Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. José Carlos Neves de Araújo



---

Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza



---

Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Cesar Augusto Costa



---

Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Rubens de Melo Marinho Júnior



---

Convidado(a) / ITA / SJC Campos - SP

Dra. Cecília Bertoni Martha Hadler Chirenti



---

Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

**Este trabalho foi aprovado por:**

( ) maioria simples

unanimidade

Aluno (a): **Edgard de Freitas Diniz Evangelista**

**São José dos Campos, 21 de Novembro de 2013**



*“I worked hard. Anyone who works as hard as I did can achieve the same results”.*

JOHANN SEBASTIAN BACH





*A todos aqueles que lutaram e sofreram por um mundo menos  
injusto.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio e acolhimento, principalmente durante as dificuldades; agradeço a minha namorada Juliana pelo encorajamento e por ter me dado forças.

Agradeço ao meu orientador Dr. José Carlos Neves de Araujo pela paciência, amizade e por tudo que tem me ensinado; à Dra. Cláudia Vilega pelo seu empenho, principalmente durante os momentos de crise; aos Drs. Oswaldo Duarte e Odylio Aguiar pelas discussões e conselhos que enriqueceram esta tese.

Não poderia deixar de citar as agências CAPES e FAPESP pelo apoio financeiro. Tal apoio consistiu não apenas em bolsa, mas também no auxílio a viagens e participação em eventos.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todo o pessoal da Divisão de Astrofísica do INPE (alunos, pesquisadores, técnicos, secretárias e demais servidores), os quais contribuíram direta ou indiretamente para esta tese. E para aqueles que não contribuíram para o trabalho em si, a amizade e a boa convivência já são dignos de gratidão.



## RESUMO

Logo após a publicação da Teoria da Relatividade Geral em sua forma final em 1916, percebeu-se que algumas de suas soluções descreviam ondas gravitacionais, ou seja, perturbações no espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz e que podiam em princípio ser detectadas. De acordo com tais soluções, quaisquer distribuições de massa que sofressem algum tipo de variação temporal poderiam ser fontes de radiação gravitacional, desde que em algum momento do processo a simetria esférica fosse rompida. Dessa forma, do ponto de vista astrofísico, praticamente qualquer processo envolvendo deformações ou movimentos de corpos, tais como estrelas e buracos negros pode ser considerado uma fonte em potencial de ondas gravitacionais. Particularmente, esta tese trata os sistemas binários compactos cosmológicos em órbitas circulares e excêntricas e o espectro em ondas gravitacionais gerado pela população de tais objetos. Na literatura há diversas maneiras de se calcular tais espectros, porém tais métodos, em geral, ou não levam em consideração a evolução temporal dos parâmetros orbitais ou a considera de forma indireta. Assim, o objetivo principal desta tese é a elaboração de um novo método para o cálculo do espectro gerado por sistemas binários durante as fases periódica ou quase-periódica e que considera explicitamente tal dependência temporal. Utiliza-se uma analogia com um problema de Mecânica Estatística para se estabelecer os fundamentos desse método. Além disso, os fundos para sistemas excêntricos foram gerados por meio de um método alternativo ao que se observa na literatura: os espectros para cada harmônico foram calculados independentemente e somados a fim de se obter o espectro total, considerando-se também a função distribuição das excentricidades. Foram gerados os fundos correspondentes aos sistemas em órbitas circulares e elípticas, onde se nota que tais espectros são caracterizados por dois máximos: um localizado na região de baixas frequências e outro próximo às frequências máximas, sendo este último consequência de evolução temporal dos sistemas. Para órbitas circulares, foram utilizadas diferentes taxas de formação estelar e distribuições de frequência para se estudar a influência destas funções sobre o modelo. Foram calculados também os fundos gerados pela coalescência de binárias, cujas formas mostram concordância com resultados presentes na literatura, embora as amplitudes sejam maiores por um fator  $\sim 10$ . Tal diferença será tratada em trabalhos futuros.



# A NEW METHOD TO CALCULATE THE STOCHASTIC BACKGROUND OF GRAVITATIONAL WAVES GENERATED BY COMPACT BINARY SYSTEMS

## ABSTRACT

Soon after the publication of the General Theory of Relativity in its definitive form in 1916, it was noticed that some solutions depicted gravitational waves, that is, perturbations in the spacetime which propagate at speed of light and that could in principle be detected. According to such solutions, any mass distributions that underwent some kind of time variation would become a source of gravitational radiation, provided that at a given moment the spherical symmetry were broken. Thus, from the astrophysical viewpoint, virtually all processes involving mass deformations and movements, such as stars and black holes, could be considered as a potential source of gravitational waves. Particularly, this thesis deals with cosmological compact binary systems in circular and eccentric orbits and the spectra generated by the population of those sources. In the literature there are different ways of calculating such spectra, however such methods, in general, or do not consider the time evolution of the orbital parameters or do it in an indirect form. So, the main purpose of this thesis is the formulation of a new method of calculating the spectra generated by such a population during the periodic and quasi-periodic regimes. It is used an analogy to a problem of Statistical Mechanics in order to establish the fundamentals of such a method. Besides, the background of eccentric systems is calculated by means of a method which is different from the ones found in the literature: the spectra for each harmonic of the emitted radiation were calculated separately and summed in order to obtain the total spectra, besides taking into account the eccentricity distribution functions. The spectra corresponding to circular and eccentric orbits are similar in the sense that they have two maxima: one located at the low frequency region and other situated near the maximum frequencies, where the last one is consequence of the time evolution of the systems. For circular orbits, different star formation rates and frequency distributions were used in order to study the influence of these functions on the model. Further, the method presented in this thesis was used to obtain the spectra generated by coalescing compact binaries, whose shapes show concordance with the ones found in the literature, although the amplitudes are higher by a factor  $\sim 10$ . This discordance in the amplitude will be tackled in future works.





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Fundos estocásticos estudados na astrofísica de ondas gravitacionais. . . . .	3
2.1 Anel de partículas sofrendo deformação por uma onda $h_+$ . . . . .	27
2.2 Anel de partículas sofrendo deformação por uma onda $h_\times$ . . . . .	28
2.3 Anel de partículas sofrendo deformação por uma onda dada por 2.90. . . . .	28
2.4 Amplitude relativa dos harmônicos para $\varepsilon = 0.1$ . . . . .	36
2.5 Amplitude relativa dos harmônicos para $\varepsilon = 0.3$ . . . . .	36
2.6 Amplitude relativa dos harmônicos para $\varepsilon = 0.6$ . . . . .	37
2.7 Amplitude relativa dos harmônicos para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	37
3.1 Curvas de sensibilidade para os detectores interferométricos considerados nesta tese. As referências para as curvas são mostradas na Seção 6.1. . . . .	46
3.2 Os detectores LIGO. . . . .	47
3.3 Esquema básico do Virgo. . . . .	48
3.4 Esquema básico do ET. . . . .	50
3.5 Arranjo orbital do LISA. . . . .	50
3.6 Esquema básico do DECIGO. . . . .	51
3.7 Esquema básico do BBO. . . . .	53
4.1 Funções distribuição para o semi-eixo maior orbital. . . . .	59
4.2 Funções distribuição para a frequência orbital. Para sistemas BHBH e BHNS, as curvas foram geradas considerando buracos-negros com massa de $20M_\odot$ . . . . .	60
4.3 Funções distribuição para a excentricidade orbital. . . . .	64
4.4 Evolução temporal da excentricidade orbital para $m_1 = m_2 = 1,4M_\odot$ , frequência inicial de $10^{-6}\text{Hz}$ e considerando quatro valores para a ex- centricidade inicial. . . . .	66
4.5 Evolução temporal da frequência orbital para $m_1 = m_2 = 1,4M_\odot$ , frequência inicial de $10^{-6}\text{Hz}$ e considerando quatro valores para a ex- centricidade inicial. . . . .	67
5.1 Volume retangular $d\Omega$ adjacente a $A$ . . . . .	71
6.1 Amplitude espectral para sistemas NS-NS . . . . .	76
6.2 Amplitude espectral para sistemas BH-NS . . . . .	77
6.3 Amplitude espectral para sistemas BH-BH . . . . .	77
6.4 As taxas de formação de estrelas dadas pelas equações 6.4 e 6.8. . . . .	80

6.5	Espectros gerados usando as taxas dadas por 6.4 e 6.8. . . . .	81
6.6	Espectros calculados para $\sigma/2$ , $\sigma$ e $2\sigma$ . . . . .	82
6.7	Espectros gerados por sistemas NSNS para uma distribuição de períodos da forma $f(P) = (P_{\max} - P_{\min})^{-1}$ . Foram considerados dois casos: $P_{\min} = 10^7$ s e $P_{\max} = 10^5$ s; $P_{\min} = 10^6$ s e $P_{\max} = 10^4$ s. Para comparação, foram traçadas também as curvas onde os efeitos da evolução das frequências não foram considerados. Aqui, <i>n.e.</i> e <i>w.e.</i> referem-se, respectivamente, a <i>sem evolução</i> e <i>com evolução</i> . . . . .	83
6.8	Espectro gerado por sistemas NSNS em coalescência . . . . .	86
6.9	Espectro gerado por sistemas BHNS em coalescência . . . . .	88
6.10	Espectro gerado por sistemas BHBH em coalescência . . . . .	90
6.11	Espectro em termos de $\Omega_{\text{GW}}$ gerados pela coalescência de sistemas NSNS, BHNS e BHBH . . . . .	92
6.12	Contribuição de cada harmônico para o espectro de sistemas NSNS . . . . .	94
6.13	Contribuição de cada harmônico para o espectro de sistemas BHNS . . . . .	94
6.14	Contribuição de cada harmônico para o espectro de sistemas BHBH . . . . .	95
6.15	Espectro gerado por sistemas NSNS excêntricos comparado ao respectivo fundo para órbitas circulares. . . . .	95
6.16	Espectro gerado por sistemas BHNS excêntricos comparado ao respectivo fundo para órbitas circulares. . . . .	96
6.17	Espectro gerado por sistemas BHBH excêntricos comparado ao respectivo fundo para órbitas circulares. . . . .	96
B.1	Esquema de um sistema binário de massas $M$ e $m$ e centro de massa CM	113
D.1	Espectro galáctico gerado por sistemas NSNS. . . . .	118

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Correspondência entre as grandezas físicas e geométricas. . . . .	16
3.1 Faixas de frequência de ondas gravitacionais (ver detalhes no texto). . . . .	44
4.1 Parâmetros para as distribuições do semi-eixo maior orbital . . . . .	58
4.2 Parâmetros para as distribuições de sistemas BHNS e BHBH. . . . .	63
4.3 Parâmetros para distribuição de sistemas NSNS. . . . .	63
6.1 Relação S/N para sistemas em órbitas circulares, considerando pares de detectores e tempo de integração de 1 ano. . . . .	97
6.2 Relação S/N para sistemas em órbitas elípticas, considerando pares de detectores e tempo de integração de 1 ano. . . . .	98
6.3 Relação S/N para sistemas em coalescência, considerando pares de detectores e tempo de integração de 1 ano. . . . .	98



# SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 TEORIA</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Algumas Notas Sobre Relatividade Especial . . . . .	7
2.2 Os tensores . . . . .	9
2.2.1 Pseudo-tensores . . . . .	10
2.2.2 Operações com Tensores . . . . .	11
2.2.3 Tensores de Especial Interesse . . . . .	13
2.2.4 Significado Físico dos Tensores Considerados . . . . .	15
2.3 As Equações de Campo da Relatividade Geral . . . . .	17
2.3.1 O Princípio da Covariância e o Conceito de Geodésica . . . . .	17
2.3.2 Dedução das Equações de Campo . . . . .	18
2.4 Ondas Gravitacionais como Soluções das Equações de Einstein . . . . .	20
2.4.1 Duas Aproximações Necessárias . . . . .	21
2.4.2 A Solução de Ondas Planas . . . . .	22
2.4.3 O <i>Gauge</i> TT e Estados de Polarização . . . . .	25
2.4.4 A Energia Transportada pelas Ondas Gravitacionais . . . . .	28
2.4.5 A Natureza Quadrupolar da Radiação Gravitacional . . . . .	32
2.5 Geração de Radiação Gravitacional por Sistemas Binários . . . . .	33
2.5.1 Sistemas Binários Excêntricos . . . . .	34
2.5.2 As Amplitudes Adimensional e Espectral para os Fundos em Ondas Gravitacionais . . . . .	37
2.6 Elementos de Cosmologia . . . . .	39
<b>3 DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS</b> . . . . .	<b>43</b>
3.1 Detectores de Massa Ressonante e Interferométricos . . . . .	44
3.2 LIGO . . . . .	46
3.3 Virgo . . . . .	48
3.4 Einstein Telescope . . . . .	49
3.5 LISA e eLISA . . . . .	49
3.6 DECIGO . . . . .	51
3.7 BBO . . . . .	52
3.8 Correlação Cruzada de Detectores Interferométricos . . . . .	52

<b>4</b>	<b>CARACTERÍSTICAS POPULACIONAIS DOS SISTEMAS BINÁRIOS</b>	<b>55</b>
4.1	Taxa de Formação Estelar e Taxas de Formação de Binárias Compactas	55
4.2	Distribuição das frequências orbitais	58
4.3	Evolução Temporal da Distribuição das Frequências Orbitais	61
4.4	Distribuição das Excentricidades Orbitais	62
4.5	Evolução Temporal da Distribuição das Excentricidades Orbitais	63
<b>5</b>	<b>O MÉTODO PARA O CÁLCULO DOS FUNDOS</b>	<b>69</b>
5.1	O Problema Estatístico	70
5.1.1	Cálculo de $dR$	72
<b>6</b>	<b>OS FUNDOS ESTOCÁSTICOS</b>	<b>75</b>
6.1	Fundos em Órbitas Circulares	75
6.1.1	Uso de Outras Funções Distribuição	79
6.2	Fundos em Coalescências para Órbitas Circulares	82
6.2.1	Coalescência para sistemas NSNS	85
6.2.2	Coalescência para sistemas BHNS	86
6.2.3	Coalescência para sistemas BHBH	88
6.2.4	Espectros em Termos de $\Omega_{\text{GW}}$	91
6.3	Fundos em Órbitas Elípticas	91
6.4	Correlação Cruzada Para Pares de Detectores	97
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS</b>	<b>99</b>
7.1	PERSPECTIVAS	100
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>103</b>
	<b>APÊNDICE A - O LIMITE NEWTONIANO</b>	<b>109</b>
	<b>APÊNDICE B - POTÊNCIA IRRADIADA POR BINÁRIAS</b>	<b>111</b>
	<b>APÊNDICE C - EVOLUÇÃO TEMPORAL DA FREQUÊNCIA</b>	<b>115</b>
	<b>APÊNDICE D - O FUNDO GALÁCTICO</b>	<b>117</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das ondas gravitacionais, assim como muitos tópicos em Astrofísica e quase toda a Cosmologia, é baseado na Teoria da Relatividade Geral (a partir de agora referida como RG), publicada por Albert Einstein em sua versão final em 1916. Conforme será mostrado neste texto, tal teoria surgiu de uma tentativa de se generalizar a Relatividade Especial (a partir de agora referida como RE), a qual é válida apenas para sistemas de coordenadas inerciais. Dessa forma, Einstein, depois de uma década de esforços, apresentou uma teoria que descrevia também processos físicos em referenciais acelerados, o que a tornou imediatamente um modelo ideal para se descrever a gravitação. Resumidamente, a RG baseia-se na hipótese de que a força gravitacional é uma manifestação da geometria do espaço-tempo deformado pela presença de matéria e energia. Nesse contexto, os corpos seguem geodésicas nesse espaço e se essas trajetórias forem curvas, isso é interpretado como ação de uma força gravitacional.

Seguindo esse raciocínio, a hipótese da existência de ondas gravitacionais surge naturalmente da teoria. Com efeito, de acordo com o que foi mencionado, massa e energia atuam no espaço-tempo, determinando sua curvatura; conseqüentemente, se uma dada distribuição de massas sofre mudanças em sua configuração, a perturbação resultante no campo gravitacional gerado por tais massas poderia se propagar como uma onda, de forma semelhante a ondas na superfície da água, transportando energia e momento linear e angular. Nesse caso, uma das condições a serem obedecidas para que haja emissão de ondas é que durante tais mudanças de configuração a simetria esférica seja quebrada em algum momento.

Formalmente, Einstein lançou os fundamentos do formalismo das ondas gravitacionais meses após sua formulação final da RG, porém se restringindo ao caso em que se podem fazer aproximações lineares, onde as ondas emitidas são de fraca intensidade e as fontes possuem auto-interação (*self-gravity*) desprezível. Além disso, nessa abordagem as ondas se propagam em um espaço-tempo plano. No entanto, foi apenas em meados da década de 1920 que a teoria linearizada da radiação gravitacional foi completamente compreendida, graças aos estudos de Einstein e Hermann Weyl (WEYL, 1952), entre outros. Para uma discussão mais detalhada sobre o formalismo das ondas gravitacionais, o leitor pode consultar Schutz (1985), Weinberg (1972) e Misner et al. (1973), por exemplo.

Embora as ondas gravitacionais possam ser geradas de diversas maneiras como conseqüência de inúmeros eventos astrofísicos, há características, tanto das fon-

tes quanto das ondas emitidas, que são comuns a vários casos, o que permite a elaboração de um esquema de classificação, onde os tipos de radiação emitido são colocados em uma dada categoria se compartilham determinada característica. Aqui será considerado o esquema convencional dado, por exemplo, por [Camp e Cornish \(2004\)](#), onde são reconhecidos basicamente quatro tipos de fontes: periódica, impulsiva (conhecida mais comumente como *burst*), *chirp* e fundos estocásticos. As fontes periódicas são caracterizadas por emitirem radiação cujas frequências e amplitudes permanecem constantes por uma longa escala de tempo; exemplos típicos de tais fontes são os sistemas binários nos estágios iniciais de vida e estrelas em rotação (nesse caso, é necessário que a estrela possua alguma assimetria radial). Os *bursts* são caracterizados por emissões muito energéticas que ocorrem durante um curto intervalo de tempo, tais como a coalescência de objetos compactos e supernovas. O terceiro tipo possui características de fontes periódicas e de *bursts*: ele ocorre durante os estágios finais de evolução de sistemas binários, onde as frequências e amplitudes das ondas emitidas abandonam o regime periódico e passam a evoluir em escalas de tempo muito pequenas, o que culmina em um evento de *burst*.

Por último, os fundos estocásticos são caracterizados por espectros que preenchem em geral uma larga faixa de frequências, onde não se pode distinguir fontes individuais mas, ao invés disso, pode-se observar apenas curvas contínuas, características para cada tipo de processo que as geraram. Além disso, os fundos estocásticos podem ser divididos em dois subtipos: há aqueles que foram gerados por processos cosmológicos no universo jovem, tais como transições de fase e inomogeneidades espaciais e há os gerados pela superposição de inúmeras fontes individuais, as quais podem ser do tipo periódico, *burst* ou *chirp*. A figura 1.1 mostra de forma detalhada os tipos de fundo estocástico estudados na astrofísica de ondas gravitacionais ([CARR, 1980](#)). Nela pode-se notar os vários tipos de fundos estocásticos, os quais são divididos, de forma geral, em cosmológicos, não-cosmológicos e gerados pela evaporação de buracos-negros. Particularmente, os fundos gerados pelos sistemas binários considerados nesta tese são de natureza não-cosmológica (à direita na figura) e extragaláctica; fontes locais seriam as binárias localizadas na Galáxia.

Particularmente, neste trabalho serão considerados os fundos estocásticos gerados por sistemas binários compactos durante as fases periódicas e *chirp*, considerando o modelo  $\Lambda$ CDM como cenário cosmológico. Assim, os espectros gerados aqui serão similares aos gerados por binárias galácticas na faixa de frequência do LISA ([NELEMANS, 2009](#)).



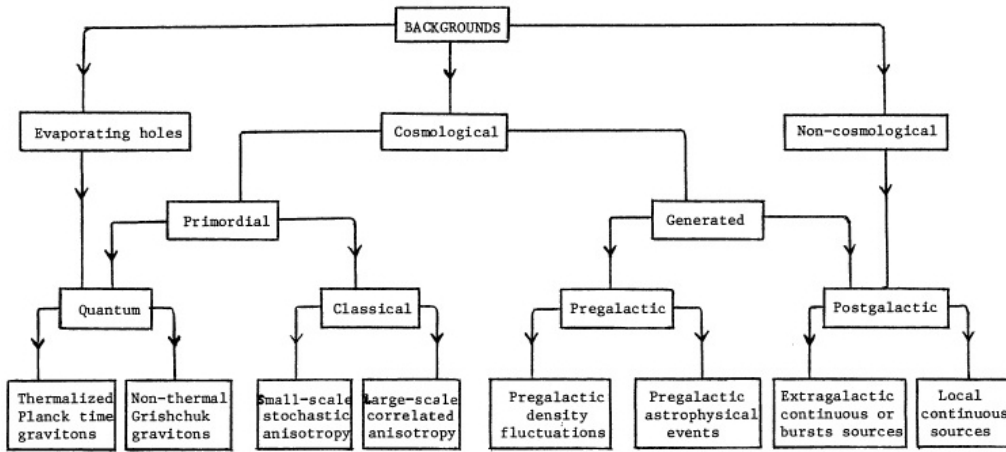


Figura 1.1 - Fundos estocásticos estudados na astrofísica de ondas gravitacionais.  
 Fonte: Carr (1980).

O estudo das ondas emitidas pelos sistemas binários compactos é promissor porque, entre todas as teoricamente possíveis fontes de radiação gravitacional, os sistemas binários compactos, isto é, aqueles sistemas cujos componentes são estrelas de nêutrons ou buracos negros, são as mais interessantes tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. Em relação aos aspectos teóricos, é possível derivar equações que permanecem válidas mesmo em estágios avançados, onde os sistemas apresentam comportamento fortemente não-linear. Além disso, como ficará claro ao longo dessa tese, tais equações fornecem resultados úteis e de maneira relativamente simples, sem a necessidade de um tratamento computacional complexo.

Observacionalmente, a razão para se dedicar atenção especial aos sistemas binários compactos torna-se evidente quando se percebe que a indicação mais forte, embora indireta da existência de ondas gravitacionais, surgiu da observação do período de sistemas binários compactos. Em especial, deve-se mencionar o estudo realizado por Russell Hulse e Joseph Taylor (TAYLOR et al., 1976) que, através da medição do período orbital do pulsar binário PSR 1913+16, o qual é formado por duas estrelas de nêutrons com separação orbital pouco maior que o diâmetro solar, confirmaram os resultados previstos pela RG com altíssima precisão. Tal trabalho deu aos autores supracitados o Prêmio Nobel de Física de 1993.

Além disso, binárias compactas estão entre as mais prováveis fontes a terem seus espectros em ondas gravitacionais detectados no futuro próximo. Ainda evocando a detectabilidade, o estudo dos espectros gerados por binárias compactas é interessante

porque estes poderiam gerar sinais para os detectores interferométricos DECIGO, BBO, LISA, Advanced LIGO (ALIGO) and Einstein Telescope (ET), conforme será visto adiante.

Na literatura existem diversos exemplos de cálculo de espectros gerados por sistemas binários, dos quais alguns são citados nesta tese. No entanto, em muitos desses trabalhos a evolução temporal dos parâmetros orbitais como frequência e excentricidade são consideradas de forma indireta ou mesmo desprezadas. Além disso, quando se consideram regimes de alta frequência, tal evolução tem papel fundamental na determinação dos espectros. Dessa forma, o principal objetivo dessa tese é apresentar um novo método para o cálculo do fundo em ondas gravitacionais gerados pelos sistemas binários compactos e que considera de forma explícita a variação temporal das grandezas orbitais. Outro objetivo é a aplicação de tal método para o cálculo dos fundos gerados por sistemas em coalescência.

O capítulo 2 aborda questões teóricas relativas à gravitação, ondas gravitacionais, sistemas binários e cosmologia. Inicialmente são apresentados alguns conceitos de RE, pois são necessários para a compreensão dos fundamentos da RG. Como segundo requisito para o estudo das equações de campo da gravitação e suas soluções, são apresentados também alguns fundamentos de cálculo tensorial, onde serão mostrados tensores de especial interesse no contexto desta tese. Posteriormente, as Equações de Campo da RG são demonstradas, juntamente ao conceito de covariância geral e geodésica. As duas seções seguintes desse capítulo mostram como soluções ondulatórias surgem das referidas equações de campo, discutem algumas de suas propriedades e tratam do caso particular de ondas emitidas por sistemas binários. O capítulo se encerra com uma breve descrição dos elementos de cosmologia adotados no cálculo dos espectros.

O capítulo 3 tem como tema a detecção de ondas gravitacionais, onde o enfoque é a descrição da estrutura e do funcionamento dos detectores interferométricos. Particularmente são apresentados os detectores LIGO, DECIGO, BBO, LISA (cujo novo projeto é conhecido como eLISA), ET e Virgo. Além disso, é discutida a correlação entre detectores (correlação cruzada ou *cross correlation*), a qual tem como objetivo o aumento nas probabilidades de detecção, em comparação a detectores operando individualmente. É dedicada atenção especial à correlação de pares de detectores LIGO e ET.

As características populacionais dos sistemas binários são discutidas no capítulo 4. Matematicamente tais características são descritas por meio de funções distribuição

e as duas primeiras seções do capítulo abordam as distribuições das frequências e das excentricidades orbitais. Porém, tanto as frequências como as excentricidades variam temporalmente em razão da emissão de energia e momento via ondas gravitacionais, portanto é necessário mostrar como tais distribuições são modificadas de forma a incorporar a dependência temporal, o que é tratado na terceira e na quarta seções. As distribuições das massas das estrelas também são examinadas. O capítulo mostra ainda duas quantidades importantes e que são intimamente relacionadas: a taxa de formação estelar e a taxa de formação de binárias.

Todos os requisitos teóricos citados acima são empregados no cálculo dos espectros e o capítulo 5 mostra a dedução do método utilizado para essa finalidade. Recorre-se a uma analogia com um problema de mecânica estatística para se realizar a contagem dos sistemas. O capítulo 6 mostra e discute os resultados gerados. Os espectros para sistemas binários em órbitas circulares são comparados às curvas de sensibilidade dos detectores interferométricos discutidos no capítulo 3. De forma análoga, são mostrados os espectros para sistemas em órbitas elípticas, onde inicialmente são apresentados os fundos correspondentes a cada harmônico e em seguida são apresentados os fundos gerados pela soma das contribuições de cada harmônico. Além disso são mostrados os fundos gerados pela coalescência de sistemas em órbitas circulares e pelas binárias de estrelas de nêutrons Galácticas. Finalmente é feita a análise da detectabilidade dos fundos por correlação cruzada de pares de LIGO e ET. Isso é obtido por meio do cálculo da relação sinal-ruído para todos os espectros calculados.

Por último, o capítulo 7 apresenta as considerações finais e os Apêndices mostram detalhes e deduções adicionais que são úteis à compreensão de alguns conceitos e fórmulas apresentados ao longo desta tese.



## 2 TEORIA

Neste capítulo serão descritos tópicos do formalismo de ondas gravitacionais que serão úteis no estudo de fundos estocásticos gerados por sistemas binários, além de ser mostrado como tal formalismo emerge das Equações de Campo da RG. Inicialmente serão descritos brevemente alguns pontos de RE, tais como a representação geométrica do espaço-tempo e a representação do momento e da energia. Será feita também uma revisão das principais características do cálculo tensorial, o qual é um formalismo indispensável para a compreensão das Equações de Campo de Einstein e sua dedução.

A partir das Equações de Campo, será mostrado como soluções ondulatórias surgem ao utilizar-se aproximações lineares. Finalmente, será mostrado como o formalismo de ondas gravitacionais se aplica à radiação gravitacional de sistemas binários, ocasião em que serão definidas quantidades relevantes aos desenvolvimentos subsequentes.

### 2.1 Algumas Notas Sobre Relatividade Especial

Com o advento da RE, lançada por Albert Einstein em 1905 e posteriormente colocada em bases geométricas sólidas pelo matemático Herman Minkowski, o espaço e o tempo deixaram de ser vistos como entidades independentes. Geometricamente falando, de acordo com o paradigma lançado por Minkowski, as três coordenadas espaciais e a medida de tempo são considerados como componentes de um espaço-tempo quadridimensional, onde cada ponto, chamado “evento”, é representado por quatro coordenadas:

$$P_0 \equiv (x, y, z, ct) \tag{2.1}$$

Dessa forma, a “distância” entre dois eventos é dada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.2}$$

onde é utilizada a convenção que atribui sinal positivo para a coordenada temporal e sinal negativo para as coordenadas espaciais, ou seja, a métrica em questão possui uma *assinatura* representada por  $(+, -, -, -)$ . Além disso, 2.2 pode ser colocada em forma mais geral como

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.3}$$

onde os índices  $\mu$  e  $\nu$  variam de 0 a 3 e os coeficientes  $g_{\mu\nu}$  são as componentes do

chamado tensor métrico<sup>1</sup>, as quais nesse caso são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Este tensor determina as propriedades métricas do espaço-tempo e, do ponto de vista físico, é ele que vai, juntamente com outros tensores descritos adiante, descrever a natureza do campo gravitacional. Deve-se mencionar ainda que no contexto da RE, o tensor  $g_{\mu\nu}$  é muitas vezes escrito como  $\eta_{\mu\nu}$  e chamado de tensor de Minkowski. Na verdade,  $\eta_{\mu\nu}$  é uma forma particular de  $g_{\mu\nu}$ .

A notação de 2.3 e de outras expressões tensoriais subsequentes pode ser simplificada com o uso da chamada convenção de Einstein, a qual estabelece que se dado índice literal aparecer repetido em uma expressão, deve-se subentender uma soma sobre tal índice, tornando desnecessário o uso do símbolo de somatório. Dessa forma, 2.3 seria reescrita na forma  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ . Essa convenção será utilizada em todas as expressões de agora em diante, salvo em eventuais casos particulares onde estiver explícito que ela não deve ser considerada.

Uma característica fundamental da RE é a invariância do intervalo  $ds^2$  sob determinadas transformações de coordenadas, conhecidas como transformações de Lorentz. Fisicamente, tais transformações são interpretadas como mudanças de sistema de coordenadas onde cada sistema representa um observador inercial. Os detalhes envolvendo tais transformações fogem ao propósito desta tese, porém textos abrangentes e didáticos podem ser encontrados, por exemplo, em [d’Inverno \(1995\)](#) e [Foster e Nightingale \(2006\)](#). No entanto, adianta-se aqui que para o caso simples de um sistema  $(x', y', z', t')$  se movendo com velocidade constante  $v$  em relação a um sistema  $(x, y, z, t)$ , de forma que os eixos  $x$  e  $x'$  sejam sempre colineares, as origens de ambos sistemas coincidam no instante  $t = t' = 0$  e  $v$  seja positiva em relação ao eixo  $x$ , o conjunto de transformações é dado por

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>o conceito de tensor é discutido na seção 2.2

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

Como se pode notar pelas transformações de Lorentz, diferentes observadores medirão diferentes intervalos de espaço e de tempo ao realizarem medidas em um mesmo objeto ou fenômeno físico, como por exemplo o comprimento de uma régua ou a marcha de um relógio. No entanto será de especial importância uma medida particular de intervalo temporal chamada de *tempo próprio*. Tal intervalo é aquele registrado quando o observador encontra-se em repouso em relação ao fenômeno cuja evolução temporal está sendo medida. Assim, tomando  $dx = dy = dz = 0$  e  $dt = d\tau$  no elemento de linha 2.2, fica-se com

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (2.6)$$

onde se nota que  $d\tau$  também é uma grandeza invariante sob transformações de Lorentz.

Um resultado útil é a aplicação do conceito de tempo próprio às transformações 2.5. Mais especificamente, a quarta equação em 2.5 fornece

$$dt = \gamma d\tau \quad (2.7)$$

onde o sinal  $\prime$  foi omitido no lado esquerdo. Essa relação entre o tempo próprio medido por um observador e o intervalo de tempo  $dt$  medido por outro observador movendo-se com velocidade constante em relação ao primeiro é um resultado fundamental da Teoria da Relatividade e descreve o fenômeno da dilatação do tempo.

## 2.2 Os tensores

Quantidades físicas tais como o momento linear e a força são definidas por um conjunto de valores numéricos os quais em geral dependem do sistema de coordenadas utilizado. O estudo da maneira como tais valores se transformam quando se muda o sistema de coordenadas conduz ao conceito de tensor. É fácil perceber que os tensores são muito úteis para a física, uma vez que dada equação escrita em forma tensorial permanece válida em qualquer sistema de coordenadas. Particularmente, a formulação da Relatividade é totalmente dependente do conceito de tensor pois a principal motivação desta é a representação das relações e grandezas que são invariantes sob transformações de sistemas de coordenadas.

Como primeiro exemplo, pode-se citar os escalares como os tensores mais elementares, pois são definidos por apenas um valor numérico e independem do sistema

de coordenadas em questão (fisicamente, a carga elétrica e a massa de repouso são exemplos instrutivos); a seguir, tem-se os vetores que, no formalismo tensorial, são definidos como tensores de primeira ordem. A transformação das componentes de um vetor, descritas nesse contexto como “contravariante”, é dada pela igualdade

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \quad (2.8)$$

onde as componentes são transformadas do sistema  $\{x_j\}$  para o sistema  $\{x'_j\}$ . Pode-se definir também o vetor covariante, cuja transformação das componentes é dada por

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}. \quad (2.9)$$

É importante ressaltar que, em espaços onde uma métrica é definida, as formas covariante e contravariante são fisicamente equivalentes. Além disso, a definição das transformações de tensores de ordens mais elevadas segue das relações 2.8 e 2.9 de forma direta: por exemplo, as componentes de um tensor covariante de segunda ordem transformam-se como

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Pode-se então deduzir uma fórmula geral de transformação, a qual é dada por

$$T'^{\alpha\dots\lambda}_{\mu\dots\omega} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^a} \cdots \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^{\mu}} \cdots \frac{\partial x^w}{\partial x'^{\omega}} T^{a\dots l}_{m\dots w}. \quad (2.11)$$

sendo que qualquer grandeza cujas componentes se transformem de acordo com tal lei é tensorial.

### 2.2.1 Pseudo-tensores

A despeito da importância dos tensores e da frequência com que são utilizados, a lei de transformação 2.11 que os definem não é a única existente, de forma que se podem definir outras grandezas que, apesar de não terem caráter tensorial, são igualmente importantes. Um exemplo fundamental de um “não-tensor” é o determinante do tensor métrico, definido como

$$g \equiv -\text{Det}(g_{\mu\nu}) \quad (2.12)$$

A lei de transformação para o tensor métrico pode ser considerada uma equação



matricial na forma

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (2.13)$$

onde o símbolo de soma dos índices  $\rho$  e  $\sigma$  foi omitido por simplicidade. Tomando o determinante da equação 2.13, encontra-se

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g \quad (2.14)$$

onde  $|\partial x/\partial x'|$  é o jacobiano da transformação  $x' \rightarrow x$ . Uma quantidade tal como  $g$ , que se transforma como um escalar exceto por fatores extras do jacobiano, é conhecida como uma *densidade escalar*. De forma similar uma quantidade que se transforma como um tensor exceto por fatores extras do determinante jacobiano é chamada de *densidade tensorial* (WEINBERG, 1972).

O número de fatores  $|\partial x'/\partial x|$  determina o peso da densidade. Por exemplo, vê-se a partir de 2.14 que  $g$  possui peso  $-2$ . De forma geral, a lei de transformação para uma densidade tensorial de peso  $W$  pode ser escrita como

$$\mathfrak{T}'_{\mu\dots\omega}{}^{\alpha\dots\lambda} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^W \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^a} \cdots \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^\mu} \cdots \frac{\partial x^w}{\partial x'^\omega} \mathfrak{T}_{m\dots w}{}^{a\dots l} \quad (2.15)$$

onde é habitual a utilização de letras góticas para designar tais quantidades. Além disso é interessante mencionar que as densidades tensoriais são frequentemente referidas como *pseudo-tensores* (ARFKEN; WEBER, 2004).

## 2.2.2 Operações com Tensores

Os tensores apresentam várias propriedades algébricas, as quais permitem que eles sejam manipulados em equações e que se possam obter novos tensores a partir de outros já existentes. Por exemplo, a soma de dois tensores, ambos de ordem  $n$ , fornece como resultado um tensor também de ordem  $n$ , conforme pode ser notado através da soma de dois vetores contravariantes:

$$C'^\mu = A'^\mu + B'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} (A^\alpha + B^\alpha) \quad (2.16)$$

Por outro lado, o produto de dois tensores cujas ordens são  $m$  e  $n$  é um tensor de ordem  $m+n$ , como pode ser visto em 2.17, onde o tensor de terceira ordem  $A_\gamma{}^{\alpha\beta}$  é multiplicado pelo tensor de segunda ordem  $B^\epsilon{}_\eta$ , fornecendo o tensor de quinta ordem  $C_\gamma{}^{\alpha\beta\epsilon}{}_\eta$ :

$$A_\gamma{}^{\alpha\beta} B^\epsilon{}_\eta = C_\gamma{}^{\alpha\beta\epsilon}{}_\eta. \quad (2.17)$$

Outra propriedade útil para as deduções subsequentes é a contração de índices, o que permite reduzir a ordem de dado tensor. A contração consiste em igualar-se um índice covariante e um contravariante e realizar-se uma soma sobre eles (conforme pode ser visto em 2.18), fazendo com que o tensor de ordem  $n$  passe a ter ordem  $n - 2$ . Por exemplo,  $T^{\mu\nu}_\lambda$  pode ser contraído em relação aos índices  $\lambda$  e  $\nu$  e tratado como um vetor contravariante  $T^\mu$  mediante a operação:

$$T^\mu = T^{\mu\nu}_\nu \quad (2.18)$$

Deve-se mencionar ainda que muitos tensores possuem propriedades de simetria em relação a seus índices. Por exemplo, um tensor covariante de segunda ordem será respectivamente simétrico e anti simétrico em relação aos índices  $\mu$  e  $\nu$  se:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (2.19)$$

$$T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu} \quad (2.20)$$

Convém salientar que o mesmo vale para tensores de ordem mais elevada, onde dado tensor será simétrico (anti simétrico) em relação a dado par de índices se, sob a permutação dos índices desse par, as componentes mantiverem (trocarem) o sinal. Para mais detalhes, o leitor pode consultar Papapetrou (1974) e Foster e Nightingale (2006).

Por último, é importante discutir a derivação de tensores. Inicialmente, seja o caso particular do gradiente de um campo escalar  $\psi$  calculado em um sistema de coordenadas ortogonais. Embora sua notação mais comum seja a forma vetorial  $\vec{f} = \nabla\psi$ , aqui é mais conveniente escrevê-lo em termos de suas camponentes:

$$f_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} \quad (2.21)$$

É possível demonstrar que as quantidades  $f_\alpha$  representam as componentes de um vetor covariante. Com efeito, uma transformação de coordenadas  $x'^\beta = f(x^\alpha)$  obtida via regra da cadeia em 2.21 leva a

$$f_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\psi}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} f'_\beta \quad (2.22)$$

que representa, de acordo com 2.9 e levando em consideração pequenas alterações de notação, a lei de transformação de um vetor covariante.

Porém deve-se ter em mente que, salvo em casos especiais como o mostrado acima, em geral a derivação de um tensor não fornece um novo tensor. Colocando de outra forma, em geral a derivada de um tensor não preserva seu caráter tensorial. Nesse contexto define-se a derivada covariante, a qual preserva o caráter tensorial das grandezas nas quais é aplicada. Análises detalhadas de tais derivadas, bem como dos outros conceitos descritos aqui, podem ser encontradas por exemplo em [Wald \(1984\)](#) e [Einstein \(1951\)](#), entretanto é interessante mostrar alguns casos particulares, como por exemplo a derivada covariante em relação a  $x^\nu$  de vetores covariantes e contravariantes, a qual assume respectivamente as formas

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha \quad (2.23)$$

$$A^\mu_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha \quad (2.24)$$

As grandezas  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  que aparecem em 2.23 e 2.24, as quais não representam as componentes de um tensor<sup>2</sup> e são conhecidas como símbolos de Christoffel ([MISNER et al., 1973](#)), são dadas por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right]. \quad (2.25)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  são as componentes do tensor métrico citado na seção 2.1. Além disso é importante citar que existem notações alternativas para a derivada covariante. Por exemplo, 2.23 pode ser escrita como  $\nabla_\nu A_\mu$  ou  $A_{\mu|\nu}$  ([D'INVERNO, 1995](#)).

As regras para se escrever a derivada covariante de vetores mostradas em 2.23 e 2.24 podem ser generalizadas de forma direta para tensores de ordem mais elevada. Por exemplo, a derivada em relação a  $x^\lambda$  do tensor covariante de segunda ordem  $B_{\mu\nu}$  assume a forma

$$B_{\mu\nu}{}^{;\lambda} = \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - (\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha B_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha B_{\mu\alpha}) \quad (2.26)$$

### 2.2.3 Tensores de Especial Interesse

Do ponto de vista formal, o objetivo da Teoria da Relatividade é fornecer uma descrição das leis físicas na forma covariante, o que no caso significa que as equações devem ser invariantes sob transformações de coordenadas (aqui o leitor deve ter em mente que o sentido de *covariante* dado acima não deve ser confundido com a definição de *tensor covariante* dada na seção anterior.) Isso significa reescrever as

---

<sup>2</sup>Com efeito,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  obedece à lei de transformação  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$ , a qual difere de 2.11.

equações físicas por meio de tensores que descrevem as mais variadas grandezas. De forma resumida, são utilizados tensores para descrever as propriedades geométricas do espaço-tempo e para representar as propriedades físicas dos mais diversos corpos e campos atuando nesse cenário. Quanto aos primeiros, o mais fundamental é o tensor métrico, o qual define as propriedades métricas do espaço-tempo e é utilizado para se calcular o elemento de linha, conforme mostrado em 2.3; em seguida deve-se mencionar o tensor de curvatura, ou de Riemann-Christoffel, o qual é escrito como:

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \quad (2.27)$$

Basicamente 2.27 fornece informação sobre a curvatura do espaço-tempo: se todas as suas componentes forem nulas em dado ponto, significa que o espaço não possui curvatura nesse ponto, sendo tal afirmação verdadeira em qualquer sistema de coordenadas. Além disso outros tensores podem ser criados a partir de 2.27 por meio das propriedades algébricas mostradas anteriormente. Assim, por meio da contração dos índices  $\lambda$  e  $\nu$ , obtém-se uma quantidade fundamental na formulação das Equações de Campo: o tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = R^{\nu}_{\mu\nu\kappa}. \quad (2.28)$$

Ao passo que o produto seguido de contração do tensor de Ricci com o tensor métrico fornece o escalar de curvatura  $R$ :

$$R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Quanto à representação das propriedades físicas dos corpos e dos campos, utiliza-se o tensor que descreve o momento, a energia e as densidades de energia e momento para dado sistema físico. Tal quantidade, conhecida como tensor energia-momento, assume diversas formas, sendo que as mais importantes na formulação da RE e RG são os tensores descrevendo poeira ou matéria incoerente (onde as pressões são desprezadas), fluido perfeito e campo eletromagnético (D'INVERNO, 1995).

O tensor energia-momento para o fluido perfeito será de especial interesse para a demonstração das equações de campo de Einstein a ser exibida subsequentemente e assume a forma:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu} \quad (2.30)$$

onde  $\rho_0$  é o campo escalar que descreve a densidade de energia própria do fluido, isto

é, a densidade que seria medida por um observador em repouso em relação ao fluido (um observador comóvel),  $p$  é a pressão (também comóvel) e  $u^\alpha$  é a quadrivelocidade que descreve o campo de velocidades do fluido e é dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.31)$$

É importante frisar que o tensor  $T_{\mu\nu}$  obedece a uma lei de conservação que, no espaço de Minkowski, é escrita como

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (2.32)$$

a qual fornece a equação da continuidade e a equação de Euler da hidrodinâmica quando se utiliza  $T_{\mu\nu}$  na forma dada por 2.30.

A igualdade dada por 2.32 pode ser generalizada para espaços que tenham curvatura diferente de zero, como no caso da RG. Nesse caso, a derivada parcial é substituída pela derivada covariante, fornecendo

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.33)$$

#### 2.2.4 Significado Físico dos Tensores Considerados

Antes de se apresentar as equações de campo, é interessante investigar o significado físico das grandezas tensoriais mencionadas em 2.2.3. Seguindo Press e Thorne (1972), isso pode ser esboçado a partir do potencial gravitacional newtoniano  $\Phi$ . Seja então sua expansão em série na região onde se queira medir o campo gravitacional:

$$\Phi(x) = \Phi_0 - g_j x_j + \frac{1}{2} R_{j0k0} x_j x_k + \dots \quad (2.34)$$

onde  $x_j$  são as componentes do vetor posição do ponto onde se está tomando o potencial, as quantidades  $g_j$  são as componentes da aceleração da gravidade no ponto em questão (as quais não devem ser confundidas com as componentes  $g_{\mu\nu}$  do tensor métrico) e  $R_{j0k0}$  representa as inomogeneidades do campo gravitacional no local. Sob o ponto de vista da RG,  $R_{j0k0}$  seriam as componentes do tensor de curvatura 2.27; em termos da teoria newtoniana seriam as segundas derivadas do potencial  $\Phi$ :

$$R_{j0k0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2.35)$$

Como o objetivo é apenas se ter noção do significado físico das entidades tensoriais, pode-se restringir ao caso em que valem duas condições simplificadoras: a primeira é estabelecer que a métrica se desvia da de Minkowski apenas por uma pequena correção de primeira ordem na forma  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$  onde  $\epsilon \ll 1$ ; a segunda é considerar que os campos possuem variação temporal desprezível, tal que todas as derivadas em relação a  $x^0$  sejam nulas. Com a primeira condição, 2.25 fica

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha}\epsilon(\partial_{\mu}h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}h_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) \quad (2.36)$$

e  $R_{j0k0}$ , considerando 2.27, assume a forma

$$R_{j0k0} \approx \frac{\partial\Gamma_{0\nu}^{\lambda}}{\partial x_0} - \frac{\partial\Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x_{\nu}} \quad (2.37)$$

desde que os termos quadráticos em  $\Gamma$  foram desprezados por serem proporcionais a  $\epsilon^2$ . Agora, aplicando-se a segunda condição, 2.37 fica

$$R_{j0k0} \approx -\frac{\partial\Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x_{\nu}} \quad (2.38)$$

onde

$$\Gamma_{00}^{\lambda} = -\frac{1}{2}\epsilon\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\lambda}}. \quad (2.39)$$

Comparando 2.38 a 2.35 é fácil perceber que  $\Gamma_{00}^{\lambda}$  corresponde a  $\partial\Phi/\partial x^{\lambda}$ . Por outro lado, de acordo com a gravitação newtoniana, a aceleração da gravidade  $\vec{g}$  é dada por  $\vec{g} = -\nabla\Phi$  ou, em linguagem tensorial,  $g_{\lambda} = \partial_{\lambda}\Phi$ . Observando 2.39 percebe-se então que o termo perturbativo  $h_{00}$  na métrica corresponde ao potencial newtoniano, enquanto  $\Gamma_{00}^{\lambda}$  está relacionada à aceleração da gravidade  $\vec{g}$  (maiores detalhes referentes a esse ponto podem ser encontrados no Apêndice A.)

A tabela 2.1 mostra a relação intuitiva entre as grandezas geométricas e as grandezas físicas envolvidas.

Tabela 2.1 - Correspondência entre as grandezas físicas e geométricas.

ente geométrico	quantidade física
$R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa}$	inogeneidades do campo
$g_{\mu\nu}$	potencial gravitacional $\Phi$
$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	aceleração da gravidade $\vec{g}$

Com a análise mostrada acima fica sugerido que no regime de campo fraco a RG tem como característica adicionar pequenas perturbações à gravitação newtoniana.

## 2.3 As Equações de Campo da Relatividade Geral

As equações de campo da RG são consideravelmente mais complexas do que as equações de campo presentes na física clássica, como por exemplo as equações de Maxwell que descrevem o campo eletromagnético. Tal complexidade surge da natureza não-linear do campo gravitacional. Por exemplo, as equações de Maxwell são lineares, o que é consequência de o campo eletromagnético não transportar carga e não interagir consigo próprio, ao passo que o campo gravitacional é portador de energia e momento e portanto interage consigo próprio, já que no contexto da Relatividade, energia e momento, além da massa, são fontes de campo gravitacional. Por fim, é importante citar que tal espécie de auto-interação, quando formulada matematicamente, produz equações não-lineares.

### 2.3.1 O Princípio da Covariância e o Conceito de Geodésica

O princípio da covariância geral é uma noção fundamental na formulação da RG e afirma, segundo [Stephani \(1982\)](#), que todas as leis físicas devem ser representadas como equações tensoriais tais que elas permaneçam válidas em qualquer sistema de coordenadas. Além disso há um segundo princípio igualmente fundamental conhecido como *princípio da equivalência*, o qual afirma que referenciais em queda-livre são indistinguíveis de referenciais inerciais, ao menos localmente. Aqui o termo *localmente* significa que as observações são limitadas a regiões pequenas de tal forma que as variações locais do campo gravitacional sejam desprezíveis.

Outro princípio igualmente importante é a afirmação de que os corpos seguem geodésicas no espaço quando livres da ação de forças. Assim, no espaço tridimensional da física clássica a geodésica é uma linha reta, ou seja, é a menor distância entre dois pontos da trajetória do corpo. Esse conceito é generalizado no contexto de espaços curvos onde, dada uma métrica na forma [2.3](#), deseja-se determinar as distâncias extremas entre dois pontos  $P_i$  e  $P_f$ :

$$s = \int_{P_i}^{P_f} ds = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = \text{extremo} \quad (2.40)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro arbitrário. Colocando [2.40](#) em forma de problema variacional tem-se  $\delta s = 0$  cuja solução pode ser encontrada por exemplo em [Weinberg \(1972\)](#) e

Stephani (1982) e fornece o resultado

$$\frac{d^2 x^\mu}{d^2 \lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.41)$$

Se o parâmetro  $\lambda$  for interpretado como o tempo próprio  $\tau$  ou o comprimento  $s$  da trajetória, 2.41 torna-se a equação de movimento de um corpo livre no espaço dado pela métrica 2.3.

### 2.3.2 Dedução das Equações de Campo

Não há uma maneira clara de se formular precisamente as equações de campo partindo de postulados gerais como os apresentados em 2.3.1. Com efeito, de acordo com Chandrasekhar (1972), a derivação das equações de Einstein foi um “triunfo do pensamento especulativo”.

Ainda de acordo com Chandrasekhar (1972), na formulação das leis da gravitação pode-se, em termos gerais, formular três questões: Quando se pode assegurar que não existe campo gravitacional presente em dado ponto? Quais são as equações que determinam o campo gravitacional no vácuo? E quais são as equações que se obtém em regiões do espaço onde a matéria está presente? Na teoria newtoniana essas questões são respondidas por meio do potencial gravitacional  $\Phi$ : a ausência de campo é assegurada por  $\Phi = 0$ ; a equação no vácuo é dada por  $\nabla^2 \Phi = 0$  e, o que é conveniente destacar, a equação na presença de matéria é dada por

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.42)$$

O roteiro da dedução apresentada aqui parte de uma generalização da equação 2.42, de forma que seja escrita em forma tensorial. Assim, de acordo com o exposto na seção 2.2.4 o potencial  $\Phi$  está relacionado à componente  $(0, 0)$  do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e a densidade  $\rho$  é basicamente a componente  $(0, 0)$  do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , conforme pode ser verificado em 2.30. Isso sugere que a equação procurada tenha a forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.43)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é um tensor de segunda ordem o qual depende exclusivamente de  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas e  $\kappa$  é uma constante de proporcionalidade. A dedução se concentrará na determinação dessas duas grandezas.

Em princípio a escolha do tensor  $G_{\mu\nu}$  deve ser limitada por alguns requisitos: ele deve possuir apenas termos com derivadas de segunda ordem da métrica, ou seja,  $G_{\mu\nu}$



deve conter somente termos que ou são lineares na segunda derivada de  $g_{\mu\nu}$  ou são quadráticos nas derivadas primeiras de  $g_{\mu\nu}$ ; desde que  $T_{\mu\nu}$  é simétrico,  $G_{\mu\nu}$  deve ser também simétrico; desde que  $T_{\mu\nu}$  obedece à condição 2.33,  $G_{\mu\nu}$  deve obedecer também. Adicionalmente, para campos fracos produzidos por matéria não-relativística, deve valer a aproximação:

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} \quad (2.44)$$

Com as condições acima, é possível determinar a forma de  $G_{\mu\nu}$ . A dedução pode ser encontrada em Weinberg (1972), Chandrasekhar (1972) e d’Inverno (1995) e fornece:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.45)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci definido anteriormente e  $R$  é o escalar de curvatura. Assim, as equações de Einstein são escritas como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

Entretanto em várias situações é útil escrevê-las em outra forma, colocando o tensor de Ricci em função de  $T_{\mu\nu}$ . Isso é feito multiplicando-se ambos os lados de 2.46 por  $g^{\mu\nu}$  e contraindo os índices  $\mu$  e  $\nu$ , tendo-se em mente ainda que  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ :

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right] \quad (2.47)$$

onde

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \quad (2.48)$$

Resta agora determinar a constante  $\kappa$ . Isso pode ser feito com auxílio da métrica 2.3 para o campo fraco (cuja componente  $g_{00}$  é calculada no Apêndice A) e de aproximações aplicadas a 2.47. Dessa maneira, considerando as mesmas aproximações usadas na seção 2.2.4,  $R_{00}$  assume a forma:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \quad (2.49)$$

Por outro lado a componente (0, 0) do tensor energia-momento é calculada a partir de 2.30, porém sem levar em consideração a pressão  $p$ , já que esta pode ser desprezada

neste contexto.<sup>3</sup> Inicialmente, da definição de quadrivelocidade 2.31, tem-se

$$u^0 = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma c \quad (2.50)$$

onde foi utilizada a relação 2.7. A componente covariante  $u_0$  é obtida por meio da contração  $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$ :

$$u_0 = \eta_{0\nu} u^\nu = u^0 \quad (2.51)$$

Além disso, para velocidades muito menores do que a da luz, tem-se  $\gamma \simeq 1$ . Assim, colocando  $u_0 = c$  e  $\eta_{00} = 1$  em 2.30,  $T_{00}$  assume a forma

$$T_{00} = \rho_0 c^2 \quad (2.52)$$

a partir da qual se pode determinar o escalar  $T$  em 2.48, e que nesse caso é dado também por  $T = \rho_0 c^2$ .

Substituindo 2.52, 2.49 e o valor de  $T$  em 2.47 chega-se a

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa \rho c^2 \quad (2.53)$$

Desde que  $h_{00} = 2\Phi/c^2$  (veja Apêndice A), a relação 2.53 equivale à equação de Poisson 2.42 se

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.54)$$

Como se pode verificar, o valor numérico de  $\kappa$  é da ordem de  $10^{-43}$  no sistema MKS, o que pode ser interpretado como um indicador da grande “rigidez” do espaço-tempo, desde que  $\kappa$  acopla as densidades e fluxos de energia e matéria representados por  $T_{\mu\nu}$  com a estrutura e as perturbações métricas descritas por  $R_{\mu\nu}$ .

## 2.4 Ondas Gravitacionais como Soluções das Equações de Einstein

Segundo Stephani (1982), ondas gravitacionais são, no sentido mais geral, soluções dependentes do tempo das Equações de Einstein. Porém esta definição de onda, como se pode perceber a partir da experiência com outros casos como o eletromagnetismo e a mecânica, é imprecisa: um campo que varia somente como resultado do movimento relativo da fonte e do observador não pode ser necessariamente tratado como onda.

---

<sup>3</sup>Assume-se aqui que a matéria geradora do campo gravitacional se comporta como uma distribuição de partículas de baixas densidade e velocidades. Pode-se ainda dizer que se trata de matéria incoerente.

Para que tal campo variável seja fisicamente considerado ondulatório deve estar presente o fenômeno do transporte de energia e momento, e justamente nesse ponto surgiram debates quanto à existência de ondas gravitacionais.

Apesar de existirem algumas soluções ondulatórias exatas das equações de campo, a discussão sobre a existência física das ondas gravitacionais se baseia fortemente em aproximações. Por exemplo, para tornar a situação simples a despeito da complexidade intrínseca das equações de campo, pode-se restringir aos casos em que as soluções apresentam comportamento linear nas regiões distantes da fonte (conceito que será estabelecido na seção 2.4.1). Assim, seja um sistema planetário visto a grande distância: a teoria linearizada afirma que tal sistema emite radiação gravitacional, embora os efeitos de auto-interação sobre os corpos sejam ignorados.

Porém, independentemente destas e de outras questões teóricas, as quais são tratadas com mais detalhes, por exemplo, em Stephani (1982), nos casos de interesse em Astrofísica é em geral suficiente investigar se estrelas, sistemas estelares e outros objetos nas vizinhanças da Terra estão emitindo ondas gravitacionais e como estas poderiam ser detectadas.

#### 2.4.1 Duas Aproximações Necessárias

A teoria linearizada da gravitação é baseada no pressuposto de que sobre regiões inteiras do espaço e em qualquer ponto na vizinhança das fontes gravitacionais o campo é fraco e a métrica se desvia apenas levemente da de Minkowski (STEPHANI, 1982). Essa suposição é válida porque é frequente encontrar na natureza situações nas quais a distribuição de matéria é cercada pelo vácuo e os corpos mais próximos estão muito afastados, de forma que o campo gravitacional pode ser considerado fraco pelo menos em uma *região intermediária* onde a métrica se desvia da de Minkowski somente por termos da ordem de  $r^{-n}$ , com  $n \geq 1$  e onde se pode introduzir um sistema de referência inercial local. Tal região é conhecida como *zona de campo distante* (ou *far field*) e em geral o estudo das soluções ondulatórias das equações de campo são restritos às soluções que exibem tal região.

A segunda aproximação a ser considerada chama-se *shortwave*, a qual consiste, segundo Thorne (1987), em se considerar a escala de comprimento  $k$  na qual as ondas variam (onde  $k$  é o número de onda dado por  $k = 2\pi/\lambda$ ) como muito pequena quando comparada às escalas de comprimento nas quais todas as outras curvaturas importantes variam. Esta aproximação torna possível uma divisão aproximada, embora precisa, do tensor de Riemann  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  em uma *curvatura de fundo*  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^F$  mais

uma contribuição  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{OG}$  devida às ondas gravitacionais. A parte  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^F$  é a média de  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sobre muitos comprimentos de onda

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^F \equiv \langle R_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \quad (2.55)$$

e a parte representante das ondas é a diferença:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{OG} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta\gamma\delta}^F \quad (2.56)$$

A aproximação de *shortwave* é necessária em virtude da natureza não-linear da gravitação, a qual não permite que a contribuição das ondas gravitacionais para a curvatura seja separada de maneira totalmente precisa das contribuições das demais fontes de campo, o que significa também que ondas gravitacionais não são entidades precisamente definidas. Com efeito, o leitor pode notar que nas deduções usualmente encontradas na literatura, as diversas quantidades relacionais às ondas são calculadas por meio de médias semelhantes às utilizadas em 2.55.

#### 2.4.2 A Solução de Ondas Planas

É importante destacar que, conforme discutido em Stephani (1982), soluções exatas descrevendo as interações entre o movimento das fontes e a emissão de radiação gravitacional não são conhecidas (embora deva-se enfatizar que isso não exclui o fato de haver algumas soluções ondulatórias exatas para as equações de campo, conforme mencionado na seção anterior), de forma que as deduções comumente apresentadas na literatura lidam com propriedades locais de possíveis soluções. Esquemáticamente, o roteiro de tais deduções consiste em se considerar a zona de campo distante como domínio de validade das soluções e na suposição de que as ondas são descritas por pequenos desvios na métrica de Minkowski. Dentro desse contexto, vale destacar ainda que mesmo no caso em que soluções alegadamente exatas são apresentadas é necessário utilizar idealizações distantes da realidade e generalizações de propriedades locais de campos gravitacionais.

Matematicamente a aproximação mencionada acima é descrita como uma perturbação linear de primeira ordem na métrica de Minkowski, na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.57)$$

onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

Calculando-se a conexão 2.25 e o tensor de Ricci 2.28 utilizando-se a métrica 2.57, tem-se (D'INVERNO, 1995)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \cong \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} [\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}] + O(h^2) \therefore \quad (2.58)$$

$$= \frac{1}{2} [\partial_{\mu}h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\lambda} - \partial^{\lambda}h_{\mu\nu}] \quad (2.59)$$

e

$$R_{\mu\nu} \cong \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} - \partial_{\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} + O(h^2) \therefore \quad (2.60)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_{\lambda}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\lambda}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\lambda} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h] \quad (2.61)$$

onde para simplificar a notação foi definido  $\partial/\partial x^{\mu} \equiv \partial_{\mu}$ . De forma semelhante o escalar de curvatura 2.29 pode ser calculado, fornecendo

$$R = (\partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h). \quad (2.62)$$

Os elementos calculados acima são suficientes para se calcular o tensor de Einstein 2.45, o qual fica na forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_{\lambda}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\lambda}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\lambda} - \square h - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\kappa}h^{\lambda\kappa} + \eta_{\mu\nu}\square h]. \quad (2.63)$$

A fim de se simplificar a expressão 2.63, contudo sem perda de generalidade, é possível definir uma nova variável dada por

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.64)$$

cuja substituição em 2.63 leva a

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_{\lambda}\partial_{\mu}\psi_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\lambda}\partial_{\nu}\psi_{\mu}^{\lambda} - \square\psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\kappa}\psi^{\lambda\kappa}] \quad (2.65)$$

Tal equação já poderia fornecer soluções para a perturbação  $h_{\mu\nu}$  porém é importante salientar que não existe uma solução única para tal equação, já que dada uma forma particular de  $h_{\mu\nu}$ , pode-se gerar outras através de transformações de coordenadas (a RG assegura tal característica pelo princípio da covariância geral.) Isso abre a possibilidade de se escolher um sistema particular de coordenadas que simplifique a equação 2.65 e torne mais direto o processo de extrair soluções. Colocando de outra

maneira, os campos possuem invariância de *gauge* que pode ser explorada para a simplificação das equações.

Particularmente, uma escolha conveniente nesse caso são as coordenadas harmônicas, definidas pela propriedade

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (2.66)$$

a qual, aplicando as aproximações 2.57 e 2.58, fornece

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h_\nu^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_\mu^\mu \quad (2.67)$$

ou, em termos de  $\psi_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu \psi_\nu^\mu = 0 \quad (2.68)$$

A relação dada por 2.67 é largamente utilizada no estudo das ondas gravitacionais e recebe várias designações, como *gauge* de Einstein, de Donder, Hilbert ou Fock (D'INVERNO, 1995). Adicionalmente é importante frisar que tal escolha de *gauge* não reduz ou limita a validade das soluções porque é sempre possível fazer com que a relação 2.67 seja satisfeita. Com efeito, caso  $h_{\mu\nu}$  não satisfaça a 2.67, é sempre possível encontrar um  $h'_{\mu\nu}$  que o faça, por meio da transformação 2.69 (WEINBERG, 1972)

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.69)$$

onde as funções  $\varepsilon$  obedecem a

$$\square \varepsilon_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_\mu^\mu \quad (2.70)$$

Finalmente, aplicando 2.68 em 2.65, a equação 2.46 fica

$$\square \psi_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.71)$$

No presente caso será utilizada a versão homogênea de 2.71, o que significa considerar ondas provenientes do infinito (o que é particularmente adequado em se tratando de ondas planas). Porém calculando-se  $\eta^{\mu\nu} \square \psi_{\mu\nu}$ , pode-se demonstrar que  $\square h = 0$ , de forma que a versão homogênea de 2.71 se reduz a

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.72)$$

De acordo com [Weinberg \(1972\)](#), a solução geral para uma onda gravitacional plana satisfazendo a 2.72 pode ser escrita na forma 2.73:

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda) + e_{\mu\nu}^*\exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.73)$$

onde  $e_{\mu\nu}$  é conhecido como tensor de polarização e tem a propriedade de simetria  $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ . Pode-se demonstrar que tal solução satisfaz à equação 2.72 se

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (2.74)$$

e satisfaz ao vínculo 2.67 se

$$k_\mu e_\nu^\mu = \frac{1}{2}k_\nu e_\mu^\mu \quad (2.75)$$

### 2.4.3 O *Gauge* TT e Estados de Polarização

Para o estudo dos estados de polarização e dos graus de liberdade das funções 2.73 é mais conveniente analisar as soluções homogêneas de 2.71, a qual tem a forma  $\square\psi_{\mu\nu} = 0$ . Isso não introduz incoerências pois, conforme ficará claro adiante, as funções  $\psi_{\mu\nu}$  e  $h_{\mu\nu}$  serão equivalentes no presente contexto, embora isso não pareça óbvio em princípio. Assim, segundo [Weinberg \(1972\)](#), a solução homogênea de ondas planas de 2.71 é escrita na forma

$$\psi_{\mu\nu} = \Re [A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (2.76)$$

onde a amplitude  $A_{\mu\nu}$  obedece à relação 2.77

$$A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \quad (2.77)$$

a qual é consequência do *gauge* 2.68. Além disso, o vetor  $k_\alpha$  obedece à 2.74.

Agora, seja a quadrivelocidade  $u$  definida sobre todo o espaço-tempo (no sentido da RE), conforme [Misner et al. \(1973\)](#). Por meio da escolha de uma condição de *gauge* apropriada é possível impor a condição sobre a amplitude  $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\nu}u^\nu = 0. \quad (2.78)$$

A igualdade acima representa apenas três vínculos sobre  $A_{\mu\nu}$  já que um deles, dado por  $k^\mu(A_{\mu\nu})u^\nu = 0$ , é satisfeito por 2.77. Assim, como quarto vínculo pode-se estabelecer

$$A_\mu^\mu = 0 \quad (2.79)$$

Tem-se agora oito vínculos, dados por  $A_{\mu\alpha}u^\alpha = A_{\mu\alpha}k^\alpha = A_\alpha^\alpha = 0$  para as dez componentes do tensor  $A_{\mu\nu}$ , o que reduz o número de componentes independentes para dois, definindo os dois graus de liberdade da onda gravitacional plana.

Os vínculos 2.79 e 2.77 definem o *gauge* TT (transverse-traceless): É transverso por ser ortogonal à própria direção de propagação (2.77) e *traceless* por ter traço nulo (2.79).

A partir da solução apresentada acima e das condições de *gauge*, é possível estudar uma característica importante das ondas gravitacionais: os estados de polarização, que estão diretamente ligados aos graus de liberdade citados acima. Uma maneira simples de se fazer a análise é considerando-se o caso onde a quadrivelocidade  $u^\alpha$  possui as componentes  $(1, 0, 0, 0)$  onde, por simplicidade, foi considerado  $c = 1$ . Além disso, supõe-se ainda que a onda se propaga na direção do eixo  $z$  positivo tal que o vetor  $k^\alpha$  seja dado por  $(k, 0, 0, k)$ . Dessa forma as condições 2.78 e 2.77 fornecem respectivamente

$$A_{\mu 0} = 0 \quad (2.80)$$

$$A_{\mu 0}k^0 + A_{\mu 3}k^3 = 0 \quad (2.81)$$

Além disso, de 2.79 tem-se

$$A_{11} + A_{22} = 0 \quad (2.82)$$

de onde se deduz que as únicas componentes não nulas de  $A_{\mu\nu}$  são  $A_{11} = -A_{22}$ ,  $A_{12}$  e  $A_{21}$ . Por outro lado, como  $A_{\mu\nu}$  é simétrico, tem-se  $A_{12} = A_{21}$ . Dessa forma, o tensor de polarização é escrito em forma matricial como

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Por outro lado, seguindo Kenyon (1990), pode-se escrever o resultado acima de forma mais sintética fazendo

$$h_+ = A_{11} \quad (2.84)$$

$$h_\times = A_{12} \quad (2.85)$$



tal que a solução seja escrita como

$$h_{\mu\nu}(x) = h_+[a_+]_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda) + h_+^*[a_+]_{\mu\nu}\exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.86)$$

$$h_{\mu\nu}(x) = h_\times[a_\times]_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda) + h_\times^*[a_\times]_{\mu\nu}\exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.87)$$

onde  $a_+$  e  $a_\times$  são dados por

$$(a_+)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$(a_\times)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Para exemplificar os efeitos físicos dos estados de polarização, seja um anel circular de partículas situado no plano  $(x, y)$  e uma onda plana viajando na direção positiva de  $z$  que atinge este anel. Caso tal onda tenha polarização  $h_+$ , ela impõe deformações oscilatórias no anel ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , conforme mostrado na figura 2.1:

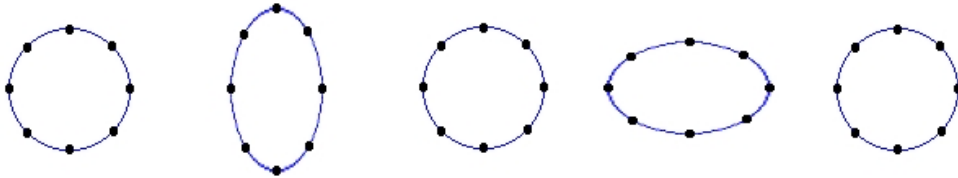


Figura 2.1 - Anel de partículas sofrendo deformação por uma onda  $h_+$

Por outro lado, para uma onda de polarização  $h_\times$  a deformação ocorrerá em um ângulo de  $45^\circ$  em relação às direções  $x$  e  $y$ , conforme a figura 2.2 de forma que se torna claro o uso dos índices  $\times$  e  $+$  em 2.86.

É interessante ainda notar que é possível construir estados mais gerais de polarização

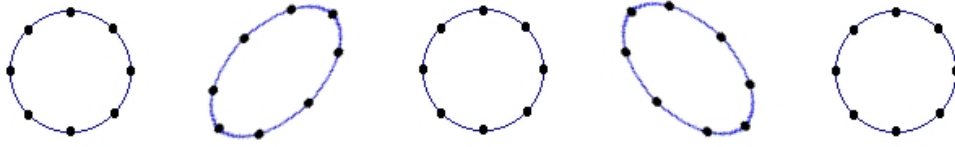


Figura 2.2 - Anel de partículas sofrendo deformação por uma onda  $h_x$

por meio das combinações lineares

$$h_D = \frac{1}{\sqrt{2}} [h_+ + ih_x] \quad (2.90)$$

$$h_E = \frac{1}{\sqrt{2}} [h_+ - ih_x] \quad (2.91)$$

onde os efeitos produzidos sobre o anel de partículas são convertê-lo em uma elipse que gira para a direita e para a esquerda, respectivamente. Como exemplo, a figura 2.3 mostra o efeito produzido por uma onda do tipo  $h_D$ :

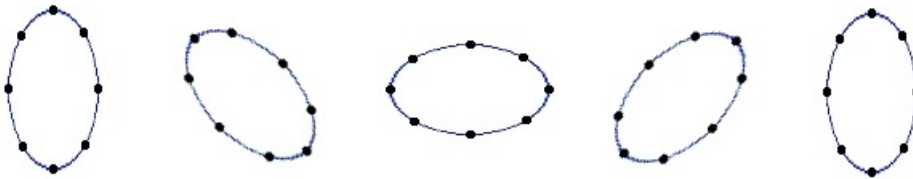


Figura 2.3 - Anel de partículas sofrendo deformação por uma onda dada por 2.90.

Aqui foram apenas mostrados os efeitos gerados por cada estado de polarização. As deduções destes fenômenos, bem como as figuras 2.1, 2.2 e 2.3 podem ser encontradas em Carroll (2004).

#### 2.4.4 A Energia Transportada pelas Ondas Gravitacionais

A análise teórica da energia transportada pelas ondas gravitacionais é complexa e já foi objeto de intenso debate. A complexidade surge porque no contexto da RG o conceito de energia, sua conservação e suas equações de conservação são difíceis de se definir (STEPHANI, 1982). Nas teorias de campo tratadas por intermédio da teoria da Relatividade, o fator decisivo para a existência de ondas não é simplesmente que os campos sejam dependentes do tempo mas que, além disso, a energia e o momento

sejam transportados sem que haja transporte de matéria. Porém, a despeito das dificuldades conceituais envolvidas, é possível esboçar uma análise sobre a energia das ondas gravitacionais: matematicamente tal análise pode ser feita imaginando-se um dado sistema situado no interior de uma superfície esférica, escrevendo-se as equações de conservação para as grandezas citadas e a partir delas investigar se há fluxo de energia e momento através da superfície. Caso tal configuração exista, pode-se dizer que há radiação. De maneira geral se pode escrever as equações de conservação como 2.32. Como suposição inicial, tal igualdade poderia ser utilizada para se deduzir uma lei de conservação para o campo gravitacional, apenas substituindo-se a derivada parcial pela de derivada covariante, na forma:

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.92)$$

Porém, como pode ser visto por exemplo em Bergmann (1976), 2.92 não pode ser considerada uma lei de conservação no sentido usual das teorias de campo, além disso não existe um tensor energia-momento para o campo gravitacional (STEPHANI, 1982).

Uma solução para o problema, que não será discutida aqui mas cuja discussão pode ser encontrada nas referências citadas acima, indica que se deve definir um pseudo-tensor de energia-momento para o campo gravitacional  $\mathfrak{t}_{\mu\nu}$ , ligado a um pseudo-tensor para a matéria  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$  por meio de

$$\frac{\partial[(-g)(\mathfrak{T}^{\mu\nu} + \mathfrak{t}^{\mu\nu})]}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (2.93)$$

a qual representa uma lei de conservação.

No entanto ainda é necessário definir uma expressão para  $\mathfrak{t}_{\mu\nu}$ . Como mencionado anteriormente, ondas gravitacionais transportam energia e momento, as quais contribuem para modificar a si próprias. Assim, mesmo para um espaço-tempo originalmente sem fontes, a aproximação em primeira ordem da versão homogênea da equação de campo 2.43 deveria ser escrita como

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathfrak{t}_{\mu\nu} \quad (2.94)$$

Como  $G_{\mu\nu}$  possui como fonte o próprio espaço tempo (na forma de ondas gravitacionais), a equação 2.94 é equivalente à expansão de segunda ordem da equação

$G_{\mu\nu} = 0$ , na forma

$$G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} = 0 \quad (2.95)$$

assim,  $\mathbf{t}_{\mu\nu}$  é escrito com boa aproximação como

$$\mathbf{t}_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} \quad (2.96)$$

Agora, para se estudar a energia transportada pelas ondas gravitacionais, basta que se calcule o segundo termo da expansão do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ . Uma maneira simples de se computar esse termo é utilizando-se a componente  $h_+$  da onda plana estudada anteriormente, de forma que as componentes não nulas do tensor métrico serão (KENYON, 1990)

$$g_{11} = -1 + h_+ \quad , \quad g^{11} = -1 - h_+ \quad (2.97)$$

$$g_{22} = -1 - h_+ \quad , \quad g^{22} = -1 + h_+ \quad (2.98)$$

$$g_{00} = g^{00} = +1 \quad , \quad g_{33} = g^{33} = -1 \quad (2.99)$$

Com tais componentes para o tensor métrico, a conexão 2.25 fica

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{11}^0 = -h_{+,0}/2 \quad (2.100)$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{11}^3 = +h_{+,0}/2 \quad (2.101)$$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{22}^0 = -h_{+,0}/2 \quad (2.102)$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{22}^3 = +h_{+,0}/2 \quad (2.103)$$

onde, por simplicidade, foi estabelecida a notação  $h_{,0} \equiv dh/dx^0$ . Além disso, os termos contendo  $h_+ h_{+,0}$  foram desprezados. Agora, observando 2.27, nota-se que se somente os termos quadráticos de  $h_+$  forem levados em consideração, o tensor de Riemann torna-se

$$R_{\mu\nu\kappa}^{(2)\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (2.104)$$

de forma que as componentes diferentes de zero serão:

$$-R_{010}^{(2)1} = -R_{020}^{(2)2} = h_{+,0}^2/4 \quad (2.105)$$

$$-R_{101}^{(2)0} = +R_{131}^{(2)3} = h_{+,0}^2/4 \quad (2.106)$$

$$-R_{313}^{(2)1} = -R_{323}^{(2)2} = h_{+,0}^2/4 \quad (2.107)$$

De acordo com 2.28, as componentes de segunda ordem do tensor de Ricci são

$$R_{00}^{(2)} = R_{33}^{(2)} = -h_{+,0}^2/2 \quad (2.108)$$

$$R_{30}^{(2)} = R_{03}^{(2)} = -h_{+,0}^2/2 \quad (2.109)$$

enquanto o escalar de curvatura é dado por

$$R^{(2)} = 0 \quad (2.110)$$

Como resultado, o tensor de Einstein dado por 2.45 fica

$$G_{00}^{(2)} = G_{33}^{(2)} = -h_{+,0}^2/2 \quad (2.111)$$

$$G_{30}^{(2)} = G_{03}^{(2)} = -h_{+,0}^2/2 \quad (2.112)$$

portanto a componente tempo-tempo do tensor dado por 2.96 fica

$$t_{00} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle h_{+,0}^2 \rangle \quad (2.113)$$

onde foram introduzidos os símbolos  $\langle \rangle$ , os quais significam que se está tomando o valor médio da grandeza em questão. Neste caso, considera-se a média sobre muitos comprimentos de onda, uma vez que a energia transportada pela radiação gravitacional não pode ser localizada com precisão no espaço. Por outro lado, a derivada em relação a  $x^0$  pode ser escrita em termos da derivada em relação ao tempo como  $d/dx^0 = (1/c)(d/dt)$ . Além disso, se a componente  $h_{\times}$  for introduzida (supondo que sua contribuição para a energia da onda seja idêntica à de  $h_{+}$ ) tem-se

$$t_{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_{+}^2 + \dot{h}_{\times}^2 \rangle \quad (2.114)$$

onde  $\dot{h} \equiv dh/dt$ . Por outro lado, o fluxo de energia  $F$  é calculado por meio de  $t_{00}$  via  $F = ct_{00}$ . Com isso em mente e lembrando que  $h_{11} = -h_{22} \equiv h_{+}$  e  $h_{12} = h_{21} \equiv h_{\times}$ , o fluxo  $F$  fica

$$F = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{11}^2 + \dot{h}_{22}^2 + \dot{h}_{12}^2 + \dot{h}_{21}^2 \rangle \quad (2.115)$$

o qual pode ser escrito de forma mais compacta na forma

$$F = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle \quad (2.116)$$

onde deve-se somar sobre os índices  $i$  e  $j$ .

### 2.4.5 A Natureza Quadrupolar da Radiação Gravitacional

A tentativa de explorar eventuais similaridades entre as teorias gravitacional e eletromagnética pode levar a resultados interessantes e facilitar a obtenção de determinados resultados matemáticos que seriam difíceis de se obter de outra forma. Um caso típico é o estudo da decomposição multipolar da radiação gravitacional, onde pode-se estabelecer uma comparação com o caso eletromagnético e evidenciar as principais semelhanças e diferenças. Em [Misner et al. \(1973\)](#) há uma análise interessante e que será esboçada aqui.

Na teoria eletromagnética o termo de dipolo elétrico domina a expansão e sua luminosidade obedece a  $L \propto \ddot{d}^2$ , onde  $d = ex$  é o momento de dipolo elétrico, cuja segunda derivada é dada por  $\dot{d} = e\dot{x}$ , sendo  $e$  a carga da partícula e  $\dot{x}$  a sua aceleração.

Estabelecendo agora uma analogia com o caso gravitacional, define-se o momento de dipolo de massa como:

$$\vec{d} = \sum_A m_A \vec{x}_A \quad (2.117)$$

que vale para uma distribuição discreta de massas, onde o índice  $A$  se refere a cada constituinte da distribuição e  $x_A$  representa a posição de cada massa. A primeira derivada de  $\vec{d}$  fornece

$$\dot{\vec{d}} = \sum_A m_A \dot{\vec{x}}_A = \vec{p} \quad (2.118)$$

onde  $\vec{p}$  é o momento linear. A segunda derivada do momento dipolo de massas se anula devido à conservação do momento. Isso conduz à conclusão de que não pode haver radiação gravitacional de dipolo. Deve-se enfatizar também que a inexistência de massas negativas é outro argumento que torna impossível a radiação gravitacional de dipolo.

Voltando ao caso eletromagnético, o próximo tipo de mecanismo emissor de radiação a ser considerado são os dipolos magnéticos e quadrupolos elétricos. A radiação de dipolo magnético tem sua intensidade dependente da segunda derivada temporal do momento magnético  $\ddot{\vec{\mu}}$ ; o análogo gravitacional de  $\ddot{\vec{\mu}}$  é o momento angular:

$$\vec{\mu}_G = \sum_A (\text{posição de } A) \times (\text{corrente de } A) = \sum_A \vec{r}_A \times m \vec{v}_A = \vec{J} \quad (2.119)$$

Como  $\vec{J}$  é uma constante do movimento, suas derivadas se anulam e não haverá radiação. Isso indica que não pode haver radiação dipolar gravitacional de nenhuma espécie.

O próximo passo seria considerar os termos de quadrupolo. No caso eletromagnético a luminosidade obedece a  $L \propto \ddot{Q}^2$  ou  $L \propto \ddot{Q}_{jk}\ddot{Q}_{jk}$  onde  $Q_{jk}$  é o tensor momento de quadrupolo elétrico. A contrapartida gravitacional é feita por

$$L \propto \langle \ddot{\mathbf{L}}^2 \rangle \quad (2.120)$$

ou

$$L \propto \langle \ddot{\mathbf{L}}_{jk}\ddot{\mathbf{L}}_{jk} \rangle \quad (2.121)$$

onde novamente foram considerados valores médios. No caso, foi tomada a média do momento de quadrupolo sobre muitos comprimentos de onda. Particularmente  $\mathbf{L}_{jk}$  assume a forma

$$\mathbf{L}_{jk} = \sum_A m_A \left( x_{Aj}x_{Ak} - \frac{1}{3}\delta_{jk}r_A^2 \right) \quad (2.122)$$

cuja forma contínua é escrita como

$$\mathbf{L}_{jk} = \int \rho \left( x_jx_k - \frac{1}{3}\delta_{jk}r^2 \right) d^3x \quad (2.123)$$

Como conclusão à análise mostrada acima, vê-se que no estudo da radiação eletromagnética o primeiro termo da expansão é de origem dipolar, ao passo que no caso gravitacional o primeiro termo é quadrupolar.

## 2.5 Geração de Radiação Gravitacional por Sistemas Binários

De acordo com [Weinberg \(1972\)](#), a potência total irradiada em forma de ondas gravitacionais por um objeto é dada por:

$$L = \frac{2G\omega^6 [D_{ij}D_{ij}^* - \frac{1}{3}|D_{ii}|^2]}{5c^5} \quad (2.124)$$

onde  $L$  é a luminosidade,  $\omega$  é a frequência angular da onda e as quantidades  $D_{ij}$  são escritas na forma:

$$D_{ij}(\omega) = \int x^i x^j \rho(x) d^3x \quad (2.125)$$

Mais especificamente, se o objeto estiver em rotação a expressão para  $L$  fica (veja Apêndice B):

$$L = \frac{32G\omega_{\text{rot}}^6 I^2 e^2}{5c^5} \quad (2.126)$$

onde  $\omega_{\text{rot}}$  é a frequência angular de rotação do objeto,  $I = \sum_i^3 I_{ii}$  e  $e = (I_{11} - I_{22})/I$ , sendo  $I_{ii}$  a componente do tensor de inércia em relação ao eixo  $x^i$ . Esta expressão

pode ser utilizada no cálculo da potência irradiada por um sistema binário, bastando para isso que se calcule as componentes do tensor  $I_{ij}$  para esse sistema.

Para isso, pode-se considerar o sistema composto por duas massas  $m_1$  e  $m_2$  ligadas por uma barra de massa desprezível, considerar que esse sistema gira em torno de seu centro de massa e escolher um sistema de coordenadas fixo ao sistema binário e cuja origem esteja no centro de massa. Os detalhes da dedução podem ser encontrados no Apêndice B, de forma que a expressão final para a luminosidade de um sistema binário fica:

$$L = \frac{32G\omega_{\text{orb}}^6}{5c^5} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 r^4 \quad (2.127)$$

onde  $r$  é a separação entre os componentes do sistema e substituiu-se  $\omega_{\text{rot}}$  por  $\omega_{\text{orb}}$  (referente a *orbital*), os quais são fisicamente equivalentes. É interessante ainda frisar que é usual em Astrofísica referir-se à potência irradiada como luminosidade da fonte.

### 2.5.1 Sistemas Binários Excêntricos

Acima foi apresentada a análise da emissão de radiação gravitacional por sistemas binários em órbitas circulares. Porém em casos mais gerais as órbitas não são circulares, o que torna a análise mais complexa e traz mudanças significativas nos padrões de emissão. No caso de órbitas circulares a radiação emitida possui o dobro da frequência de rotação do sistema, o que caracteriza radiação de quadrupolo. No caso de órbitas com excentricidades diferentes de zero, a radiação emitida revela componentes multipolares, além da componente de quadrupolo descrita acima. Uma característica importante neste caso é o fato de as intensidades relativas das componentes multipolares serem função da excentricidade orbital. Particularmente, quanto maior a excentricidade, mais alto é o harmônico portador da máxima intensidade. Por exemplo, para uma excentricidade  $\varepsilon = 0.7$ , a potência máxima da radiação emitida estará apenas no décimo harmônico, de acordo com Thorne (1987).

Matematicamente, pode-se seguir Peters e Mathews (1963) e representar as frequências multipolares da seguinte maneira:

$$\nu_n = n\nu_{\text{orb}} \quad (2.128)$$

onde  $\nu_n$  representa a frequência emitida no  $n$ -ésimo harmônico e  $\nu_{\text{orb}}$  representa a frequência de rotação do sistema. A luminosidade total da radiação emitida é dada



por:

$$L_n = \frac{32G^{7/3}}{5c^5} \frac{(m_1 m_2)^2}{(m_1 + m_2)^{2/3}} \omega_{\text{orb}}^{10/3} g(n, \varepsilon) \quad (2.129)$$

onde  $\omega_{\text{orb}} = 2\pi\nu_{\text{orb}}$  e com  $g(n, \varepsilon)$  dados por

$$g(n, \varepsilon) = \frac{n^4}{32} \left\{ \left[ J_{n-2}(n\varepsilon) - 2\varepsilon J_{n-1}(n\varepsilon) + \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) + 2\varepsilon J_{n+1}(n\varepsilon) - J_{n+2}(n\varepsilon) \right]^2 \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon^2) [J_{n-2}(n\varepsilon) - 2\varepsilon J_n(n\varepsilon) + J_{n+2}(n\varepsilon)]^2 + \frac{4}{3n^2} [J_n(n\varepsilon)]^2 \right\} \quad (2.130)$$

onde  $J_n$  são as funções de Bessel de  $n$ -ésima ordem.

A expressão para a luminosidade 2.129 corresponde a cada harmônico isoladamente. Para se obter a luminosidade total, basta que se somem as luminosidades correspondentes a cada harmônico:

$$L_{\text{total}} = \sum_{n=2}^{\infty} L_n \quad (2.131)$$

ou escrevendo de outra maneira

$$L_{\text{total}} = L_{\text{circ}} F(\varepsilon) \quad (2.132)$$

onde  $L_{\text{circ}}$  corresponde à luminosidade de um sistema em órbita circular, podendo ser escrita na forma

$$L_{\text{circ}} = \frac{32G^{7/3}}{5c^5} \frac{(m_1 m_2)^2}{(m_1 + m_2)^{2/3}} \omega_{\text{orb}}^{10/3} \quad (2.133)$$

que é exatamente a expressão 2.127 escrita em termos apenas da frequência de rotação (o que pode ser obtido imediatamente com auxílio da terceira lei de Kepler) e a função  $F(\varepsilon)$  é dada por:

$$F(\varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} g(n, \varepsilon) \quad (2.134)$$

Nota-se que os termos que diferenciam a luminosidade de um sistema em órbita circular de um excêntrico são as funções  $g(n, \varepsilon)$  e  $F(\varepsilon)$ . Particularmente,  $F(\varepsilon)$  é função apenas da excentricidade  $\varepsilon$  e pode ser escrita como uma expressão algébrica simples, de acordo com Peters e Mathews (1963):

$$F(\varepsilon) = \frac{1 + 73\varepsilon^2/24 + 37\varepsilon^4/96}{(1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \quad (2.135)$$

Nos casos em que a excentricidade é nula,  $F(\varepsilon) = 1$  e chega-se ao resultado para sistemas circulares. Além disso, tem-se  $g(2, 0) = 1$  e  $g(n, 0) = 0$  para  $n \neq 2$ , o que

mostra que a radiação emitida por sistemas circulares possui apenas uma componente da expansão multipolar, que corresponde ao dobro da frequência de rotação do sistema.

Uma maneira simples de se observar o comportamento dos diversos harmônicos da radiação emitida em função da excentricidade é definindo-se uma amplitude normalizada para cada harmônico, que pode ser denominada  $G(n, \varepsilon)$ , na forma:

$$G(n, \varepsilon) = \frac{g(n, \varepsilon)}{F(\varepsilon)}, \quad (2.136)$$

a qual é válida para todos os valores de  $\varepsilon$ . Assim, o comportamento dos diversos harmônicos em função da excentricidade pode ser observado nas figuras 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7.

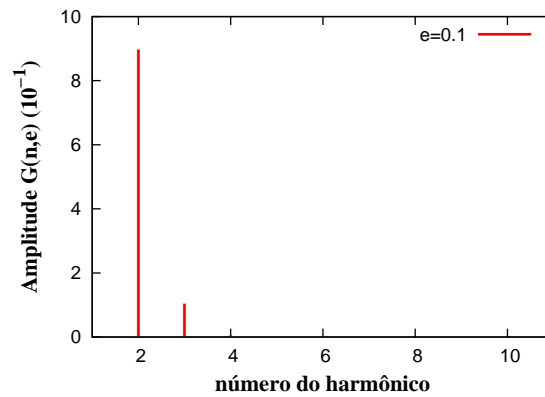


Figura 2.4 - Amplitude relativa dos harmônicos para  $\varepsilon = 0.1$

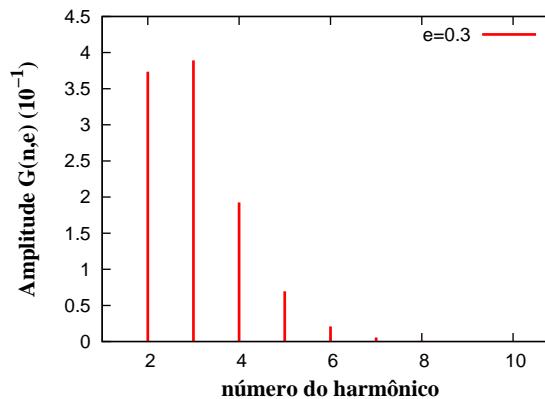


Figura 2.5 - Amplitude relativa dos harmônicos para  $\varepsilon = 0.3$

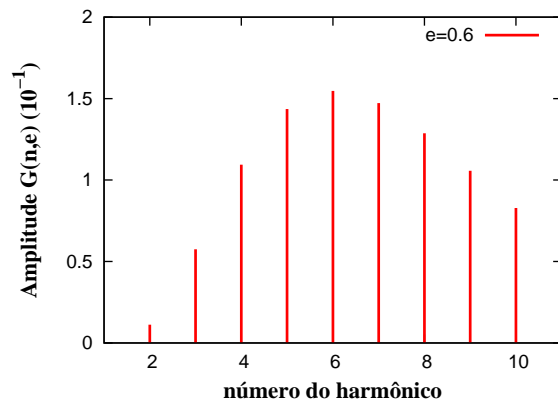


Figura 2.6 - Amplitude relativa dos harmônicos para  $\varepsilon = 0.6$

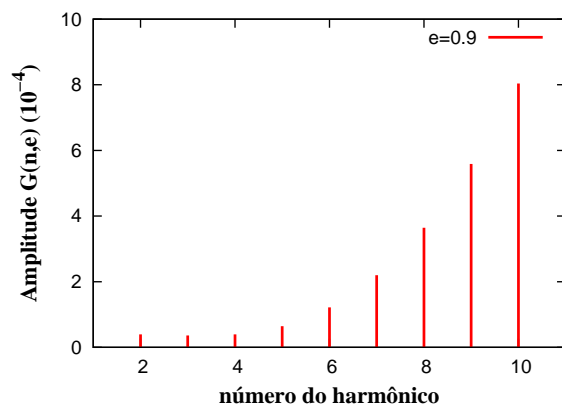


Figura 2.7 - Amplitude relativa dos harmônicos para  $\varepsilon = 0.9$

### 2.5.2 As Amplitudes Adimensional e Espectral para os Fundos em Ondas Gravitacionais

No estudo dos espectros em ondas gravitacionais gerados pelos diversos fenômenos astrofísicos, é frequente trabalhar-se com outras grandezas além da luminosidade e do fluxo descritos anteriormente. Especificamente, são usuais a amplitude adimensional  $h$  e a amplitude espectral  $S_h$ . Será então mostrado aqui como as grandezas  $h_{BG}$  (onde o subscripto representa *background*) e  $S_h$  para os espectros podem ser obtidas a partir do fluxo e da amplitude  $h_{\text{fonte}}$  para fontes individuais.

Inicialmente,  $h_{\text{fonte}}$  é calculada a partir da expressão para o fluxo de energia 2.116. Assim, considerando uma onda plana de frequência angular  $\omega = 2\pi\nu$  escrita na

forma

$$h_{\mu\nu} = (h_{\times}e_{\mu\nu} + h_{+}e_{\mu\nu})e^{-i\omega t} \quad (2.137)$$

a equação 2.116 fica

$$F = \frac{c^3\omega^2}{32\pi G}(|h_{\times}|^2 + |h_{+}|^2) \quad (2.138)$$

Considerando que as amplitudes para os dois estados de polarização são iguais e denominando-as simplesmente como  $h$ , tem-se finalmente

$$F = \frac{c^3\omega^2 h^2}{16\pi G} \quad (2.139)$$

Em muitos casos particulares a amplitude  $h$  pode ser calculada por meio de fórmulas envolvendo as grandezas que caracterizam os diversos objetos astrofísicos, tais como massas, distâncias e frequências de rotação ou vibração. Com efeito, conforme será mostrado subsequentemente, existe uma relação desse tipo que será empregada no cálculo dos espectros.

É interessante também definir agora outra grandeza largamente utilizada nas análises de detectabilidade: a amplitude espectral  $S_h$ , a qual será definida por meio de uma versão modificada de 2.139 (HILS et al., 1990):

$$F_{\nu} = \frac{c^3 S_h \omega_{\text{obs}}^2}{16\pi G} \quad (2.140)$$

Aqui  $F_{\nu}$  é a densidade espectral de fluxo dada em  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}$ ,  $\omega_{\text{obs}} = 2\pi\nu_{\text{obs}}$  onde  $\nu_{\text{obs}}$  é a frequência das ondas gravitacionais observadas na Terra e  $\sqrt{S_h}$  é definida como a amplitude espectral das ondas (em  $\text{Hz}^{-1/2}$ ). É importante destacar que para  $\omega \geq 0$ , 2.140 deve ser multiplicada por um fator 2 porque é necessário levar em consideração também os valores negativos de frequência.

Por outro lado a densidade espectral 2.140 pode ser escrita como

$$F_{\nu} = \int f_{\nu}(\nu_{\text{obs}})dR \quad (2.141)$$

onde  $f_{\nu}(\nu_{\text{obs}})$  é a densidade de energia por unidade de frequência (dada em  $\text{J m}^{-2} \text{Hz}$ ) produzida por uma fonte e  $dR$  é a taxa diferencial de geração de ondas gravitacionais pela fonte em questão. De acordo com Carr (1980), a grandeza  $f_{\nu}(\nu_{\text{obs}})$  é dada por

$$f_{\nu}(\nu_{\text{obs}}) = \frac{\pi c^3}{2G} h_{\text{fonte}}^2 \quad (2.142)$$

onde  $h_{\text{fonte}}$  é a amplitude adimensional produzida por um evento que gera um sinal de frequência observada  $\nu_{\text{obs}}$ . Combinando 2.140, 2.141 e 2.142 e resolvendo para  $S_h$  chega-se a

$$S_h = \frac{1}{\nu^2} \int h_{\text{fonte}}^2 dR \quad (2.143)$$

salientando mais uma vez que o lado direito em 2.140 deve ser multiplicado por 2. Paralelamente,  $S_h$  pode ser definida como

$$S_h = \frac{h_{\text{BG}}^2}{\nu} \quad (2.144)$$

onde  $h_{\text{BG}}$  representa a amplitude do espectro e pode ser escrita na forma (de ARAUJO; MIRANDA, 2005)

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \int h_{\text{fonte}}^2 dR \quad (2.145)$$

## 2.6 Elementos de Cosmologia

O modelo de universo adotado nesta tese é representado pelo elemento de linha conhecido como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Embora esse elemento possa ser representado de diversas maneiras em virtude da utilização de diferentes sistemas de coordenadas (RYDEN, 2002; PEEBLES, 1993), ele é frequentemente encontrado na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (2.146)$$

onde  $a$  é o fator de escala dado por  $a(z) = (1+z)^{-1}$  (MUKHANOV, 2005),  $z$  é o *redshift* e  $K$  é a curvatura que pode ser positiva, nula ou negativa se o espaço em questão for esférico, plano ou hiperbólico, respectivamente (RYDEN, 2002). Essa métrica é uma solução exata das Equações de Campo da RG e descreve um universo homogêneo, isotrópico e que se expande ou se contrai, dependendo das particularidades de cada modelo. Sua forma geral vem de considerações geométricas de homogeneidade e isotropia; as equações de campo são necessárias apenas para se determinar a forma do fator de escala  $a$ . Além disso é interessante ressaltar que essa forma é frequentemente referida como o modelo padrão da cosmologia moderna.

Por meio da métrica apresentada é possível extrair duas grandezas importantes para o cálculo dos espectros: a distância comóvel  $r_z$  e o elemento de volume comóvel em função de  $z$  dado implicitamente por  $dV/dz$ . A distância comóvel é obtida considerando-se a condição de geodésica nula ( $ds^2 = 0$ ) em 2.146 e integrando-se a

expressão resultante para que se obtenha  $r$  em função de  $z$  (já tendo-se em mente que se pode escrever  $t$  em função do *redshift*.) Uma dedução detalhada pode ser encontrada em Peebles (1993), onde o autor reescreveu a expressão para  $ds^2 = 0$  em termos do *redshift* usando

$$\frac{\dot{a}}{a} \equiv H(z) = H_0 E(z) \quad (2.147)$$

onde  $H_0$  é o valor atual do parâmetro de Hubble,  $H(z)$  é o valor desse parâmetro para um *redshift*  $z$  e  $E(z)$  é dado por

$$E(z) = \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (2.148)$$

As quantidades  $\Omega$  são chamadas de parâmetros de densidade e são definidas como  $\Omega \equiv \rho/\rho_{\text{crit}}$  onde  $\rho_{\text{crit}}$  é a densidade crítica do universo dada por

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.149)$$

e  $\rho$  é a densidade correspondente a cada grandeza. Além disso elas obedecem às relações:  $\Omega_M + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1$  e  $\Omega_M = \Omega_{\text{DM}} + \Omega_B$ , onde os índices M, DM, B,  $\Lambda$  e  $K$  se referem a matéria, matéria escura, matéria bariônica, constante cosmológica e curvatura, respectivamente. Dessa forma, a distância comóvel é dada por

$$r_z = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} S \left[ \sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (2.150)$$

onde, seguindo Carroll et al. (1992), a função  $S(x)$  é definida como

$$S(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{universo fechado} \\ x & \text{universo plano} \\ \text{senh}(x) & \text{universo aberto} \end{cases}$$

A expressão para  $dV/dz$  é calculada por meio de

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dz} \quad (2.151)$$

e utilizando a forma local da lei de Hubble

$$z \approx \frac{v}{c} = \frac{H(z)r}{c} \quad (2.152)$$

a partir da qual se pode escrever  $cdz = H(z)dr$  onde  $H(z) = H_0 E(z)$ . Assim, 2.151

fica

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi \left( \frac{c}{H_0} \right) \frac{r_z^2}{E(z)} \quad (2.153)$$

Finalmente, é importante ressaltar que na presente tese é considerado o caso de um universo espacialmente plano (ou seja,  $\Omega_K = 0$ ).





### 3 DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Uma vez que se tenha calculado o espectro em ondas gravitacionais, deve-se verificar sua detectabilidade, ou seja, verificar se os detectores hoje operantes ou já previstos em projeto têm capacidade de detectar tais espectros. Porém as dificuldades técnicas envolvidas na detecção de ondas gravitacionais são grandes, porque as amplitudes das perturbações previstas na métrica são muito pequenas. Como ilustração da ordem de grandeza das ondas gravitacionais tipicamente envolvidas nos esforços de detecção, seja um caso simples onde se tem um sistema binário no qual ambos os componentes têm massa  $M$  e a distância orbital é  $R$ . Segundo [Carroll \(2004\)](#), a ordem de grandeza para a amplitude da radiação recebida por um observador na Terra é dada por

$$h \sim \frac{R_S^2}{rR} \quad (3.1)$$

onde  $R_S$  é o raio de Schwarzschild dado por

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.2)$$

e  $r$  é a distância entre a fonte e o observador. Tomando como exemplo um sistema formado por dois corpos de massas iguais a 10 massas solares separados entre si por uma distância  $R$  igual a 10 vezes o raio de Schwarzschild ( $R \sim 10^5\text{m}$ ) e a 100Mpc de distância ( $r \sim 10^{24}\text{m}$ ), teria-se  $h \sim 10^{-21}$ . Como outros exemplos pode-se citar o caso das coalescências de buracos-negros supermassivos onde, de acordo com [Enoki et al. \(2004\)](#), as amplitudes típicas envolvidas são dadas por  $h(f) \sim 10^{-16}(f/1\mu\text{Hz})^{-2/3}$  e as binárias de raios-X (como por exemplo o pulsar PSR 1913 + 16), cujos sinais possuem amplitudes da ordem de  $\sim 10^{-22}$  ([HAWKING; ISRAEL, 1979](#)).

Porém, apesar das dificuldades, existe grande interesse na detecção de ondas gravitacionais. Duas das principais motivações para tal empreendimento são a possibilidade de se testar teorias alternativas de gravitação e se estudar várias propriedades dos diversos processos astrofísicos.

Com efeito, embora a existência de ondas gravitacionais seja assegurada por argumentos gerais, a intensidade e outras características das ondas dependem, conforme [Ohanian e Ruffini \(1994\)](#), de detalhes da teoria de gravitação considerada e das propriedades físicas dos processos geradores de radiação. Tal fato sugere que a investigação experimental das propriedades das ondas servirão como teste para as teorias de gravitação e para a investigação dos processos astrofísicos. Por exemplo, ondas gravitacionais permitiriam estudar o interior de quasares e outras regiões de

campos gravitacionais intensos; a energia, a forma e a polarização de *bursts* de radiação gravitacional poderiam revelar muito sobre os processos astrofísicos nos quais tais sinais foram gerados. Como ilustração, a tabela 3.1 mostra as faixas de frequência típicas, suas fontes presumíveis e os detectores destinados a operarem em cada uma de tais faixas.

Tabela 3.1 - Faixas de frequência de ondas gravitacionais (ver detalhes no texto).

Frequência	Fontes Típicas	Detectores
$10^{-7}$ to $10^{-4}$ Hz (ELF)	binárias em baixa frequência, buracos negros	
$10^{-4}$ to $10^{-1}$ Hz (VLF)	binárias em alta frequência, buracos negros	LISA/eLISA, BBO e DECIGO
$10^{-1}$ to $10^2$ Hz (LF)	pulsares binários, buracos negros	DECIGO, BBO, LIGO e ET
$10^2$ to $10^5$ Hz (MF)	vibrações de pulsar, objetos compactos, supernovas	LIGO ET
$10^5$ to $10^8$ Hz (HF)	produzidas pelo homem?	
$10^8$ to $10^{11}$ Hz (VHF)	radiação cosmológica primordial	

Fonte: Adaptado de [Ohanian e Ruffini \(1994\)](#).

Na coluna à esquerda da tabela 3.1, ELF significa frequências extremamente baixas; VLF são frequências muito baixas; a seguir LF, MF, HF e VHF representam frequências baixas, médias, altas e muito altas, respectivamente.

### 3.1 Detectores de Massa Ressonante e Interferométricos

Tem-se realizado vários projetos de detectores, sendo o mais antigo deles o oscilador ressonante construído por Joseph Webber na década de 1960 ([WEBBER et al., 1973](#)). Um oscilador ressonante, ou detector de massa ressonante, consiste basicamente em uma peça de metal, geralmente em forma de cilindro ou esfera, que pode ser feita de alumínio, silício ou nióbio e vários transdutores ligados a tal peça. Quando uma onda gravitacional atinge o detector, excita seus modos normais de vibração, e estas vibrações mecânicas são captadas e convertidas em sinais elétricos pelos transdutores. Por seu próprio princípio de funcionamento, este tipo de detector possui uma banda

de detecção muito estreita, pois os valores das frequências normais de vibração são bem definidos.

No caso especial do detector de Webber foi utilizado um cilindro de alumínio de massa 1,2 toneladas, com comprimento de 1,5 metros e frequência ressonante de 1657Hz (WEBER, 1966). Uma onda cuja amplitude fosse de  $h \sim 10^{-20}$  excitaria um modo normal de vibração da barra, cuja energia de oscilação seria de  $\sim 10^{-20}$ J, e a amplitude de oscilação da barra seria de  $\sim 10^{-15}$ m.

No entanto, além do oscilador pioneiro de Webber, há outros detectores que utilizam barras ressonantes, como por exemplo Nautilus e Auriga (ambos na Itália) e Allegro (situa-se nos Estados Unidos porém foi desativado em 2008); dos detectores de massa ressonante que utilizam esferas, podem ser citados o detector Mario Schenberg no Brasil e o miniGRAIL na Holanda.

Por outro lado, existem outros tipos de detectores, como os interferométricos, cujo princípio de funcionamento é a interferometria a *laser*. Tal tipo de detector consiste basicamente em um interferômetro semelhante ao de Michelson-Morley: uma fonte dispara um feixe de *laser* em direção a um espelho semi-refletor, do qual emergem dois raios perpendiculares, que viajam por dois braços e são refletidos por dois espelhos colocados nas extremidades desses braços. Esses raios são então captados por fotodiodos e somados. Uma onda gravitacional que altere o comprimento de um dos braços, ou ambos, causará uma variação no padrão de interferência dos raios. O primeiro protótipo desse tipo de detector foi testado em 1972 com uma sensibilidade *rms* de  $h \simeq 10^{-14}$  para uma faixa de  $\nu \simeq 1 - 10$ kHz (MOSS et al., 1972). Além disso, é importante ressaltar que tais detectores, ao contrário dos de massa ressonante, possuem larga faixa de frequência. Porém os interferômetros têm uma importante limitação: em baixas frequências ( $\nu \leq 1$ Hz), é praticamente impossível isolar o detector de vibrações ambientes, e uma solução interessante é montá-los no espaço.

Particularmente, serão descritos aqui seis detectores: LIGO, LISA (ou eLISA), BBO, DECIGO, ET e Virgo. Todos são interferométricos, onde o Virgo, o LIGO e o ET são terrestres; os outros são projetados para operarem no espaço. As curvas de sensibilidade para LIGO, LISA (eLISA), BBO, DECIGO e ET são mostradas na figura 3.1.

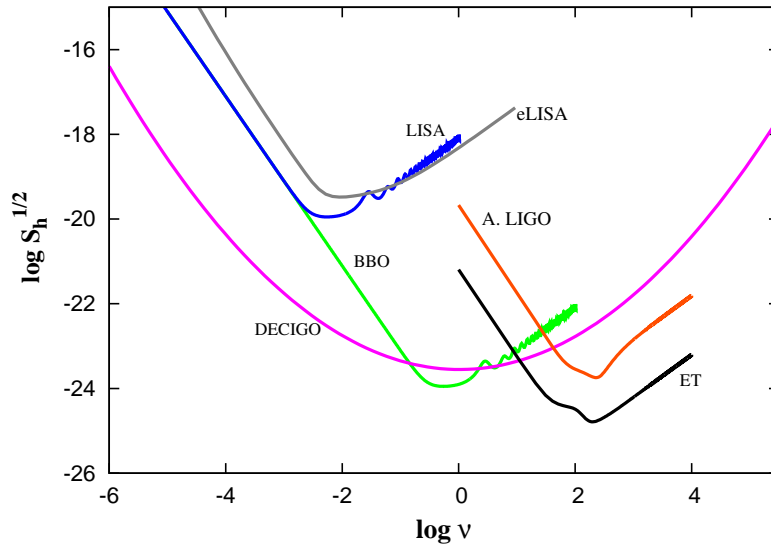


Figura 3.1 - Curvas de sensibilidade para os detectores interferométricos considerados nesta tese. As referências para as curvas são mostradas na Seção 6.1.

### 3.2 LIGO

O detector LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) tem como finalidade detectar ondas gravitacionais de origem cosmológica e astrofísicas em geral, tais como sistemas binários compactos e o colapso de estrelas com formação de buracos-negros. Este detector é formado por dois observatórios operando em conjunto: um situado em Livingston, Louisiana e outro localizado na reserva de Handford, situada perto de Richland, Washington, a 3000 quilômetros de distância do primeiro observatório. A finalidade de se ter dois sistemas distantes operando em conjunto é que se pode determinar a posição da fonte de ondas no céu através de triangulação e medida do tempo de atraso entre as detecções realizadas pelos dois observatórios. Além disso, um par de detectores correlacionados apresenta maior confiabilidade, já que se pode comparar as observações de ambos e analisar as coincidências. Assim, mesmo que a amplitude do sinal detectado seja muito baixa e o ruído seja alto, através da análise das coincidências pode-se distinguir um sinal proveniente de uma fonte real.

Cada observatório LIGO possui uma câmara de alto vácuo em forma de  $L$ , medindo 4 quilômetros em cada braço. Dentro dessa câmara está instalado o interferômetro, semelhante ao de Michelson-Morley: há espelhos em cada extremidade da câmara, um feixe de *laser* com 10 Watts de potência viaja através de um colimador antes de passar por um espelho semi-refletor localizado no vértice da câmara. O feixe então

se divide em dois, cada um viajando através de um braço do sistema. Cada braço contém cavidades do tipo Fabry-Perot que aprisionam os raios e aumentam sua distância percorrida (ABBOTT et al., 2009). A figura 3.2 mostra imagens aéreas dos observatórios LIGO em Handford, Washington (em cima) e Livingston, Louisiana (embaixo). Os *lasers* e os sistemas ópticos estão contidos nos prédios pintados em branco e azul.



Figura 3.2 - Os detectores LIGO.

Fonte: Abbott et al. (2009).

É importante ressaltar que atualmente o LIGO está em sua terceira geração, batizada *Advanced* LIGO, a qual se encontra em fase de implementação; por sua vez, a segunda geração é conhecida como *Enhanced* LIGO. Para mais detalhes, o leitor pode acessar <http://www.ligo.caltech.edu/>.

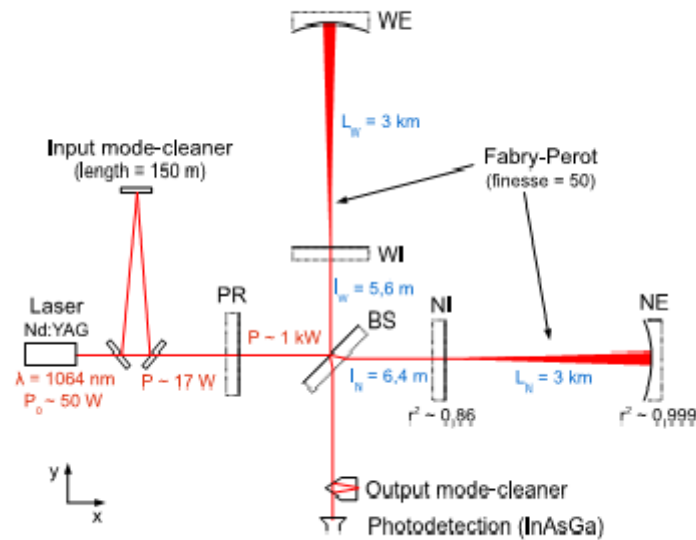


Figura 3.3 - Esquema básico do Virgo.  
 Fonte: Accadia et al. (2011).

### 3.3 Virgo

O detector Virgo, localizado perto de Pisa (Itália), é um interferômetro formado por duas cavidades de Fabry-Perot e é destinado à detecção de ondas gravitacionais na faixa de frequências entre 10Hz e 10kHz. Isso permitiria a detecção de ondas gravitacionais emitidas por pulsares, supernovas Galácticas e extra-galácticas e pela coalescência de sistemas binários.

A configuração do Virgo é mostrada na figura 3.3. De acordo com Accadia et al. (2011), todos os espelhos dos interferômetros são suspensos de forma a proporcionar isolamento contra as vibrações mecânicas do ambiente. O feixe de entrada é produzido por um *laser* tipo Nd:YAG de comprimento de onda  $\lambda = 1064\text{nm}$  e cada cavidade de Fabry-Perot tem como função aumentar o caminho óptico do *laser*. A diferença no comprimento dos braços é controlada de forma a se obter uma interferência destrutiva na saída. O espelho de reaproveitamento de potência (ou *power recycling*) (PR) aumenta a quantidade de energia que atinge o separador de Michelson (BS) por um fator 40 aumentando a sensibilidade do detector. É importante ressaltar que o LIGO também possui tal mecanismo de reaproveitamento de potência. Mais detalhes em <http://www.ego-gw.it>.

### 3.4 Einstein Telescope

O ET é a proposta de um detector interferométrico de terceira geração que deve operar na faixa de  $\sim 1$ Hz a alguns kHz. De acordo com Sathyaprakash et al. (2012), este detector servirá como complemento para outros tais como o LIGO, os quais possuem frequências de corte mínimas da ordem de dezenas de hertz. Ou seja, o ET será sensível nas regiões do espectro onde outros detectores interferométricos não são. Adicionalmente, o ET preencherá o *gap* de sensibilidade entre o eLISA (que possuirá frequência máxima de corte de aproximadamente 0.1Hz) e os interferômetros terrestres.

É importante ressaltar que muitas das fontes observáveis pelo ET serão similares àquelas que seriam visíveis com os detectores terrestres, entre as quais se destacam os sistemas binários compactos. Porém a principal diferença entre o ET e os demais está em uma maior sensibilidade aliada a frequências mínimas mais baixas (da ordem de  $\sim 1$ Hz).

O projeto básico do detector pode ser visto na figura 3.4. Este consiste em três pares de interferômetros com escalas de 10km e posicionados de tal maneira a formar um triângulo equilátero. Cada par de interferômetros representa um detector de banda larga, na qual um interferômetro é otimizado para ondas abaixo de 100Hz e o outro para ondas acima de 100Hz. Para mais detalhes, pode-se acessar <http://www.et-gw.eu>.

### 3.5 LISA e eLISA

Inicialmente é importante fazer alguns comentários sobre o LISA. Originalmente, esse detector foi planejado conjuntamente pela NASA e pela Agência Espacial Europeia ESA. No entanto a colaboração entre essas duas agências terminou em 2011 de forma que agora a ESA está, de forma independente, considerando uma nova versão do detector chamado eLISA (evolved LISA), o qual mantém uma grande parte dos objetivos científicos do LISA.

O detector LISA foi projetado para detectar ondas gravitacionais através de interferometria a *laser*. O projeto original previa que o sistema seria formado por três satélites, arranjados de tal maneira que formassem os vértices de um triângulo equilátero, conforme a figura 3.5, cujos lados mediriam 5 milhões de quilômetros. Cada satélite emitiria e receberia feixes de *laser*, de forma que todo o sistema se comportasse como um interferômetro de Michelson-Morley, de forma que quando uma

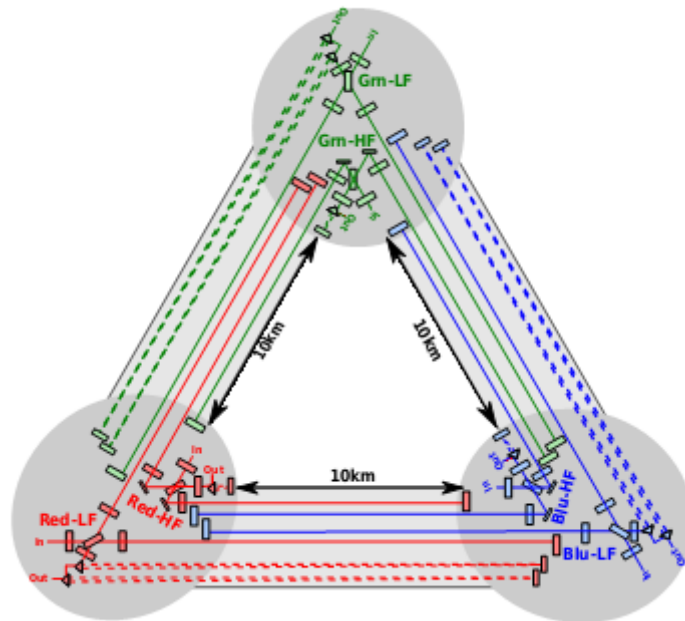


Figura 3.4 - Esquema básico do ET.  
 Fonte: Sathyaprakash et al. (2012).

onda gravitacional perturbasse o espaço-tempo entre dois dos satélites, pequenas diferenças nos comprimentos relativos entre os braços pudessem ser medidos.

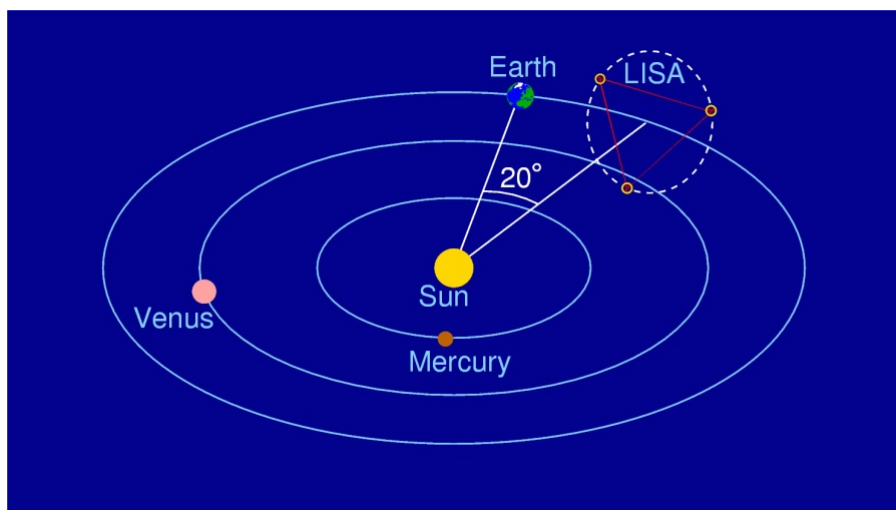


Figura 3.5 - Arranjo orbital do LISA.  
 Fonte: <http://list.caltech.edu>.



Segundo Amaro-Seoane et al. (2012), o eLISA terá um projeto semelhante ao LISA, com apenas algumas diferenças. Por exemplo, os braços dos interferômetros serão menores (1Mkm) e o conjunto será composto de um satélite principal, o qual emitirá e receberá os feixes de *laser*, e dois satélites que irão atuar apenas como refletores dos feixes. Conseqüentemente, as medidas interferométricas ocorrerão apenas ao longo de dois braços (note que o projeto original do LISA previa que os três braços seriam usados.) Finalmente, de acordo com o projeto, o eLISA será adequado para a detecção de radiação gravitacional em baixas frequências, mais especificamente na faixa entre 0.1 e 100 mHz, faixa em que os sistemas binários compactos em fases iniciais de coalescência apresentam emissões. Para mais detalhes sobre o eLISA, indica-se <http://www.elisascience.org>.

### 3.6 DECIGO

DECIGO é o futuro detector espacial japonês de ondas gravitacionais. O princípio de funcionamento, semelhante ao projeto original do LISA, consistirá em três satélites configurados de modo a formarem os vértices de um triângulo equilátero de 1000 quilômetros de lado, conforme mostrado na figura 3.6.

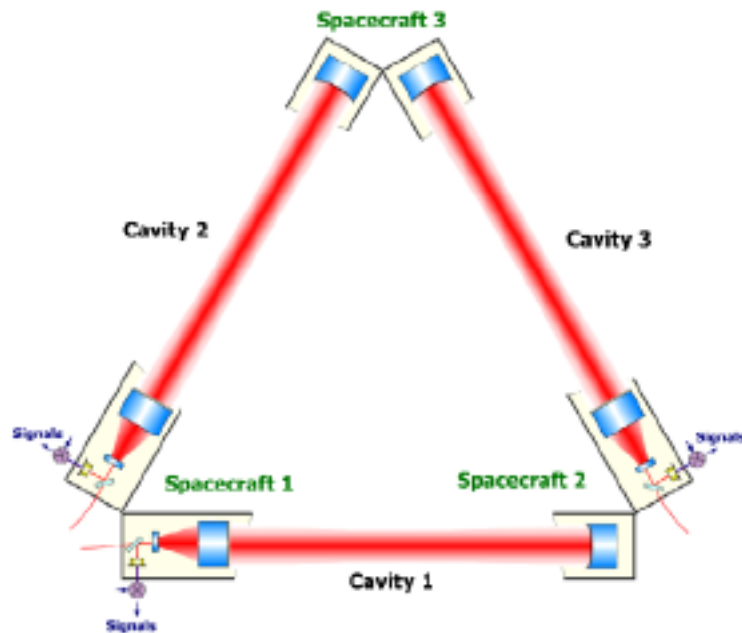


Figura 3.6 - Esquema básico do DECIGO.  
Fonte: Kawamura et al. (2006).

Os deslocamentos relativos entre os satélites serão medidos através de interferômetros de Fabry-Perrot Michelson. A sensibilidade maior do detector estará na faixa entre 0,1 e 10 Hz, porém este se destinará também a detectar radiação na faixa entre 1 mHz e 100 Hz, o que faz com que seja especialmente apropriado para a detecção de sistemas binários em coalescência formados por buracos-negros de massas intermediárias. O DEGICO possuirá dimensões bem menores do que as do eLISA, e isso é compensado fazendo com que os feixes de *laser* sofram várias reflexões nos interferômetros, tornando os comprimentos efetivos grandes. Porém isso exige *lasers* de potência bem mais elevada do que os utilizados no eLISA. Para mais detalhes, indica-se Kawamura et al. (2006) e [http://tamago.mtk.nao.ac.jp/spacetime/degico\\_e.html](http://tamago.mtk.nao.ac.jp/spacetime/degico_e.html).

### 3.7 BBO

O *Big Bang Observer* (BBO) seria um sucessor do LISA. O principal objetivo do detector será a observação de ondas gravitacionais provenientes de épocas imediatamente posteriores ao *big bang*, mas também poderá ser utilizado para detectar fontes mais recentes de radiação gravitacional, como sistemas binários. A alta sensibilidade do BBO será obtida a partir de *lasers* de alta intensidade e da correlação entre vários interferômetros ao redor do Sol. A faixa de maior sensibilidade desse detector será de 0,1 a 10Hz.

Basicamente, a configuração do detector BBO é a união de quatro detectores como o LISA, isto é, cada detector será composto por três satélites arranjados na forma de um triângulo equilátero, onde dois dos detectores ficarão sobrepostos, formando uma estrela de Davi, conforme a figura 3.7.

A principal diferença entre os interferômetros do BBO e do LISA será o fato de o primeiro utilizar *lasers* com potência muito mais elevada. Além disso, cada triângulo formado pelos satélites será menor que os triângulos que constam no projeto original do LISA. Para mais detalhes, vide Crowder e Cornish (2005).

### 3.8 Correlação Cruzada de Detectores Interferométricos

Em muitos casos as amplitudes estimadas para as ondas gravitacionais emitidas pelos diversos fenômenos estrofísicos situam-se abaixo dos limiares de sensibilidade dos detectores (limiares como os mostrados na figura 3.1), o que indicaria impossibilidade de detecção. No entanto, tais sensibilidades poderiam ser aumentadas

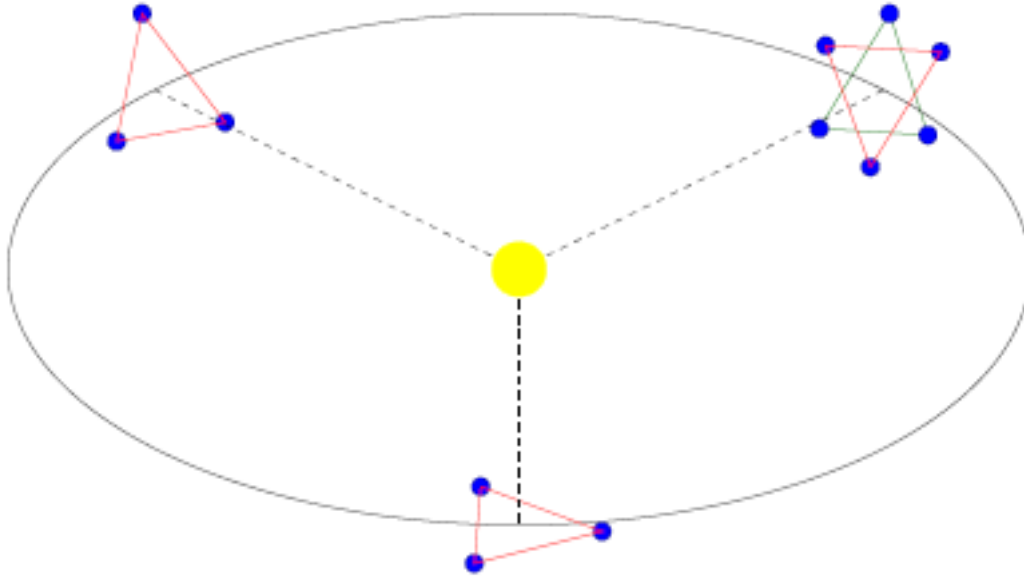


Figura 3.7 - Esquema básico do BBO.  
 Fonte: Crowder e Cornish (2005).

correlacionando-se as saídas de dois ou mais detectores, em uma técnica chamada de *cross-correlation*.

Assim, o efeito de um fundo estocástico em um detector é essencialmente produzir uma pequena contribuição para o ruído gaussiano em sua saída (FLANAGAN, 1993). Para um detector tal contribuição em geral seria totalmente mascarada pelas suas próprias fontes de ruído, a menos que o fundo tenha amplitudes implausivelmente elevadas. No entanto, tal limitação poderia ser contornada analisando-se simultaneamente as saídas de dois detectores que não tenham quaisquer fontes comuns de ruído, de forma que a única contribuição para as flutuações correlacionadas nas saídas seja a do fundo a ser detectado.

Para a correlação de dois interferômetros, pode-se quantificar a detectabilidade de um fundo estocástico calculando-se a relação sinal-ruído (S/N), a qual neste caso é dada por (ALLEN, 1997; ALLEN; ROMANO, 1999):

$$(S/N)^2 = \left[ \left( \frac{9H_0^4}{50\pi^4} \right) T \int \frac{\gamma^2(\nu)\Omega_{GW}^2(\nu)}{\nu^6 S_h^1(\nu) S_h^2(\nu)} d\nu \right] \quad (3.3)$$

onde  $S_h^1$  e  $S_h^2$  são as densidades de ruído espectral,  $T$  é o tempo de integração (aqui

se considera  $T = 1\text{yr}$ ) e  $\gamma(\nu)$  é a chamada *overlap reduction function*, a qual depende das posições relativas, orientações espaciais e distâncias entre dois interferômetros. Além disso,  $\Omega_{\text{GW}}$  é o parâmetro de densidade de energia para o espectro em ondas gravitacionais que se quer detectar, o qual é dado por (FERRARI et al., 1999)

$$\Omega_{\text{GW}} = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} \nu^2 h_{\text{BG}}^2 \quad (3.4)$$

Para o LIGO as funções  $S_h$  e  $\gamma(\nu)$  podem se encontradas em Sathyaprakash e Schutz (2009) e Sathyaprakash e Owen (1999), respectivamente; já para o ET tais funções são vistas respectivamente em Regimbau (2011) em Mishra et al. (2010).

## 4 CARACTERÍSTICAS POPULACIONAIS DOS SISTEMAS BINÁRIOS

Os sistemas binários que contribuem para os fundos estocásticos podem apresentar parâmetros, tais como distâncias orbitais e massas, os quais são diferentes de sistema para sistema e geralmente preenchem uma faixa contínua de valores. Tais valores são estimados em geral por meio de considerações físicas, fatos observacionais ou uma combinação de ambos. Portanto, dada uma população de sistemas binários, em geral é possível definirem-se funções matemáticas que descrevem como os diversos valores de dado parâmetro são distribuídos entre os elementos da população. Tais funções são vitais para o cálculo dos fundos e podem ser encontrados na literatura sob diversas formas, decorendo as distribuições de várias grandezas.

### 4.1 Taxa de Formação Estelar e Taxas de Formação de Binárias Compactas

No cálculo dos espectros serão utilizadas taxas de formação distintas para cada família de sistema binário. Pode-se estimar essas taxas tomando como ponto de partida a taxa de formação estelar e da distribuição das massas das estrelas progenitoras. Para esta última será utilizada a distribuição de Salpeter (SALPETER, 1955), a qual pode ser escrita como

$$\phi(m) = Am^{-(1+x)} \quad (4.1)$$

onde  $x = 1,35$  e  $A = 0,17$ , com  $\phi(m)$  obedecendo à seguinte condição de normalização

$$\int_{m_i}^{m_f} m\phi(m)dm = 1 \quad (4.2)$$

onde  $m_f$  e  $m_i$  são os valores máximos e mínimos para as massas das estrelas progenitoras. Tais valores são bem estabelecidos na literatura e, seguindo por exemplo Carroll e Ostlie (2007), estes serão considerados como  $m_i = 0,1M_{\odot}$  e  $m_f = 125M_{\odot}$ .

Além disso, ainda de acordo com Carroll e Ostlie (2007), considera-se que estrelas com massas entre  $0,1M_{\odot}$  e  $8M_{\odot}$  originam anãs brancas no estágio final de evolução, estrelas com massas no intervalo de  $8M_{\odot}$  a  $25M_{\odot}$  geram estrelas de neutrons e aquelas mais massivas que  $25M_{\odot}$  terminam suas vidas como buracos-negros.

Embora a distribuição mostrada acima seja indispensável, uma distribuição de massas adicional é necessária. Realmente, como as binárias estudadas são formadas por objetos compactos, deve-se especificar os valores das massas de tais objetos (lembrando que a distribuição de Salpeter é válida somente para as progenitoras). Para

estrelas de nêutrons será utilizado o valor de  $1,4M_{\odot}$ , de acordo com o limite de Chandrasekhar e as teorias de formação de supernovas II e Ib/c (CARROLL; OSTLIE, 2007); por outro lado, para os buracos-negros será utilizada a distribuição 4.3, dada em Özel et al. (2010)

$$G_{\text{BH}}(m_{\text{BH}}) = 0,332 \exp[-0,347(m_{\text{BH}} - 7,8)^2] \quad (4.3)$$

onde as massas são dadas em unidades de massa solar. No que se refere à faixa de valores para as massas dos buracos-negros, pode-se seguir as discussões presentes em Mandel e O’Shaughnessy (2010) e Özel et al. (2010) e considerar uma faixa de  $5M_{\odot} \leq m_{\text{BH}} \leq 20M_{\odot}$ . Entretanto, deve-se enfatizar que há incertezas quanto à determinação de valores máximo e mínimo exatos para as massas. Contudo, os valores escolhidos mostram-se razoáveis, considerando as citadas referências.

Agora é possível calcular as taxas de formação para cada tipo de sistema binário usando a distribuição de Salpeter dada previamente e a taxa de formação estelar. Para esta última será seguido Springel e Hernquist (2003) onde os autores – considerando uma cosmologia  $\Lambda$ CDM em um cenário de formação de estruturas tipo ‘bottom-up’ e com parâmetros  $\Omega_{\text{M}} = 0,3$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0,7$ , constante de Hubble  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (com  $h = 0,7$ ),  $\Omega_{\text{B}} = 0,04$  e um espectro de potência com invariância de escala de índice  $n = 1$ , normalizada para a abundância de aglomerados de galáxias no presente ( $\sigma_8 = 0,9$ ) – determinaram uma taxa de formação estelar cobrindo a faixa de *redshifts* de  $z = 0$  até a época conhecida como *dark ages* ( $z \sim 20$ ). Tal função é dada por:

$$\dot{\rho}_{*}(z) = \rho_m \frac{\beta e^{\alpha(z-z_m)}}{\beta - \alpha + \alpha e^{\beta(z-z_m)}} \quad (4.4)$$

onde os parâmetros tem os valores  $\alpha = 3/5$ ,  $\beta = 14/15$ ,  $z_m = 5,4$  e  $\rho_m = 0,15 M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$  para fixar a normalização.

Embora a expressão dada por 4.4 seja largamente utilizada nesta tese, é importante mencionar que serão utilizados também, a título de comparação, outros modelos de taxa de formação estelar. A forma detalhada dessas taxas alternativas, bem como a comparação dos respectivos resultados, podem ser vistas na Seção 6.1.1.

Resta determinar as taxas de formação para as três famílias de sistemas binários considerados, isto é, dada a população de estrelas progenitoras, é necessário estimar as frações de estrelas que irão gerar os sistemas formados por dois buracos-negros (a

partir de agora abreviados como BHBH), os formados por um buraco-negro e uma estrela de nêutrons (BHNS) e as binárias de estrelas de nêutrons (NSNS). Como se pode supor, tais frações podem assumir diferentes valores porque, da formação de uma população de progenitoras até a configuração final (a qual é caracterizada por uma população contendo estrelas da sequência principal, buracos negros, estrelas de nêutrons e sistemas formados por esses objetos), vários processos podem afetar o número final de binárias compactas formadas. Por exemplo, se um componente de dado sistema dá origem a uma supernova, tal evento pode destruir o sistema. Além disso, deve-se salientar que nem todas as progenitoras formam sistemas binários e nem todas as estrelas gerarão buracos negros ou estrelas de nêutrons.

Para a taxa de formação de binárias de estrelas de nêutrons, segue-se [Regimbau e Pacheco \(2006\)](#) e se considera, em primeiro lugar, a fração em massa  $\lambda_{\text{NSNS}}$  que se converte em sistemas NSNS e que é dada por

$$\lambda_{\text{NSNS}} = \beta_{\text{NS}} f_p \Phi_{\text{NS}} \quad (4.5)$$

onde  $\beta_{\text{NS}}$  é a fração de sistemas binários que sobreviveram ao segundo evento de supernova,  $f_p$  fornece a fração de binárias massivas (isto é, aqueles sistemas onde ambos componentes podem gerar supernovas) formada dentro de toda a população de estrelas e  $\Phi_{\text{NS}}$  é a fração em massa de progenitoras de estrelas de nêutrons e que, no presente caso e usando [4.1](#), é dada por

$$\Phi_{\text{NS}} = \int_8^{25} \phi(m) dm \quad (4.6)$$

Numericamente tem-se  $\beta_{\text{NS}} = 0,024$ ,  $f_p = 0,136$  e  $\Phi_{\text{NS}} = 5,97 \times 10^{-3} M_{\odot}$ .

Finalmente a taxa de formação de sistemas NSNS é dada por

$$n_{\text{bin}}(z) = \lambda_{\text{NSNS}} \frac{\dot{\rho}_*(z)}{1+z} \quad (4.7)$$

onde  $\dot{\rho}_*(z)$  é a taxa de formação dada por [4.4](#) e o termo  $(1+z)$  é necessário para se levar em consideração a dilatação do tempo devido à expansão cósmica.

Com o resultado obtido em [4.7](#) é possível estimar as taxas de formação para sistemas BHBH e BHNS. Para isso, seguiu-se [Belczynski et al. \(2002\)](#) onde os autores consideraram que a população de binárias compactas é composta de 61% de sistemas NSNS, 30% de sistemas BHBH e 9% de sistemas BHNS. Assim, de forma direta pode-se, tomando como referência a taxa dada por [4.7](#), calcular as taxas para os

sistemas BHBH e BHNS.

## 4.2 Distribuição das frequências orbitais

Para a distribuição das distâncias orbitais será seguido [Belczynski et al. \(2002\)](#), que realizou um estudo abrangente dos sistemas binários compactos. Tal escolha é justificada pelo fato de os modelos apresentados no artigo em questão serem realistas, no sentido de que os autores utilizaram resultados consagrados em suas simulações. Especificamente, eles empregaram técnicas de Monte Carlo para modelar a evolução dos sistemas compactos e estudar suas propriedades físicas, além de considerar grandezas como a distribuição dos parâmetros iniciais, a evolução das órbitas e eventos de transferência de massa.

Em particular, serão utilizados os dados presentes na figura 4 desse artigo. Para lidar mais facilmente com as distribuições dadas por [Belczynski et al. \(2002\)](#), é conveniente modelá-las usando funções gaussianas. Uma comparação entre as gaussianas geradas nesta tese (figura 4.1) e os dados mostrados na figura 4 de [Belczynski et al. \(2002\)](#) mostra que a modelagem gaussiana é adequada. Assim, a distribuição do semi-eixo maior orbital é escrita como

$$f(r) = C \exp \left[ \frac{-(r - \bar{r})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.8)$$

onde  $r$  é o semi-eixo maior dado em unidades de raio solar e os parâmetros  $C$ ,  $\bar{r}$  e  $\sigma$  são dados na tabela 4.1.

As figuras 4.1 mostram as funções para as três famílias de sistemas consideradas nessa tese. Além disso, para se observar o efeito do desvio-padrão  $\sigma$  sobre as funções, foram traçadas curvas considerando-se os valores  $\sigma$ ,  $\sigma/2$  e  $2\sigma$ . Note que, para melhor efeito de comparação, as três figuras foram criadas utilizando-se os mesmos intervalos para a amplitude  $f(r)$  e o raio  $R_\odot$  nos eixos coordenados.

Tabela 4.1 - Parâmetros para as distribuições do semi-eixo maior orbital

sistema	$C$	$\bar{r}(R_\odot)$	$\sigma(R_\odot)$
NSNS	0.1	0.6	0.16
BHNS	0.03	5.5	1.8
BHBH	0.09	11	3.5



De acordo com [Belczynski et al. \(2002\)](#), os sistemas NSNS muito compactos dominam a população produzida pelo modelo e produzem um grande pico na região das separações orbitais mais baixas. Por outro lado, os sistemas BHBH possuem separações maiores do que as apresentadas pelas binárias NSNS, onde tal característica é resultado dos recuos pequenos ou inexistentes que as explosões de estrelas de nêutrons provocam nos buracos negros, permitindo a sobrevivência de sistemas progenitores com maiores separações orbitais. Para sistemas BHNS, nota-se um caso intermediário, onde existe a influência dos altos recuos provocados em um dos objetos do sistema.

É importante ressaltar que as funções dadas acima obedecem à seguinte condição de normalização ([BELCZYNSKI et al., 2002](#)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_{\text{NSNS}}(r) + f_{\text{BHNS}}(r) + f_{\text{BHBH}}(r)] dr = 1 \quad (4.9)$$

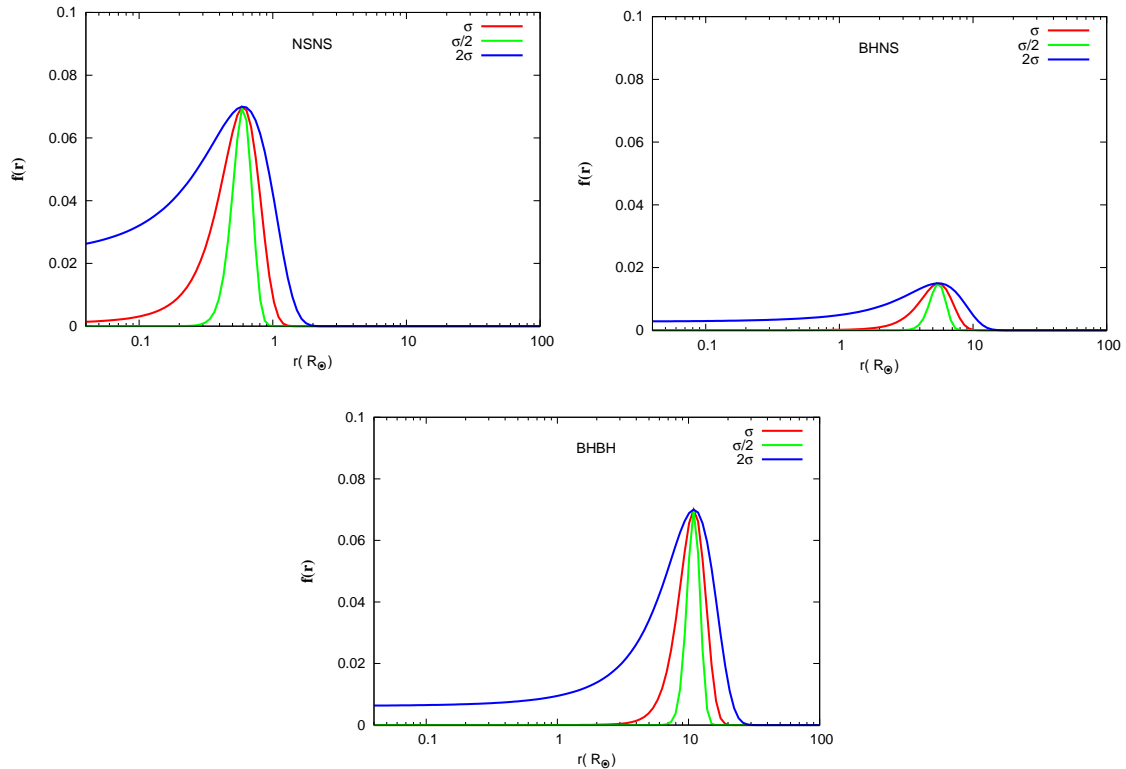


Figura 4.1 - Funções distribuição para o semi-eixo maior orbital.

É interessante também investigar a frequência orbital dos sistemas. Uma maneira

conveniente de se atingir tal objetivo é a determinação das distribuições das frequências iniciais. Como a separação orbital e a frequência angular  $\omega_{\text{orb}}$  são relacionadas pela terceira lei de Kepler  $r^3 = G(m_1 + m_2)/\omega_{\text{orb}}^2$ , é possível obter a distribuição em frequências a partir de 4.8 por simples transformação de variáveis. Assim, por meio da transformação

$$f(r)dr = g(\omega_{\text{orb}})d\omega_{\text{orb}} \quad (4.10)$$

obtém-se a distribuição em frequências

$$g(\omega_{\text{orb}}) = \frac{2C}{3} [G(m_1 + m_2)]^{1/3} \omega_{\text{orb}}^{-5/3} \exp \left[ \frac{-(r - \bar{r})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.11)$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos componentes do sistema binário. Os gráficos de 4.11 são mostrados nas figuras 4.2. Como nas figuras 4.1, foram traçadas curvas para três valores de desvio-padrão:  $\sigma$ ,  $\sigma/2$  e  $2\sigma$ .

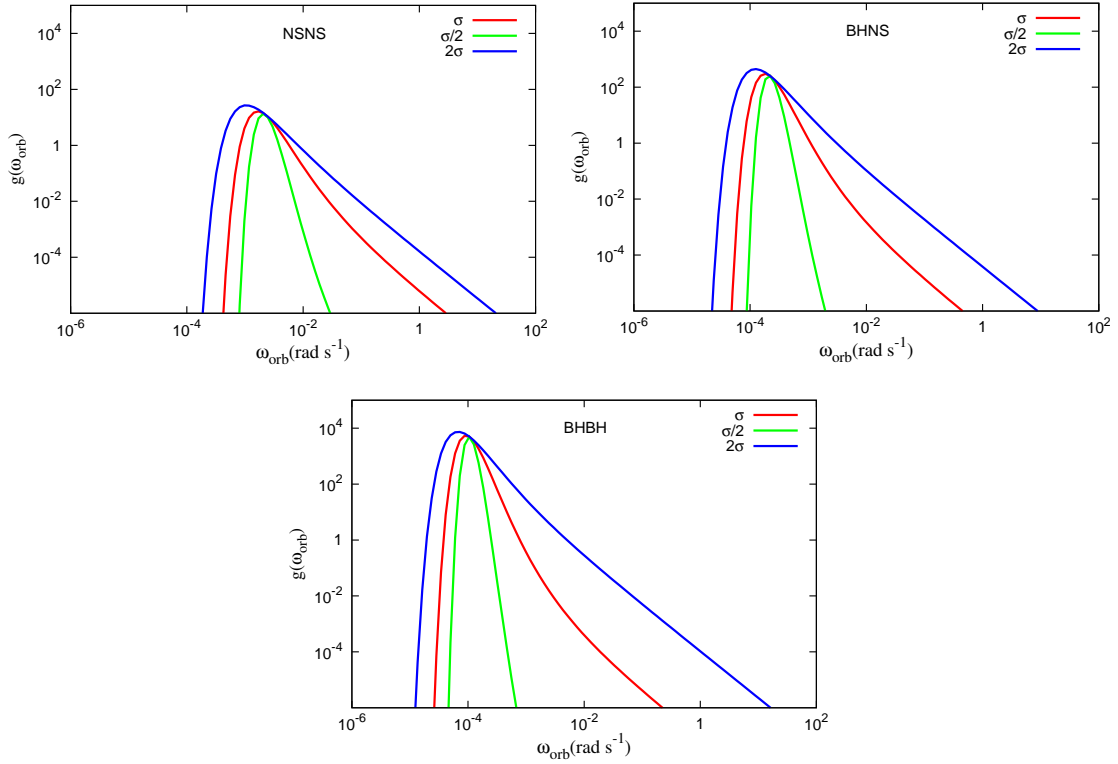


Figura 4.2 - Funções distribuição para a frequência orbital. Para sistemas BHBH e BHNS, as curvas foram geradas considerando buracos-negros com massa de  $20M_{\odot}$ .

Nesse ponto é importante fazer alguns comentários a respeito do formalismo de

Press-Schechter (PRESS; SCHECHTER, 1974). Resumidamente, tal formalismo fornece uma função de distribuição para as massas dos halos de matéria escura onde as estrelas da População III se formaram. No início dos trabalhos que conduziram à presente tese, chegou-se a discutir se valores particulares para as massas e as dimensões desses halos poderiam influenciar de forma significativa os resultados e chegou-se a cogitar a inclusão de tal formalismo ao processo. Assim, as dimensões dos halos seriam definidoras da máxima separação orbital possível dos sistemas (e de suas mínimas frequências, conseqüentemente), de forma que era esperado que tais dimensões surgissem como um parâmetro importante na distribuição de separações. No entanto, no decorrer dos trabalhos, decidiu-se usar uma forma de distribuição de separações onde a escolha precisa dos valores mínimos não era relevante. De fato, ficou claro que a determinação de valores particulares de distâncias orbitais mínimas não era decisiva para a forma final dos espectros. Assim, percebeu-se que a inclusão do formalismo de Press-Schechter não exerceria influência sobre os resultados, de forma que ele não foi utilizado.

### 4.3 Evolução Temporal da Distribuição das Frequências Orbitais

Uma característica fundamental dos sistemas binários é a evolução temporal dos parâmetros orbitais devido à emissão de radiação gravitacional. Mais especificamente, conforme a energia é emitida pelo sistema, sua distância orbital é reduzida, obedecendo a um comportamento não-linear (quanto mais a distância orbital se reduz, maior é a taxa de emissão de energia, causando por sua vez maior redução na órbita, e assim por diante.) Particularmente, o Apêndice C mostra a dedução da relação  $\omega_{\text{orb}} = \omega_{\text{orb}}(\omega_{\text{orb},0}, t)$ . Para os sistemas considerados nesta tese tais variações devem ser levadas em consideração, especialmente nos estágios próximos à coalescência, de forma que a função 4.11 deve ser modificada tal que leve em consideração o tempo como variável independente. Para isso transforma-se 4.11 na forma

$$g(\omega_{\text{orb},0})d\omega_{\text{orb},0} = H(\omega_{\text{orb}})d\omega_{\text{orb}} \quad (4.12)$$

onde  $\omega_{\text{orb},0}$  é a frequência inicial, a qual associa-se à variável  $\omega_{\text{orb}}$  em 4.11. Assim, calculando-se a derivada  $d\omega_{\text{orb},0}/d\omega_{\text{orb}}$  de C.8 obtém-se

$$\frac{d\omega_{\text{orb},0}}{d\omega_{\text{orb}}} = \left( \frac{\omega_{\text{orb},0}}{\omega_{\text{orb}}} \right)^{11/3} \quad (4.13)$$

a qual, substituindo em 4.12, fornece após manipulações algébricas:

$$H(\omega_{\text{orb}}) = \frac{2C}{3} [G(m_1 + m_2)]^{1/3} \omega_{\text{orb}}^{-11/3} \omega_{\text{orb},0}^2 \exp \left[ \frac{-(r - \bar{r})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.14)$$

onde

$$\omega_{\text{orb},0} = \left[ \omega_{\text{orb}}^{-8/3} + \frac{8}{3} K(t - t_0) \right]^{-3/8} \quad (4.15)$$

e  $K$  é dado por C.7.

Entretanto, seria necessário realizar uma posterior transformação de variáveis, escrevendo  $H(\omega_{\text{orb}})$  em termos da frequência emitida ao invés da frequência angular orbital  $\omega_{\text{orb}}$ . Tal transformação, dada por  $\nu = \omega_{\text{orb}}/\pi$ , é trivial e todas as equações utilizadas a partir de agora serão escritas em termos de  $\nu$ . Além disso, o leitor deve notar que  $r$  e  $\bar{r}$  foram mantidos nas equações acima por simplicidade de notação; evidentemente elas são substituídas pelas variáveis apropriadas nos cálculos, obtidas via Terceira Lei de Kepler.

#### 4.4 Distribuição das Excentricidades Orbitais

Além de sistemas em órbitas circulares, serão consideradas também binárias com excentricidade orbital  $\varepsilon$  diferente de zero. Dessa forma, torna-se necessária a utilização de funções distribuição para a excentricidade orbital. Aqui serão utilizadas as distribuições encontradas em Kowalska et al. (2011), as quais foram escolhidas por representarem modelos realistas, já que os autores utilizaram dados atualizados em física estelar e de sistemas binários, incluindo resultados obtidos via simulações de supernovas e formação de objetos compactos. Além disso, a modelagem leva em consideração fenômenos como a transferência de massa entre os componentes do sistema e a sincronização por efeito de forças de maré. É importante ainda destacar que tais distribuições são especialmente adequadas por terem sido determinadas para as faixas de frequência tipicamente observadas nesta tese.

Assim, seguindo Kowalska et al. (2011), tem-se a seguinte função para sistemas BHNS e BHBH:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.16)$$

onde  $x = \log(\varepsilon)$  e os parâmetros são mostrados na tabela 4.2. Por outro lado, para sistemas NSNS tem-se uma função dada por

$$f(\varepsilon) = \frac{w}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] + \frac{1-w}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \quad (4.17)$$

Tabela 4.2 - Parâmetros para as distribuições de sistemas BHNS e BHBH.

sistema	$\sigma$	$\mu$
BHNS	0.55	-5.23
BHBH	0.70	-5.95

sendo os parâmetros dados pela tabela 4.3

Tabela 4.3 - Parâmetros para distribuição de sistemas NSNS.

termo	$\sigma$	$\mu$	$w$
termo 1	0.47	-4.89	0.46
termo 2	0.39	-3.38	0.46

Na figura 4.3 são mostradas as formas das distribuições para as excentricidades. Note que a função correspondente aos sistemas NSNS possui dois picos. De fato, o segundo pico (especificamente, aquele localizado na região de excentricidades maiores) deve-se às binárias ultra-compactas que sofreram dois episódios de transferência de massa e que já eram muito compactas na ocasião do segundo evento de supernova. Por outro lado, nota-se que sistemas BHBH apresentam as excentricidades mais baixas. Tal fato, de acordo com [Kowalska et al. \(2011\)](#), deve-se a dois fatores: em primeiro lugar, nas frequências de interesse, tais sistemas estão mais próximos da coalescência do que aqueles que possuem estrelas de nêutrons; segundo, os recuos durante a formação dos buracos negros são menores do que no caso das estrelas de nêutrons, de tal forma que as excentricidades iniciais são em geral menores do que no caso de sistemas NSNS. Sistemas BHNS surgem como um caso intermediário.

#### 4.5 Evolução Temporal da Distribuição das Excentricidades Orbitais

A dependência temporal das excentricidades é dada implicitamente por ([PETERS, 1964](#))

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 m_1 m_2 m_T}{c^5 a^4 (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \varepsilon \left( 1 + \frac{121}{304} \varepsilon^2 \right), \quad (4.18)$$

onde  $\varepsilon$  é a excentricidade,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos componentes do sistema,  $m_T$  é a massa total e  $a$  é o semi-eixo maior. Agora a distribuição  $F(\varepsilon)$  mostrada anteriormente deve ser modificada para acomodar a variação de  $\varepsilon$  com o tempo.

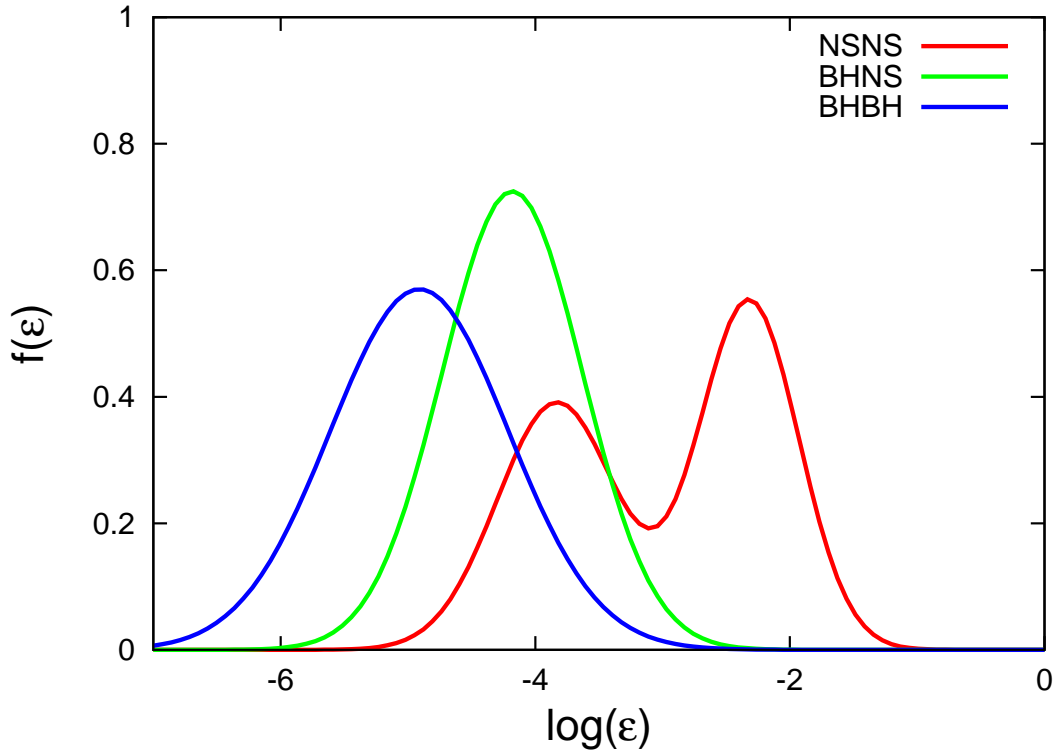


Figura 4.3 - Funções distribuição para a excentricidade orbital.

Para isso, tal função será a partir de agora tratada como  $F(\varepsilon_0)$ , onde  $\varepsilon_0$  representa a excentricidade em  $t = 0$ , e então será aplicada a lei que governa a evolução da excentricidade  $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0, t)$  via transformação de variáveis:

$$F(\varepsilon_0)d\varepsilon_0 = F(\varepsilon_0(\varepsilon, t))\frac{d\varepsilon_0}{d\varepsilon}d\varepsilon \quad (4.19)$$

onde uma nova função é definida por

$$G(\varepsilon, t) = F(\varepsilon_0(\varepsilon, t))\frac{d\varepsilon_0}{d\varepsilon} \quad (4.20)$$

A derivada  $d\varepsilon_0/d\varepsilon$  pode ser obtida derivando-se implicitamente a relação 4.21, encontrada em Peters (1964) e Peters e Mathews (1963)

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1 - \varepsilon_0^2}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{12}{19}} \left[ \frac{1 + \frac{121}{304}\varepsilon^2}{1 + \frac{121}{304}\varepsilon_0^2} \right]^{\frac{8780}{2299}} \quad (4.21)$$

onde  $a_0$  e  $\varepsilon_0$  são o semi-eixo maior inicial e a excentricidade inicial, respectivamente.

A relação  $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0, t)$  pode ser encontrada com o auxílio das equações 4.18 e 4.21. Para isso, isola-se  $a$  em 4.21 e substitui-se em 4.18, fornecendo

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \left[ \frac{304 G^3 m_1 m_2 m_T \varepsilon_0^{\frac{48}{15}} \left(1 + \frac{121}{304} \varepsilon_0^2\right)^{\frac{3480}{2299}}}{15 c^5 a_0^4 (1 - \varepsilon_0^2)^4} \right] \frac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^{\frac{29}{19}} \left(1 + \frac{121}{304} \varepsilon^2\right)^{\frac{1181}{2299}}} \quad (4.22)$$

nesse caso é possível resolver a equação diferencial acima por separação de variáveis, fornecendo após simplificações algébricas:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon^{\frac{29}{19}} \left(1 + \frac{121}{304} \varepsilon^2\right)^{\frac{1181}{2299}}}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} d\varepsilon = C(a_0, \varepsilon_0, m_1, m_2)(t - t_0) \quad (4.23)$$

onde  $C(a_0, \varepsilon_0, m_1, m_2)$  é uma constante dependente de  $a_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $G$  e  $c$ . A integral acima pode ser resolvida numericamente para fornecer  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ .

Substituindo-se  $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0, t)$  na expressão 2.132 para a luminosidade, obtém-se também a variação desta em função do tempo; resultado semelhante pode ser obtido para a frequência orbital dos sistemas excêntricos, usando a terceira lei de Kepler na expressão 4.21 para escrevê-la em termos de frequência.

As figuras 4.4 e 4.5 mostram, respectivamente, a evolução da excentricidade orbital e da frequência para um sistema onde  $m_1 = m_2 = 1,4M_{\odot}$ , com frequência inicial de  $10^{-6}\text{Hz}$  e excentricidades iniciais de 0,3, 0,5, 0,7 e 0,9.

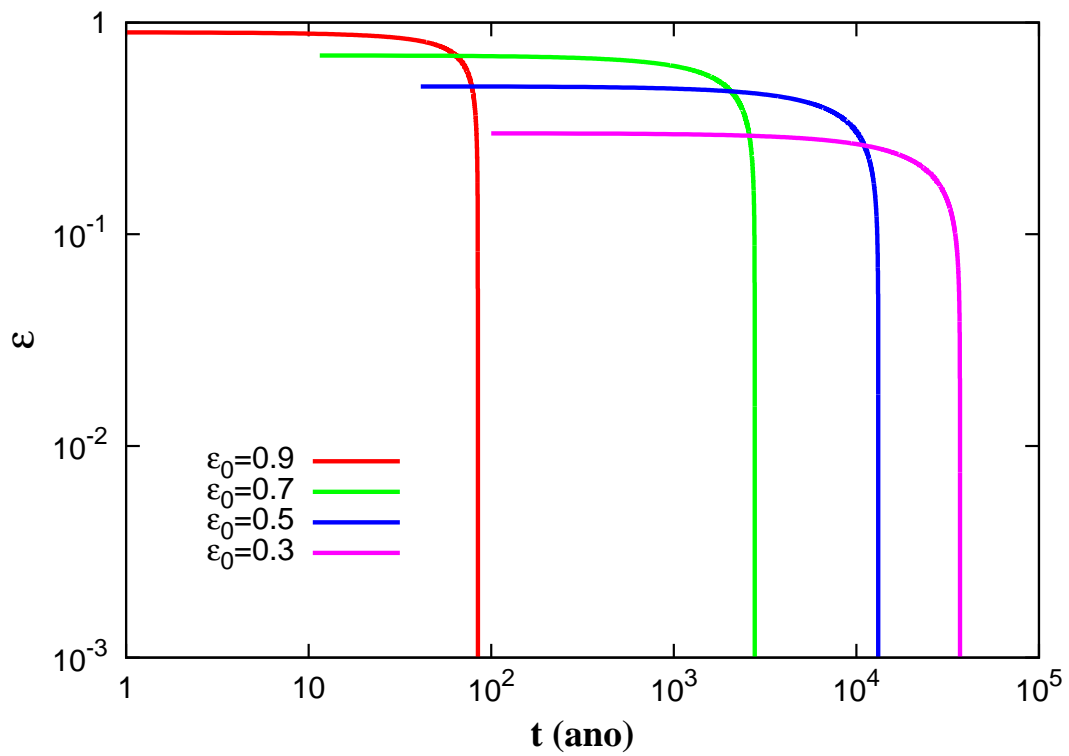


Figura 4.4 - Evolução temporal da excentricidade orbital para  $m_1 = m_2 = 1,4M_\odot$ , frequência inicial de  $10^{-6}\text{Hz}$  e considerando quatro valores para a excentricidade inicial.



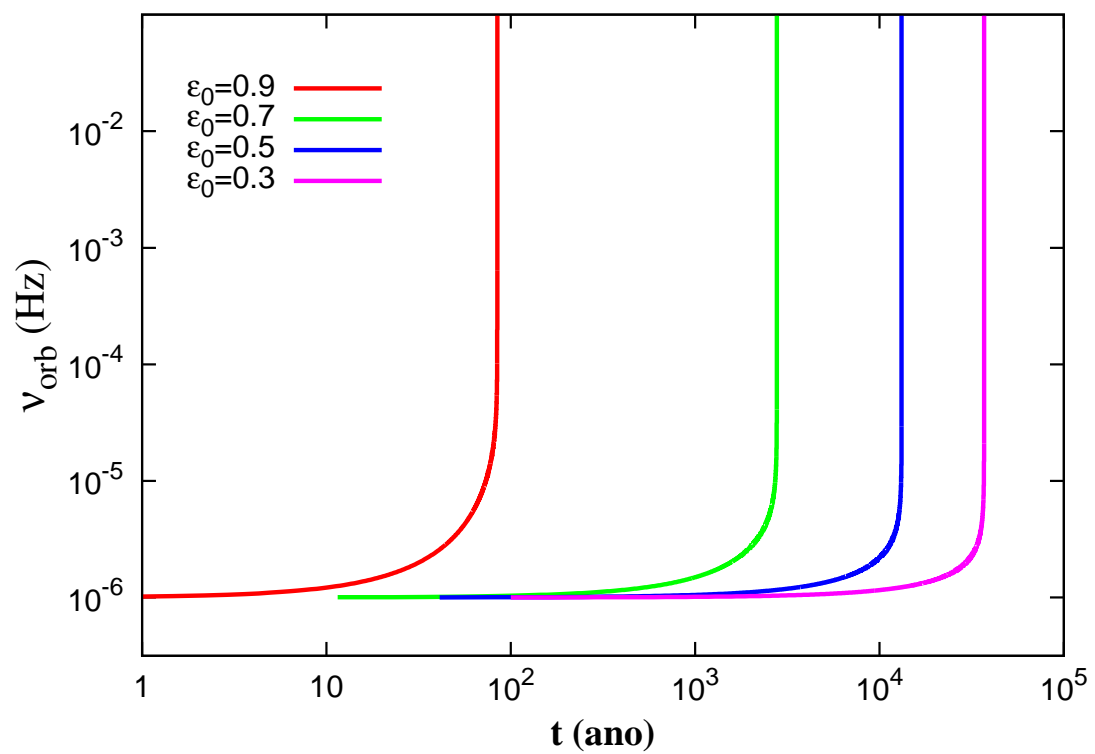


Figura 4.5 - Evolução temporal da frequência orbital para  $m_1 = m_2 = 1,4M_{\odot}$ , frequência inicial de  $10^{-6}\text{Hz}$  e considerando quatro valores para a excentricidade inicial.



## 5 O MÉTODO PARA O CÁLCULO DOS FUNDOS

Um grande desafio para a moderna Astrofísica é a detecção de ondas gravitacionais, o que representaria uma nova janela para a observação do universo. Assim, da mesma forma que se utilizam raios- $X$ , raios- $\gamma$  e radiação visível, infravermelha e ultravioleta, as ondas gravitacionais poderiam ser usadas como ferramenta na pesquisa das propriedades de inúmeros tipos de objetos astrofísicos, incluindo aqueles abordados nesta tese: os sistemas binários compactos. Neste caso, em princípio seria possível obter, por exemplo, informações sobre as taxas de formação de sistemas ou poderia obter-se características físicas tais como as distribuições dos parâmetros orbitais.

Tal fato é possível, como será visto, porque o cálculo dos espectros inclui várias características dos sistemas binários, tanto do ponto de vista populacional quanto no que se refere às características particulares de tais objetos. Assim, observando a amplitude e a forma dos espectros seria possível deduzir o comportamento dos parâmetros envolvidos no cálculo ou, ao invés disso, seria possível testar funções particulares inserindo-as no algoritmo de geração dos fundos e comparando os resultados aos espectros observados.

De maneira geral o fundo estocástico é calculado através da expressão 2.145 onde, particularmente, é utilizada a expressão para  $h_{\text{fonte}}$  conforme encontrada em (THORNE, 1987):

$$h_{\text{fonte}} = 8,7 \times 10^{-23} \left( \frac{\mu}{M_{\odot}} \right) \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2/3} \left( \frac{1\text{Mpc}}{d_L} \right) \left( \frac{\nu}{1\text{Hz}} \right)^{2/3} \quad (5.1)$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida do sistema,  $M$  é a massa total e  $d_L$  é a distância de luminosidade. Por outro lado a taxa  $dR$  presente em 2.145 é calculada como:

$$dR = \frac{dR}{dz} G_{\text{BH}}(m_1) G_{\text{BH}}(m_2) dm_1 dm_2 dz \quad (5.2)$$

onde representa-se o caso mais geral onde as massas de ambos os componentes dos sistemas não possuem um único valor mas, ao invés disso, obedecem a uma dada função distribuição escrita como  $G_{\text{BH}}(m)$ . No presente caso, tal configuração geral se refere a sistemas formados por dois buracos-negros cujas massas obedecem à função 4.3; adicionalmente, no caso onde um ou ambos componentes são estrelas de nêutrons, uma ou ambas distribuições para as massas serão representadas por deltas de Dirac, desde que se está considerando que todas as estrelas de nêutrons da população possuem o mesmo valor de massa. Além disso é importante frisar

que, para simplificar a notação, as massas dos buracos-negros foram escritas apenas como  $m_1$  e  $m_2$ . Por outro lado, o termo  $dR/dz$  será calculado com base no problema estatístico descrito a seguir.

## 5.1 O Problema Estatístico

Basicamente o problema de se determinar o fundo estocástico se resume à contagem do número de sistemas binários que, em dado instante, emitem ondas gravitacionais com dada frequência. Especificamente, quando se está lidando com frequências altas (nesse caso, a partir de cerca de 1Hz), os sistemas evoluem muito rapidamente e as frequências das ondas emitidas sofrem variações em curta escala de tempo, tornando a contagem de sistemas mais complexa. Entretanto o problema pode ser abordado adotando-se uma maneira particular de se modelar o comportamento da população de sistemas binários. Assim, seja um “espaço” onde os valores da coordenada sejam os valores das frequências das ondas emitidas. Nesse contexto, os sistemas em evolução podem ser representados como pontos movendo-se na direção dos valores crescentes da coordenada. Nota-se que tais pontos apresentam comportamento similar às partículas de um gás dentro de uma câmara, onde estas obedecem a certa distribuição espacial e onde uma fração de tais partículas se move com diferentes velocidades em direção a dada superfície da câmara. Dessa forma, por meio dessa analogia, pode-se adaptar algumas técnicas da mecânica estatística para se desenvolver um método de calcular os fundo estocásticos.

Seja um gás em equilíbrio térmico contido em um recipiente retangular de seção transversal  $A$  em relação ao eixo  $x$ . Um problema elementar referente a tal configuração é determinar quantas partículas atingem a dada superfície (perpendicular ao eixo  $x$ ) de área  $A$  no intervalo de tempo  $dt$ , isto é, o objetivo é determinar o fluxo  $F$  de partículas através de  $A$ . Em Jackson (1968) há uma discussão sobre esse problema, a qual será seguida aqui: seja  $Adx = dV$  o volume diferencial adjacente à superfície  $A$ , de acordo com a figura 5.1 considerando uma distribuição espacial homogênea de moléculas, a fração destas contida no volume  $dV$  é dada por

$$dn = \frac{dV}{V} = \frac{Adx}{V} \quad (5.3)$$

onde  $V$  é o volume total do recipiente. Por outro lado, usando a velocidade de dada partícula na direção  $x$ , fica-se com

$$dV = Av_x dt \quad (5.4)$$

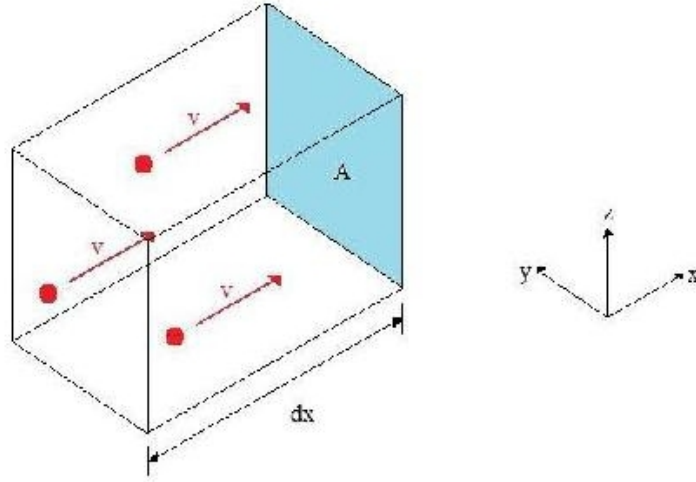


Figura 5.1 - Volume retangular  $d\Omega$  adjacente a  $A$

Assim todas as moléculas no volume  $dV$  com velocidade  $v_x$  atingirão a superfície  $A$  no intervalo de tempo  $dt$ . Para calcular o número total de partículas que atingem a superfície, deve-se integrar sobre as velocidades  $v_x$  usando a distribuição de velocidades apropriada e que será escrita como  $\eta(v)$ . Assim, considerando que  $\eta(v)d^3v$  seja o número de partículas com velocidade no intervalo  $d^3v$ , tem-se

$$d\mu = \frac{Av_x dt}{V} \eta(v) d^3v \quad (5.5)$$

em que  $d\mu$  representa o número total de partículas no volume  $dV$  e que possuem velocidades no intervalo  $d^3v$ . Agora deve-se integrar somente sobre valores positivos de  $v_x$  porque estão sendo consideradas somente partículas que se movem em direção à superfície  $A$ , de forma que se obtém o número de partículas por área  $A$  e por tempo  $dt$  por meio de 5.6

$$F = \frac{1}{V} \int_0^\infty dv_x \int_{-\infty}^\infty dv_y \int_{-\infty}^\infty dv_z v_x \eta(v) \quad (5.6)$$

Isso é suficiente para a solução do problema estatístico, porém são necessárias duas modificações na dedução mostrada acima para que esta seja adaptada ao cálculo dos fundos estocásticos. Em primeiro lugar, deve-se notar que a seção transversal da câmara é constante, tal que 5.3 pode ser reescrita como

$$dn = \frac{Adx}{AL} = \frac{dx}{L} \quad (5.7)$$

onde  $L$  é o comprimento total do recipiente. Com isso a expressão 5.5 toma a forma

$$d\mu = \frac{dx}{L} \eta(v) d^3v \quad (5.8)$$

A segunda modificação é considerar o caso mais geral onde a distribuição espacial de partículas não é homogênea. Assim, é razoável escrever 5.8 como

$$d\mu = \psi(x) \eta(v) d^3v dx \quad (5.9)$$

onde  $\psi(x)dx$  é a fração de partículas no intervalo  $dx$ . Partindo de uma função distribuição espacial representada por  $\varphi(x)$ , a função  $\psi(x)$  é calculada da seguinte maneira

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\int \varphi(x) dx} \quad (5.10)$$

para o caso onde  $\varphi(x)$  não é normalizada. Agora, com essas duas modificações feitas, o problema tratado acima pode ser adaptado ao cálculo do fundo estocástico em ondas gravitacionais gerado por sistemas binários.

### 5.1.1 Cálculo de $dR$

Antes de continuar, é importante ressaltar que a derivação apresentada aqui se refere ao referencial da fonte. Portanto,  $\nu$  nas equações subsequentes se refere à frequência emitida e as derivadas temporais também são tomadas em relação ao referencial da fonte.

O cálculo de  $dR$  por meio da abordagem discutida acima exige ainda mais duas mudanças: deve-se substituir a distribuição espacial  $\varphi(x)$  pela distribuição em frequências  $\varphi(\nu)$  e mudar a distribuição de velocidades  $\eta(v)$  pela distribuição em uma nova variável definida por

$$v_\nu = \frac{d\nu}{dt} \quad (5.11)$$

isto é, a derivada temporal da frequência (em analogia à definição de velocidade, a qual estabelece a variação temporal da coordenada espacial). Uma vez que essas duas mudanças sejam feitas, resta determinar as formas das funções  $\varphi(\nu)$  e  $\eta(v_\nu)$ . Em primeiro lugar, a função  $\varphi(\nu)$  assume a forma

$$\varphi(\nu) = \int n_{\text{bin}}(t_o) H(\nu, t, t_o) dt_o \quad (5.12)$$

onde  $t_0$  representa o instante de nascimento dos sistemas,  $n_{\text{bin}}(t_o)$  é a taxa de for-

mação de sistemas binários por unidade de tempo e volume comóvel (veja 4.7) e  $H(\nu, t, t_0)$  é dado por 4.14 e representa a fração de sistemas que passam a existir no instante  $t_0$  e que têm frequências em dado intervalo  $d\nu$ .

A dedução de 5.12 é feita inicialmente considerando 4.14, a partir da qual se pode deduzir que

$$dn = H(\nu, t, t_0)d\nu \quad (5.13)$$

representa a fração de sistemas que se originaram no instante  $t_0$  e que possuem frequência orbital no intervalo  $d\nu$ . Usando a taxa de formação de binárias correspondente a cada tipo de sistema, tem-se

$$\frac{dn}{d\nu dV dt_0} = n_{\text{xx-xx}}(t_0)H(\nu, t, t_0), \quad (5.14)$$

onde o sub-índice xx-xx se refere a cada tipo de sistema (NSNS, BHNS and BHBH). Agora, integrando-se sobre  $dt_0$ , tem-se

$$\frac{dn}{dV} = \left[ \int n_{\text{xx-xx}}(t_0)H(\nu, t, t_0)dt_0 \right] d\nu, \quad (5.15)$$

onde a expressão entre colchetes é o número de sistemas por unidade de frequência e por volume comóvel, a qual é justamente a distribuição em frequências a ser usada no cálculo do fundo.

Por outro lado a distribuição  $\eta(\nu_\nu)$  terá uma forma peculiar. Em primeiro lugar deve-se notar que 4.13 fornece

$$\nu_\nu \equiv \frac{d\nu}{dt} \propto \nu^{\frac{11}{3}} \quad (5.16)$$

de onde se conclui que haverá apenas um valor de  $\nu_\nu$  para cada valor de  $\nu$ . Tal fato sugere que  $\eta(\nu_\nu)$  deve ser escrita como uma função delta de Dirac

$$\eta(\nu_\nu) = N\delta(\nu_\nu) \quad (5.17)$$

onde  $N$  é o número total de sistemas. Assim, 5.9 pode ser reescrita como

$$d\mu = \left( \frac{\varphi(\nu)d\nu}{\int \varphi(\nu)d\nu} \right) \eta(\nu_\nu)d\nu_\nu \quad (5.18)$$

Notando que o denominador do termo entre parênteses é o número total de sistemas, usando a função dada por 5.17 e transformando  $d\nu$  por meio da regra da cadeia, tem-

se

$$d\mu = \left( \frac{\varphi(\nu) \frac{d\nu}{dt} dt}{N} \right) N \delta(\nu_\nu) d\nu_\nu \quad (5.19)$$

simplificando e integrando em  $\nu_\nu$ , chega-se finalmente a

$$d\mu = \left( \varphi(\nu) \frac{d\nu}{dt} \right) dt \quad (5.20)$$

onde o termo entre parênteses é a quantidade desejada. Lembrando que tal quantidade é por volume comóvel, pode-se escrever

$$\varphi(\nu) \frac{d\nu}{dt} \equiv \frac{dR}{dV} \quad (5.21)$$

de forma que a integral 2.145 fica

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \int h_{\text{fonte}}^2 \frac{dR}{dV} dV \quad (5.22)$$

Um exemplo interessante de aplicação deste método é mostrado em [Evangelista e de Araujo \(2013a\)](#), onde é obtido o fundo gerado por sistemas NSNS em órbitas circulares e considerando-se a distribuição de períodos orbitais na forma  $f(P) = (P_{\text{max}} - P_{\text{min}})^{-1}$ , onde  $P_{\text{min}}$  e  $P_{\text{max}}$  representam os períodos orbitais mínimo e máximo, respectivamente. Esses resultados podem ser vistos na seção 6.1.1.



## 6 OS FUNDOS ESTOCÁSTICOS

Neste capítulo são mostrados e discutidos os resultados obtidos. Em primeiro lugar são exibidos os espectros para as três famílias de sistemas em órbitas circulares; em seguida os fundos gerados por sistemas em coalescência são mostrados. Foram produzidos ainda os espectros gerados pelas três famílias de sistemas em órbitas elípticas.

Além disso, para estudar como os espectros dependem das funções e dos parâmetros envolvidos nos cálculos, são consideradas expressões alternativas para a taxa de formação de estrelas e diferentes parâmetros na distribuição de frequências. Finalmente são mostrados os valores da relação sinal-ruído para pares de LIGO e Einstein Telescope, correspondentes a cada tipo de espectro calculado.

### 6.1 Fundos em Órbitas Circulares

Antes de se mostrar os espectros, é conveniente fazer alguns comentários sobre os valores máximos e mínimos das frequências observadas. Esses valores podem ser determinados via terceira lei de Kepler e considerando valores apropriados para as massas (tendo em mente que para radiação de quadrupolo a frequência emitida é o dobro da orbital) ou podem ser encontrados na literatura. Assim, a frequência máxima para sistemas NSNS será, seguindo Poghosyan et al. (2004), tomada como  $\approx 900\text{Hz}$ . Para sistemas BHNS utilizou-se 6.1 para se determinar as frequências máximas:

$$\nu_{\max} = \left[ \frac{G(m_{\text{NS}} + m_{\text{BH}})}{\pi^2 r_{\text{ISCO}}^3} \right]^{1/2} \quad (6.1)$$

aqui,  $m_{\text{NS}} = 1,4M_{\odot}$ ,  $m_{\text{BH}} = 5,0M_{\odot}$  e  $r_{\text{ISCO}}$  é a a menor órbita estável do buraco negro, dada por (KENYON, 1990)

$$r_{\text{ISCO}} = 3r_{\text{Schwarzschild}} = \frac{6Gm_{\text{BH}}}{c^2} \quad (6.2)$$

Por outro lado para sistemas BHBH a frequência máxima é dada por 6.3 (MARASSI et al., 2011)

$$\nu_{\max} = \frac{c^3}{G} \frac{a_0 \eta^2 + b_0 \eta + c_0}{\pi M} \quad (6.3)$$

onde  $\eta = m_{\text{BH}_1} m_{\text{BH}_2} / M^2$  é a razão simétrica de massa,  $M$  é a massa total e os coeficientes polinomiais são  $a_0 = 2,974 \times 10^{-1}$ ,  $b_0 = 4,481 \times 10^{-2}$  e  $c_0 = 9,556 \times 10^{-2}$ .

É importante destacar que os valores mínimos das frequências não desempenham papel decisivo no cálculo, ou seja, elas não afetam as formas dos espectros. Portanto,

foram considerados os valores de  $10^{-6} - 10^{-5}$  Hz para as três famílias de sistemas binários. Tal escolha é sugerida analisando-se a figura 4.2 e tendo-se em mente que  $\nu = \omega_{\text{orb}}/\pi$ : como pode ser visto, o número de sistemas emitindo abaixo de  $10^{-6} - 10^{-5}$  Hz é desprezível quando comparado àqueles emitindo em torno de  $10^{-4} - 10^{-3}$  Hz.

As figuras 6.1, 6.2 e 6.3 mostram os espectros calculados para sistemas NSNS, BHNS e BHBH, respectivamente, os quais são comparados às curvas de alguns detectores interferométricos. As curvas para o LISA, eLISA, BBO e DECIGO podem ser encontradas, respectivamente em <http://www.srl.caltech.edu/~shane/sensitivity>, Amaro-Seoane et al. (2012), Cutler e Harms (2006) e Yagi e Tanaka (2010); as curvas para o Einstein Telescope (ET) e para o Advanced LIGO (ALIGO) podem ser encontradas, por exemplo, em Mishra et al. (2010).

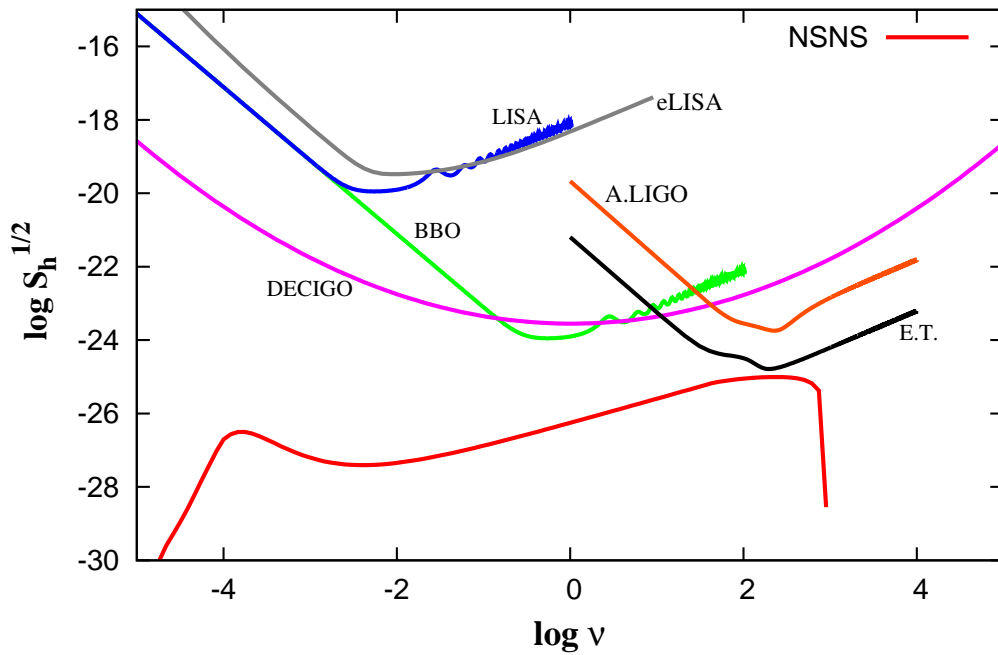


Figura 6.1 - Amplitude espectral para sistemas NS-NS

Observando as curvas para os sistemas NSNS e BHBH nota-se que LISA, eLISA, BBO, DECIGO, ALIGO e ET não seriam afetados por tais espectros; por outro lado sistemas BHNS seriam marginalmente importantes para o ET no ponto onde este possui mais alta sensibilidade. Além disso, analisando a forma do espectro, percebe-se que há valores de frequência de corte, as quais representam as máximas frequências que dado tipo de sistema pode emitir. Além desse limite os sistemas atingem a fase *chirp*, caracterizada por um tipo particular de emissão que não está

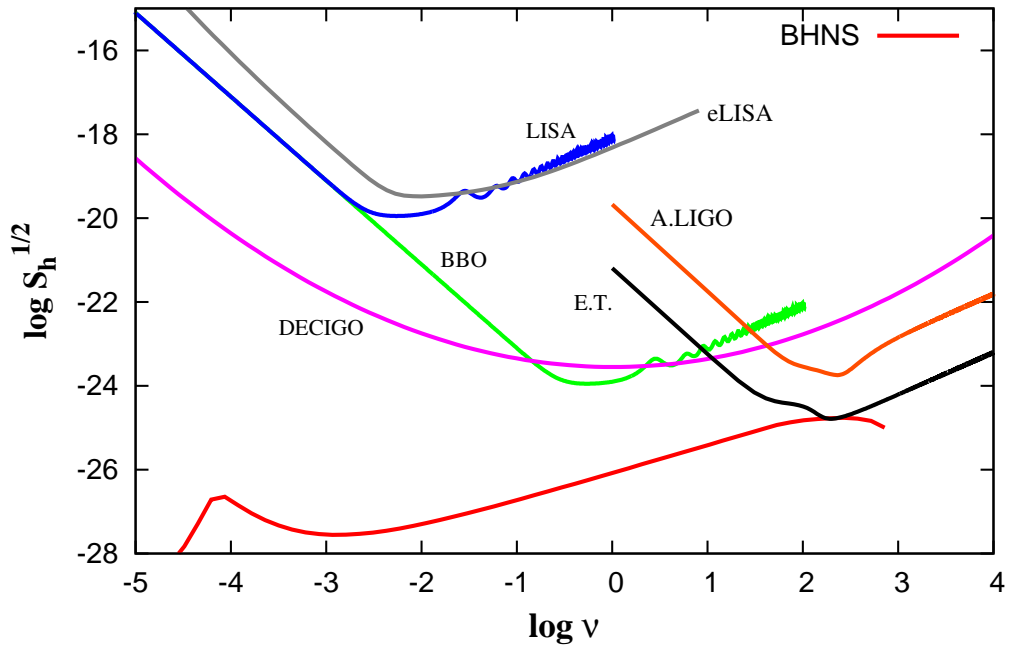


Figura 6.2 - Amplitude espectral para sistemas BH-NS

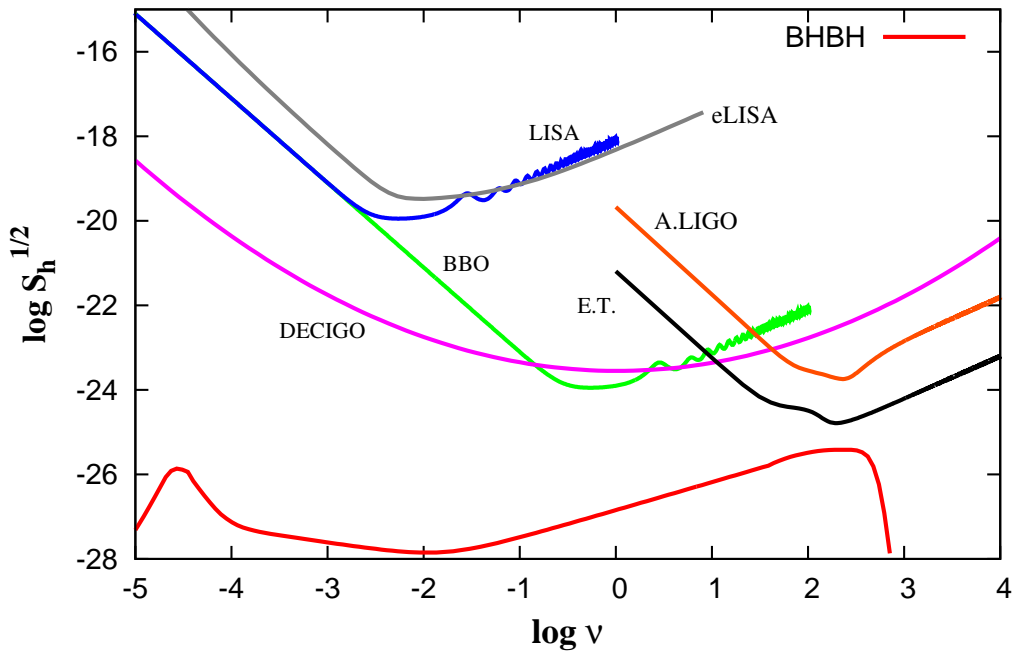


Figura 6.3 - Amplitude espectral para sistemas BH-BH

sendo considerada aqui.

Nos três casos nota-se a presença de dois picos nos espectros. O primeiro, situado na região de frequências mais baixas, pode ser explicado pelo efeito da distribuição inicial das frequências; o segundo surge devido à evolução temporal dos parâmetros orbitais, cujo efeito é o aumento da fração de sistemas emitindo em frequências mais altas.

Em um caso hipotético onde a taxa de formação é mais alta (baixa), os espectros sofrerão aumento (diminuição) em suas amplitudes para todos os valores de frequência. Além disso, através de 5.1, observa-se a influência das massas dos sistemas. Por comparação, seja um sistema onde ambos componentes têm valores máximos de massa, porém considerando dois casos: no primeiro caso considerando que a massa máxima seja de  $\sim 60M_{\odot}$ , como sugerido em Heger e Woosley (2002), e em seguida usando o valor mais realista de  $20M_{\odot}$  (lembrando que este é o valor considerado nesta tese). A amplitude dada por 5.1 no primeiro caso é  $\sim 6$  maior do que a amplitude dada pelo segundo caso. Como resultado, a amplitude dos fundos seria também maior.

Deve-se notar que as formas dos espectros são diferentes. A razão para tal fato reside nas massas dos sistemas: para um dado semi-eixor maior, os sistemas NSNS emitem ondas gravitacionais com a mesma frequência, desde que se está considerando que todas estrelas de nêutrons tenham a mesma massa. Por outro lado, para sistemas BHBH (BHNS) as frequências emitidas dependerão das massas dos buracos-negros as quais, ao contrário das estrelas de nêutrons, assumem diferentes valores desde que elas obedecem a uma função distribuição.

É interessante observar alguns estudos similares encontrados na literatura, desde que esses poderiam considerar diferentes abordagens. Por exemplo, em Schneider et al. (2001) os espectros foram calculados para sistemas binários formados por estrelas de nêutrons, buracos negros e anãs brancas nos estágios iniciais de vida. Os autores utilizaram um método diferente, baseado em programas de síntese de população de binárias. As diferenças nos resultados estão relacionadas ao fato de que naqueles cálculos o número de sistemas que contribuem para as frequências mais baixas é muito maior do que aqueles que contribuem para as frequências mais altas. Além disso, os autores consideraram valores mais baixos do que os utilizados aqui para as frequências mínimas.

Em Regimbau (2006) é considerado o fundo estocástico gerado por binárias de estrelas de nêutrons na faixa de frequência do LISA, onde o autor utilizou a distribuição

de probabilidade encontrada em Coward et al. (2002) para gerar a população de binárias. Nesse artigo, o autor considerou a evolução temporal dos parâmetros orbitais de maneira diferente da que é considerada aqui. Especificamente, ela considerou a diferença entre o *redshift* de nascimento do sistema  $z_b$  e o *redshift* de emissão  $z_e$  das ondas gravitacionais, onde  $z_b$  e  $z_e$  são relacionados pela frequência das ondas emitidas.

### 6.1.1 Uso de Outras Funções Distribuição.

O método desenvolvido aqui tem como característica poder ser adaptado de forma que se pode usar diferentes funções distribuição para as grandezas que descrevem a população de binárias, como por exemplo distribuições de massas e taxas de formação. Como exemplo, foi calculado o espectro para sistemas NSNS utilizando-se expressões alternativas para a taxa de formação estelar. Particularmente, foram consideradas, além da taxa de Springel e Hernquist utilizada nos cálculos anteriores, quatro outras funções, as quais podem ser encontradas em Zhu et al. (2011): três delas são dadas pela equação 6.4

$$\dot{\rho}_*(z)_i = 1,67C_i h_{65} F(z) G_i(z) M_{\odot} \text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3} \quad (6.4)$$

com  $i = 1, 2, 3$  denotando cada caso,  $h_{65} = h/0,65$ ,  $h = 0,7$ ,  $F(z) = [\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}]^{1/2}/(1+z)^{3/2}$ ,  $C_1 = 0,3$ ,  $C_2 = 0,15$ ,  $C_3 = 0,2$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0,7$ ,  $\Omega_M = 0,3$  e as funções  $G_i(z)$  dadas por

$$G_1(z) = \frac{e^{3,4z}}{e^{3,8z} + 45} \quad (6.5)$$

$$G_2(z) = \frac{e^{3,4z}}{e^{3,4z} + 22} \quad (6.6)$$

$$G_3(z) = \frac{e^{3,05z-0,4}}{e^{2,93z} + 15} \quad (6.7)$$

Por outro lado, a quarta taxa de formação é dada por

$$\dot{\rho}_*(z) = h \frac{0,017 + 0,13z}{1 + (z/3,3)^{5,3}} M_{\odot} \text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3} \quad (6.8)$$

É necessário enfatizar que as três primeiras funções descrevem taxas de formação para *redshifts* de até  $z \approx 4$  e a quarta é válida até  $z \approx 6$ . Além disso seguiu-se a notação em Zhu et al. (2011): para as funções dadas em 6.4 foram utilizadas as denominações SF1, SF2 e SF3 e para 6.8 utilizou-se HB06; a taxa de formação

de Springel e Hernquist é dada por SH03. Os gráficos dessas taxas em função do *redshift* são dados pela figura 6.4, enquanto os espectros gerados com essas funções são mostrados na figura 6.5.

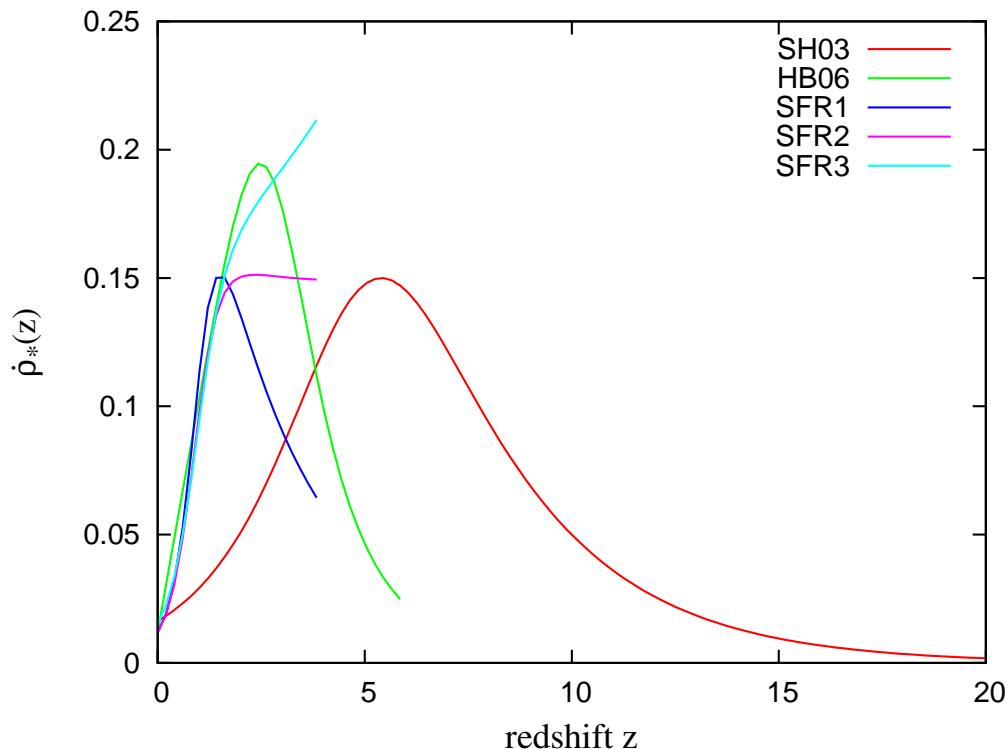


Figura 6.4 - As taxas de formação de estrelas dadas pelas equações 6.4 e 6.8.

Os cálculos mostram que os espectros resultantes não dependem de forma decisiva da taxa de formação estelar considerada. Há duas principais razões para tal comportamento: a primeira relaciona-se ao fato de que as fontes localizadas em *redshifts*  $z \gtrsim 5$  não afetam significativamente (isto é, em várias ordens de grandeza) os espectros resultantes; a segunda razão está ligada ao fato de que as taxas de formação estelar são notavelmente similares para  $z \lesssim 3$ .

É interessante estudar a influência da função distribuição inicial das frequências sobre os espectros. Como as distribuições para as separações orbitais e para as frequências são intimamente relacionadas, pode-se atingir tal objetivo manipulando a distribuição das separações iniciais. Dessa forma, como exemplo, foi calculado o fundo gerado por sistemas NSNS em órbitas circulares considerando os casos hipotéticos onde, para o desvio-padrão  $\sigma$  na equação dada por 4.8, foram dados os valores  $2\sigma$

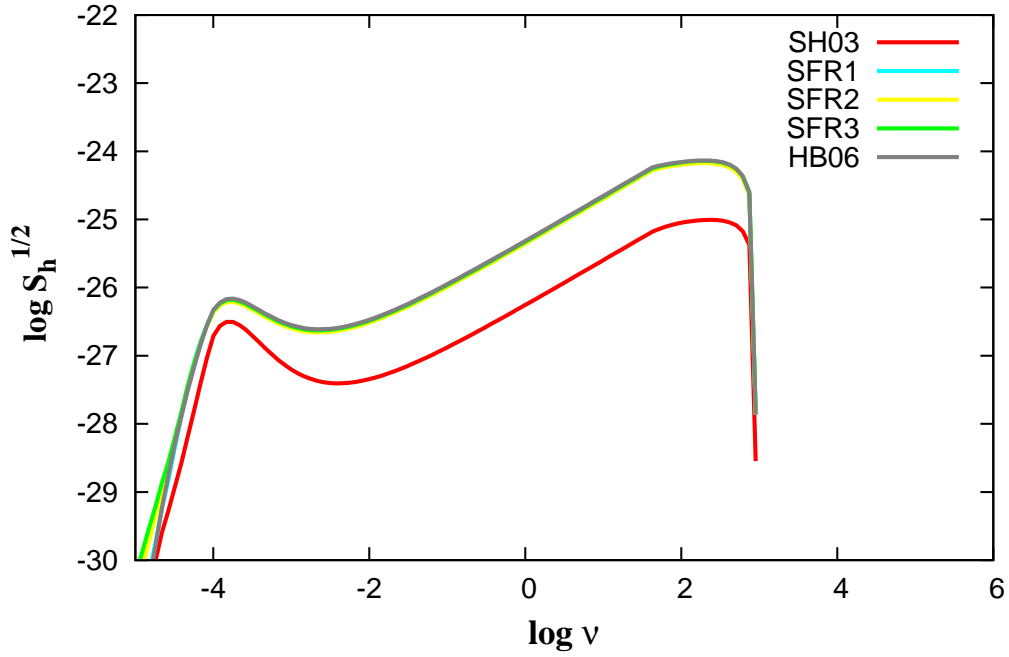


Figura 6.5 - Espectros gerados usando as taxas dadas por 6.4 e 6.8.

and  $\sigma/2$ . Os resultados são mostrados na figura 6.6. Nota-se que a distribuição dos semi-eixos maiores tem pequena influência sobre o espectro na região de frequências mais baixas.

Como se pode notar, a forma do espectro depende fortemente de  $\sigma$ . Caso este parâmetro seja aumentado, a amplitude do espectro se torna maior na região acima de  $\sim 10^{-4}\text{Hz}$ , pois haverá mais sistemas emitindo; por outro lado, reduzindo-se  $\sigma$ , a amplitude sofre redução na mesma região, pois haverá quantidade menor de sistemas. Embora qualitativamente esses dois casos apresentem comportamentos fáceis de compreender, há outra característica que não é óbvia à primeira vista: para valores de frequência abaixo de  $\sim 10^{-4}\text{Hz}$ , o efeito da variação de  $\sigma$  é desprezível. Tal comportamento pode ser explicado pela forma da distribuição 4.11: para valores muito menores do que  $\sim 10^{-4}\text{Hz}$  a fração de sistemas não se altera significativamente quando se varia o desvio-padrão  $\sigma$ . O fato de a forma dos espectros não depender fortemente da distribuição inicial dos períodos orbitais nessa região de frequências baixas (frequências menores do que as mínimas emitidas pelos sistemas) é uma característica bem conhecida no estudo dos fundos estocásticos.

Finalmente, conforme mencionado ao final da seção 5.1.1, foram gerados espectros para sistemas NSNS em órbitas circulares, obedecendo à distribuição de períodos

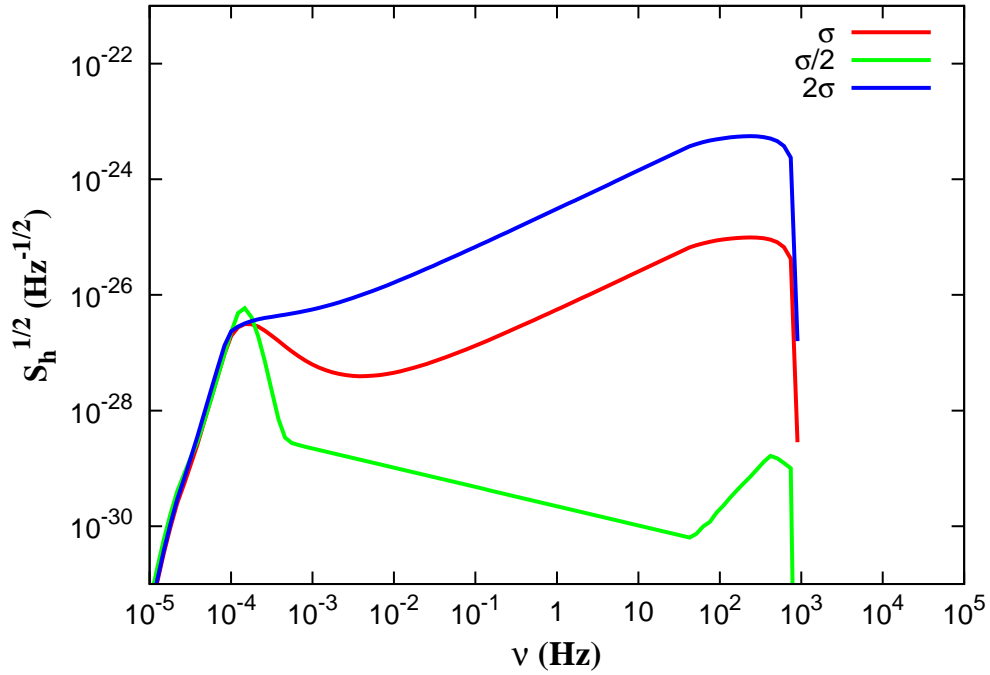


Figura 6.6 - Espectros calculados para  $\sigma/2$ ,  $\sigma$  e  $2\sigma$

dada por  $f(P) = (P_{\max} - P_{\min})^{-1}$ . Particularmente, foram contemplados dois casos: primeiramente, considerou-se  $P_{\min} = 10^7$ s e  $P_{\max} = 10^5$ s; no segundo caso foram utilizados os valores  $P_{\min} = 10^6$ s e  $P_{\max} = 10^4$ s. Além disso, a fim de se observar a influência da evolução das frequências na determinação dos fundos, foram gerados também resultados onde tal evolução não é considerada nos cálculos.

As curvas são mostradas na figura 6.7, onde a legenda *n.e.* significa “sem evolução” e *w.e.* corresponde a “com evolução”. Pode-se observar a influência da evolução das frequências sobre os espectros: estes são prolongados na direção das frequências mais altas, até o valor máximo de 900Hz. Nota-se também que para frequências iniciais mais elevadas (curvas azuis), as amplitudes dos fundos serão mais altas.

## 6.2 Fundos em Coalescências para Órbitas Circulares

Os espectros gerados por sistemas binários em coalescência dependem decisivamente dos parâmetros orbitais dos sistemas. Como ficará claro, as principais diferenças no estudo da coalescência para as três famílias de binárias compactas são o papel das massas dos objetos. Assim, é necessário levar em consideração a expressão mais geral



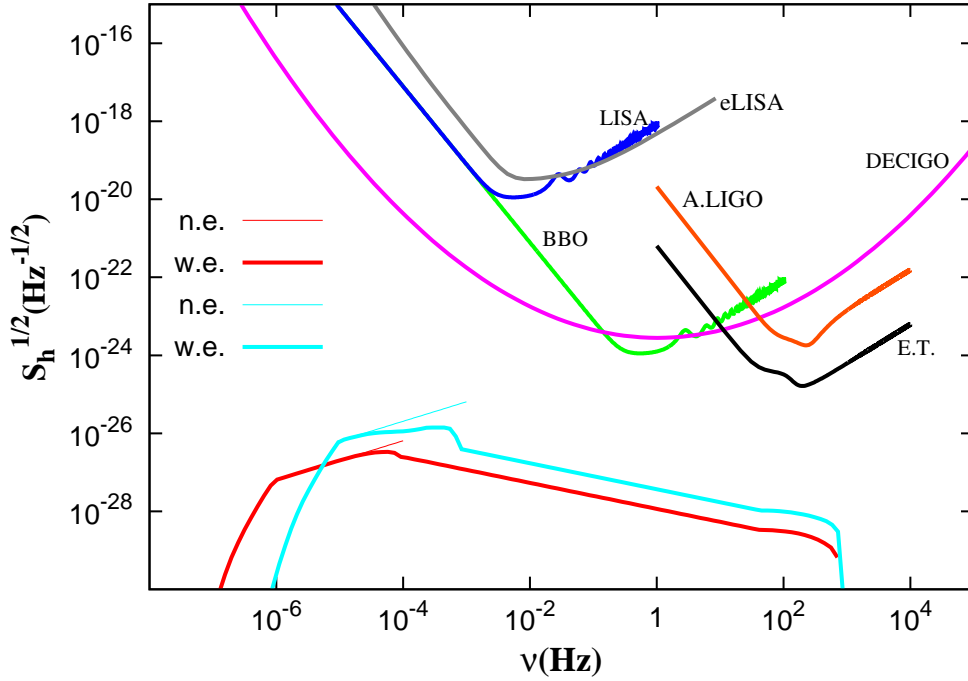


Figura 6.7 - Espectros gerados por sistemas NSNS para uma distribuição de períodos da forma  $f(P) = (P_{\max} - P_{\min})^{-1}$ . Foram considerados dois casos:  $P_{\min} = 10^7$ s e  $P_{\max} = 10^5$ s;  $P_{\min} = 10^6$ s e  $P_{\max} = 10^4$ s. Para comparação, foram traçadas também as curvas onde os efeitos da evolução das frequências não foram considerados. Aqui, *n.e.* e *w.e.* referem-se, respectivamente, a *sem evolução* e *com evolução*.

para  $dR$  dada por 5.2 e colocar 2.145 na forma:

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \int \int \int h_{\text{fonte}}^2 \frac{dR}{dz} G_{\text{BH}}(m_1) G_{\text{BH}}(m_2) dm_1 dm_2 dz \quad (6.9)$$

Basicamente, a equação 6.9 será utilizada no cálculo dos fundos em coalescências para as três famílias de sistemas compactos. Entretanto, como se pode notar, as variáveis e funções descritas assumirão diferentes valores para cada caso, assim 6.9 deve ser utilizada de formas diferentes para cada tipo de sistema. Por clareza, os procedimentos para cada tipo de sistema serão apresentados separadamente.

Porém, antes de prosseguir, é importante frisar que os cálculos dos fundos mostrados aqui têm como função fornecer um exemplo de aplicação do formalismo desenvolvido. Na literatura existem métodos consagrados de se obter os fundos em coalescência, os quais são baseados, entre outras coisas, em dados observacionais bem estabelecidos. Por exemplo, em [Zhu et al. \(2011\)](#) os autores obtiveram o espectro gerado pela

coalescência de sistemas BHBH por meio de uma extrapolação da taxa de formação inicial  $r_o$ , tal que  $dR$  é dado por

$$dR = r_o e(z) \frac{dV}{dz} dz \quad (6.10)$$

onde a evolução da taxa de coalescência é representada pelo fator adimensional normalizado  $e(z) = \dot{\rho}_{*,c}(z)/\dot{\rho}_{*,c}(0)$  com  $\dot{\rho}_{*,c}(z)$  dado pela integral

$$\dot{\rho}_{*,c}(z) = \int \frac{\dot{\rho}_*(z_f)}{1+z_f} P(t_d) dt_d \quad (6.11)$$

A equação 6.11 relaciona a taxa de formação estelar  $\dot{\rho}_*(z)$  com a taxa de coalescência de binárias BHBH dada por  $P(t_d)$ , a qual representa também uma distribuição de probabilidades do tempo de retardo  $t_d$  (o tempo decorrido entre a formação e a coalescência). Além disso,  $z$  e  $z_f$  em 6.11 representam, respectivamente, os *redshifts* de coalescência e de formação, os quais se relacionam a  $t_d$  por

$$t_d = \int_z^{z_f} \frac{dz'}{(1+z')H(z')}. \quad (6.12)$$

É interessante notar que o método mostrado em [Zhu et al. \(2011\)](#) produz uma expressão para  $dR$  cuja forma é semelhante à desenvolvida nesta tese. Isso se torna mais claro se 5.2 for escrito na forma

$$dR = \left( \lambda_{\text{NSNS}} \int \frac{\dot{\rho}_*(z_f)}{1+z_f} \left[ H(\nu, t, t_0) \frac{d\nu}{dt} \right] dt_0 \right) \frac{dV}{dz} dz \quad (6.13)$$

tendo em mente as relações 4.7 e 5.21 e considerando, por simplicidade, o caso de sistemas NSNS. Pode-se notar que o termo entre colchetes desempenha papel semelhante à distribuição  $P(t_d)$  em 6.11.

Nesse contexto, a quantidade  $\lambda_{\text{NSNS}}$  é calculada como  $\lambda_{\text{NSNS}} = r_{o,\text{NSNS}}/\dot{\rho}_{*,c}(0)$  ([WU et al., 2011](#)), onde  $r_{o,\text{NSNS}}$  é a taxa local de coalescência de sistemas NSNS e  $\dot{\rho}_{*,c}(0)$  é calculado por

$$\dot{\rho}_{*,c}(0) = \int \frac{\dot{\rho}_*(z_f)}{1+z_f} \left[ H(\nu, t, t_0) \frac{d\nu}{dt} \right]_{z=0} dt_0. \quad (6.14)$$

Para os casos de sistemas BHNS e BHBH adota-se procedimento semelhante, devendo-se substituir  $\lambda_{\text{NSNS}}$  pela quantidade correspondente, conforme a discussão subsequente à equação 4.7.

### 6.2.1 Coalescência para sistemas NSNS

Estrelas de nêutrons, de acordo com as teorias de evolução estelar (CARROLL; OSLIE, 2007), possuem massas características que se situam em uma estreita faixa de valores em torno de  $1.4M_{\odot}$ . Aqui será considerado que todas as estrelas de nêutrons possuem massas de exatamente  $1.4M_{\odot}$ , o que é ao mesmo tempo uma escolha realista e uma simplificação. Por outro lado, sistemas NSNS são caracterizados por uma frequência específica de coalescência que, de acordo com Poghosyan et al. (2004), pode ser considerada como sendo  $\approx 900\text{Hz}$ . Rigorosamente, tal frequência seria a máxima emitida por dado sistema imediatamente antes de entrar na fase de coalescência propriamente dita; de fato, sistemas em coalescência apresentam um perfil característico de emissão, os quais requerem elementos de Relatividade Numérica em seu estudo. Tal abordagem de sistemas coalescentes foge ao propósito desta tese, de forma que a utilização do valor  $900\text{Hz}$  deve ser interpretada como uma aproximação.

Embora haja apenas um valor para a frequência de coalescência, o espectro cobrirá uma larga faixa de frequências. Este comportamento é devido ao *redshift* cosmológico, dado que sistemas emitindo na mesma frequência mas situados em diferentes *redshifts* gerarão sinais de diferentes frequências observadas, obedecendo a

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{\nu_{\text{em}}}{1 + z} \quad (6.15)$$

onde  $\nu_{\text{obs}}$  é a frequência observada,  $\nu_{\text{em}}$  é a frequência emitida, considerada aqui como  $900\text{Hz}$ , e  $z$  é o *redshift*. Nesse caso, como se está considerando que  $z_{\text{min}} = 0$  e  $z_{\text{max}} = 20$ , as frequências observadas terão valores máximos e mínimos dados por  $\nu_{\text{obs}}^{\text{min}} = 42.86\text{Hz}$  e  $\nu_{\text{obs}}^{\text{max}} = 900\text{Hz}$ , respectivamente.

Como todos os sistemas NSNS possuem mesmas massas e frequências de coalescência, o cálculo do espectro dependerá do *redshift*  $z$ . Entretanto, observando 6.15 percebe-se que haverá apenas um valor de frequência observada para cada valor de *redshift*, o que exige a utilização de um artifício para se integrar 6.9. Inicialmente, seja tal equação reescrita como

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \int_{z_p - \delta z}^{z_p + \delta z} h_{\text{fonte}}^2 dR \quad (6.16)$$

onde  $\delta z \ll 1$  e  $z_p$  é o *redshift* correspondente a cada valor de frequência observada  $\nu_{\text{obs}}$  por meio de 6.15.

A fim de se calcular 6.16, seja  $dR$  escrito como

$$dR = \frac{dR}{dV} V(z_p) \delta(z - z_p) dz \quad (6.17)$$

onde  $V(z_p)$  é o volume comóvel correspondente a  $z_p$  e  $\delta(z - z_p)$  é a função delta de Dirac. Assim, integrando-se 6.16 e levando em consideração 6.17, fica-se com

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu_{\text{obs}}} h_{\text{fonte}}^2 \left. \frac{dR}{dV} \right|_{z_p, \nu_{\text{obs}}} V(z_p) \quad (6.18)$$

A figura 6.8 mostra o espectro gerado através de 6.18.

Nota-se que o espectro situa-se abaixo do limiar de sensibilidade dos detectores considerados, porém é interessante investigar a possibilidade de detecção via correlação cruzada para pares de detectores (veja seção 6.4.)

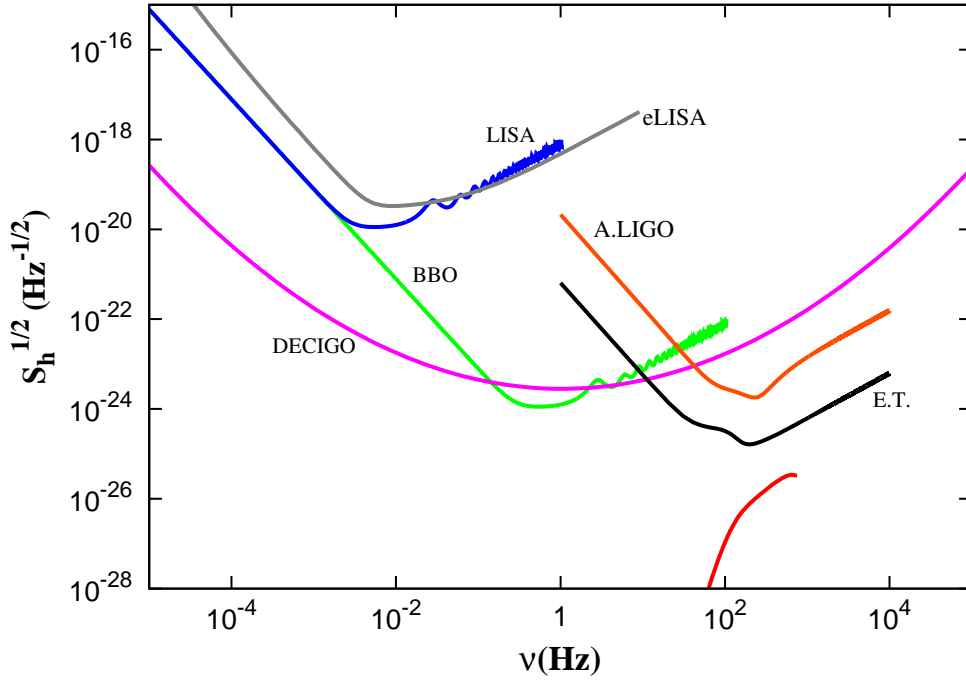


Figura 6.8 - Espectro gerado por sistemas NSNS em coalescência

### 6.2.2 Coalescência para sistemas BHNS

O cálculo da coalescência de sistemas binários formados por uma estrela de nêutrons e um buraco negro é mais complexo do que no caso de um sistema formado por

duas estrelas de nêutrons porque, como será mostrado, a frequência de coalescência depende da massa do buraco negro. Tal dependência é determinada supondo-se que a coalescência ocorre quando a estrela de nêutron atinge a mínima órbita circular estável (ISCO) do buraco negro. Assim, de forma similar à 6.1, tem-se

$$\nu_{\text{coales}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G(m_{\text{NS}} + m_{\text{BH}})}{r_{\text{ISCO}}^3}} \quad (6.19)$$

Substituindo 6.2 em 6.19 fica-se com

$$\nu_{\text{coales}} = \frac{c^3}{2\pi G^2 \sqrt{216}} \sqrt{\frac{m_{\text{NS}} + m_{\text{BH}}}{m_{\text{BH}}^3}} \quad (6.20)$$

Assim, como os buracos negros podem assumir diferentes massas, a frequência de coalescência assumirá diferentes valores. Mais especificamente, como se está considerando que tais massas variem no intervalo entre  $5M_{\odot}$  e  $20M_{\odot}$ , as frequências emitidas na coalescência terão valores máximos e mínimos dados por  $\nu_{\text{em}}^{\text{min}} = 78.5\text{Hz}$  e  $\nu_{\text{em}}^{\text{max}} = 2010\text{Hz}$ . Além disso, considerando 6.15 e 6.20, nota-se que para cada valor de  $\nu_{\text{obs}}$  existirão faixas contínuas de valores para  $z$  e  $m_{\text{BH}}$ . Entretanto, 6.9 deve ser integrada sobre  $z$  mas não sobre  $m_{\text{BH}}$ , desde que estas variáveis não são independentes. Além disso, para um dado valor de  $\nu_{\text{obs}}$  precisa-se determinar os limites de integração. Isto pode ser definido por meio das relações

$$z_{\text{min}} = \frac{\nu_{\text{em}}^{\text{min}}}{\nu_{\text{obs}}} - 1 \quad (6.21)$$

$$z_{\text{max}} = \frac{\nu_{\text{em}}^{\text{max}}}{\nu_{\text{obs}}} - 1 \quad (6.22)$$

Evidentemente, quando  $z_{\text{min}} < 0$  ou  $z_{\text{max}} > 20$ , define-se  $z_{\text{min}} = 0$  e  $z_{\text{max}} = 20$ , respectivamente. Uma vez que tais limites estão definidos, a variável  $m_{\text{BH}}$  sob a integral pode ser escrita em função de  $z$  por meio de 6.20 and 6.15.

Finalmente, lembrando que os buracos negros têm massas diferentes e usando os limites para o *redshift* dados acima, 6.9 assume a forma

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \int_{z_{\text{min}}}^{z_{\text{max}}} h_{\text{fonte}}^2 \frac{dR}{dV} \frac{dV}{dz} G_{\text{BH}}(m_{\text{BH}}) dz \quad (6.23)$$

O espectro gerado é mostrado na figura 6.9.

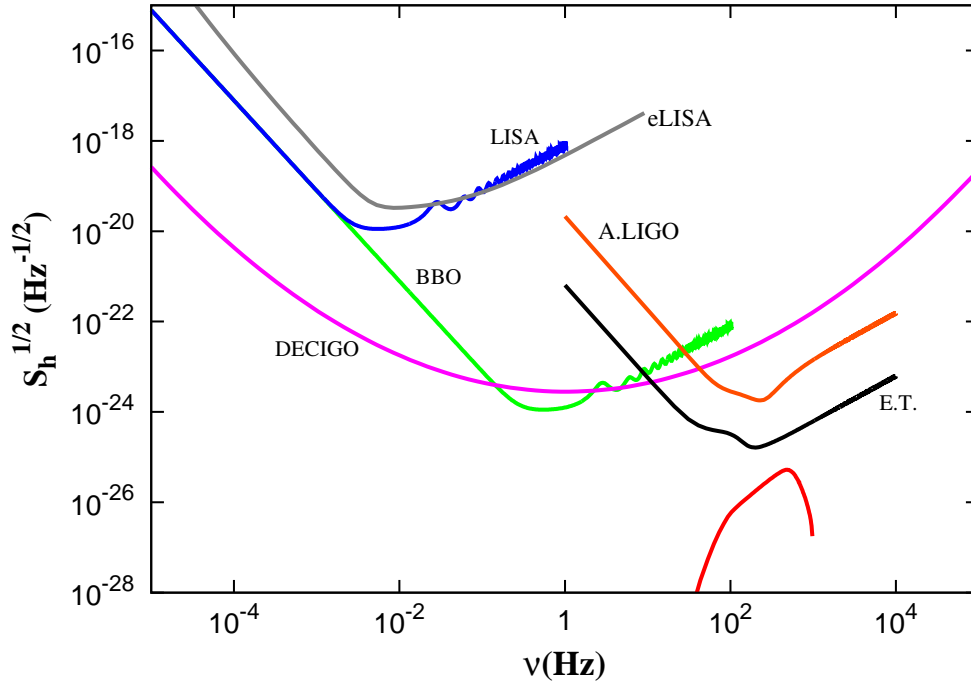


Figura 6.9 - Espectro gerado por sistemas BHNS em coalescência

Observando a figura 6.9, nota-se comportamento semelhante ao caso de sistemas NSNS: o espectro não atinge os limiares de sensibilidade dos detectores, embora a utilização de correlação cruzada para pares de ET possa fornecer probabilidades de detecção.

### 6.2.3 Coalescência para sistemas BHBH

Das três famílias de sistemas binários compactos, aqueles formados por dois buracos negros são os mais complexos para se analisar a coalescência pois ambos os componentes possuem massas que preenchem uma larga faixa de valores e, como esperado, as frequências de coalescência dependem fortemente desses valores. Particularmente, a frequência de coalescência será escrita em função das massas, de forma similar à 6.3:

$$\nu_{\text{coales}} = \frac{c^3}{G} \frac{a_o \eta^2 + b_0 \eta + c_0}{\pi M} \quad (6.24)$$

De acordo com 6.24, para cada valor da frequência haverá um conjunto contínuo de pares de valores para as massas  $m_1$  and  $m_2$  que satisfazem a equação, indicando que para o cálculo do espectro deve-se integrar sobre as massas. Obviamente essas massas não são independentes, mas são relacionadas por 6.24, tal que se deve integrar

apenas sobre uma das massas (ou sobre alguma variável que parametrize tais massas, conforme será mostrado adiante.)

Como se pode observar, não é possível resolver 6.24 analiticamente para se obter uma das massas em função da frequência e da outra massa, porém é possível a utilização de um artifício. Primeiramente, sejam  $m_{\text{BH}_1}$  e  $m_{\text{BH}_2}$  (as quais serão descritas como  $m_1$  e  $m_2$ ) relacionadas por

$$m_1 = km_2 \quad (6.25)$$

onde a variável  $k$  é maior ou igual a um. Substituindo 6.25 em 6.24 pode-se escrever  $m_1$  e  $m_2$  em termos da frequência  $\nu_{\text{coales}}$  e do parâmetro  $k$ :

$$\begin{aligned} m_1 &= k \frac{c^3}{G} \frac{1}{\pi \nu_{\text{coales}}} \left[ \frac{a_0 k^2}{(1+k)^5} + \frac{b_0 k}{(1+k)^5} + \frac{c_0}{1+k} \right] \\ m_2 &= \frac{c^3}{G} \frac{1}{\pi \nu_{\text{coales}}} \left[ \frac{a_0 k^2}{(1+k)^5} + \frac{b_0 k}{(1+k)^5} + \frac{c_0}{1+k} \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

Por outro lado o problema de se determinar os valores máximos e mínimos para as massas ainda precisa ser resolvido. Observando 6.24 nota-se que, como primeira aproximação, pode-se escrever

$$m_1 + m_2 \approx \frac{c^3}{G} \frac{c_0}{\pi \nu_{\text{coales}}} \quad (6.27)$$

já que  $\eta < 1$  para todos os valores de  $m_1$  e  $m_2$ . Considerando  $m_2 = m_{\text{min}} = 5M_{\odot}$  usa-se 6.27 para se estimar um primeiro valor para  $m_1$ ; a seguir, toma-se este par de valores e se calcula um primeiro valor para  $\eta$ ; corrige-se então o valor de  $m_1$  por meio de

$$m_1 + m_2 \approx \frac{c^3}{G} \frac{a_0 \eta^2 + b_0 \eta + c_0}{\pi \nu_{\text{coales}}} \quad (6.28)$$

Com este novo valor de  $m_1$ , repete-se o processo descrito acima: recalcula-se  $\eta$  e reutiliza-se 6.28, tendo em mente que este processo pode ser repetido um número arbitrário de vezes para que se obtenha valores precisos para  $m_1$ . No caso onde se tem  $m_1 > m_{\text{max}} = 20M_{\odot}$  no final do processo, considera-se  $m_1 = m_{\text{max}}$  e os passos descritos acima são repetidos para se determinar  $m_2$ .

Finalmente, com o par  $(m_1, m_2)$  em mãos, calcula-se o valor máximo de  $k$ :

$$k_{\max} = \frac{m_1}{m_2} \quad (6.29)$$

Agora, considerando que  $k$  varie de um a  $k_{\max}$  em 6.26, obtém-se todos os valores desejados para as massas.

Finalmente, é necessário considerar que, da mesma forma que no caso de sistemas BHNS, haverá uma faixa de valores de  $z$  para cada valor de  $\nu_{\text{obs}}$ . Entretanto, neste caso para cada  $z$  (e cada  $\nu_{\text{em}}$ , conseqüentemente) haverá um conjunto contínuo de pares  $(m_1, m_2)$  parametrizados por  $k$ . Assim, este fato leva à integração sobre  $z$  e  $k$ . Tem-se então:

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \int_1^{k_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} h_{\text{fonte}}^2 \frac{dR}{dV} \frac{dV}{dz} G_{\text{BH}}(m_{\text{BH}_1}) G_{\text{BH}}(m_{\text{BH}_2}) dz dk \quad (6.30)$$

O espectro gerado por meio do cálculo explicado acima é mostrado na figura 6.10.

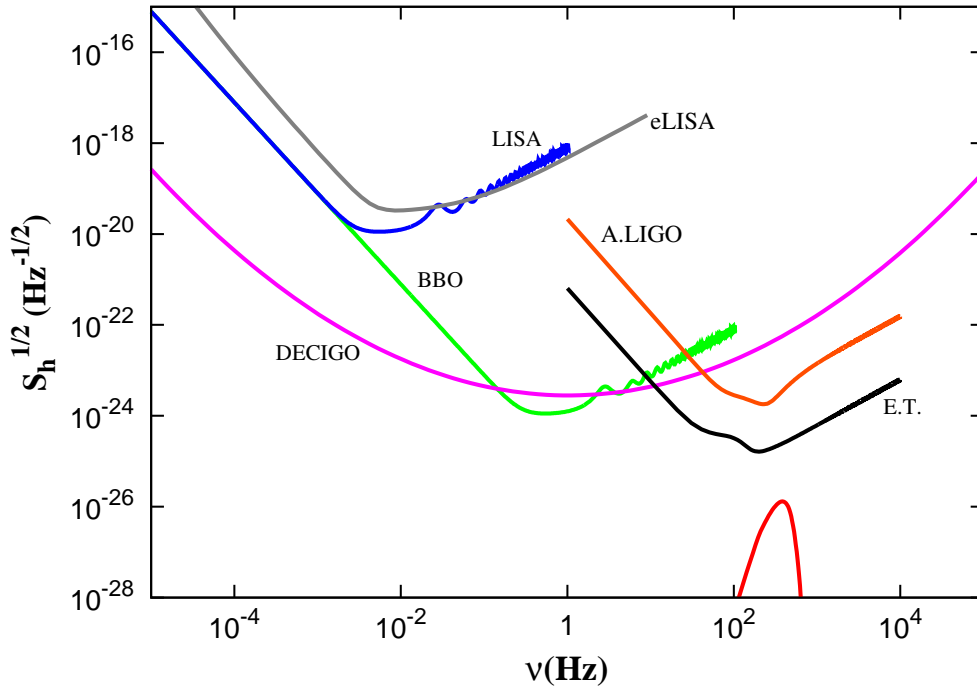


Figura 6.10 - Espectro gerado por sistemas BHBH em coalescência

Nota-se que o fundo gerado situa-se abaixo dos limiares de sensibilidade para todos os



detectores considerados nesta tese, de forma que mesmo o uso de correlação cruzada para pares de ET e LIGO produziria baixos valores para a relação sinal-ruído (veja Seção 6.4).

#### 6.2.4 Espectros em Termos de $\Omega_{\text{GW}}$

Para melhor comparação entre os fundos gerados aqui e alguns resultados encontrados na literatura, os espectros gerados pela coalescência de sistemas NSNS, BHNS e BHBH foram traçados em termos de  $\Omega_{\text{GW}}$  (veja a equação 3.4.) Assim, comparando os espectros mostrados na figura 6.11 com os resultados encontrados, por exemplo, em [Zhu et al. \(2011\)](#), [Kowalska et al. \(2013\)](#), [Wu et al. \(2011\)](#), nota-se que há semelhança nas formas e nas faixas de frequência. É importante destacar ainda que quando os resultados gerados aqui são comparados a outros presentes na literatura, tais como os citados acima, os valores das amplitudes dos espectros podem se apresentar mais altos ou mais baixos relativamente ao caso tomado para comparação. Tais diferenças podem ocorrer, entre outros fatores, em virtude da utilização de diferentes funções distribuição e de valores mais altos ou mais baixos para as taxas de coalescência.

Por último, é interessante mencionar que estes métodos e resultados referentes aos espectros em coalescência são descritos em um artigo que se encontra em fase final de preparação ([EVANGELISTA; de ARAUJO, 2013b](#)).

### 6.3 Fundos em Órbitas Elípticas

A principal diferença que se pode observar quando se passa do estudo de sistemas binários em órbitas circulares para sistemas em órbitas elípticas é a presença de harmônicos mais altos na radiação gravitacional emitida. Para sistemas binários em órbitas circulares apenas um harmônico está presente: o correspondente à radiação de quadrupolo, onde as ondas emitidas possuem frequências que são o dobro da frequência orbital do sistema. Por outro lado, quando as órbitas são elípticas os padrões de emissão são mais complexos pois surgem harmônicos mais altos, e a radiação total emitida pelo sistema será a soma de vários termos, cada um deles possuindo uma frequência característica que é múltipla da frequência orbital do sistema.

Para o cálculo do fundo envolvendo órbitas excêntricas pode-se utilizar um artifício para aproveitar o método desenvolvido no estudo das órbitas circulares: aplica-se a técnica para cada harmônico separadamente, como se cada termo gerasse seu próprio

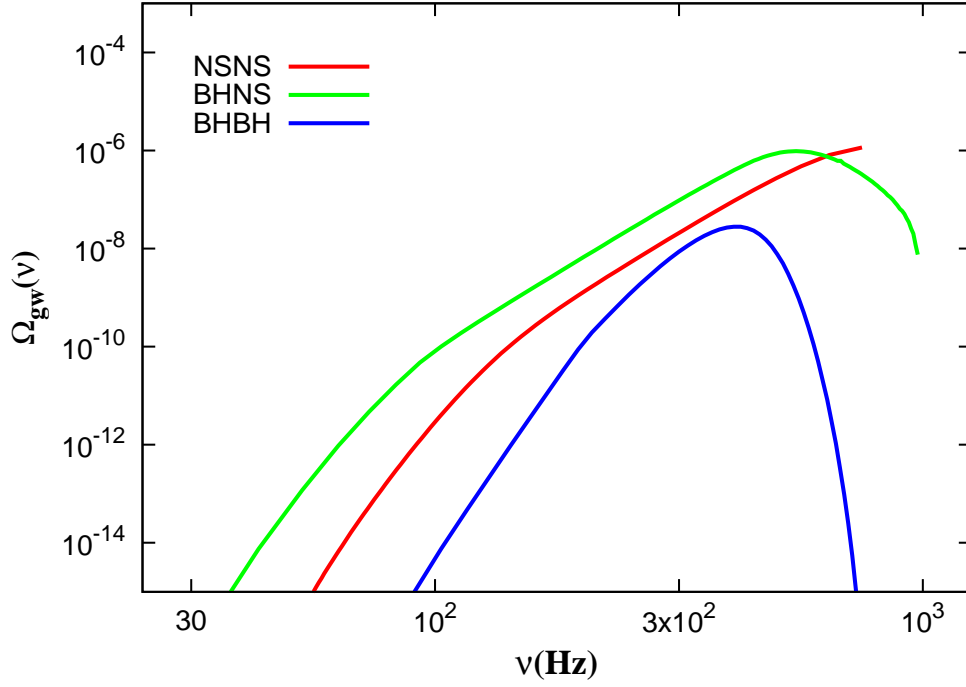


Figura 6.11 - Espectro em termos de  $\Omega_{\text{GW}}$  gerados pela coalescência de sistemas NSNS, BHNS e BHBH

fundo. Esquemáticamente, tem-se

$$\begin{aligned}
 h_{\text{BG}}^2(\nu = 2\nu_{\text{orb}}) &= \frac{1}{\nu} \int h_{\text{fonte}}^2(\nu = 2\nu_{\text{orb}}) \frac{dR(\nu = 2\nu_{\text{orb}})}{dV} f(\varepsilon) d\varepsilon dV \\
 h_{\text{BG}}^2(\nu = 3\nu_{\text{orb}}) &= \frac{1}{\nu} \int h_{\text{fonte}}^2(\nu = 3\nu_{\text{orb}}) \frac{dR(\nu = 3\nu_{\text{orb}})}{dV} f(\varepsilon) d\varepsilon dV \\
 h_{\text{BG}}^2(\nu = 4\nu_{\text{orb}}) &= \frac{1}{\nu} \int h_{\text{fonte}}^2(\nu = 4\nu_{\text{orb}}) \frac{dR(\nu = 4\nu_{\text{orb}})}{dV} f(\varepsilon) d\varepsilon dV \\
 &\vdots \\
 h_{\text{BG}}^2(\nu = n\nu_{\text{orb}}) &= \frac{1}{\nu} \int h_{\text{fonte}}^2(\nu = n\nu_{\text{orb}}) \frac{dR(\nu = n\nu_{\text{orb}})}{dV} f(\varepsilon) d\varepsilon dV
 \end{aligned}$$

onde  $n$  representa o  $n$ -ésimo harmônico,  $\nu$  corresponde à frequência observada,  $\nu_{\text{orb}}$  representa a frequência orbital do sistema,  $h_{\text{BG}}^2(\nu = n\nu_{\text{orb}})$  é a amplitude do espectro para o  $n$ -ésimo harmônico,  $h_{\text{fonte}}$  é a amplitude da radiação emitida por cada fonte e  $dR/dV$  é a taxa de geração de ondas gravitacionais por volume comóvel. É importante notar a presença das distribuições das excentricidades orbitais  $f(\varepsilon)$ , as quais foram descritas na seção 4.4. Aqui foi deixada evidente a dependência que as várias

grandezas têm em relação à frequência orbital. Então, para a obtenção do espectro gerado por sistemas excêntricos, seria necessário apenas somar os  $n$  fundos esquemmatizados acima, porém tendo em mente que as amplitudes utilizadas terão uma forma diferente da utilizada para sistemas em órbitas circulares. Pode-se defini-la a partir da equação 2.139, com o fluxo  $F$  dado por

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} \quad (6.31)$$

onde  $R$  é a distância de luminosidade e  $L$  é a luminosidade dada por 2.129. Assim, substituindo 2.129 e 2.139 (tomando-se o cuidado de considerar a frequência orbital ao invés da frequência emitida) em 6.31, obtém-se a expressão (HAWKING; ISRAEL, 1979)

$$h_{\text{fonte}} = 1.2 \times 10^{-22} \left( \frac{\mu}{M_{\odot}} \right) \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2/3} \left( \frac{1\text{Mpc}}{d_L} \right) \left( \frac{\nu_{\text{orb}}}{1\text{Hz}} \right)^{2/3} g_n^{1/2}(\varepsilon). \quad (6.32)$$

A diferença entre os valores das constantes multiplicativas presentes em 5.1 e 6.32 ocorre porque em 6.32 é utilizada a frequência orbital ao invés da frequência emitida: a transformação modificaria o valor da constante, reduzindo-a ao valor presente em 5.1. Além disso, conforme Hawking e Israel (1979), o cálculo de 6.32 foi feito baseando-se em valores médios e aproximações, o que poderia provocar pequenas diferenças entre os valores das constantes. No entanto, tais diferenças não são relevantes, já que em geral elas correspondem a um fator de no máximo  $\sim 4$ .

Os resultados para os dez primeiros harmônicos são mostrados nas figuras 6.12, 6.13 e 6.14; os espectros representando a soma dos harmônicos podem ser vistos nas figuras 6.15, 6.16 e 6.17. Note ainda que, a título de comparação, os espectros para órbitas circulares foram inseridos nas figuras 6.15, 6.16 e 6.17.

Uma característica que se pode observar nos gráficos é a predominância do segundo harmônico nos três casos. Tal característica é consistente com o fato de as distribuições das excentricidades usadas terem seus máximos em baixos valores de excentricidade. Isso é percebido de maneira mais clara no caso de sistemas BHBH.

Comparando as curvas geradas pela soma dos harmônicos com os espectros para sistemas em órbita circular, notam-se pequenas diferenças tanto na forma quanto na amplitude. Tal fato é justificado pela influência da distribuição das excentricidades sobre a expressão para os fundos. Com efeito, tais diferenças são pequenas em virtude

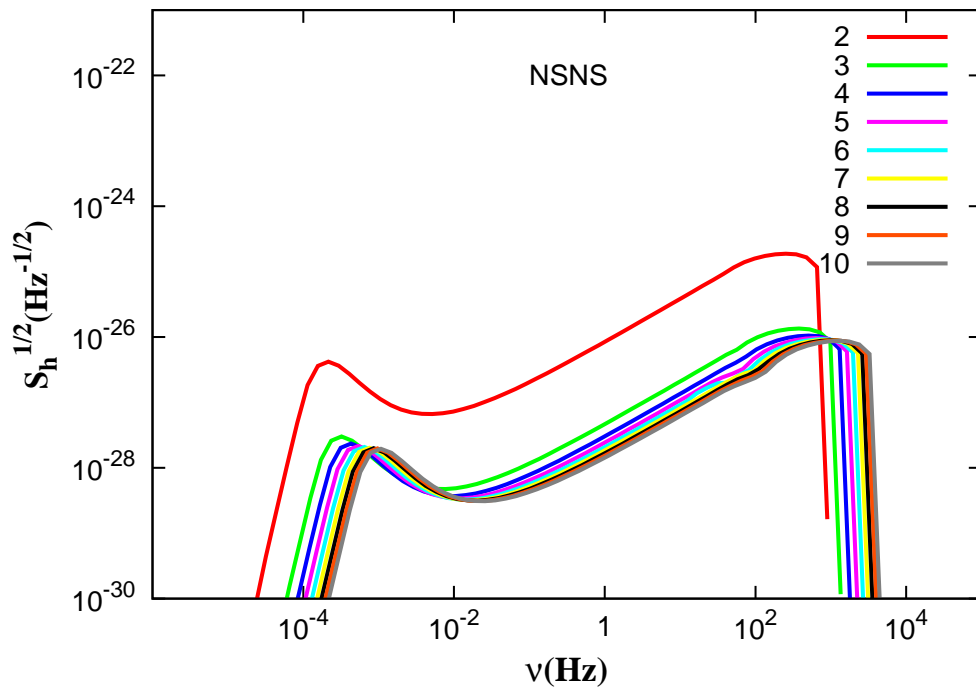


Figura 6.12 - Contribuição de cada harmônico para o espectro de sistemas NSNS

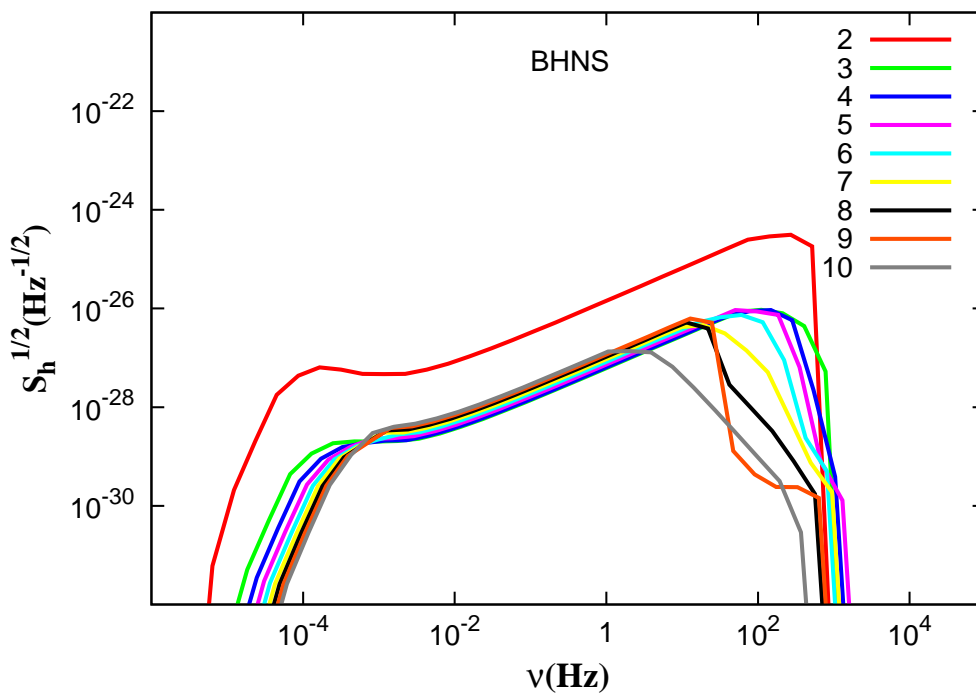


Figura 6.13 - Contribuição de cada harmônico para o espectro de sistemas BHNS

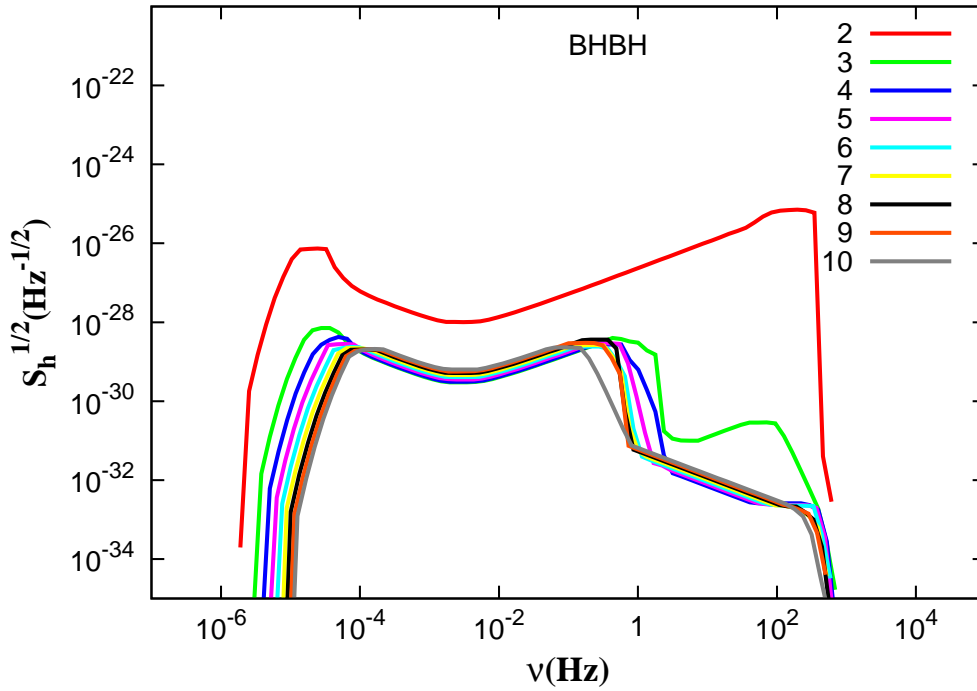


Figura 6.14 - Contribuição de cada harmônico para o espectro de sistemas BHBH

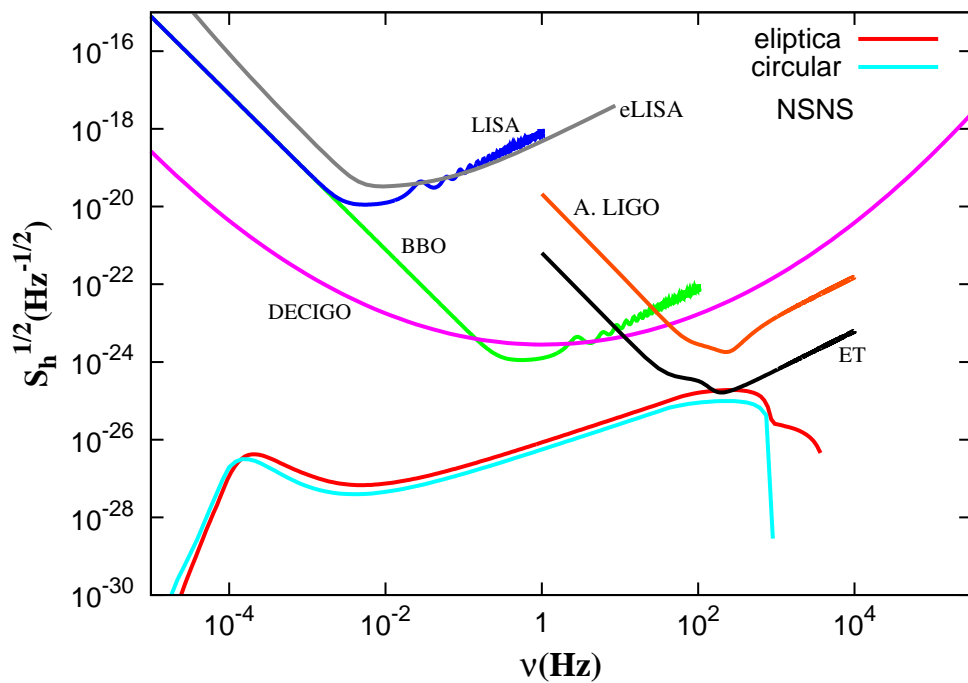


Figura 6.15 - Espectro gerado por sistemas NSNS excêntricos comparado ao respectivo fundo para órbitas circulares.

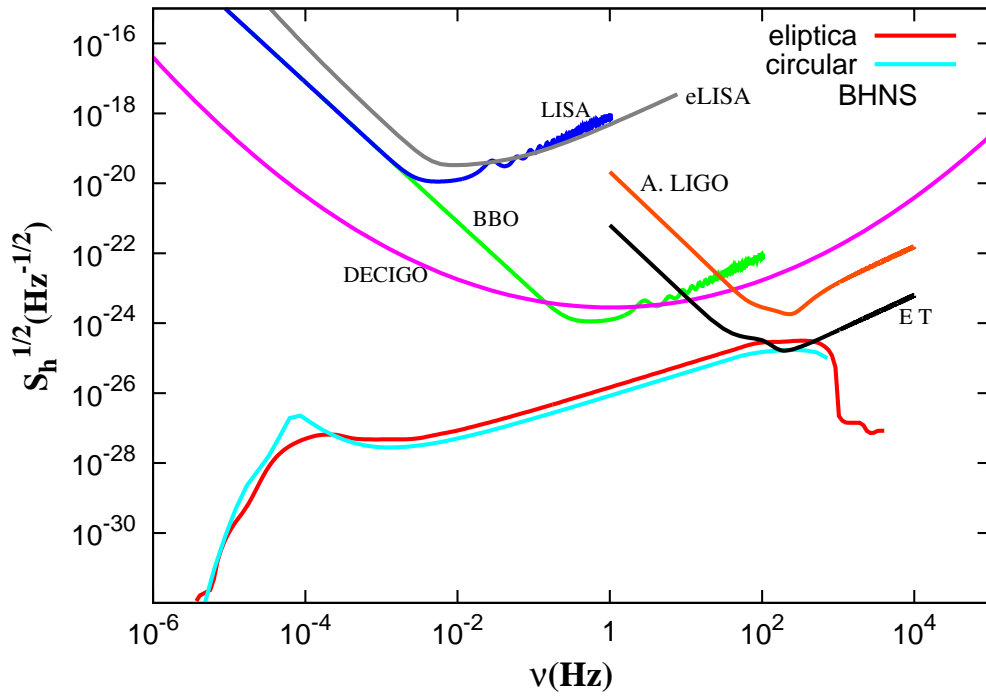


Figura 6.16 - Espectro gerado por sistemas BHNS excêntricos comparado ao respectivo fundo para órbitas circulares.

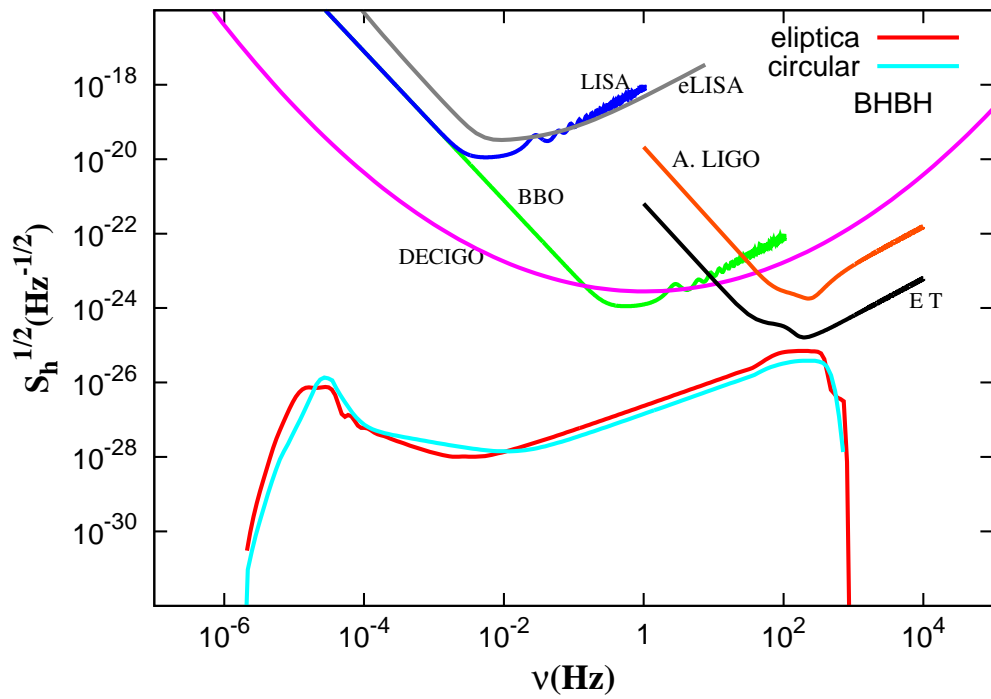


Figura 6.17 - Espectro gerado por sistemas BHBH excêntricos comparado ao respectivo fundo para órbitas circulares.

de as excentricidades consideradas serem baixas, fazendo com que os resultados não se distanciem consideravelmente dos fundos gerados para órbitas circulares.

Como as excentricidades dadas por 4.16 e 4.17 são baixas, torna-se interessante estudar os casos onde os fundos são gerados por uma população na qual os sistemas apresentam excentricidades orbitais elevadas. Certamente tais espectros apresentarão diferenças significativas quando comparados àqueles gerados por sistemas em órbitas circulares. Tal comportamento é analisado em um artigo que se encontra em fase de preparação (EVANGELISTA; de ARAUJO, 2013c), onde são mostrados e comparados os espectros obtidos para sistemas NSNS utilizando-se, em cada caso, a função 4.17 e a distribuição plana  $f(\varepsilon) = (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})^{-1}$  com  $\varepsilon_{\min} = 0$  e  $\varepsilon_{\max} = 0.9$ .

#### 6.4 Correlação Cruzada Para Pares de Detectores

Em muitos casos os espectros calculados estão abaixo dos limiares de sensibilidade dos detectores interferométricos como os citados nesta tese. Entretanto, de acordo com Michelson (1987), pode-se aumentar a probabilidade de detecção por meio de uma correlação de dois ou mais detectores (ALLEN; ROMANO, 1999; ALLEN, 1997). Mais especificamente, serão considerados aqui a correlação para pares de LIGO's e ET's. A relação sinal-ruído para tais correlações (dada pela equação 3.3) foi calculada para os espectros formados pelos sistemas em órbitas circulares, órbitas elípticas e pelos sistemas em coalescência, considerando-se o tempo de integração de 1 ano. Os resultados podem ser vistos nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3.

Tabela 6.1 - Relação S/N para sistemas em órbitas circulares, considerando pares de detectores e tempo de integração de 1 ano.

Sistema	Initial LIGO	Enhanced LIGO	Advanced LIGO	ET
NSNS	$3,1 \times 10^{-2}$	2,7	$1,2 \times 10^1$	$1,6 \times 10^4$
BHNS	$5,6 \times 10^{-2}$	4,2	$1,6 \times 10^1$	$3,1 \times 10^4$
BHBH	$2,0 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-1}$	$6,9 \times 10^{-1}$	$1,9 \times 10^3$

Observando os valores para a relação sinal-ruído, percebe-se que o arranjo envolvendo o ET seria o mais promissor no que diz respeito às chances de detecção dos espectros. Além disso, nota-se que os sistemas BHNS apresentam as maiores probabilidades de terem seu espectro detectado por correlação cruzada de detectores, tanto no caso de órbitas circulares quanto no caso de órbitas elípticas. Igualmente, para os fundos gerados pelas coalescências, os maiores valores da relação S/N seriam os

Tabela 6.2 - Relação S/N para sistemas em órbitas elípticas, considerando pares de detectores e tempo de integração de 1 ano.

Sistema	Initial LIGO	Enhanced LIGO	Advanced LIGO	ET
NSNS	$3,2 \times 10^{-2}$	2,8	$1,3 \times 10^1$	$1,7 \times 10^4$
BHNS	$6,0 \times 10^{-2}$	5,0	$2,0 \times 10^1$	$3,8 \times 10^4$
BHBH	$2,9 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-1}$	$9,0 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^3$

Tabela 6.3 - Relação S/N para sistemas em coalescência, considerando pares de detectores e tempo de integração de 1 ano.

Sistema	Initial LIGO	Enhanced LIGO	Advanced LIGO	ET
NSNS	$1,0 \times 10^{-4}$	$3,5 \times 10^{-3}$	$6,3 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^2$
BHNS	$4,8 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-2}$	$3,4 \times 10^{-2}$	$1,2 \times 10^3$
BHBH	$2,8 \times 10^{-5}$	$9,4 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-3}$	$6,4 \times 10^1$

correspondentes a sistemas BHNS. Ainda em relação aos sistemas em coalescência, apenas a correlação cruzada envolvendo o ET teria possibilidade de detectar tais espectros.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Na literatura há diversos exemplos de cálculo de fundos estocásticos em ondas gravitacionais gerados por sistemas binários, porém tais métodos consideram a evolução temporal dos parâmetros orbitais de forma indireta ou simplificada, sendo comum também que tal dependência seja desprezada. Dessa forma, a principal contribuição desta tese foi apresentar um novo método para o cálculo dos fundos gerados por sistemas binários compactos durante as fases periódica e quase-periódica e que considera explicitamente tal dependência temporal. Além disso, tal método apresenta a vantagem de ser computacionalmente simples e versátil, já que as funções distribuição e os parâmetros utilizados podem ser modificados de forma direta, sem a necessidade de se modificar o formalismo.

Os resultados gerados para sistemas NSNS em órbitas circulares não seriam relevantes para os detectores eLISA, BBO, DECIGO e ALIGO, porém os fundos correspondentes aos sistemas BHNS seriam marginalmente importantes para o ET na região de frequências em torno de  $\sim 200\text{Hz}$ . Foi investigada também a detectabilidade de tais fundos por meio da correlação de pares de detectores. Para sistemas NSNS e BHNS, os arranjos envolvendo Enhanced LIGO's, ALIGO's e ET's forneceriam  $S/N > 1$ ; por outro lado, sistemas BHBH teriam  $S/N > 1$  apenas para pares de ET's. É conveniente ainda lembrar que quando o ET se tornar operacional haverá provavelmente alguma configuração avançada do detector Virgo, então será possível correlacioná-los. Tal correlação seria em princípio mais sensível que pares de ALIGO, permitindo a investigação dos fundos estudados aqui.

Foram gerados espectros para sistemas em órbitas elípticas, onde foi analisado o papel de cada harmônico na composição da radiação total emitida. Nos três casos nota-se a predominância do segundo harmônico (termo de quadrupolo), cujas amplitudes são maiores do que as correspondentes aos terceiros harmônicos por um fator  $\sim 10$ . Tal fato é justificado pela predominância de baixas excentricidades nas distribuições utilizadas. Como no caso de órbitas circulares, os espectros gerados não criariam fundos para os interferômetros eLISA, BBO, DECIGO e ALIGO; já os sinais gerados por sistemas NSNS e BHNS atingiriam o limiar de sensibilidade para o ET na região  $\gtrsim 100\text{Hz}$ . Quanto à detectabilidade via correlação cruzada de detectores, os fundos gerados por sistemas NSNS e BHNS teriam  $S/N > 1$  para pares de ELIGO's, ALIGO's e ET's; enquanto para sistemas BHBH teria-se  $S/N > 1$  somente para ET's.

Foram investigados também os fundos gerados pelos sistemas compactos na fase

de coalescência. Observando-se a figura 6.11, nota-se que os fundos gerados por binárias BHNS teriam as maiores amplitudes, sendo o espectro correspondente aos sistemas BHBH o de menor amplitude. A diferença entre os dois casos é de  $\sim 10^2$ ; o fundo devido a NSNS's surge como um caso intermediário. Quanto à detectabilidade, observa-se que os três espectros situam-se abaixo das curvas de sensibilidade para os detectores considerados. Particularmente, para o ET, tais fundos situam-se abaixo do limiar por um fator  $\sim 10$ . No que se refere à correlação cruzada, nota-se que pares de ET's poderiam em princípio detectar tais fundos, uma vez que para os três casos tem-se  $S/N \gg 1$ . No entanto, deve-se ter em mente que as amplitudes dos espectros gerados aqui são mais elevadas por um fator  $\sim 10$  quando estes são comparados com resultados encontrados na literatura. Tal diferença será investigada em trabalhos futuros.

Foram realizados cálculos envolvendo a utilização de diversas taxas de formação de estrelas, onde foi constatado que estas têm fraca influência sobre os espectros gerados. Particularmente, observou-se diferença máxima de uma ordem de grandeza entre os fundos gerados dessa maneira. Foram utilizadas também versões modificadas da distribuição de separações orbitais, as quais mostraram terem pouca influência nas regiões de baixa frequência dos fundos.

Demonstrou-se ainda que a técnica desenvolvida nesta tese poderia ser adaptada ao cálculo de fundos galácticos e taxas de coalescência, fornecendo valores que estão de acordo com resultados conhecidos na literatura. Tais resultados tiveram também como função demonstrar a validade do método.

## 7.1 PERSPECTIVAS

O formalismo desenvolvido nesta tese pode ainda ser utilizado em trabalhos futuros, entre os quais destaca-se o cálculo das taxas de coalescência de sistemas binários compactos nas vizinhanças da Galáxia. Com efeito, foi realizada uma primeira tentativa nesse sentido, porém os cálculos levaram a valores que estão em desacordo com dados aceitos na literatura, como por exemplo [Abadie et al. \(2012\)](#). Assim, refinar o método para que seja adequado ao cálculo dessas taxas apresenta-se como uma perspectiva interessante.

Por outro lado, o cálculo dos fundos em coalescência poderia ser modificado de forma a incluir uma parametrização com valores numéricos conhecidos, conforme a técnica vista em [Zhu et al. \(2011\)](#) e mostrada na Seção 6.2.

Outra aplicação interessante do método desenvolvido aqui seria a determinação do fundo estocástico em ondas gravitacionais gerado por *Massive Compact Halo Objects* (MACHOs).



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABADIE, J. et al. Search for gravitational waves from low mass compact binary coalescence in ligo's sixth science run and virgo's science runs 2 and 3. **arXiv:1111.7314v4**, 2012. 100
- ABBOTT, B. P. et al. Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. **arXiv:0711.3041v2**, 2009. 47
- ACCADIA, T. et al. Calibration and sensitivity of the virgo detector during its second science run. **arXiv:1009.5190v3**, 2011. 48
- ALLEN, B. **Relativistic gravitation and gravitational radiation**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 53, 97
- ALLEN, B.; ROMANO, J. D. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. **Phys. Rev. D**, v. 59, p. 102001, 1999. 53, 97
- AMARO-SEOANE, P. et al. Low-frequency gravitational wave science with elisa/ngo. **arXiv:1202.0839v2**, 2012. 51, 76
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Essential mathematical methods for physicists**. San Diego, CA: Elsevier Academic Press, 2004. 11
- BELCZYNSKI, K.; KALOGERA, V.; BULIK, T. A comprehensive study of binary compact objects as gravitational wave sources: evolutionary channels, rates and physical properties. **Astrophys. J.**, v. 572, p. 407–431, 2002. 57, 58, 59
- BERGMANN, P. G. **Introduction to the theory of relativity**. New York, USA: Dover Publications, 1976. 29
- CAMP, J. B.; CORNISH, N. J. Gravitational wave astronomy. **Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.**, v. 54, p. 525–577, 2004. 2
- CARR, B. J. Cosmological gravitational waves: Their origin and consequences. **Astron. Astrophys.**, v. 89, p. 6–21, 1980. 2, 3, 38
- CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. **An Introduction to modern astrophysics**. San Francisco: Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, 2007. 55, 56, 85

- CARROLL, S. M. **An introduction to general relativity**: spacetime and geometry. San Francisco, USA: Addison Wesley, 2004. 28, 43
- CARROLL, S. M.; PRESS, W. H.; TURNER, E. L. The cosmological constant. **Annu. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 30, p. 499–542, 1992. 40
- CHANDRASEKHAR, S. On the “derivation” of Einstein’s field equations. **American Journal of Physics**, v. 40, n. Issue 2, p. 224, 1972. 18, 19
- COWARD, D.; BURMAN, R. R.; BLAIR, D. Simulating a stochastic background of gravitational waves from neutron star formation at cosmological distances. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 329, p. 411–416, 2002. 79
- CROWDER, J.; CORNISH, N. J. Beyond lisa: Exploring future gravitational wave mission. **Physical Review D**, v. 71, p. 127503, 2005. 52, 53
- CUTLER, C.; HARMS, J. Big bang observer and the neutron-star-binary subtraction problem. **Physical Review D**, v. 73, p. 042001, 2006. 76
- de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D. Star formation rate density and stochastic background of gravitational waves. **Physical Review D**, v. 71, p. 127503, 2005. 39
- D’INVERNO, R. **Introducing Einstein’s relativity**. Oxford, N Y: Oxford University Press, 1995. 8, 13, 14, 19, 23, 24
- EINSTEIN, A. **The Meaning of relativity**. London, UK: Methuen Publishing, 1951. 13
- ENOKI, M.; INOUE, K. T.; NAGASHIMA, M.; SUGIYAMA, N. Gravitational waves from supermassive black hole coalescence in a hierarchical galaxy formation model. **arXiv:astro-ph/0404389v2**, 2004. 43
- EVANGELISTA, E. F. D.; de ARAUJO, J. C. N. A new method to calculate the stochastic background of gravitational waves generated by compact binaries. **Modern Physics Letters A**, v. 28, n. 38, p. 1350174, 2013. 74
- \_\_\_\_\_. Stochastic background of gravitational waves generated by coalescing compact binaries. Em preparação. 2013. 91
- \_\_\_\_\_. Stochastic background of gravitational waves generated by eccentric neutron star binaries. Em preparação. 2013. 97

- FERRARI, V.; MATARRESE, S.; SCHNEIDER, R. Stochastic background of gravitational waves generated by a cosmological population of young, rapidly rotating neutron stars. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 303, p. 258, 1999. [54](#)
- FLANAGAN, E. E. Sensitivity of the laser interferometer gravitational wave observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations. **Physical Review D**, v. 48, n. 6, p. 2389–2408, 1993. [53](#)
- FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. **A short course on general relativity**. New York, USA: Springer Science+Business Media Inc., 2006. [8](#), [12](#)
- HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. **General relativity**: an Einstein centenary survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. [43](#), [93](#)
- HEGER, A.; WOOSLEY, S. The nucleosynthetic signature of population iii. **Astrophys. J.**, v. 567, p. 532–543, 2002. [78](#)
- HILS, D.; BENDER, B. L.; WEBBINK, R. F. Gravitational radiation from the galaxy. **Astrophys. J.**, v. 360, p. 75–94, 1990. [38](#), [118](#)
- JACKSON, E. A. **Equilibrium statistical mechanics**. Mineola, N. Y.: Dover Publications, Inc., 1968. [70](#)
- KAWAMURA, S. et al. The japanese space gravitational wave antenna-decigo. **Classical and Quantum Gravity**, v. 23, p. 125, 2006. [51](#), [52](#)
- KENYON, I. R. **General relativity**. Oxford, N Y: Oxford University Press, 1990. [26](#), [30](#), [75](#)
- KOWALSKA, I.; BULIK, T.; BELCZYNSKI, K.; DOMINIC, M.; GONDEK-ROSINSKA, D. The eccentricity distribution of compact binaries. **Astronomy and Astrophysics**, v. 527, p. A70, 2011. [62](#), [63](#)
- KOWALSKA, I.; REGIMBAU, T.; BULIK, T.; DOMINIK, M.; BELCZYNSKI, K. Effect of the metallicity on the gravitational-wave signal from the cosmological population of compact binary coalescences. **arXiv:1205.4621v3**, 2013. [91](#)
- MANDEL, I.; O'SHAUGHNESSY, R. Compact binary coalescences in the band of ground-based gravitational-wave detector. **Class. Quantum Grav.**, v. 27, n. 11, p. 114007, 2010. [56](#)
- MARASSI, S.; SCHNEIDER, R.; CORVINO, G.; FERRARI, V.; ZWART, S. P. Gravitational wave background from coalescence of black hole binaries population. **arXiv:1104.2044v1**, 2011. [75](#)

- MICHELSON, P. F. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 227, p. 933, 1987. 97
- MISHRA, C. K.; ARUN, K. G.; IYER, B. R.; SATHYAPRAKASH, B. S. Parametrized tests of post-newtonian theory using advanced ligo and einstein telescope. **arXiv:1005.0304v2**, 2010. 54, 76
- MISNER, C.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco, CA: W. H. Freeman and Company, 1973. 1, 13, 25, 32
- MOSS, G.; MILLER, L.; FORWARD, R. Photon-noise-limited laser transducer for gravitational antenna. **Applied Optics**, v. 10, p. 2495, 1972. 45
- MUKHANOV, V. **Physical foundations of cosmology**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2005. 39
- NELEMANS, G.; YUNGELSON, L. R.; SWART, S. F. P. Short-period am cvn systems as optical, x-ray and gravitational wave sources. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 349, p. 181–92, 2004. 117
- NELEMANS, S. G. The galactic gravitational wave foreground. **Class. Quantum Grav.**, v. 26, p. 094030–094039, 2009. 2
- NISSANKE, S.; VALLISNERI, M.; NELEMANS, G.; PRINCE, T. A. Gravitational-wave emission from compact galactic binaries. **arXiv:1201.4613v1**, 2012. 117
- OHANIAN, H.; RUFFINI, R. **Gravitation and spacetime**. New York, NY: W. W. Norton and Company, Inc., 1994. 43, 44
- ÖZEL, F.; PSALTIS, D.; NARAYAN, R.; MCCLINTOCK, J. E. The black hole mass distribution in the galaxy. **arXiv:1006.2834v2**, 2010. 56
- PAPAPETROU, A. **Lectures on general relativity**. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974. 12
- PEEBLES, P. J. E. **Principles of physical cosmology**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993. 39, 40
- PETERS, P. C. Gravitational radiation and the motion of two point masses. **Physical Review**, v. 136, n. 4B, p. B1224–B1233, 1964. 63, 64
- PETERS, P. C.; MATHEWS, J. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. **Physical Review**, v. 131, n. 1, p. 435–439, 1963. 34, 35, 64



- POGHOSYAN, G.; OECHSLIN, R.; URYŭ, K.; THIELEMANN, F. K. The influence of quark matter at high densities on binary neutron star mergers. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 349, p. 1469–1480, 2004. 75, 85
- PRESS, W. H.; SCHECHTER, P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. **Astrophys. J.**, v. 187, p. 425–38, 1974. 61
- PRESS, W. H.; THORNE, K. S. Gravitational-wave astronomy. **Annu. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 10, p. 335–374, 1972. 15
- REGIMBAU, T. Stochastic background from inspiralling double neutron stars. **arXiv:astro-ph/0701004v1**, 2006. 78
- \_\_\_\_\_. The astrophysical gravitational wave stochastic background. **arXiv:1101.2762v3**, 2011. 54
- REGIMBAU, T.; PACHECO, J. A. F. Stochastic background from coalescences of neutron star-neutron star binaries. **Astrophys. J.**, v. 642, p. 455–61, 2006. 57
- RYDEN, B. **Introduction to cosmology**. Boston, EUA: Addison Wesley, 2002. 39
- SALPETER, E. E. The luminosity function and stellar evolution. **Astrophys. J.**, v. 121, p. 161, 1955. 55
- SATHYAPRAKASH, B. S. et al. Scientific potential of Einstein telescope. **arXiv:1108.1423v2**, 2012. 49, 50
- SATHYAPRAKASH, B. S.; OWEN, B. J. Matched filtering of gravitational waves from inspiralling compact binaries: Computational cost and template placement. **Phys. Rev. D**, v. 60, p. 022002, 1999. 54
- SATHYAPRAKASH, B. S.; SCHUTZ, B. F. Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. **arXiv:0903.0338v1**, 2009. 54
- SCHNEIDER, R.; FERRARI, V.; MATARRESE, S.; ZWART, S. F. P. Low-frequency gravitational waves from cosmological compact binaries. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 324, p. 797–810, 2001. 78
- SCHUTZ, B. F. **A First course in general relativity**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985. 1
- SPRINGEL, V.; HERNQUIST, L. The history of star formation in a  $\lambda$  cold dark matter universe. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 339, p. 312–334, 2003. 56

- STEPHANI, H. **General Relativity**: an introduction to the theory of the gravitational field. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1982. 17, 18, 20, 21, 22, 28, 29
- TAYLOR, J. H.; HULSE, R. A.; A., F. L.; GULLAHORN, G. E.; RANKIN, J. M. Further observations of the binary pulsar PSR 1913+16. **Astrophys. J.**, v. 206, p. L53–L58, 1976. 3
- THORNE, K. **300 years of gravitation**: edited by Stephen Hawking and Werner Israel. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1987. 21, 34, 69
- TIMPANO, S. E.; RUBBO, L. J.; CORNISH, N. J. Characterizing the galactic gravitational wave background with lisa. **Physical Review D**, v. 73, p. 122001, 2006. 118
- WALD, R. M. **General relativity**. Chicago, USA: The University of Chicago Press, 1984. 13
- WEBBER, J.; LEE, M.; GREETZ, D. J.; RYDBECK, G.; TRIMBLE, V. L.; STEPPEL, S. New gravitational radiation experiments. **Physical Review Letters**, v. 31, p. 779, 1973. 44
- WEBER, J. Observation of the thermal fluctuation of a gravitational wave detector. **Physical Review Letters**, v. 17, p. 1228, 1966. 45
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: applications to the general theory of relativity. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 1972. 1, 11, 17, 19, 24, 25, 33
- WEYL, H. **Space, time and matter**. Mineola, NY: Courier Dover Publications, 1952. 1
- WU, C.; MANDIC, V.; REGIMBAU, T. Accessibility of the gravitational-wave background due to binary coalescences to second and third generation gravitational-wave detectors. **arXiv:1112.1898v1**, 2011. 84, 91
- YAGI, K.; TANAKA, T. Decigo/bbo as a probe to constrain alternatives theories of gravity. **arXiv:0908.3283v2**, 2010. 76
- ZHU, X. J.; HOWELL, E.; REGIMBAU, T.; BLAIR, D.; ZHU, Z. H. Stochastic gravitational wave background from coalescing binary black holes. **arXiv:1104.3565v3**, 2011. 79, 83, 84, 91, 100

## APÊNDICE A - O LIMITE NEWTONIANO

É possível demonstrar que a equação da geodésica 2.41 fornece uma expressão similar à lei da gravitação newtoniana  $\vec{g} = -\nabla\Phi$  quando se considera o caso de uma partícula se movendo com velocidade  $v \ll c$  em um campo gravitacional fraco e estacionário. Além disso pode-se usar essa semelhança para se deduzir uma relação entre o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e o potencial gravitacional  $\Phi$ .

Se a velocidade da partícula for suficientemente baixa as derivadas das coordenadas espaciais ( $dx^1/d\tau, dx^2/d\tau, dx^3/d\tau$ ) podem ser desprezadas em comparação à derivada da coordenada temporal  $dx^0/d\tau$ , de modo que 2.41 se reduz a

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde  $\Gamma_{00}^\mu$  é dado por 2.39. Usando 2.39 em A.1 e considerando  $x^0 = ct$ , obtém-se o par de equações

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

onde foi utilizada a notação  $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$  para as coordenadas espaciais.

Lembrando que  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$  e eliminando o tempo próprio  $\tau$ , o sistema acima conduz a

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \nabla h_{00} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\nabla \equiv (\partial/\partial x^1)\hat{i} + (\partial/\partial x^2)\hat{j} + (\partial/\partial x^3)\hat{k}$ .

A comparação entre A.4 e a expressão newtoniana  $\vec{g} \equiv d^2\vec{x}/dt^2 = -\nabla\Phi$  leva naturalmente à relação entre  $h_{00}$  e  $\Phi$ :

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2} + \text{constant} \quad (\text{A.5})$$

No entanto, para grandes distâncias da fonte a métrica deve se reduzir à de Minkowski, de forma que a constante em A.5 deve ser nula. Com isso em mente e considerando  $\Phi = -GM/r$ , tem-se para a componente tempo-tempo do tensor métrico:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (\text{A.6})$$



## APÊNDICE B - POTÊNCIA IRRADIADA POR BINÁRIAS

Para que a equação 2.124 forneça a potência gerada por sistemas binários, é conveniente em primeiro lugar determiná-la para o caso geral de um objeto de forma arbitrária em rotação. Assim, seja um referencial inercial dado pelas coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  e um referencial em rotação em relação ao primeiro e fixo ao corpo cujas coordenadas são dadas por  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Os dois conjuntos de coordenadas relacionam-se pelas transformações

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \omega_{\text{rot}} t - x'_2 \sin \omega_{\text{rot}} t \\ x_2 = x'_1 \sin \omega_{\text{rot}} t + x'_2 \cos \omega_{\text{rot}} t \\ x_3 = x'_3 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\omega_{\text{rot}}$  é a frequência de rotação do corpo em relação ao sistema inercial.

Seja agora o tensor de inércia calculado em relação às coordenadas fixas ao corpo e cujas componentes serão designadas por  $I_{ij}$ :

$$I_{ij} = \int x'_i x'_j \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}' \quad (\text{B.2})$$

A definição deste tensor é importante por que as quantidades  $D_{ij}$  em 2.124 serão escritas em termos dele. Assim, por simplicidade considera-se a rotação em torno de um dos eixos principais do elipsóide de inércia tal que  $I_{13} = I_{23} = 0$ . Além disso pode-se também escolher  $x'_1$  e  $x'_2$  ao longo dos dois outros eixos principais de inércia, tal que  $I_{12} = 0$ . Considerando essas simplificações a componente  $D_{11}$  fica

$$D_{11} = \int x_1 x_1 \rho(\vec{x}) d^3 \vec{x} \quad (\text{B.3})$$

$$D_{11} = \int \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}' (x' \cos \omega_{\text{rot}} t - y' \sin \omega_{\text{rot}} t)^2 \quad (\text{B.4})$$

após manipulação algébrica tem-se

$$D_{11} = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \cos 2\omega_{\text{rot}} t \quad (\text{B.5})$$

onde considerou-se também que  $d^3 \vec{x}' = d^3 \vec{x}$  para o tipo de transformação considerado, como o leitor pode verificar facilmente.

O cálculo das outras componentes é direto e será apenas indicado:

$$D_{12} = \int xy\rho(\vec{x})d^3\vec{x} \quad (\text{B.6})$$

$$D_{12} = \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \sin 2\omega_{\text{rot}}t \quad (\text{B.7})$$

$$D_{22} = \int y^2\rho(\vec{x})d^3\vec{x} \quad (\text{B.8})$$

$$D_{22} = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \cos 2\omega_{\text{rot}}t \quad (\text{B.9})$$

$$D_{33} = \int z^2\rho(\vec{x})d^3\vec{x} \quad (\text{B.10})$$

$$D_{33} = I_{33} \quad (\text{B.11})$$

Além disso tem-se  $D_{13} = D_{23} = 0$ , como pode ser demonstrado de forma direta considerando-se as simplificações feitas até aqui. Agora o tensor  $D_{ij}$  deve ser escrito em função da frequência  $\omega$  de emissão das ondas gravitacionais. Isso pode ser feito por meio de uma expansão em série de Fourier

$$D_{ij} = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} D_{ij}(\omega) + \sum_{\omega} e^{i\omega t} D_{ij}(-\omega) \quad (\text{B.12})$$

de forma que

$$D_{11} = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} D_{11}(\omega) + \sum_{\omega} e^{i\omega t} D_{11}(-\omega) \quad (\text{B.13})$$

$$D_{11} = \sum_{\omega} (\cos \omega t - i \sin \omega t + \cos \omega t + i \sin \omega t) D_{11}(\omega) \quad (\text{B.14})$$

$$D_{11} = 2 \sum_{\omega} \cos \omega t D_{11}(\omega) \quad (\text{B.15})$$

comparando com B.5 vê-se que

$$D_{11}(2\omega_{\text{rot}}) = \frac{1}{4}(I_{11} - I_{22}) \quad (\text{B.16})$$

Repetindo-se o raciocínio para a componente  $D_{22}(t)$  tem-se

$$D_{22}(2\omega_{\text{rot}}) = -D_{11}(2\omega_{\text{rot}}) \quad (\text{B.17})$$

O cálculo da componente  $D_{12}(t)$  é feito da mesma forma, porém tendo em mente que neste caso tem-se uma função ímpar, de forma que  $D_{12}(\omega) = -D_{12}(-\omega)$ . Assim,

$$D_{12}(2\omega_{\text{rot}}) = \frac{i}{4}(I_{11} - I_{22}) \quad (\text{B.18})$$

Substituindo-se as componentes calculadas acima na expressão 2.124 e fazendo  $\omega = 2\omega_{\text{rot}}$ , obtém-se após manipulações algébricas:

$$P = \frac{32G\omega_{\text{rot}}^6 I^2 e^2}{5c^5} \quad (\text{B.19})$$

onde  $I = I_{11} + I_{22}$  e  $e = (I_{11} - I_{22})/I$ .

A fórmula para a potência irradiada por corpos (ou sistemas de corpos) em rotação dada por B.19 pode ser escrita para o caso particular de um sistema binário. Seja então um sistema formado por dois corpos de massas  $m$  e  $M$  girando em torno de seu centro de massa (conforme figura B.1). Escolhe-se um sistema de coordenadas fixo

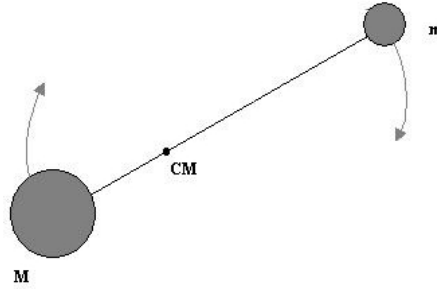


Figura B.1 - Esquema de um sistema binário de massas  $M$  e  $m$  e centro de massa CM

ao sistema e cuja origem esteja sobre o centro de massa. Além disso as coordenadas são definidas de tal forma que as posições das massas são dadas por

$$m : (x_1 = r_1, x_2 = 0, x_3 = 0) \quad (\text{B.20})$$

$$M : (x_1 = -r_2, x_2 = 0, x_3 = 0). \quad (\text{B.21})$$

O tensor de inércia para esse sistema é calculado por

$$I_{ij} = \int d^3\vec{x} x_i x_j [m\delta^3(\vec{x} - \vec{r}_1) + M\delta^3(\vec{x} + \vec{r}_2)] \quad (\text{B.22})$$

onde as massas são consideradas como pontos materiais. Além disso, em razão da escolha do sistema de coordenadas, apenas a componente  $I_{11}$  é diferente de zero e vale

$$I_{11} = m|\vec{r}_1|^2 + M|\vec{r}_2|^2 \quad (\text{B.23})$$

como pode ser deduzido diretamente de B.22.

Fisicamente é interessante colocar a expressão B.23 em termos somente da separação  $r$  entre os corpos e de suas massas. Isso é feito com o auxílio das equações para a separação orbital e para o centro de massa do sistema:

$$r_{\text{CM}} = \frac{mr_1 - Mr_2}{m + M} \quad (\text{B.24})$$

$$r = r_1 + r_2 \quad (\text{B.25})$$

Considerando  $r_{\text{CM}} = 0$  e substituindo  $r_1$  e  $r_2$  em B.23 chega-se a

$$I_{11} = \mu r^2 \quad (\text{B.26})$$

onde  $\mu = mM/(m + M)$  é a massa reduzida do sistema.

Finalmente, a substituição de B.23 em B.19 leva a

$$P = \frac{32G\omega_{\text{rot}}^6 \mu^2 r^4}{5c^5}. \quad (\text{B.27})$$



## APÊNDICE C - EVOLUÇÃO TEMPORAL DA FREQUÊNCIA

A partir da fórmula para a potência 2.127 é possível derivar a equação que descreve a evolução temporal da frequência orbital do sistema. Inicialmente se escreve 2.127 em função apenas da distância orbital por meio da terceira lei de Kepler

$$\omega_{\text{orb}}^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \quad (\text{C.1})$$

levando a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4}{5c^5 r^5} (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) \quad (\text{C.2})$$

Agora é possível determinar a taxa de variação temporal da frequência como

$$\frac{d\omega_{\text{orb}}}{dt} = \frac{d\omega_{\text{orb}}}{dr} \frac{dr}{dE} \frac{dE}{dt} \quad (\text{C.3})$$

onde  $dr/dE$  é obtida da expressão para a energia total do sistema dada por C.4

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2r} \quad (\text{C.4})$$

e  $d\omega_{\text{orb}}/dr$  é calculada por meio de C.1.

Assim, fazendo-se as substituições tem-se

$$\frac{d\omega_{\text{orb}}}{dt} = \frac{96m_1 m_2}{5c^5} \left[ \frac{G^7 (m_1 + m_2)^3}{r^{11}} \right]^{1/2} \quad (\text{C.5})$$

Para se resolver a equação diferencial C.5, deve-se escrever  $r$  em função de  $\omega_{\text{orb}}$  por meio de C.1 e integrar-se por separação de variáveis. Dessa forma, após as manipulações algébricas, fica-se com

$$\int_{\omega'_{\text{orb},0}}^{\omega'_{\text{orb}}} \omega_{\text{orb}}^{-11/3} d\omega_{\text{orb}} = K \int_{t'_0}^{t'} dt \quad (\text{C.6})$$

onde  $K$  é uma constante dada por

$$K = \frac{96m_1 m_2}{5c^5} G^{5/3} (m_1 + m_2)^{-1/3} \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, a integração fornece:

$$\omega_{\text{orb}}^{-8/3} = \omega_{\text{orb},0}^{-8/3} - \frac{8}{3} K (t - t_0). \quad (\text{C.8})$$

Finalmente, é possível escrever C.8 em termos da frequência da radiação emitida  $\nu$ , a qual se relaciona a  $\omega_{\text{orb}}$  por

$$\omega_{\text{orb}} = \pi\nu \tag{C.9}$$

## APÊNDICE D - O FUNDO GALÁCTICO

Como teste adicional para o método desenvolvido e também para fornecer uma validação, já que os resultados obtidos aqui podem ser comparados a outros trabalhos, foi feita uma estimativa para o espectro em ondas gravitacionais gerado por binárias de estrelas de nêutrons Galácticas.

Inicialmente consideram-se as equações 2.145 e 5.1, porém sem levar em consideração os termos cosmológicos. Com efeito, para  $z = 0$  a distância de luminosidade é igual à distância geométrica e a integral em 2.145 é calculada sobre o volume da Galáxia ao invés do volume comóvel. Além disso, o termo  $dR/dV$  é calculado para  $z = 0$ .

Por outro lado, para que se defina a forma específica para o volume da Galáxia, seguiu-se Nelemans et al. (2004), onde os autores consideraram como modelo galáctico um disco de espessura  $\approx 300\text{pc}$  e raio igual a  $19\text{kpc}$  e um bojo esférico de raio igual a  $3\text{kpc}$ . Dessa forma os elementos de volume são dados por

$$dV_{\text{disco}} = 2\pi r dr dz \quad (\text{D.1})$$

para um disco cilíndrico de altura e raio dados respectivamente por  $z$  e  $r$  e

$$dV_{\text{bojo}} = 4\pi r^2 dr \quad (\text{D.2})$$

para o bojo esférico de raio  $r$ . Portanto 2.145 assume a forma:

$$h_{\text{BG}}^2 = \frac{1}{\nu} \frac{dR}{dV} \Big|_{z=0} \left( \int h_{\text{fonte}}^2 dV_{\text{disco}} + \int h_{\text{fonte}}^2 dV_{\text{bojo}} \right) \quad (\text{D.3})$$

O próximo passo seria o cálculo das integrais em D.3 mas, seguindo o exposto em Nissanke et al. (2012), pode-se simplificar essa tarefa considerando-se um valor constante típico para  $r$ . Especificamente, os autores consideraram  $r = 5\text{kpc}$ . De fato, o valor exato das integrais não desempenha um efeito considerável sobre o espectro.

Assim, fazendo-se os cálculos acima para o caso dos sistemas binários galácticos de estrelas de nêutrons, tem-se o espectro mostrado na figura D.1:

Nota-se que o espectro apresenta amplitudes mais altas quando comparado aos fundos cosmológicos, especialmente nas regiões de baixa frequência. Este comportamento pode ser explicado pelo fato de não se ter levado em consideração a contribuição das fontes galácticas no cálculo dos fundos cosmológicos. Além disso, compa-

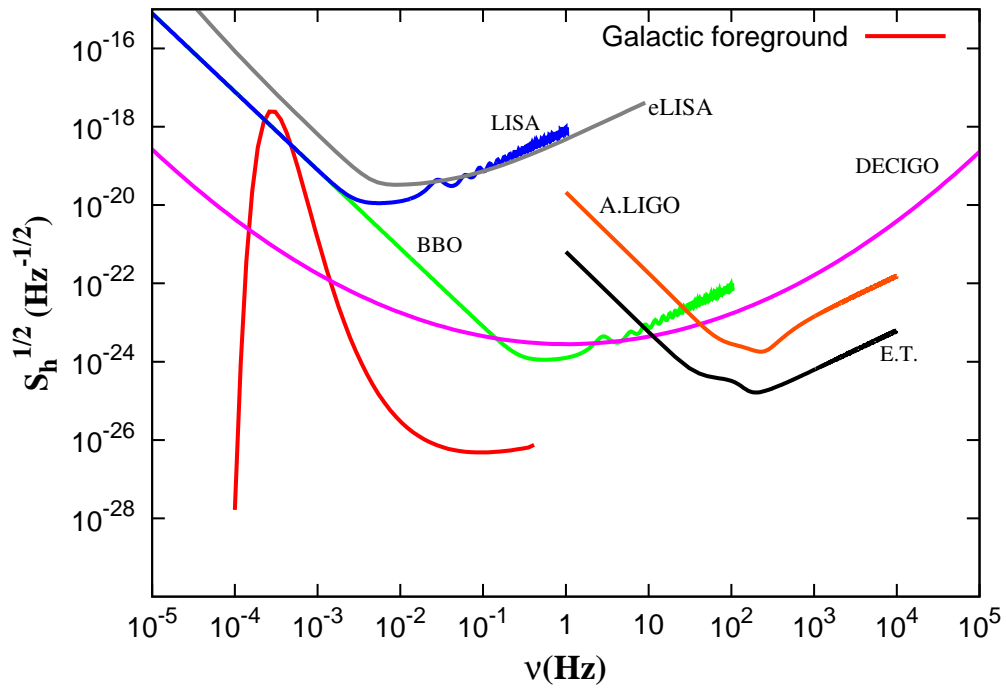


Figura D.1 - Espectro galáctico gerado por sistemas NSNS.

rando esse resultado a trabalhos relevantes na literatura, tais como Hils et al. (1990) e Timpano et al. (2006), pode-se notar boa concordância.

## PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.