



# Manobras orbitais de mínimo incremento de velocidade visando desviar o veículo de um detrito espacial

Gerline Teixeira de Lima<sup>1</sup>, Evandro Marconi Rocco<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil  
Aluna de Doutorado do curso de Mecânica Espacial e Controle- CMC.

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil

gerline.teixeira@inpe.br

---

**Resumo.** *O risco de colisão entre veículos espaciais operantes e detritos artificiais na órbita da Terra se torna a cada dia mais preocupante. Devido ao constante aumento de detritos espaciais, é necessário conduzir manobras orbitais no veículo espacial para que não resulte em uma colisão, gerando mais detritos na órbita da Terra. Este trabalho propõe um estudo de um modelo ideal para escolher estratégias e manobras orbitais de mínimo incremento de velocidade que visem desviar o veículo de um dado detrito espacial, simulando suas trajetórias orbitais utilizando manobras bi-impulsivas com limite de tempo. O estudo aborda manobras orbitais de um veículo e busca encontrar qual o meio que utilizará o mínimo de combustível a uma distância segura do detrito.*

---

**Palavras-chave:** Elementos Keplerianos; Manobras Orbitais; Problema de Lambert; Incremento de Velocidade.

## 1. Introdução

Os detritos espaciais são corpos inoperantes que orbitam ao redor da Terra. Seu acúmulo se deve aos restos e/ou fragmentos de lançadores bem como satélites inoperantes [Johnson and McKnight 1991]. A ameaça desses detritos comprometem o meio ambiente espacial, prejudicando futuras missões, e até mesmo toda região ao redor da Terra (efeito Kessler).

Por ser um corpo inoperante, não é possível controlar sua órbita. Portanto, quando há risco de colisão com um veículo operante, deve-se realizar manobras para evitá-la. Uma maneira de realizar essa manobra é por meio da utilização de manobras bi-impulsivas que podem ser obtidas pela solução do problema de Lambert [Bond and Allman 1996]. O problema de Lambert consiste na determinação da órbita kepleriana da trajetória de um objeto a partir de dois vetores de posição em um determinado momento.

Ao realizar a manobra, alguns (ou todos os) dados da órbita inicial do veículo espacial são modificados; porém, não é qualquer mudança nos elementos keplerianos que terá resultado ótimo, ou seja, apresentará uma distância segura entre o veículo espacial e o detrito para executar a manobra utilizando o mínimo de combustível (incremento de velocidade  $\Delta v$ ).

Para atender o afastamento mínimo do ponto de impacto entre o veículo espacial e um detrito, propomos encontrar uma órbita arbitrária e determinar o incremento de velocidade  $\Delta v$  para atingir essa órbita.



## 2. Metodologia

O problema de Lambert tem aplicações importantes no estudo de encontro de veículos, orientação e determinação de órbita. Para estudar esse problema, foram desenvolvidas e aplicadas rotinas computacionais para gerar e analisar resultados de manobras ótimas variando alguns elementos keplerianos um por vez (excentricidade, inclinação, nodo ascendente e argumento do perigeu), e assim verificar qual manobra orbital possui menor incremento de velocidade  $\Delta v$  a uma distância segura entre o detrito e o veículo espacial.

O algoritmo para solucionar o problema de manobrar um veículo espacial utilizando manobras bi-impulsivas pode ser dividido em duas etapas:

- Solucionar a equação de Kepler ( $M = n(t - T) = u - e \sin u$ ),
- Solucionar o problema de Lambert.

Segundo [Bond and Allman 1996], o procedimento para a solução da equação de Kepler (dado o semi eixo maior  $a$ , a excentricidade  $e$ , o tempo de passagem pelo perigeu  $t_\pi$ , um primeiro valor para  $u_1$  (sendo  $u$  a anomalia excêntrica), e o tempo atual  $t$ ), pode ser realizado da seguinte forma:

**Calcular  $F(u_1)$  e a derivada de  $F$  com relação a  $u$ , usando o atual valor de  $u_1$**

$$\left(\frac{dF}{du}\right)_1 = 1 - e \cos u_1$$

$$F(u_1) = u_1 - e \sin u_1 - n(t - t_\pi)$$

sendo  $n$  o movimento médio (velocidade angular).

**Calcular o valor de  $u$**

$$u = u_1 - \frac{F(u_1)}{\left(\frac{dF}{du}\right)_1} \quad (1)$$

Se  $|u - u_1|$  é maior que uma tolerância de erro desejada, então defina  $u_1 = u$  e volte para o primeiro passo. Se  $u$  está dentro da tolerância de erro desejada, então determinamos  $u$ ; quando o valor da anomalia média ( $M$ ) é conhecido, o mesmo será o valor de  $u_1$  (primeiro valor para anomalia excêntrica) no algoritmo.

O algoritmo para o problema de Lambert, conhecendo a posição inicial  $\vec{r}_1$  e final  $\vec{r}_2$ , e a variação do tempo  $\Delta t$ , pode ser realizado da seguinte forma [Bond and Allman 1996],

**Calcular a norma dos vetores posição  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ,**

$$r_1 = \|\vec{r}_1\|, r_2 = \|\vec{r}_2\|,$$

**o ângulo  $\Delta\phi$ , que indica a direção do movimento entre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ ,**

$$\Delta\phi = \begin{cases} \cos^{-1} \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}, \text{ ou} \\ 2\pi - \cos^{-1} \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} \end{cases} \quad (2)$$

**e a constante  $A$  [Rocco 2014],**

$$A = \text{sign}(\pi - \Delta\phi) \sqrt{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2| (1 + \cos \Delta\phi)} \quad (3)$$



de modo que  $\text{sign}(\pi - \Delta\phi) = -1$  para  $\Delta\phi > \pi$  e  $\text{sign}(\pi - \Delta\phi) = 1$  para quando  $\Delta\phi < \pi$ .

**Ajustar os valores da variável universal  $z$  ( $z = \Delta u^2$ ) no intervalo [Rocco 2014]**

$$\{z \in R : 0 \leq z \leq (2\pi)^2\}. \quad (4)$$

**Calcular  $S(z)$  e  $C(z)$ , formulações universais para o tempo de voo [Bate et al. 1971], definidas por**

$$S(z) = \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z}^3)}, \quad (5)$$

e

$$C(z) = \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z}, \quad (6)$$

para  $z > 0$ .

**Calcular  $y$  e  $x$**

$$y = \frac{r_1 r_2 (1 - \cos \phi)}{p}, \quad (7)$$

$$y(z) = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| - A \frac{(1 - zS(z))}{\sqrt{C(z)}}, \quad (8)$$

$$x(z) = \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}}. \quad (9)$$

**Calcular o valor teste de  $\Delta t$**

$$\tilde{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} [x^3 S + A\sqrt{y}]. \quad (10)$$

**Se  $|\Delta t - \tilde{\Delta t}|$  maior que a tolerância estabelecida, voltar a ajustar os valores de  $z$ ; caso esteja dentro da tolerância, calcular, através das seguintes equações de variáveis universais,**

$$f = 1 - \frac{y}{r_1}, \quad (11)$$

$$g = A - \sqrt{\frac{y}{\mu}}, \quad (12)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{y}{r_2}, \quad (13)$$

a velocidade inicial e final do objeto:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{\dot{\vec{r}}_2 - f(z)\vec{r}_1}{g(z)},$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{\dot{g}(z)\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{g(z)}.$$



### 3. Resultados e Discussão

Adotando uma órbita original inicial para um veículo espacial, supõe-se que ocorrerá uma colisão com um detrito. A posição da órbita onde ocorrerá o impacto e o instante de tempo quando isso ocorrerá são conhecidos; o ponto inicial do veículo é  $10^\circ$  e a variação de tempo  $\Delta t$  é de 2.914 segundos para alcançar o ponto de impacto em  $189,999^\circ$ .

Os elementos keplerianos da órbita original do veículo são:

- Semi-eixo maior  $a = 7.000.000$  metros;
- Excentricidade  $e = 0,00001$ ;
- Inclinação  $i = 45^\circ$  graus;
- Nodo ascendente  $\Omega = 45^\circ$  graus;
- Argumento do Perigeu  $\omega = 45^\circ$  graus;
- Anomalia Média  $M = 10^\circ$  graus.

e ele colidirá com um detrito a aproximadamente  $180^\circ$ , ou seja, quando sua posição estiver em:

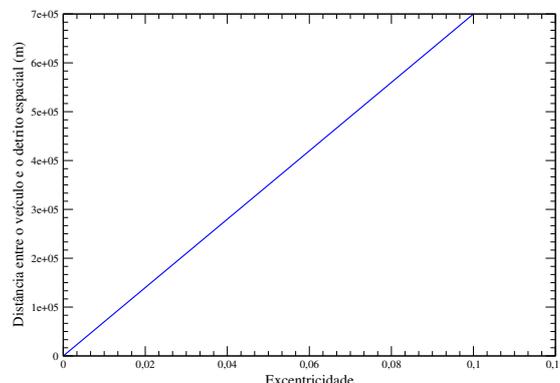
- Semi-eixo maior  $a = 7.000.000$  metros;
- Excentricidade  $e = 0,00001$ ;
- Inclinação  $i = 45^\circ$  graus;
- Nodo ascendente  $\Omega = 45^\circ$  graus;
- Argumento do Perigeu  $\omega = 45^\circ$  graus;
- Anomalia Média  $M = 189,999^\circ$  graus.

Para encontrar a manobra ótima (distância segura entre o veículo e o detrito gastando o mínimo de combustível), o incremento de velocidade pode ser obtido por meio das velocidades de transferência inicial  $\vec{r}_1$  e final  $\vec{r}_2$ . Ou seja,

$$\Delta v_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{inicial},$$

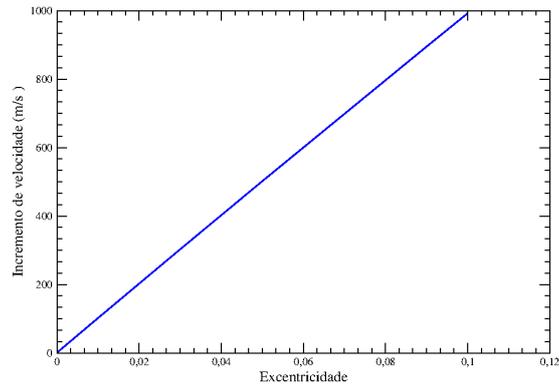
$$\Delta v_2 = \vec{r}_{final} - \vec{r}_2.$$

Para variação da excentricidade orbital do veículo, pode-se observar que, conforme aumentamos  $e$ , a distância entre o veículo e o detrito espacial é diretamente proporcional ao incremento de velocidade  $\Delta v$ .



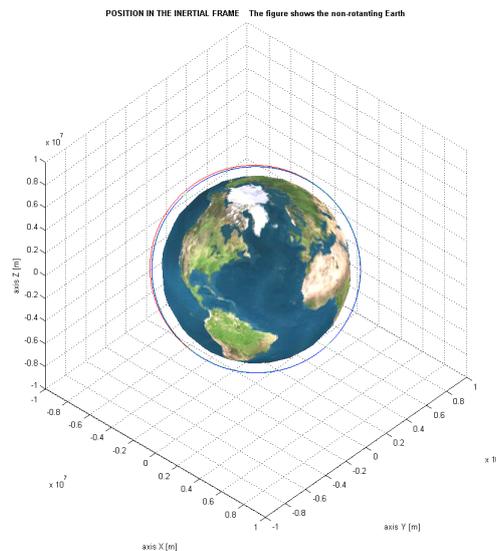
**Figura 1. Modificação da excentricidade orbital do veículo espacial  $\times$  Distância entre o veículo e o detrito espacial (m).**

Os valores de  $\Delta v$  para modificação da excentricidade orbital são pequenos se comparados aos outros calculados nesse estudo, porém a distância entre o veículo espacial e o detrito também é menor.



**Figura 2. Modificação da excentricidade orbital do veículo espacial × Incremento de velocidade ( $m/s$ ).**

As figuras 3 e 4 comparam os resultados da melhor e da pior manobra para modificação de excentricidade orbital. A linha azul mostra a órbita inicial do veículo, a linha vermelha a manobra realizada pelo veículo e a linha verde a órbita final do veículo. Pode-se observar que quando a manobra ocorre em  $e = 0.1$ , o gasto para a realizá-la é maior do que para  $e = 0.003$ .



**Figura 3. Manobra ótima do veículo espacial ( $e = 0.003$ ).**

Para o caso de variação na inclinação orbital, pode-se observar que entre  $40^\circ$  e  $46^\circ$  a distância entre o veículo espacial e o detrito diminui, e a partir de  $46^\circ$  a distância entre eles começa a aumentar. Conforme mostrado na figura 6, o incremento de velocidade  $\Delta v$  começa a cair a partir de  $i = 73^\circ$ , porém os valores de  $\Delta v$  são muito altos, não sendo considerado como uma manobra ótima nesse estudo (comparando-o com os resultados de outros elementos keplerianos).

A figura 7 esboça  $\Delta v$  para  $i = 100$ ; pode-se visualizar que é uma manobra cara. Para realizar uma manobra ótima modificando a inclinação orbital de um veículo, é preciso mudar seu plano orbital, ou seja, encontrar o ponto ótimo para que a manobra seja realizada e, assim, encontrar o  $\Delta v$  mínimo.

No caso de variação do nodo ascendente, percebe-se que para  $\Omega < 45^\circ$ , o incremento de velocidade é menor; porém, quando aumentamos o nodo ascendente para  $47^\circ$ , o incremento de velocidade  $\Delta v$  teve um aumento de  $7,704 \times 10^4$  km/h e seguiu mantendo altos valores de  $\Delta v$

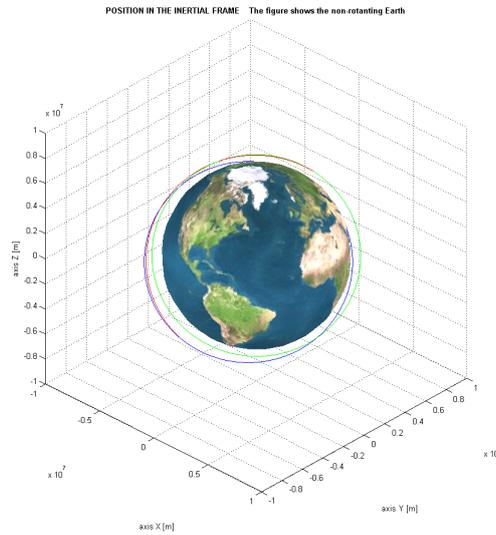


Figura 4. Pior manobra realizada pelo veículo ( $e = 0.1$ ).

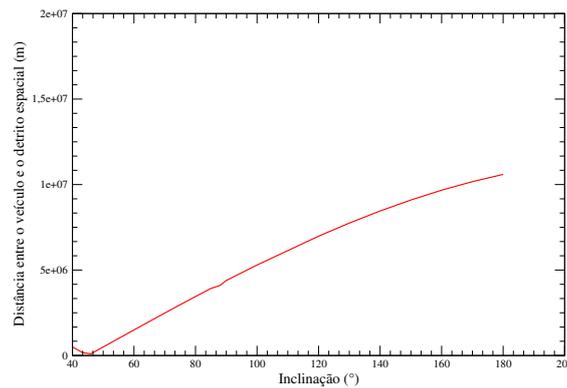


Figura 5. Modificação da variação de inclinação ( $^{\circ}$ ) da órbita do veículo espacial  $\times$  Distância entre o veículo e o detrito espacial ( $m$ ).

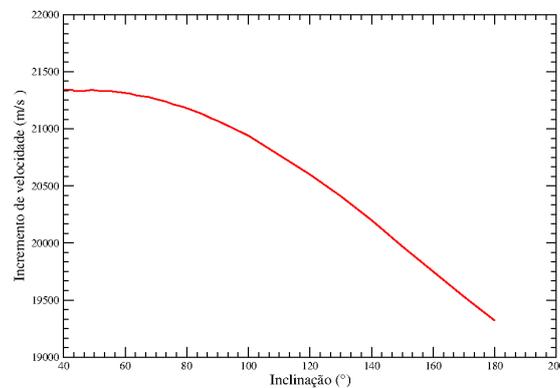


Figura 6. Modificação da variação de inclinação ( $^{\circ}$ ) da órbita do veículo espacial  $\times$  Incremento de velocidade ( $m/s$ ).

(se comparado a outros valores encontrados nesse estudo).

A figura 10 exibe a manobra do veículo espacial no ponto ótimo ao variar o nodo ascendente, que ocorre com  $\Omega = 44^{\circ}$ . Mesmo sendo um ponto mínimo, o veículo realiza uma manobra orbital de alto custo. O nodo ascendente necessita de mudança de plano orbital, para que assim

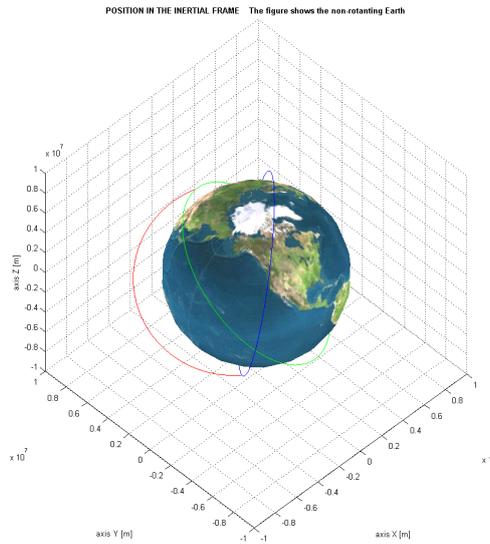


Figura 7. Incremento de velocidade para  $i = 100^\circ$

tenha um ponto ótimo para ocorrer a transferência de órbita e, posteriormente, encontrar  $\Delta v$  mínimo.

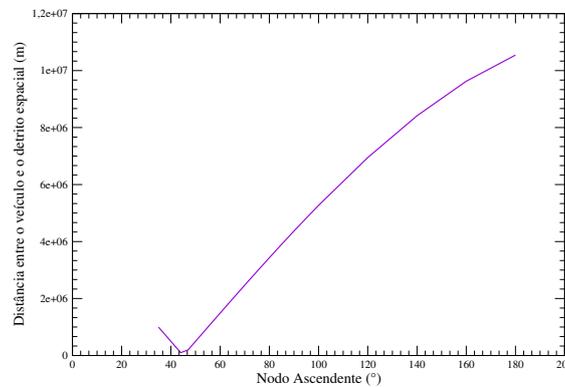


Figura 8. Modificação da variação do nodo ascendente orbital ( $^\circ$ )  $\times$  Distância entre o veículo e o detrito espacial ( $m$ ).

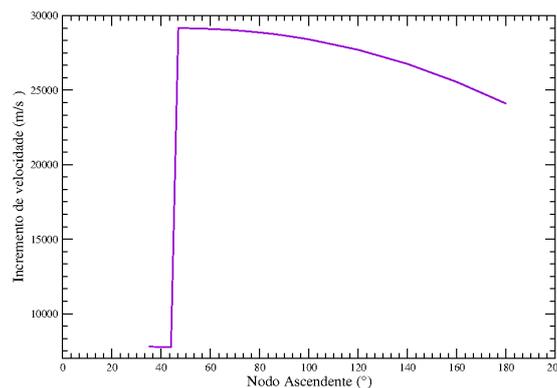
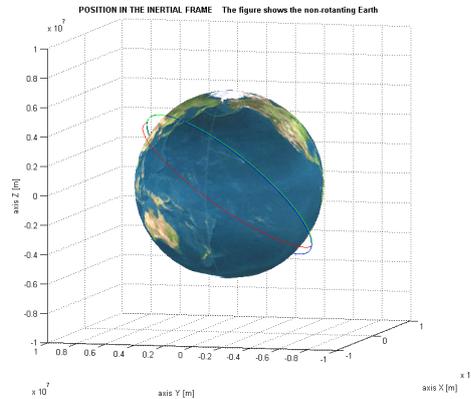
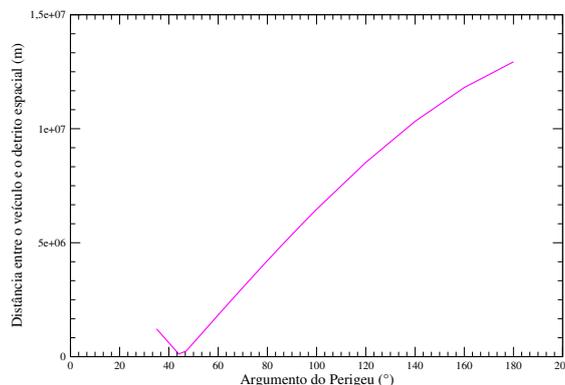


Figura 9. Modificação da variação do nodo ascendente ( $^\circ$ )  $\times$  Incremento de velocidade ( $m/s$ ).



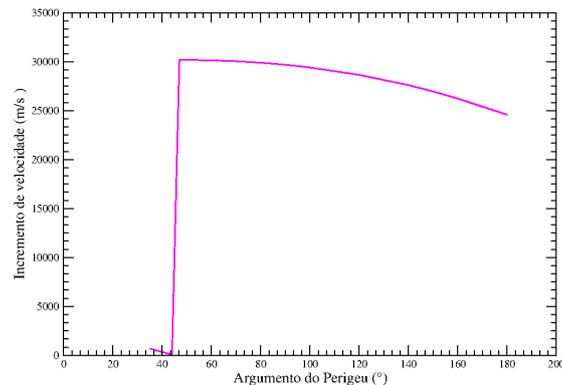
**Figura 10. Incremento de velocidade para  $\Omega = 44^\circ$ , manobra ótima para o caso estudado.**

Ao analisar os dados apresentados na figura 12, pode-se observar que o  $\Delta v$  do argumento do perigeu e o  $\Delta v$  do nodo ascendente (figura 9) possuem comportamento similar. Para  $\omega < 45^\circ$ , os valores do incremento de velocidade  $\Delta v$  é menor, com valor ótimo de  $\Delta v$  ocorrendo em  $\omega = 44^\circ$ , a uma distância de aproximadamente 122, 172 km do detrito e  $\Delta v = 234, 68\text{km/h}$ .

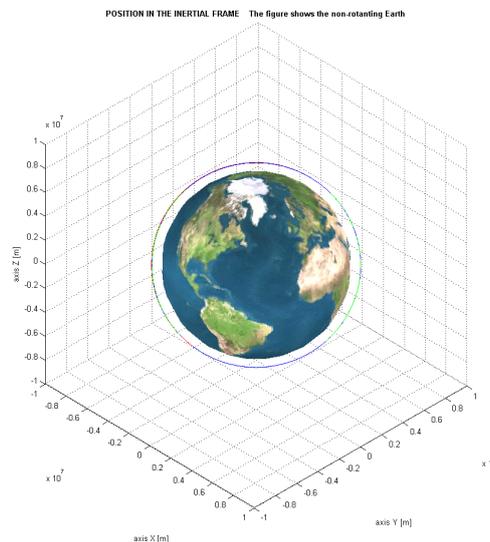


**Figura 11. Modificação da variação do argumento do perigeu ( $^\circ$ )  $\times$  Distância entre o veículo e o detrito espacial (m).**

Mesmo com o gráfico de  $\Delta v$  (figura 12) similar com o nodo ascendente (figura 9), o argumento do perigeu não realiza mudança de plano orbital. A figura 13 exhibe a manobra ótima; ela ocorre em  $\omega = 44^\circ$ .



**Figura 12. Modificação da variação do argumento do perigeu ( $^{\circ}$ )  $\times$  Incremento de velocidade ( $m/s$ ).**



**Figura 13. Incremento de velocidade para  $\omega = 44^{\circ}$ , manobra ótima para o caso estudado.**

#### 4. Conclusão

O número crescente de detritos espaciais ao redor da Terra faz com que veículos espaciais operantes tenham que realizar manobras orbitais para evitar uma possível colisão.

O estudo abordou possíveis manobras de um veículo espacial em uma órbita arbitrária, utilizando o mínimo de combustível para desviá-lo de um impacto com um detrito espacial. Pode-se observar nas figuras apresentadas os melhores pontos para manobras orbitais ótimas a partir das variações de cada elemento kepleriano inicial, um por vez.

Fica claro que para realizar manobras com mudança de plano orbital, como no caso das manobras de inclinação  $i$ , com valores de  $\Delta v$  altos, e de nodo ascendente  $\Omega$ , faz-se necessário utilizar uma grande quantidade de combustível. Apesar do valor de incremento de velocidade para  $\Omega = 44^{\circ}$  parecer uma manobra ótima, a figura 10 nos mostra que isso não ocorre. Os valores de  $\Delta v$  para o caso da inclinação  $i$  e nodo ascendente  $\Omega$  orbital são elevados se comparados aos valores obtidos para manobras realizadas com a mudança de excentricidade  $e$  e argumento do perigeu  $\omega$  orbital.

Ao analisar a mudança de excentricidade  $e$  orbital, é possível verificar que quanto maior o valor



da excentricidade maior será a distância entre o veículo e o detrito, bem como o incremento de velocidade  $\Delta v$ . Desta forma, a manobra ótima é aquela em que o veículo está a uma distância segura do detrito e possui o menor  $\Delta v$ , que neste caso significa  $e = 0.003$ .

Ao modificar o ângulo do argumento do perigeu orbital  $\omega$ , os melhores resultados para realizar as manobras ocorreram para  $\omega < 45^\circ$ ; neste estudo, a manobra ótima ocorre em  $44^\circ$ , pois a distância entre o veículo e o detrito é segura e o incremento de velocidade  $\Delta v$  foi o menor em uma análise com ângulos entre  $35^\circ$  e  $180^\circ$ ; o pior resultado ocorreu em  $\omega = 47^\circ$ , ou seja, o maior  $\Delta v$ .

**Agradecimentos:** *Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio a pesquisa.*

## Referências

- Bate, R., Mueller, D., and White, J. (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, New York, New York.
- Bond, V. and Allman, M. (1996). *Modern Astrodynamics*. Princeton University, Princeton, New Jersey.
- Johnson, N. and McKnight, D. (1991). *Artificial Space Debris*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.
- Rocco, E. (2014). Simulation of the effects due to the gravitational disturbances generated by the sun, phobos and deimos in orbital maneuvers around mars. In *XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Fortaleza, Ceará, Brasil.