

Implementação e validação do método de fechamento de turbulência PANS: "Partially Averaged Navier-Stokes"

GIMÉNEZ DE CASTRO, S.¹

¹ Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Aluno de Mestrado do curso de Engenharia e Tecnologia Espaciais - ETE,
área de concentração em Combustão e Propulsão - PCP.

santiago.gdc@gmail.com

Resumo. *O presente trabalho apresenta um projeto de mestrado que consiste na implementação em OpenFOAM e subsequente validação do modelo de turbulência Partially Averaged Navier-Stokes (PANS) em escoamentos em regime incompressível. Por ser um modelo de resolução variável, o modelo PANS permite ajustar a precisão e o custo das simulações de turbulência de acordo com as necessidades e as limitações dos recursos computacionais disponíveis. A turbulência sub-filtro é modelada por relações de fechamento que devem ser válidas independente da escala de corte do filtro, e sua generalidade para qualquer escala de corte deve ser comprovada. Este aspecto o torna de grande interesse, uma vez que simulações por "Large Eddy Simulations" (LES) resultam custosas demais e simulações por "Reynolds Averaged Navier-Stokes" (RANS) frequentemente padecem de precisão satisfatória. Por este motivo, relativa atenção tem sido dada à validação e ao refinamento do modelo PANS e diversos outros modelos de resolução variável, e já há extensa literatura sobre o assunto. Em contraste com estes trabalhos, propomos realizar a validação do modelo em casos cuja geometria reproduza a de combustores de que dispomos dados experimentais para comparação, de forma a estudar o escoamento inerte e adaptar o modelo para uma posterior extensão a um trabalho de simulação de combustão turbulenta.*

Palavras-chave: Turbulência; CFD; PANS;

1. Introdução

A ideia de um modelo de turbulência ajustável que possibilite o controle sobre a razão entre os intervalos de escalas turbulentas resolvidas e modeladas é quase tão antigo quanto a mecânica de fluidos computacional. Entretanto, foi [Speziale 1996] primeiro deu forma a este conceito. Em seu trabalho, Speziale propõe um modelo em que o fechamento das equações das escalas resolvidas é feito por meio de "Reynolds Averaged Navier Stokes" (RANS) ou "Large Eddy Simulations" (LES), dependendo de se a escala de corte escolhida pelo usuário está acima ou abaixo do ramo dissipativo do espectro de energia respectivamente. Com este trabalho foram estabelecidas as diretrizes do que viria a ser um novo tipo de modelos de turbulência, chamados de modelos híbridos: o número de escalas resolvidas deve estar controlado por um parâmetro pré-determinado; e a precisão da simulação deve aumentar juntamente com a liberação de mais escalas pelo parâmetro e o custo da mesma deve diminuir na medida em que mais escalas são modeladas. O desenvolvimento de muitos modelos deste tipo foi desencadeado por causa do potencial deste

paradigma para a indústria. Nesta área, os fenômenos mais relevantes estão relacionados às maiores escalas turbulentas, invisíveis para modelos RANS, mas custosas demais de se obter por meio de modelos LES, que precisam resolver todas as escalas inerciais. Nesta categoria estão os modelos "Detached Eddy Simulations" (DES) [Hedges et al. 2002], "Very-Large Eddy Simulations" (VLES) [Speziale 1996], "Hybrid RANS/LES", "Limited Numerical Scales" (LNS) [Batten et al. 2002], "Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes" (URANS) [Khorrami et al. 2002].

O modelo PANS foi introduzido por [Girimaji 2006] como uma modificação de URANS. Este último é um dos mais simples modelos híbridos, e sua metodologia consiste em realizar uma simulação RANS incluindo o termo não-estacionário e com um passo numérico temporalmente preciso, mantendo as equações de fechamento inalteradas. A expectativa é captar oscilações lentas do "valor médio" das grandezas do escoamento. Sob a perspectiva da metodologia de filtragem da turbulência [Germano 1992], a escala de corte não é bem estabelecida no URANS. A premissa do URANS equivale a uma simulação que filtra e modela todas menos as maiores escalas da turbulência por meio de uma viscosidade aumentada; entretanto, como o fechamento de RANS está preparado para fornecer uma viscosidade turbulenta que representa o efeito de todas as escalas de movimento sobre a média, o resultado é que normalmente esta viscosidade será muito alta, e as grandezas acabam se comportando de maneira quase estacionária.

Para resolver este problema, o modelo PANS propõe uma maneira de reduzir a viscosidade turbulenta conforme menos escalas turbulentas forem por ela representadas. Em RANS, esta é geralmente dada por uma relação constitutiva proporcional a um comprimento de mistura, que, por sua vez, é estimado a partir de certas variáveis para as quais se deduzem equações de transporte, como a energia cinética turbulenta k e a dissipação turbulenta ϵ . Usando um formalismo para filtros arbitrários, é escolhido um modelo RANS como base (como $k - \epsilon$, $k - \omega$ - o modelo PANS herda o nome de seu modelo RANS) e as equações de transporte destas variáveis são alteradas de forma tal que sejam representativas apenas das escalas filtradas e por conseguinte forneçam uma viscosidade turbulenta reduzida. Ao invés de ter um parâmetro explícito e diretamente dependente da resolução da malha, como é o caso do comprimento de corte λ_c em LES, a resolução do modelo PANS (baseado em RANS de duas equações) é controlada pela razão $f_k = k_u/k$ da energia cinética k_u das escalas não-resolvidas (modeladas) pela energia cinética turbulenta total k que seria obtida pelo modelo base. A manipulação resulta em modificações apenas nas constantes das equações, preservando sua forma para qualquer f_k . Esta propriedade, chamada de "averaging invariance" [Germano 1992], torna extremamente prático configurar a resolução da simulação, e abre a possibilidade de se implementarem algoritmos que variam f_k ao longo do tempo ou do domínio da simulação.

[Lakshmipathy 2009] implementou PANS $k - \omega$ com o intuito de melhorar os resultados próximos a paredes. O desempenho relativo deste novo modelo e o já implementado por Girimaji, PANS $k - \epsilon$, foi testado em simulações do escoamento em torno de um cilindro e em um degrau invertido. A comparação revelou que efetivamente há uma melhora na previsão do escoamento junto à parede, entretanto desvantagens foram constatadas: erros no tamanho das zonas de recirculação e na localização do ponto de separação. Um estudo sobre as perturbações turbulentas foi efetuado em que se procura determinar se sua natureza é fisicamente correta. Para este propósito, compararam-se

distribuições de escalas de comprimento, tempo e velocidade no intervalo inercial a correspondentes obtidas por DNS. A maneira autossimilar do decaimento ao longo do espectro demonstrou que as perturbações das simulações por PANS são fisicamente válidas.

Em um de seus trabalhos mais recentes sobre o assunto, [Srinivasan et al. 2014] estendem a aplicação do modelo PANS $k - \epsilon$ ao caso compressível por meio de uma série de simulações que procuram reproduzir o escoamento inerte em uma região de mistura a altas velocidades típico de um scramjet. A investigação encontrou que o modelo foi capaz de capturar estruturas importantes da turbulência neste ambiente.

Finalmente, [Armitage et al. 2006] realizou simulações de combustão turbulenta utilizando URANS. Este é um trabalho típico de dinâmica de combustão, em que o problema é decomposto em uma parte hidrodinâmica e outra acústica. O domínio da simulação hidrodinâmica é restrito à região de ancoramento da chama, e a resposta não linear de oscilações na emissão de calor da chama a perturbações forçadas de pressão é avaliada levantando-se a "*Flame Describing Function*" (FDF). FDF é uma função que descreve um ganho e uma fase gerados pela chama a oscilações de pressão sobre ela incidentes. A segunda parte investiga a ressonância de ondas de pressão na cavidade do combustor por meio de simulações de acústica sobre um escoamento congelado em que a FDF funciona como um amplificador. A necessidade de se repetir o experimento de hidrodinâmica para diversas frequências e amplitudes de perturbação é uma demonstração que a relevância de um modelo transiente de turbulência menos custoso que LES não se restringe à indústria, mas tem também seu valor acadêmico.

O objetivo do presente trabalho compreende a implementação do modelo de turbulência *Partially Averaged Navier-Stokes* (PANS) no software de fluidodinâmica computacional (CFD, em inglês) de código aberto OpenFOAM e a sua validação por meio da simulação de escoamentos turbulentos inertes em regime incompressível. Os casos selecionados para estas simulações consistem do escoamento em combustores que possam ser comparados a dados experimentais e resultados numéricos prévios disponíveis na literatura. O enfoque que será no sentido de fornecer a análise do escoamento inerte. A validação e a comparação dos dados obtidos serão consideradas para demonstrar a capacidade do mesmo em gerar um panorama de turbulência adequado para simulações de combustão turbulenta.

1.1. Formulação Matemática Geral

Aqui fazemos uma breve introdução dos conceitos básicos envolvidos no modelo PANS que podem ser encontrados no artigo original de [Girimaji 2006]. Partindo das equações instantâneas de Navier-Stokes incompressíveis:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}, \quad (2)$$

onde V_i são as componentes da velocidade e $p = p'/\rho$ é a pressão termodinâmica p' dividida pela densidade ρ . Vamos propor um processo de filtragem parcial, similar ao

que é feito em RANS ou LES, em que as grandezas ficam decompostas em termos de uma parcela média e outra filtrada, denotada pelo subscrito u (de *unresolved*): $V_i = \langle V_i \rangle + v_{i,u} = U_i + v_{i,u}$ e $p = \langle p \rangle + p_u = P + p_u$. A forma do filtro não precisa ser especificada, e de fato veremos que a teoria é válida para qualquer filtro, implícito ou explícito, desde que comute com a diferenciação espacial e temporal.

Decompondo as grandezas desta maneira e aplicando a operação de filtragem parcial nas equações (2), obtemos um sistema de equações para a evolução das grandezas médias:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau(V_i, V_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \tau(V_i, V_j)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (4)$$

onde $\tau(V_i, V_j)$ é o segundo momento central generalizado, que é uma grandeza com propriedades muito similares ao já conhecido tensor de Reynolds. É possível extrair deste conjunto de equações, apenas por manipulação algébrica e sem evocar novas suposições, uma equação de transporte para cada um dos elementos do tensor. Estas equações, em conjunto com as equações (10) e (4), formam um sistema que apresenta a propriedade denominada "*averaging invariance*" segundo [Germano 1992]: sua forma independe da forma do filtro. Esta dedução explícita o que há de mais essencial nas equações de Navier-Stokes para a formulação PANS: podemos usar as mesmas equações para resolver as grandezas médias resultantes de qualquer filtragem, desde que sejam escritas em termos dos momentos centrais generalizados. Se as equações (10) e (4) representam a evolução da média de qualquer filtro que seja aplicado às equações, isto serve como motivação para procurar uma forma de modelar $\tau(V_i, V_j)$ que possa ser ajustada de maneira simples segundo o número de escalas que o tensor deve representar (escalas filtradas).

Da mesma forma que na teoria das equações filtradas por média de Reynolds, podemos ver que a influência das escalas turbulentas filtradas $v_{i,u}$ sobre as grandezas médias ocorre inteiramente por meio do tensor $\tau(V_i, V_j)$. A magnitude desta influência varia de acordo ao número de escalas turbulentas que são filtradas. Na medida em que a filtragem é executada em escalas menores, a intensidade turbulenta representada pelo tensor diminui ao passo que mais escalas passam a ser representadas na quantidade resolvida U_i . O contrário é também verdade, e de fato no extremo em que todas as escalas são filtradas U_i passa a ser o valor médio de RANS e $\tau(V_i, V_j)$ se torna o tensor de Reynolds.

Podemos fechar as equações (4) por meio de uma relação constitutiva para o tensor $\tau(V_i, V_j)$. Se considerarmos que a turbulência nas escalas menores que o filtro é relativamente "universal", podemos evocar a hipótese de Boussinesq e considerar que a turbulência sub-filtro contribui para o campo médio como um transporte viscoso:

$$\tau(V_i, V_j) = -2\nu_u S_{ij}, \quad (5)$$

onde ν_u é a viscosidade turbulenta devida as escalas não-resolvidas e S_{ij} é o tensor de cisalhamento médio.

A dinâmica de um modelo de resolução variável pode ficar representada na hipótese de Boussinesq com um modelo em que a magnitude de ν_u seja reduzida à medida em que as escalas filtradas sejam menores. Para modelar o termo ν_u , podemos recorrer a métodos utilizados em outros modelos. Modelos RANS apresentam uma física robusta para representar oscilações de qualquer escala, uma vez que sua premissa é a capacidade de filtrar todas as escalas de um escoamento turbulento. Segundo esta formulação, para caracterizar as escalas turbulentas é necessário pelo menos o conhecimento da energia cinética turbulenta K_u e da dissipação ϵ_u .

1.2. Equações do Modelo PANS $k-\epsilon$

A seguir, passamos a expor um pouco do raciocínio por trás da derivação de um modelo PANS a partir de seu modelo RANS parente, e em seguida as equações do modelo PANS $k-\epsilon$. Um processo semelhante pode ser feito com qualquer modelo RANS que se escolha como base; basta utilizar a respectiva definição de viscosidade turbulenta ν_t . No caso do modelo $k-\epsilon$, esta definição é dada por:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (6)$$

onde k e ϵ são respectivamente a energia e a dissipação turbulenta. Propondo uma expressão semelhante para as escalas não resolvidas por trás de um filtro PANS:

$$\nu_u = C_\mu \frac{k_u^2}{\epsilon_u}, \quad (7)$$

o que permite a seguinte comparação:

$$\frac{\nu_u}{\nu_t} = \left(\frac{k_u}{k} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_u} \right). \quad (8)$$

Como o comprimento de corte do filtro do PANS é colocado em algum valor intermediário e a maior parte da energia se encontra nos maiores vórtices, temos que $k_u/k < 1$ ao passo que, como a maior parte da dissipação ocorre nos menores vórtices, $\epsilon_u/\epsilon > k_u/k$. Podemos concluir então que na medida em que mais escalas são liberadas pelo filtro, a expressão (7) representa uma diminuição na viscosidade turbulenta e assim reduz, como era desejado, a influência das escalas modeladas sobre o escoamento médio, sempre que essas desigualdades sejam respeitadas. De fato, os parâmetros:

$$f_k = \frac{k_u}{k}; \quad f_\epsilon = \frac{\epsilon_u}{\epsilon}$$

são utilizados em PANS $k_u - \epsilon_u$ para o controle da resolução. Variando f_k e f_ϵ podemos colocar o corte do filtro em qualquer ponto do espectro de decaimento.

As equações do modelo PANS são deduzidas a partir das equações do modelo RANS $k-\epsilon$ usando-se nada mais do que o fato das razões k_u/k e ϵ_u/ϵ serem constantes. O resultado é um conjunto de equações que diferem das originais apenas por meio das constantes envolvidas, que são modificadas somente em função de f_k e f_ϵ . A dedução

é extensa, e pode ser encontrada em detalhe no trabalho de [Girimaji 2006]. Uma última hipótese, no entanto, tem de ser feita no decorrer da formulação, que diz respeito ao transporte de energia das escalas filtradas às escalas resolvidas, contrário ao sentido do espectro de decaimento: transporte nulo (ZT, "Zero-Transport"), quando se considerar que não há este transporte, e máximo transporte (MT, "Maximum-Transport"). Estas possibilidades abrem maneiras diferentes de se definir as constantes envolvidas. As equações finais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_u}{\partial x_j} &= P_u - \epsilon_u + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_u}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right); \\ \frac{\partial \epsilon_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon_u}{\partial x_j} &= C_{e1} \frac{P_u \epsilon_u}{k_u} - C_{e2}^* \frac{\epsilon_u^2}{k_u} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_u}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon_u}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

onde as constantes são:

$$\begin{aligned} C_{e2}^* &= C_{e1} + \frac{f_k}{f_\epsilon} (C_{e2} - C_{e1}); \\ \sigma_{\epsilon u} &= \sigma_\epsilon \frac{f_k^2}{f_\epsilon} \quad \sigma_{ku} = \sigma_k \frac{f_k^2}{f_\epsilon}, \text{ para ZT}; \\ \sigma_{\epsilon u} &= \sigma_\epsilon \quad \sigma_{ku} = \sigma_k, \text{ para MT.} \end{aligned} \quad (10)$$

2. Metodologia

O caso em estudo é o queimador com um obstáculo triangular do experimento de [Sanquer 1998]. O arranjo consiste de um duto de seção retangular de 160mm de largura por 28,8mm de altura no qual combustível pré-misturado é injetado por uma das extremidades. A 160mm da entrada é colocada a base de um triângulo equilátero de lado $d=9,5$ mm, configurando o obstáculo atrás do qual a chama fica ancorada no caso reativo.

Pretende-se neste trabalho simular o escoamento inerte através deste arranjo e comprovar a superioridade dos resultados com relação a resultados URANS de [Dourado 2003] quando comparados aos dados experimentais do próprio [Sanquer 1998]. As simulações em malhas tridimensionais serão feitas no cluster SGI Altix XE 1300 disponível no CTA. Neste trabalho, apenas a metodologia PANS $k - \epsilon$ com f_k fixo será usada.

Somente simulações em malha bidimensional (que correspondem a uma seção transversal da geometria total) foram realizadas com êxito até o momento, e seu propósito é explorar de maneira econômica as variáveis envolvidas no problema, como condições de contorno, perfis de entrada, refinamento em setores da malha e métodos numéricos utilizados. As malhas são desenvolvidas no gerador GMSH [Geuzaine and Remacle 2009]. Todos os elementos são quadriláteros, e estão distribuídos em setores nos quais o algoritmo transfinito é utilizado para gerar uma malha estruturada. Planeja-se explorar a possibilidade de se utilizar malhas não estruturadas com elementos triangulares mais adiante, mas por enquanto as únicas malhas em que as simulações foram bem sucedidas são estruturadas. O processo de otimização da malha é iterativo e consiste em realizar simulações, identificar problemas para logo resolvê-los alterando na malha o que for necessário.

Tabela 1. Comprimentos da bolha de recirculação

Caso	Δx_L [m]	$\Delta x_L/d$
$f_k = 0.5$	0,011155	1,174
$f_k = 0.6$	0,011045	1,162
$f_k = 0.7$	0,00987	1,038
$f_k = 0.8$	0,0099	1,042
Experimental	0,02014	2,12

3. Resultados e Discussão

Até o momento, uma única bateria de quatro simulações bidimensionais pôde ser realizada, com os valores $f_k = 0,5$, $0,6$, $0,7$ e $0,8$. A malha utilizada possui 50.360 elementos. As simulações foram realizadas simultaneamente em um notebook Dell com um processador Intel Core i7-6500 de 2.5GHz com quatro núcleos e 8gb de memória RAM. O tempo de processamento foi de aproximadamente 25 horas para resolver 2 segundos de escoamento através do queimador.

Dada a resolução baixa da malha, funções de parede são utilizadas como condição de contorno nas paredes do domínio para k e ϵ ; na saída, a condição usada é a de gradiente nulo. As condições de contorno para a velocidade U foram configuradas como valor fixo igual a zero nas paredes, e na saída é imposta a condição de gradiente zero.

As condições de entrada para a velocidade U , energia cinética turbulenta k e dissipação ϵ são obtidas com a ferramenta boundaryFoam do OpenFoam, que produz o perfil de velocidade dentro de um duto turbulento dada uma velocidade média e uma intensidade turbulenta fornecidas como parâmetros, no caso 3,1m/s e 5% respectivamente. Entretanto, [Dourado 2003] usa em simulações um perfil de entrada obtido por meio de interpolação dos dados experimentais de [Sanquer 1998], em que a velocidade máxima, e não a média, é de 3,1m/s.

É tomada a média da velocidade ao longo de 2 segundos de cada uma das simulações para se estudar o tamanho da bolha de recirculação que se forma atrás do obstáculo. Ao longo do eixo do canal, a velocidade longitudinal média é negativa dentro da bolha de recirculação. O final de seu comprimento é indicado pela posição Δx_L em que a velocidade é nula, e divide as regiões dentro da bolha, onde é negativa, e fora, onde volta a ser positiva. Na tabela 1 estão comparados os resultados das simulações PANS com os dados experimentais de [Sanquer 1998].

O desvio nestes resultados apontam que a configuração destas simulações ainda está longe de satisfatória. O uso de uma condição de entrada muito diferente é provavelmente a principal causa, mas aspectos como falta de refinamento da malha e condições de contorno no obstáculo também podem estar influenciando na frequência de emissão e nas grandezas dos vórtices desprendidos que formam a bolha de recirculação.

4. Conclusão

Os valores obtidos nas simulações bidimensionais para o tamanho da bolha de recirculação foram muito abaixo do esperado. Este desvio pode estar relacionado principalmente à condição de entrada utilizada nas simulações, que consiste no perfil de velocidade de um duto turbulento com velocidade média de 3,1m/s, difere consideravelmente

dos perfis usados por [Sanquer 1998] e [Dourado 2003], em que a velocidade máxima, no centro do perfil é de 3,1m/s. A configuração das condições de contorno e o refinamento da malha no entorno do obstáculo, região que controla o desprendimento de vórtices a partir do obstáculo, podem ser a causa das imperfeições. O trabalho que segue imediatamente é a exploração dessas hipóteses e subsequente correção nos defeitos encontrados.

Agradecimentos: À CAPES pelo financiamento desta pesquisa.

Referências

- Armitage, C., Balachandran, R., Mastorakos, E., and Cant, R. (2006). Investigation of the nonlinear response of turbulent premixed flames to imposed inlet velocity oscillations. *Combustion and Flame*, 146(3):419–436.
- Batten, P., Goldberg, U., and Chakravarthy, S. (2002). Lns-an approach towards embedded les. In AIAA, editor, *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada. AIAA 2002-0427.
- Dourado, W. (2003). *Desenvolvimento de um Método Numérico em Malhas Não-estruturadas Híbridas para escoamentos turbulentos em baixo número de Mach: Aplicação em chamas propagando-se livremente e esteiras inertes e reativas*. Tese (doutorado em engenharia espacial), Instituto de Tecnologia Aeronáutica, College Station.
- Germano, M. (1992). Turbulence: the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, 238:325–336.
- Geuzaine, C. and Remacle, J. F. R. (2009). Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331.
- Girimaji, S. S. (2006). Partially averaged navier-stokes model for turbulence: A reynolds averaged navier-stokes to direct numerical simulation bridging method. *Journal of Applied Mechanics*, 73:413–421.
- Hedges, L. S., Travin, A. K., and Spalart, P. S. (2002). Detached eddy simulations over a simplified landing gear. *ASME J. Fluids Eng.*, 124:413–423.
- Khorrami, M. R., Singer, B., and Berkman, M. E. (2002). Time accurate simulations and acoustic analysis of slat free shear layer. *AIAA J.*, 40(7):1284–1291.
- Lakshmipathy, S. (2009). *Partially Averaged Navier-Stokes method for turbulence closures: characterizations of fluctuations and extension to wall bounded flows*. Tese (doutorado em engenharia espacial), Texas A.M. University, College Station.
- Sanquer, S. (1998). *Étude Expérimentale du Sillage d'un Obstacle, en Présence de Combustion, dans un Écoulement de Canal Turbulent Pleinement Développé: Échelles de la Turbulence et Analyse Critique des Modèles de Transport et de Combustion*. Tese (doutorado em engenharia), École Nationale Supérieure de Mécanique et Aérotechnique (ENSMA), Poitiers, França.
- Speziale, C. (1996). Computing non-equilibrium with time dependent rans and vles. In *15th ICNMF*.
- Srinivasan, R., Girimaji, S. S., and Jong, E. (2014). Partially averaged navier-stokes simulations of high speed mixing environment. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 136.