



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.16.17.32-TDI

ESTRATÉGIAS ÓTIMAS PARA MANOBRAS ORBITAIS UTILIZANDO PROPULSÃO CONTÍNUA

Thais Carneiro Oliveira

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 28 de fevereiro de 2012.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3B7GASP>>

INPE
São José dos Campos
2012

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Deicy Farabello - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.16.17.32-TDI

ESTRATÉGIAS ÓTIMAS PARA MANOBRAS ORBITAIS UTILIZANDO PROPULSÃO CONTÍNUA

Thais Carneiro Oliveira

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco, e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 28 de fevereiro de 2012.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3B7GASP>>

INPE
São José dos Campos
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Oliveira, Thais Carneiro.
Ol5e Estratégias ótimas para manobras orbitais utilizando propul-
são contínua / Thais Carneiro Oliveira. – São José dos Campos :
INPE, 2012.

xxiv + 125 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.16.17.32-TDI)

Dissertação (Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacio-
nal de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2012.

Orientadores : Drs. Evandro Marconi Rocco, e Antonio Fer-
nando Bertachini de Almeida Prado.

1. otimização. 2. mecânica orbital. 3. monobras orbitais ótimas.
4. secas severas. I.Título.

CDU 629.783

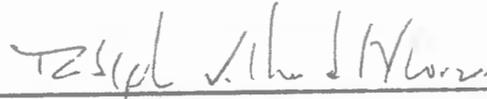
Copyright © 2012 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, arma-
zenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio,
eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão es-
crita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser
entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2012 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a
retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying,
recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception
of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer
system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Mestre em

Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Presidente / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de
Almeida Prado



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Evandro Marconi Rocco



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dra. Vivian Martins Gomes



Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Francisco das Chagas Carvalho



Convidado(a) / UNIFESP / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

Aluno (a): Thais Carneiro Oliveira

São José dos Campos, 28 de fevereiro de 2012

“É difícil dizer o que é impossível, o sonho de ontem é a esperança de hoje e a realidade de amanhã”.

Dr. Robert Hutchings Goddard

A meus pais que sempre me apoiaram em todas as minhas escolhas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meus pais: a minha mãe, Elizabeth, pelo terno carinho, a meu pai, Fernando, que sempre me incentivou à busca de conhecimento e sabedoria, a minhas avós, Margarida e Sônia, que foram essenciais no suporte afetivo e ao Rodrigo pelo suporte sempre que precisei.

Um sincero agradecimento a todos os mestres, professores, amigos e demais familiares, pelos seus ensinamentos que consolidaram minhas experiências acadêmicas e pessoais. As minhas queridas amigas, Flávia, Lorena e Isabela, pelos constantes apoio e incentivo.

Aos professores e orientadores Drs. Evandro Marconi Rocco e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, que dedicaram tempo, esforço e interesse em meus estudos. Ao professor Dr. José Leonardo Ferreira pela orientação e incentivo na continuidade de minha carreira acadêmica após a graduação.

Não poderia deixar de lado todos os demais professores e amigos que tive o privilégio de conviver e de aprender com eles durante todo o mestrado.

RESUMO

Na maioria das missões de veículos espaciais ou satélites é necessária a realização de manobras orbitais. As manobras podem ter várias finalidades, como a transferência de um veículo espacial para a órbita final planejada para a missão, ou realização de um encontro ou interceptação de um outro veículo, ou ajuste na órbita devido aos deslocamentos sofridos em função de perturbações externas atuantes no veículo espacial. É essencial minimizar o consumo de combustível, pois assim um maior número de manobras pode ser realizado e, dessa forma, pode-se prolongar a vida útil do satélite. Há diversos trabalhos de minimização de combustível aplicados a manobras ótimas em veículos espaciais. Nesse contexto, essa dissertação tem o objetivo de encontrar trajetórias ótimas para veículos que utilizam um sistema de propulsão não impulsiva. As contribuições pretendidas são: 1) desenvolvimento de um software capaz de efetuar o cálculo das manobras ótimas com propulsores de empuxo contínuo em um ambiente de computação atual, que possa ser expandido para considerar diversos tipos de missões; 2) implementar a possibilidade da consideração de vínculos reais no cálculo das manobras ótimas, tais como limitação de direção de aplicação do empuxo e/ou regiões orbitais aonde não sejam permitidas o uso de propulsão; 3) simulação de situações reais para validação dos algoritmos implementados.

OPTIMAL STRATEGIES FOR ORBITAL MANEUVERS THROUGH CONTINUOUS THRUST

ABSTRACT

It is necessary to perform orbital maneuvers in most of the missions involving space vehicles. The maneuvers may have several purposes, such as the transfer of a spacecraft to its final orbit, the interception of another vehicle or adjustment of the orbit due to shifts in its orbit caused by external forces. It is essential to minimize the fuel consumption, because, in this way, a greater number of maneuvers can be performed, and thus the life of the satellite can be extended. There are several papers and studies which aim the fuel minimization in maneuvers performed by space vehicles. In this context, this master thesis aims to find optimal trajectories for vehicles that use a non-impulsive propulsion. The contributions sought are: 1) the development of a software capable of performing the calculation of optimal maneuvers with continuous thrust on a modern computing environment, which can fit different types of missions; 2) the implementation of a realistic system with constraints, for example, the possibility to consider the limitation of the thrust direction or areas where the thrust is not allowed; 3) the simulation of real situations for validation of the algorithm implemented.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 – Transferência de Hohmann	5
Figura 2.2 – Transferência de Hohmann modificada	6
Figura 2.3 – Transferência bi-elíptica.....	7
Figura 3.1 – Razão do consumo de combustível pela massa total versus variação de velocidade.	16
Figura 4.1 – Problema fundamental da astronáutica.....	27
Figura 4.2 – Definição do ângulo de percurso.....	29
Figura 5.1 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 1.	54
Figura 5.2 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 2.	58
Figura 5.3 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 3.	62
Figura 5.4 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 4.	67
Figura 5.5 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 5.	73
Figura 5.6 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 6.	76
Figura 5.7 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 7.	79
Figura 5.8 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 8.	81
Figura 5.9 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 9.	84
Figura 5.10 – Ângulo de controle “yaw” em função do “range angle” para a manobra 9.	85
Figura 6.1 – Força de empuxo aplicada para a manobra 1.	90
Figura 6.2 – Detalhe da força de empuxo aplicada para a manobra 1.	90
Figura 6.3 – Desvio na excentricidade da órbita de transferência para a manobra 1.....	91
Figura 6.4 – Detalhe do desvio na excentricidade da órbita de transferência para a manobra 1.	91
Figura 6.5 – Desvio no semi-eixo maior da órbita de transferência para a manobra 1.....	92
Figura 6.6 – Detalhe do desvio no semi-eixo maior da órbita de transferência para a manobra 1.	92
Figura 6.7 – Força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 1.....	93
Figura 6.8 – Detalhe da força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 1.....	93
Figura 6.9 – Desvio na velocidade absoluta do veículo considerando erro nos propulsores para a manobra 1.....	94
Figura 6.10 – Detalhe do desvio na velocidade absoluta do veículo considerando erro nos propulsores para a manobra 1.	94
Figura 6.11 – Diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 1.	95
Figura 6.12 – Detalhe da diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 1.....	95
Figura 6.13 – Força de empuxo aplicada para a manobra 3.	96
Figura 6.14 – Desvio na velocidade absoluta para a manobra 3.....	96
Figura 6.15 – Detalhe do desvio na velocidade absoluta para a manobra 3.	97
Figura 6.16 – Erro absoluto nos propulsores para a manobra 3.....	97
Figura 6.17 – Força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 3.....	98
Figura 6.18 – Detalhe da força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 3.....	98
Figura 6.19 – Desvio na velocidade absoluta do veículo considerando erro nos propulsores para a manobra 3.....	99
Figura 6.20 – Diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 3.	99
Figura 6.21 – Detalhe da diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 3.....	100
Figura B.1 – Arquitetura geral do programa que calcula manobras ótimas com propulsão contínua.	115
Figura B.2 – Entrada dos dados da órbita.....	116
Figura B.3 – Entrada dos dados do propulsor e o sistema de contagem do número de iterações.	117
Figura B.4 – Entrada dos vínculos da manobra.	117
Figura B.5 – Entrada de dados do arco de propulsão.	118

Figura B.6 – Entrada dos parâmetros numéricos.....	118
Figura B.7 – Programa principal.	119
Figura B.8 – Arquitetura do primeiro subsistema.....	120
Figura B.9 – Cálculo dos elementos de queima.....	121
Figura B.10 – Cálculo dos multiplicadores de Lagrange.....	121
Figura B.11 – Sistema de integração numérica.	122
Figura B.12 – Cálculo dos elementos keplerianos da órbita e do consumo de combustível.....	122
Figura B.13 – Chaveamento do loop.....	123
Figura B.14 – Cálculo do vetor dos vínculos.	123
Figura B.15 – Cálculo do gradiente.....	124
Figura B.16 – Busca da satisfação dos vínculos e do mínimo da função objetivo.	125
Figura B.17 – Segunda etapa para o chaveamento para o loop.	125

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 3.1 – Parâmetros do PHALL I	20
Tabela 5.1 – Consumo e duração da manobra 1	55
Tabela 5.2 – Órbita atingida da manobra 1	55
Tabela 5.3 – Consumo e duração da manobra 2	59
Tabela 5.4 – Órbita atingida da manobra 2	59
Tabela 5.5 – Consumo e duração da manobra 3	63
Tabela 5.6 – Órbita atingida da manobra 3	63
Tabela 5.7 – Consumo e duração da manobra 4	68
Tabela 5.8 – Órbita atingida da manobra 4	68
Tabela 5.9 – Órbita nominal do CBERS.	69
Tabela 5.10 – Tolerâncias permitidas para os elementos orbitais do CBERS	70
Tabela 5.11 – Consumo e duração da manobra 5	73
Tabela 5.12 – Órbita atingida da manobra 5	73
Tabela 5.13 – Consumo e duração da manobra 6	76
Tabela 5.14 – Órbita atingida da manobra 6	77
Tabela 5.15 – Consumo e duração da manobra 7	80
Tabela 5.16 – Órbita atingida da manobra 7	80
Tabela 5.17 – Consumo e duração da manobra 8	82
Tabela 5.18 – Órbita atingida da manobra 8	82
Tabela 5.19 – Consumo e duração da manobra 9	85
Tabela 5.20 – Órbita atingida da manobra 9	85

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
UnB	Universidade de Brasília
IFT	Empuxo infinito ou "Infinite Thrust"
HT	Alto empuxo ou "High Thrust"
LT	Baixo empuxo ou "Low Thrust"
STRS	Spacecraft Trajectory Simulator
CBERS	China-Brazil Earth Resources Satellite

LISTA DE SÍMBOLOS

μ	Constante geo-gravitacional
r	Raio vetor que determina a posição do veículo espacial
\ddot{r}	Aceleração do raio vetor
r_0	Raio vetor que determina a posição inicial do veículo espacial
r_f	Raio vetor que determina a posição final do veículo espacial
v_0	Velocidade inicial do veículo espacial
v_f	Velocidade final do veículo espacial
Δv	Variação na velocidade
t_0	Instante inicial
t_f	Instante final
Δt	Intervalo de tempo
m_0	Massa inicial do veículo
m_f	Massa final do veículo
Δm	Consumo de combustível na manobra
I_{sp}	Impulso específico
F	Força de empuxo
F_{max}	Força de empuxo máximo
g	Aceleração local da gravidade
g_{max}	Aceleração da gravidade máxima
g_0	Aceleração da gravidade na superfície da Terra
J	Funcional
u^*	Controle ótimo
u	Controle
d	Vetor de direção de busca
R	Vetor conhecido como vetor de projeção
S	Vetor que define os vínculos do problema
A	Ângulo de "pitch"
B	Ângulo de "yaw"

A_0	Ângulo inicial de "pitch"
B_0	Ângulo inicial de "yaw"
A'	Taxa de variação de "pitch"
B'	Taxa de variação de "yaw"
s	Ângulo de "range angle"
s_0	Ângulo de "range angle" inicial
a	Semi-eixo maior
e	Excentricidade
i	Inclinação da órbita
Ω	Ascensão reta do nodo ascendente
ω	Argumento do perigeu
f	Anomalia verdadeira
s	Ângulo de "range angle"

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1. Organização do trabalho	2
1.2. Objetivos	3
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
3.1. Manobras Orbitais	13
3.2. Sistemas de Propulsão	17
3.2.1. Sistema de Baixo Empuxo: A Propulsão Iônica	18
3.3. Métodos de otimização	20
3.3.1. Conceitos fundamentais	20
3.3.2. Princípio do mínimo de Pontryagin	21
3.3.3. Métodos numéricos	24
3.3.4. Método da projeção do gradiente	25
4 LIMITAÇÃO DO PROBLEMA	27
4.1. Formulação do Problema	28
4.2. Método de Otimização	35
4.3. Transformação “adjoint-control”	41
4.4. Extensões	42
4.5. Algoritmo utilizado	43
5 RESULTADOS	47
5.1. Relação dos dados de entrada e saída	47
5.1.1. Dados de entrada	47
5.1.2. Dados de saída	51

5.2. Manobras para validação	51
5.2.1. Manobra 1	52
5.2.2. Manobra 2	56
5.2.3. Manobra 3	60
5.2.4. Manobra 4	64
5.3. Manobras calculadas.....	69
5.3.1. Manobra 5	70
5.3.2. Manobra 6	74
5.3.3. Manobra 7	77
5.3.4. Manobra 8	81
5.3.5. Manobra 9	82
6 SIMULAÇÃO DAS MANOBRAS ORBITAIS ÓTIMAS.....	87
6.1. Simulação da manobra obtida na manobra 1.....	89
6.2. Simulação da manobra obtida na manobra 3.....	95
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	101
7.1. Conclusões	101
7.2. Sugestões para extensões desse trabalho	103
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	105
APÊNDICE A – O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA.....	111
APÊNDICE B – ARQUITETURA DO PROGRAMA QUE CALCULA MANOBRAS ÓTIMAS COM PROPULSÃO CONTÍNUA	115

1 INTRODUÇÃO

Veículos espaciais, em determinados momentos da missão, precisam alterar um ou mais elementos orbitais de sua trajetória, ou seja, realizar uma manobra orbital.

A realização de uma manobra orbital pode ter diversos propósitos, como a transferência de um veículo da órbita estacionária inicial para a órbita final, a realização de um encontro ou a interceptação com outro veículo, ou correções orbitais necessárias para compensar os efeitos devidos às perturbações externas como, por exemplo, o arrasto atmosférico, a pressão de radiação solar, os efeitos gravitacionais de outros corpos, etc. Do ponto de vista do propulsor a ser utilizado, a transferência de órbita pode ser dividida em dois grupos: a transferência orbital impulsiva e a não-impulsiva ou contínua.

No cálculo da manobra ótima nesse trabalho o propulsor considerado possui um sistema de propulsão contínua, com a direção de aplicação livre e magnitude constante.

Será utilizado um método de otimização baseado no Princípio de Máximo de Pontryagin, com o objetivo de obter a trajetória ótima respeitando as limitações do controle com a maximização da massa final do veículo espacial, ou seja, com a minimização o consumo do combustível. (PRADO, 1989).

Há dois movimentos envolvidos no problema. O primeiro consiste na órbita kepleriana sem perturbações, estudado no problema de dois corpos. Este movimento ocorre quando o propulsor não estiver ligado.

O segundo é o movimento do veículo que ocorre quando ele é governado por duas forças: a força devido ao campo gravitacional da Terra e a força de propulsão. Este movimento ocorre durante o tempo em que o propulsor estiver ligado.

Esse trabalho apresenta manobras orbitais que podem incluir mudanças no plano orbital. Portanto é necessário aplicar o empuxo em duas componentes, uma no plano orbital e outra perpendicular a esse plano. Assim, com um passo constante pré-definido pelo usuário, integram-se numericamente as equações de movimento buscando a trajetória ótima por meio de métodos de otimização, respeitando os vínculos do sistema com o objetivo de se obter o mínimo consumo de combustível.

1.1. Organização do trabalho

Esta seção apresenta uma breve discussão dos capítulos contidos neste trabalho. Os capítulos são:

Capítulo 1: é apresentada uma introdução sobre o trabalho e os tópicos relacionados além de ser apresentada uma breve síntese de todos os capítulos do trabalho. São discutidos os objetivos deste trabalho, assim como a motivação para a sua realização,

Capítulo 2: será apresentado uma revisão dos principais trabalhos encontrados na literatura pertinentes ao tema escolhido.

Capítulo 3: será apresentado os principais conceitos teóricos envolvidos na área de estudo.

Capítulo 4: será mostrado o processo da formulação matemática do problema em questão, as considerações adotadas e o algoritmo utilizado para a realização do software.

Capítulo 5: serão apresentados os resultados das soluções obtidas no cálculo de manobras orbitais ótimas. Diversos casos serão considerados, tanto em nível de validação quanto em nível de manobras com vínculos reais.

Capítulo 6: serão realizadas simulações de algumas manobras calculados no capítulo anterior utilizando o ambiente de simulação SRTS.

Capítulo 7: serão descritos as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

1.2. Objetivos

Uma vez que, na grande maioria das missões de veículos espaciais, é necessária a realização de manobras orbitais, a busca da redução do consumo de combustível se torna essencial para o desempenho da missão e, conseqüentemente, a possibilidade de prolongamento da vida útil do satélite.

Há diversos trabalhos na busca de minimização de combustível aplicados a manobras ótimas em veículos espaciais, principalmente para manobras orbitais impulsivas.

Porém, atualmente não se encontra disponibilizado no INPE um software capaz de calcular manobras ótimas com propulsores contínuos em um ambiente de computação moderno.

Neste contexto, o principal objetivo deste trabalho é encontrar a trajetória ótima entre duas órbitas dadas com o objetivo de minimizar o consumo de combustível. Considera-se que não há restrição no tempo de duração da manobra. Sendo assim, foi desenvolvido um software de cálculo de trajetórias ótimas para veículos de empuxo contínuo.

A principal motivação deste trabalho é a necessidade da realização de manobras complementares ao lançamento do veículo espacial. As manobras podem ter como objetivo a transferência para a órbita nominal final ou correções periódicas, que consistem em pequenos ajustes dos elementos keplerianos.

Desse modo o software desenvolvido é capaz de calcular manobras ótimas para diversos tipos de missões, utilizando dados de propulsores existentes para calcular manobras orbitais ótimas e considerando vínculos reais, tais

como limitações de direção de aplicação do empuxo e regiões orbitais aonde não sejam permitidas o uso de propulsão.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é apresentada uma descrição de trabalhos encontrados na literatura relacionados com o assunto em foco.

Robert H. Goddard (1919) foi um dos primeiros estudiosos no problema da transferência ótima de um veículo espacial entre dois pontos. Ele propôs soluções ótimas aproximadas para enviar um foguete a grandes altitudes.

Hohmann (1925) obteve a solução ótima do problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares em um campo gravitacional Newtoniano. As manobras de Hohmann são manobras bi-impulsivas. Essa solução é usada ainda hoje sob certas restrições e pode facilmente ser estendida para órbitas elípticas. A manobra de Hohmann consiste em uma transferência com o mínimo consumo de combustível, ou seja, com minimização da variação de velocidade necessária para realizar a manobra. A exemplificação desta manobra é apresentada na Figura 2.1.

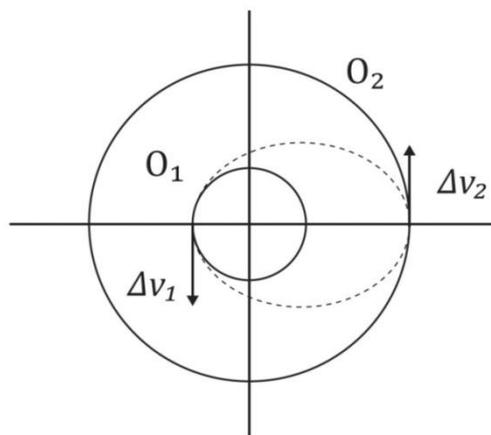


Figura 2.1 – Transferência de Hohmann

Fonte: Adaptada de Sidi (1997)

Na Figura 2.1 é apresentada a transferência de Hohmann, onde O_1 é a órbita inicial, O_2 é a órbita final e a órbita tracejada é a manobra de transferência de

Hohmann. Esta manobra é bi-impulsiva. É aplicada uma variação de velocidade Δv_1 na órbita O_1 , que coloca o veículo na órbita de transferência de Hohmann. O segundo impulso é aplicado quando o veículo atinge a órbita final O_2 e tem uma variação na velocidade de magnitude Δv_2 , com o objetivo de posicionar o veículo na órbita final.

A transferência de Hohmann também é ótima para o caso em que as órbitas iniciais e finais são elípticas. O princípio é o mesmo, as órbitas são coplanares e possuem os semi-eixos maiores com a mesma direção e foco em comum, como exemplificado na Figura 2.2.

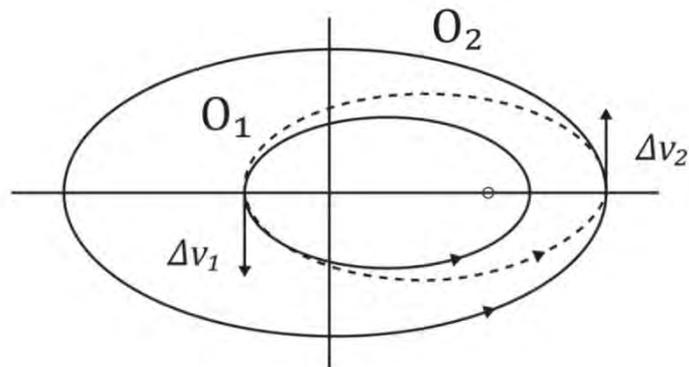


Figura 2.2 – Transferência de Hohmann modificada

Fonte: Sidi (1997)

No final da década de 50, Hoelker et al. (1959) mostraram que a solução de Hohmann não é uma solução ótima se a razão dos raios das órbitas final e inicial foi maior que 11,94. Neste caso, onde a razão dos raios é maior que 11,94, a manobra ótima, em relação ao consumo de combustível, é a transferência bi-elíptica. Shternfeld (1959) mostrou a mesma solução, independentemente, aproximadamente na mesma época. A esquematização da manobra bi-elíptica vem a seguir na Figura 2.3.

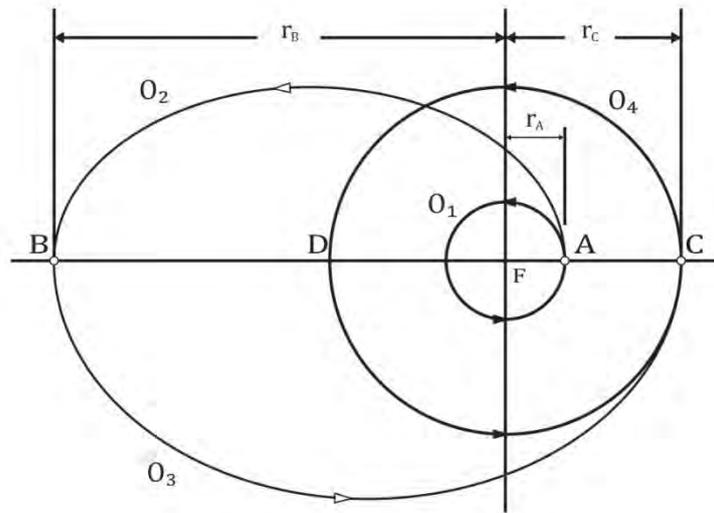


Figura 2.3 – Transferência bi-elíptica

Fonte: Curtis (2009)

Neste caso, a órbita inicial é a O_1 , as órbitas O_2 e O_3 são órbitas de transferência e O_4 é a órbita final. São aplicados três impulsos: o primeiro no ponto A, para transferência da órbita O_1 para a órbita O_2 . O segundo impulso é aplicado no ponto B, para uma nova transferência de órbita de O_2 para O_3 . E o terceiro impulso é aplicado no ponto C, de forma a atingir a órbita final O_4 . A idéia dessa manobra é que o ponto B seja distante o suficiente de tal forma que o segundo impulso aplicado seja mais eficiente, uma vez que o veículo está longe do corpo central de atração gravitacional.

Já Roth (1967) propôs manobras orbitais ótimas entre órbitas circulares, porém incluindo mudança de plano orbital.

Em todos os casos citados acima era feita a hipótese de propulsão instantânea. O estudo de propulsão contínua, onde o empuxo é limitado, foi primeiramente desenvolvido por Tsien (1953). Ele provou que um empuxo na direção do movimento é mais eficiente que na sua perpendicular, enquanto Lawden (1955), posteriormente, buscou as direções ótimas para a aplicação do empuxo.

Ainda nesta linha, Moskowitz (1963) apresentou dois tipos de aproximação: a linear, com $AI(t) = C_1 + C_2 t$, onde $AI(t)$ é o ângulo entre a força de empuxo aplicada e uma linha adotada como referência, C_1 e C_2 são constantes e " t " o instante de tempo, e a bi-linear, com $AI(t) = \frac{C_1 + C_2 t}{C_2 + C_3 t}$, em que C_1 , C_2 e C_3 são constantes. Ambas as aproximações foram estudadas em casos de pequenas transferências orbitais, sem mudança do plano orbital.

Outra aproximação linear foi desenvolvida por Biggs (1978), e esta apresentada nas Equações 4.1 e 4.2. Porém Biggs estudou tanto manobras para correções de transferências de órbitas como mudança no plano orbital. Biggs (1979) também resolveu o problema de calcular manobras ótimas com propulsão contínua sem a parametrização no controle, incluindo mudanças no plano orbital.

Stewart e Melton (1991) apresentam um estudo da trajetória de um veículo espacial incluindo perturbações nas equações de movimento da órbita Kepleriana. O sistema propulsivo considerado no trabalho tem um empuxo constante com uma pequena magnitude de propulsão. O ângulo de aplicação do empuxo é fixo e são estudadas apenas manobras no mesmo plano orbital. Foi realizado comparações dos resultados obtidos com as respostas analíticas aproximadas e o erro relativo obtido foi baixo.

Carroll e Williams (1994) desenvolveram um método direto de otimização no qual é retirada a dependência explícita do controle na busca de trajetórias ótimas de baixo empuxo, reduzindo a dimensão dos parâmetros do problema não linear de infinita para finita. Um exemplo de trajetória bidimensional livre de gravidade envolvendo uma transferência de velocidade máxima para um caminho retilíneo é discutido. Há também outros três exemplos de trajetórias interplanetárias.

Kluever (1997) desenvolveu e utilizou um método direto de otimização para calcular trajetórias ótimas interplanetárias com baixo empuxo. Este método

apresenta o problema de controle ótimo como um problema de programação não linear, que por sua vez é resolvido usando programação seqüencial quadrática. Na aproximação direta, é possível considerar forças múltiplas e arcos sem propulsão, gravidade planetária assistida e sistemas de propulsão elétrico com empuxo constante e variável. As vantagens da aproximação direta incluem simplificação na formulação do problema e facilidade em estabelecer boas estimativas iniciais para os parâmetros do projeto. São apresentados resultados numéricos para três missões interplanetárias e os resultados do método direto mostram uma excelente aproximação em relação a trajetórias ótimas publicadas na literatura.

Kluever e Oleson (1997) desenvolveram um método para calcular uma transferência orbital quase ótima e de tempo mínimo em torno da Terra para veículos espaciais com propulsores elétricos. É utilizada uma aproximação de otimização direta para resolver o problema de controle ótimo. Este método é insensível a estimativas iniciais das variáveis de otimização. As trajetórias ótimas calculadas pela aproximação direta apresentam resultados próximos aos das trajetórias ótimas calculadas usando uma aproximação de cálculo variacional.

Vadali *et. al.* (1999) apresenta um estudo sobre trajetórias da Terra à Marte para foguetes com o mínimo consumo de combustível, movido por um propulsor de baixo empuxo com impulso específico variável. Os efeitos gravitacionais do Sol, da Terra e de Marte são incluídos. O problema de controle ótimo é resolvido usando um método indireto.

Em Haberkorn *et. al.* (2004) é descrito o estudo de uma transferência orbital da Terra com um sistema de propulsão de baixo empuxo e cujo objetivo é a minimização do combustível consumido. É considerado um controle descontínuo, ou seja, com mais de um arco de propulsão. Um aspecto importante é que não são feitas hipóteses na estrutura de controle e não é estabelecido um número de arcos de propulsão. Neste trabalho o exemplo

estudado é uma transferência de uma órbita terrestre baixa para uma órbita equatorial geossíncrona de um veículo espacial .

Golfetto (2004) apresenta métodos numéricos direto e indireto para otimização de trajetórias e determinação de controle ótimo. O primeiro é um método direto, resultante da utilização do método do gradiente de primeira e de segunda ordem. O segundo é um método indireto que resolve o problema de valor de contorno em dois pontos associado ao problema de controle ótimo. Os métodos são aplicados a problemas de trajetórias espaciais envolvendo transferências entre órbitas circulares e de pequenas excentricidades.

No âmbito do INPE, Prado (1989) utilizou as considerações de Biggs da aproximação linear e a abordagem sem a parametrização e desenvolveu resultados para diversas manobras orbitais com diversas soluções e justificou o método mais eficaz a partir dos métodos híbrido e direto.

Schulz (1997) apresenta um estudo sobre transferências bi-impulsivas entre órbitas elípticas não coplanares com consumo mínimo de combustível.

Chiaradia et al.(2002) apresenta um trabalho no qual é implementado um algoritmo para realizar manobras coplanares autônomas com o auxílio do GPS. O algoritmo implementado é simplificado e compacto de forma que possa ser utilizado em tempo real em satélites artificiais. Os dados do GPS são utilizados para determinar a posição do veículo e para a manobra ótima com o mínimo consumo de combustível é encontrada por meio da solução do problema de Lambert.

Moraes et al.(2002) apresenta um trabalho que realiza manobras aeroassistidas. É abordado a teoria de controle ótimo para minimizar o consumo de combustível e é utilizado forças aerodinâmicas combinadas com o sistema propulsivo para realizar manobras orbitais com mudanças no plano orbital. Os resultados numéricos são comparados com soluções analíticas para encontrar casos no quais é mais conveniente realizar manobras aeroassistidas.

Carvalho (2004) apresentou uma análise do problema de transferências espaciais ótimas em campo central Newtoniano, realizadas por meio de sistemas propulsivos de baixo empuxo e potência limitada. O problema geral é inicialmente formulado como um problema de Mayer da teoria de controle ótimo com elementos cartesianos de vetores posição e velocidade como variáveis de estado. É utilizado o Princípio de Máximo de Pontryagin para encontrar o controle ótimo.

Rocco (2006 e 2008) apresenta um simulador de trajetórias orbitais que considera o controle da posição e da velocidade do veículo em malha fechada. Neste simulador há a possibilidade de estudar manobras, utilizando propulsão contínua, considerando perturbações orbitais e não linearidades nos sensores e atuadores.

Gomes (2008) estima em tempo real o estado orbital de veículos espaciais, através dos dados do GPS a bordo com o uso do filtro de Kalman. Para a realização das manobras orbitais, foi desenvolvido um software para o cálculo de manobras ótimas, que é usado como referência para comparação e análise do método sub-ótimo que é utilizado a bordo. É também estudado e desenvolvido um método para o caso de manobras sub-ótimas contínuas.

Marcelino (2009) utiliza o simulador desenvolvido por Rocco para estudar o problema do controle da trajetória orbital em manobras de empuxo contínuo de longo prazo. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados das trajetórias ótimas obtidos por Prado (1989) de forma a validar o simulador desenvolvido por Rocco (2006 e 2008).

Santos (2009) apresenta um trabalho de otimização de trajetórias espaciais com propulsão elétrica solar e manobras gravitacionalmente assistidas. Foi explorado manobras utilizando alto impulso específico com a propulsão elétrica. Foram estudadas missões para vários asteróides próximos a Terra.

Venditti (2010) apresenta um trabalho a respeito de manobras assistidas por gravidade aplicadas na otimização de trajetórias interplanetárias com vínculo de tempo.

Santos (2010) complementa o simulador de Rocco e desenvolve um simulador de manobras que controla em malha fechada a trajetória de um veículo espacial por meio de variações aerodinâmicas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir serão abordados os conceitos teóricos básicos que fundamentam a presente pesquisa.

3.1. Manobras Orbitais

Uma manobra orbital é definida como sendo uma mudança na posição e na velocidade de um veículo espacial. Mudanças orbitais podem ser de grande amplitude, como a transferência de uma órbita de baixa altitude para uma órbita geoestacionária, ou uma trajetória interplanetária. A mudança orbital também pode ser pequena, como o estágio final de um "rendezvous", que é o encontro entre dois veículos no espaço.

A manobra orbital de um veículo espacial é a mudança do estado inicial \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 no instante inicial t_0 , para o estado final \mathbf{r}_f e \mathbf{v}_f , no instante final t_f , onde $t_f \geq t_0$ (MAREC, 1979).

O consumo de combustível é um fator crucial na manobra orbital, pois atualmente, no espaço, não é possível reabastecer o satélite, e sem combustível não é possível realizar as manobras de correção de trajetória necessárias para atender os objetivos da missão para o qual o satélite foi projetado. Dessa forma, é importante realizar manobras ótimas do ponto de vista de consumo de combustível, já que esta economia propicia um aumento na vida útil do satélite, reduzindo o custo da missão à medida que o tempo de uso aumenta. Porém o combustível pode não ser o único parâmetro a ser minimizado. Existem missões onde pode ser necessária a minimização do tempo (ROCCO, 1997), ou ainda a minimização de mais de um parâmetro, como, por exemplo, o trabalho de Rocco (2002), que busca a solução de um problema de otimização multi-objetivo no qual é pretendido minimizar o combustível, o tempo e o erro na execução da manobra orbital simultaneamente.

A duração e a magnitude da propulsão são características relevantes de uma manobra orbital. Durante uma manobra orbital, o propulsor é ligado por um intervalo de tempo que depende da magnitude da força do empuxo aplicado. É essa característica do propulsor que define se a propulsão é impulsiva ou não impulsiva.

A eficiência do propulsor pode ser medida por meio do impulso específico I_{sp} e sua unidade é em segundos. O I_{sp} é definido, de acordo com Curtis (2009), por:

$$I_{sp} = \frac{F \Delta t}{\Delta m g_0}, \quad (3.1)$$

onde F é o módulo da força de empuxo, Δt é o intervalo de tempo no qual o propulsor está acionado, Δm é o consumo de combustível na manobra e g_0 é o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra. Propulsores iônicos possuem um impulso específico geralmente maior que 2.500 segundos, enquanto propulsores de gás gelado ou monopropelente de hidrazina possuem, respectivamente, 50 e 230 segundos de impulso específico (BROWN, 1992).

A propulsão impulsiva apresenta uma magnitude de empuxo do propulsor que provoca uma mudança na magnitude e direção da velocidade de forma instantânea, ou seja, a propulsão age por um período de tempo curto o suficiente em que se pode considerar a posição do satélite fixa, e assumir que somente a velocidade foi alterada. A propulsão impulsiva é uma idealização, não há na natureza um empuxo infinito capaz de variar a velocidade do satélite instantaneamente. Porém, para fins práticos, esta idealização pode ser considerada válida se a posição do satélite mudar pouco durante o tempo da propulsão.

A propulsão não impulsiva, ou contínua, atua durante um período de tempo significativo, de forma que não é possível a suposição de que ocorre uma mudança de velocidade Δv com uma variação de instante de tempo $\Delta t = 0$, como na aproximação da propulsão impulsiva. Neste caso, a aceleração da propulsão deve ser incluída nas equações de movimento. Assim, a equação de movimento neste caso é a Equação 3.1, cujo termo (F/m) é devido à aceleração do propulsor. A equação é dada por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (3.1)$$

em que \mathbf{r} é o raio vetor que determina a posição do veículo espacial, μ é a constante geo-gravitacional e $\ddot{\mathbf{r}}$ é a aceleração do raio vetor, \mathbf{F} é a força aplicada quando o propulsor está ligado e m é a massa do veículo espacial. A origem deste sistema de referência é a Terra, um dos focos da órbita.

Enquanto a equação que descreve o movimento de um veículo espacial em uma órbita kepleriana sem perturbações e com o propulsor desligado, estudado no problema de dois corpos, é dado pela Equação 3.2:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.2)$$

A Equação 3.2 é similar à 3.1, com exceção que na equação 3.1 existe o termo da aceleração do propulsor.

Chobotov (2002) fornece a equação que relaciona o consumo de combustível ($\Delta m = m_f - m_0$) com o módulo da variação da velocidade Δv do veículo espacial:

$$m_f = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}\right) \quad (3.3)$$

em que m_f é a massa final do veículo, m_0 é a massa inicial, e g_0 é o módulo da aceleração da gravidade no nível do mar.

Rearranjando a equação acima, obtém-se:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}\right) \quad (3.4)$$

Ao se elaborar um gráfico da razão entre a variação de massa e a massa total $\frac{\Delta m}{m}$ em função da variação do módulo da velocidade Δv , tem-se uma nítida imagem da eficiência de propulsores com diferentes impulsos específicos em relação ao consumo de combustível, de acordo com a Figura 3.1.

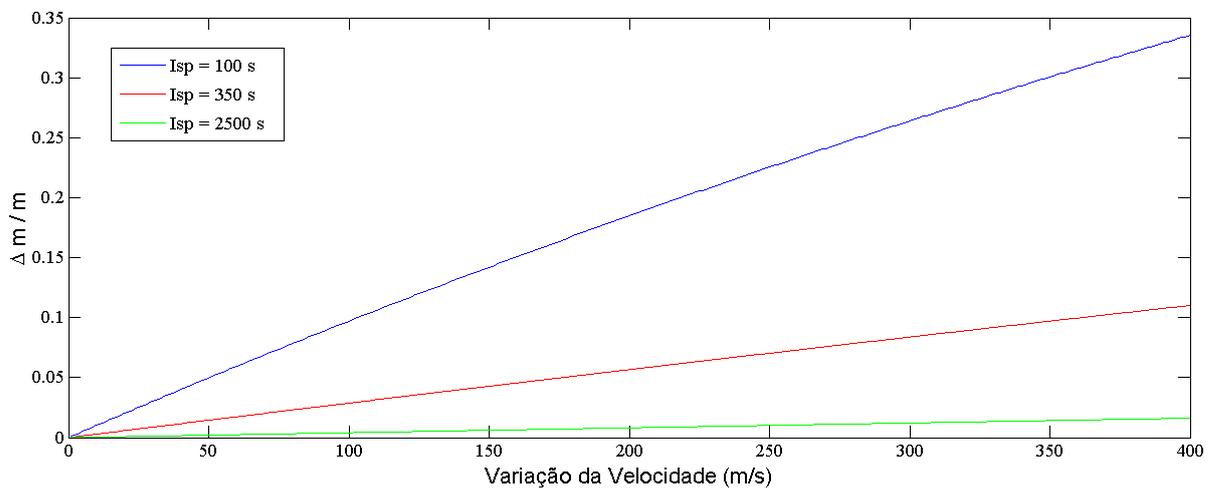


Figura 3.1 – Razão do consumo de combustível pela massa total versus variação de velocidade.

Com a ajuda da Figura 3.1, pode-se notar que à medida que o impulso específico do propulsor aumenta, ocorre uma redução no consumo de combustível.

Na seção 3.5 existe um estudo detalhado de manobras orbitais impulsivas. Entretanto, o enfoque deste trabalho são as manobras orbitais ótimas com propulsão contínua, que serão tratadas no capítulo 3.

3.2. Sistemas de Propulsão

O sistema de propulsão pode ser definido como o sistema atuador que é capaz de alterar a magnitude e a direção do vetor velocidade do veículo espacial (MAREC, 1979).

Os sistemas de propulsão operam dentro de um domínio de operação. O domínio de operação pode variar com o tempo ou ainda apresentar descontinuidades, como, por exemplo, o caso de separação de estágios de um foguete (MAREC, 1979). Porém, nesse trabalho será estudado um sistema de propulsão com o domínio de operação que não apresenta descontinuidades, não varia com o tempo e possui a magnitude de empuxo fixa.

Há vários parâmetros utilizados para classificar e medir o desempenho do sistema de propulsão. Os principais parâmetros de desempenho, de acordo com Prado (1989), são: o impulso específico (I_{sp}) e a razão entre o empuxo máximo (F_{max}) e o peso do sistema propulsivo no solo (mg_0).

As informações apresentadas abaixo foram extraídas de Marec (1979).

Existem três categorias básicas de sistema de propulsão, que são descritas a seguir:

- a) Sistema de Alto Empuxo, HT, do inglês “High Thrust”. São caracterizados pela alta aceleração, na qual a razão entre o módulo da aceleração máxima g_{max} e o módulo da gravidade local g (g_{max}/g)

é da ordem de 10 a 100, e por possuir um baixo impulso específico, entre 300 a 1.000 s;

- b) Sistema de Empuxo Infinito, IFT, do inglês “Infinite Thrust”. Esta categoria é a idealização da categoria anterior. Neste caso a aceleração tende a infinito ($g_{max}/g \rightarrow \infty$), ou seja, a mudança de velocidade aplicada ao veículo espacial é instantânea;
- c) Sistema de Baixo Empuxo, LT, do inglês “Low Thrust”. Esta categoria é caracterizada por uma baixa aceleração, com g_{max}/g variando entre 10^{-2} a 10^{-5} , e elevado impulso específico, geralmente entre 2.500 a 10.000 s. Para este sistema, os arcos propulsados são, na sua maioria, de longa duração.

Ainda pode-se classificar o sistema de propulsão com relação à capacidade de modulação da velocidade de ejeção de gases. Há sistemas em que a velocidade de ejeção é constante, enquanto há sistemas em que a ejeção pode ser modulável. Para o último caso, onde a ejeção é modulável, há um valor mínimo de velocidade de ejeção do propelente no qual o sistema propulsor pode operar e tal característica depende de cada sistema de propulsão.

Neste trabalho, especificamente, é considerado propulsores com empuxo constante e com a possibilidade vincular restrições do propulsor, conforme a exemplificação no Capítulo 4.

3.2.1. Sistema de Baixo Empuxo: A Propulsão Iônica

A propulsão iônica é caracterizada por ser um sistema de baixo empuxo, com um alto valor do I_{sp} , como já citado anteriormente. Este sistema de propulsão apresenta muitas vantagens, como descritas a seguir.

De acordo com Ferreira et al. (2009), a propulsão elétrica ou iônica reduz a massa do propelente em missões espaciais porque os propulsores iônicos de baixo empuxo e aceleração contínua superam a baixa eficiência de queima dos propulsores químicos. Esta afirmação está de acordo com a Figura 3.1, na qual

se vê claramente que à medida que se aumenta o impulso específico, o consumo de combustível necessário para realizar uma variação na velocidade de um veículo espacial diminui.

O combustível utilizado na propulsão iônica é composto geralmente por gases nobres como, por exemplo, o xenônio. O princípio básico de funcionamento é a ionização do gás para que sirva de propelente, usando campos elétricos e magnéticos para acelerar o plasma de forma a gerar um empuxo no sentido contrário da emissão do plasma.

Atualmente, o sistema de propulsão elétrica está renovando o planejamento de missões espaciais, já que a massa do propelente corresponde a aproximadamente 55% a 65% da massa do satélite para missões que orbitam a Terra e 70% a 80% para missões interplanetárias, e o sistema elétrico é mais eficiente em relação ao consumo de combustível (FERREIRA ET AL., 2009).

A grande vantagem da propulsão iônica está na capacidade de ligá-la ou desligá-la quando necessário e a possibilidade de controle da magnitude da propulsão. Porém, como a sua aceleração é baixa, o tempo necessário para a realização de uma manobra pode aumentar drasticamente com relação ao uso de um sistema de alto empuxo.

Neste trabalho o propulsor utilizado em alguns cálculos da manobra ótima será o PHALL I, desenvolvido no Laboratório de Plasma da Universidade de Brasília (UnB). Este propulsor possui uma característica peculiar, pois utiliza ímãs permanentes ao invés de eletroímãs para o confinamento dos elétrons que produzem e aceleram o plasma. Por meio desta inovação tecnológica de ímãs permanentes, o propulsor a plasma diminui significativamente o consumo de energia elétrica e assim apresenta melhor desempenho.

Alguns parâmetros importantes do propulsor PHALL I estão apresentados na tabela a seguir:

Tabela 3.1 – Parâmetros do PHALL I

Parâmetros do propulsor à plasma	PHALL 1
Empuxo Máximo (mN)	126
Empuxo Médio (mN)	84,9
Impulso Máximo Específico (s)	1607
Impulso Específico Médio (s)	1083
Energia Consumida (W)	350

Fonte: Adaptada de Ferreira et al. (2009)

3.3. Métodos de otimização

Nesta seção apresenta-se uma breve discussão do método de otimização utilizado na solução do problema.

3.3.1. Conceitos fundamentais

No controle ótimo o objetivo principal é determinar a função que minimiza um funcional específico, ou seja, a medida do desempenho. O problema análogo no cálculo é a determinação de um ponto que possui o menor valor em uma função. A definição de um funcional J , de acordo com Kirk (1970), é uma lei de correspondência que relaciona cada função x de certo espaço vetorial \mathbf{O} a um único número real. \mathbf{O} é denominado domínio de J e o conjunto de números reais associados com as funções em \mathbf{O} é denominado contradomínio do funcional.

O funcional possui máximos e mínimos relativos. Ainda de acordo com Kirk (1970), um funcional J com o domínio \mathbf{O} possui um extremo relativo em x^* se há um erro $e > 0$ de forma que, para todas as funções x em \mathbf{O} que satisfazem $\|x - x^*\| < e$, o incremento de J tem o mesmo sinal. Se

$$\Delta J = J(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}^*) \geq 0, \quad (3.5)$$

$J(\mathbf{x}^*)$ é um mínimo relativo. E caso

$$\Delta J = J(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad (3.6)$$

$J(\mathbf{x}^*)$ é um máximo relativo.

Se a Equação 3.5 é satisfeita para um ϵ arbitrariamente grande, então $J(\mathbf{x}^*)$ é um mínimo global, ou mínimo absoluto. De forma similar, se a Equação 3.6 é válida para um ϵ arbitrariamente grande, então $J(\mathbf{x}^*)$ é um máximo global, ou máximo absoluto. O \mathbf{x}^* é chamado de ótimo, enquanto $J(\mathbf{x}^*)$ é referido como um extremo.

3.3.2. Princípio do mínimo de Pontryagin

Neste trabalho, a formulação do problema é abordada como um problema de controle. Portanto a trajetória é determinada por meio do controle ótimo \mathbf{u}^* .

O princípio de mínimo de Pontryagin nos permite considerar controles e estados que possuem limitações. Essas considerações tornam a solução do problema mais próximo da realidade, pois, no mundo real, todo sistema possui restrições, tais como magnitude máxima de propulsão, assim como limitações na direção de propulsão, entre outras limitações devidas à estrutura ou à segurança do propulsor ou do veículo espacial.

De acordo com a Equação 3.5, por definição, o controle ótimo \mathbf{u}^* causa um mínimo relativo no funcional J se

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) = \Delta J \geq 0 \quad (3.7)$$

para todos os controles admissíveis suficientemente perto de \mathbf{u}^* . Considerando $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}$, ou seja, que o valor de \mathbf{u} seja a soma de \mathbf{u}^* com uma pequena variação $\delta\mathbf{u}$, o incremento em J pode ser expresso por (KIRK, 1970):

$$\Delta J(\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}^*) = \delta J(\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u}) + E^2 \quad (3.8)$$

em que δJ é linear em $\|\delta\mathbf{u}\|$ e os termos de ordem mais alta E^2 se aproximam de zero à medida que a norma de $\delta\mathbf{u}$ se aproxima para zero.

Se for considerado todas as variações da norma de $\delta\mathbf{u}$ admissíveis de forma que sejam pequenas o suficiente para assumir que o sinal de ΔJ é determinado por δJ , chega-se à conclusão que a condição necessária para \mathbf{u}^* minimizar globalmente o funcional J é dada por (KIRK, 1970):

$$\delta J(\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u}) \geq 0. \quad (3.9)$$

Para a formulação do Princípio do mínimo de Pontryagin, será apresentado algumas definições importantes. A primeira é o sistema descrito pelas equações diferenciais do sistema. O estado é definido por $x(t)$, enquanto o controle é $\mathbf{u}(t)$ e t é o instante de tempo. Assim nosso sistema pode ser descrito pelas equações diferenciais:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{a}(x(t), \mathbf{u}(t), t). \quad (3.10)$$

em que \dot{x} é a variação de x em relação à variável independente t e \mathbf{a} é o conjunto de equações que define \dot{x} .

Já o funcional mais geral possível é definido pela equação (KIRK, 1970):

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (3.11)$$

em que o integrando $g(\cdot)$ da Equação 3.11 é uma função dependente do estado, do controle e do tempo, que define o índice de performance de um problema de otimização. A Hamiltoniana é definida pela equação

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)], \quad (3.12)$$

em que \mathbf{p}^T são os multiplicadores de Lagrange e a função $g(\cdot)$ é utilizada na definição da Hamiltoniana.

Portanto, de acordo com o princípio de mínimo de Pontryagin, dado um sistema descrito pelas equações diferenciais dadas pela Equação 3.10, no qual se deseja minimizar a medida do desempenho dada pela Equação 3.11 e cuja Hamiltoniana descrita pela Equação 3.12, as condições necessárias para o controle ótimo são (KIRK, 1970):

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^* = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \quad (3.14)$$

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \leq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t), t) \quad (3.15)$$

para todo $\mathbf{u}(t)$ admissível. E

$$H(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) = 0 \quad (3.16)$$

se t_f não for especificado. Há outras generalizações e condições necessárias que dependem das condições iniciais, por exemplo, se o tempo final for fixo ou livre, o estado final for fixo, livre ou ainda se for descrito por uma função. Não é apresentado todas as condições necessárias para cada caso, porém em Kirk (1970) pode ser encontrado uma descrição detalhada dos casos citados, assim como suas condições necessárias.

3.3.3. Métodos numéricos

Pode-se classificar os métodos numéricos para a solução em três principais grupos, conforme mostrado abaixo.

- a) Método direto: Neste método a solução é obtida por meio de um método de busca que visa a minimização do funcional $J(\cdot)$, na qual obedece às equações de movimento e aos demais vínculos envolvidos. Na busca direta, não são utilizadas as condições necessárias de primeira ordem do problema de controle ótimo associado e a função de controle é parametrizada.
- b) Método indireto: Neste caso a função de controle não é parametrizada e a solução é obtida a partir das condições necessárias de primeira ordem apresentadas acima no problema de controle ótimo. Os ângulos de controle ótimo são obtidos a partir do princípio de máximo de Pontryagin. Este princípio garante que se o controle $\mathbf{u}(\cdot)$ for ótimo,

a Hamiltoniana do sistema é minimizada ou maximizada, dependendo da formulação do problema. O domínio do controle $u(\cdot)$ depende das considerações especificadas no problema.

- c) Método híbrido: Neste trabalho é utilizado o método híbrido para a solução do problema. Este método utiliza estratégias dos dois métodos anteriores e pode ser encontrado em Biggs (1979). Neste método, a minimização do consumo de combustível considerando os vínculos impostos à órbita é obtida por meio de um procedimento de integração que satisfaz simultaneamente as equações de movimento e as condições de primeira ordem de otimalidade. Assim, o problema é reduzido a um problema de programação não-linear com dimensão finita.

3.3.4. Método da projeção do gradiente

O método da projeção do gradiente é um procedimento numérico iterativo no qual o objetivo é encontrar o extremo de uma função de várias variáveis e que deve satisfazer os vínculos do problema. Se a função que deve ser minimizada, conhecida como função objetivo, e os vínculos são lineares, o problema é conhecido como um problema de programação linear. Porém, se a função objetivo ou os vínculos apresentarem termos não lineares, que é o caso deste trabalho, o problema é conhecido como um problema de programação não linear (KIRK, 1970).

O método da projeção do gradiente é exemplificado a seguir.

Supondo que o nosso problema seja:

Minimizar: $J(\mathbf{u})$

Sujeito a: $S(\mathbf{u}) = 0$

onde $J(\mathbf{u})$ é o funcional, \mathbf{u} é o controle e \mathbf{S} é o vetor que define os vínculos do problema.

Para a busca do mínimo da função objetivo, o vetor de direção de busca é dado pela Equação 3.17, de acordo com Bazarra et al. (1976):

$$\mathbf{d} = -\mathbf{R}\nabla J(\mathbf{u}), \quad (3.17)$$

O vetor \mathbf{R} é definido na Equação 3.18:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \nabla \mathbf{S}^T [\nabla \mathbf{S} \nabla \mathbf{S}]^{-1} \nabla \mathbf{S} \quad (3.18)$$

O vetor \mathbf{R} é conhecido com um vetor de projeção. O vetor \mathbf{I} possui todos os elementos iguais à um. A função desse vetor é projetar cada linha do vetor \mathbf{S} para um vetor nulo.

Porém, para a busca da satisfação dos vínculos, utiliza-se o passo de busca dada pela Equação 3.19, de acordo com Luemberger (2008).

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - \nabla \mathbf{S}^T [\nabla \mathbf{S} \nabla \mathbf{S}^T]^{-1} \nabla \mathbf{S}. \quad (3.19)$$

4 LIMITAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo deste trabalho é a resolução do problema conhecido como o "problema fundamental da astronáutica", no qual consiste em encontrar a transferência ótima alterando o estado definido pelos elementos r_0, v_0 e m_0 (posição, velocidade e massa) em um instante t_0 , para r_f, v_f e m_f (posição, velocidade e massa) em um instante t_f ($t_f > t_0$) com o menor gasto de combustível possível, definido pela subtração da massa inicial do veículo pela final ($m_0 - m_f$) (PRADO, 1989). Na Figura 4.1 há uma exemplificação deste problema, em que g é a aceleração da gravidade e T é a aceleração aplicada pelo controle. E ainda r e v são o estado do veículo espacial em um instante t qualquer no qual está entre $t_0 \leq t \leq t_f$. A transferência orbital pode ser completamente vinculada, no caso de um "rendezvous", ou parcialmente livre (tempo livre, velocidade final livre, etc).

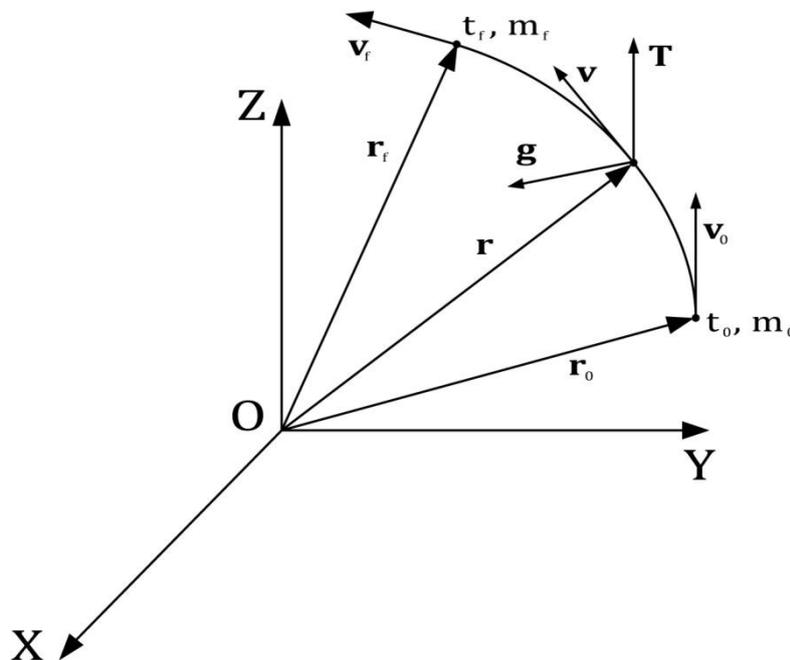


Figura 4.1 – Problema fundamental da astronáutica

Fonte: Adaptada de Prado (1989)

4.1. Formulação do Problema

Para a solução do nosso problema, são utilizadas as ferramentas de otimização. A formulação do problema considerado é apresentada a seguir (PRADO, 1989):

Maximizar: m_f

Com relação a: $u(\cdot)$, pertencente a um domínio U (no qual depende das considerações impostas ao vínculo de controle).

Sujeito a: Equações dinâmicas do movimento;

Vínculos devidos às órbitas inicial e final;

Outros vínculos desejados (regiões proibidas à propulsão, valores máximos ou mínimos das variáveis de controle, etc).

Dados iniciais: Todas as condições iniciais necessárias, constantes gravitacionais e parâmetros numéricos.

em que: m_f é a massa final do satélite, logo maximizar m_f implica em minimizar o consumo de combustível. Na fundamentação teórica foi abordado o princípio de mínimo de Pontryagin, no qual se busca a minimização do funcional. Porém, na abordagem apresentada acima, tem-se como objetivo maximizar o funcional. Os princípios de minimização ou maximização dependem apenas de como o problema foi formulado e estes são equivalentes, pois, por exemplo, se o funcional for dado por $-m_f$, para se obter o menor consumo de combustível é necessário minimizar $-m_f$. Se o problema for de maximização, deve-se maximizar a hamiltoniana, enquanto se o problema envolver a minimização do funcional, deve-se minimizar a hamiltoniana.

Neste trabalho serão consideradas manobras orbitais incluindo a mudança no plano orbital. Sendo assim, é necessário aplicar o empuxo com duas componentes, uma no plano orbital e outra perpendicular ao plano.

Há três ângulos importantes que serão utilizados no equacionamento do problema. O primeiro é o “pitch” (arfagem) designado por A , e representa o ângulo formado entre a direção do empuxo e a perpendicular do raio vetor. O segundo ângulo é o “yaw” (guinada), designado por B , e representa o ângulo formado entre a direção do empuxo e o plano orbital. O terceiro ângulo utilizado no equacionamento é o “range angle” (ângulo de percurso), designado por s , e que representa o ângulo que o raio vetor do satélite faz com uma linha arbitrária adotada como referência pertencente ao plano da órbita, conforme ilustrado na Figura 4.2.

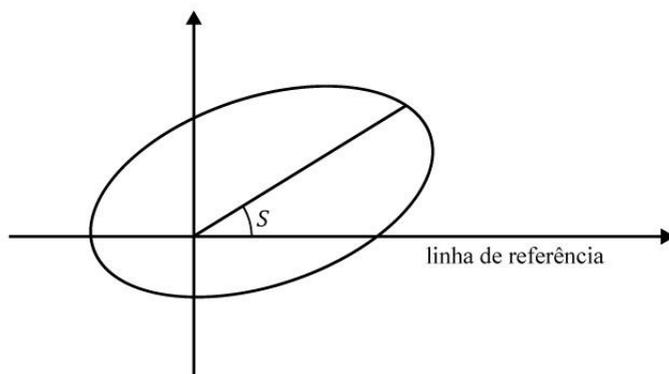


Figura 4.2 – Definição do ângulo de percurso

Fonte: Prado (1989)

A variável independente do nosso problema é o "range angle". A relação entre o tempo da manobra e o "range angle" não é linear porém, uma das equações de movimento mostra a relação entre o "range angle" e o tempo. Em todos os casos é considerado que o tempo inicial no início da manobra é igual à zero.

Como exemplos de métodos diretos, podem ser consideradas hipóteses restritivas para a direção de aplicação da força propulsiva, tais como a hipótese de linearidade proposta por Biggs (1978), que transforma as equações para os ângulos de “pitch” e “yaw” em:

$$A(s) = A_0 + A'(s - s_0) \quad (4.1)$$

$$B(s) = B_0 + B'(s - s_0) \quad (4.2)$$

onde A_0 e B_0 são valores de A e B no início da aplicação do empuxo, A' e B' as taxas constantes de variação de A e B com respeito ao ângulo s (ângulo de percurso) e s_0 é o valor inicial do ângulo de percurso em que se inicia a aplicação do empuxo. Hipóteses como essas constituem a chamada otimização sub-ótima, que não será abordada no presente trabalho, mas que tem grande importância em missões reais.

Neste trabalho é considerada a chamada abordagem ótima híbrida, onde as taxas de variação A' e B' não são constantes, como no método direto e são utilizados métodos de otimização para encontrar os valores ótimos de “pitch” e “yaw” a cada passo, assim como o intervalo onde a propulsão é ligada.

As variáveis de estado que serão usadas são definidas nas Equações 4.3 a 4.11, conforme utilizado anteriormente por Biggs (1978). Tais variáveis de estado evitam singularidades quando a excentricidade ou a inclinação são iguais a zero, pois, com os elementos Keplerianos tradicionais, as equações de movimento tem “ e ” e “ $\sin(i)$ ” no denominador, como podem ser encontradas em Kuga et al. (2008). As variáveis são definidas pelas seguintes equações:

$$X_1 = \sqrt{a(1 - e^2/\mu)} \quad (4.3)$$

$$X_2 = e \cos(\omega - \Phi) \quad (4.4)$$

$$X_3 = e \sin(\omega - \Phi) \quad (4.5)$$

$$X_4 = \text{massa do combustível consumido}/m_0 \quad (4.6)$$

$$X_5 = t \quad (4.7)$$

$$X_6 = \cos\left(\frac{i}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega + \Phi}{2}\right) \quad (4.8)$$

$$X_7 = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega - \Phi}{2}\right) \quad (4.9)$$

$$X_8 = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega - \Phi}{2}\right) \quad (4.10)$$

$$X_9 = \cos\left(\frac{i}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega + \Phi}{2}\right) \quad (4.11)$$

em que a = semi-eixo maior; e = excentricidade; i = inclinação da órbita; Ω = ascensão reta do nodo ascendente; ω = argumento do perigeu; f = anomalia verdadeira; s = "range angle"; $\Phi = f + \omega - s$; μ = constante geo-gravitacional e m_0 = massa inicial do veículo.

Com as definições das variáveis de estado, as equações de movimento em relação à variável independente s , ainda segundo Biggs (1978), são:

$$\frac{dX_1}{ds} = f_1 = S_i X_1 F_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{dX_2}{ds} = f_2 = S_i \{ [(G_a + 1) \cos(s) + X_2] F_1 + Ga F_2 \sin(s) \} \quad (4.13)$$

$$\frac{dX_3}{ds} = f_3 = S_i \{ [(G_a + 1) \sin(s) + X_3] F_1 - Ga F_2 \cos(s) \} \quad (4.14)$$

$$\frac{dX_4}{ds} = f_4 = \frac{S_i Ga F (1 - X_4)}{X_1 W} \quad (4.15)$$

$$\frac{dX_5}{ds} = f_5 = \frac{S_i Ga (1 - X_4) m_0}{X_1} \quad (4.16)$$

$$\frac{dX_6}{ds} = f_6 = - \frac{S_i F_3 [X_7 \cos(s) + X_8 \sin(s)]}{2} \quad (4.17)$$

$$\frac{dX_7}{ds} = f_7 = \frac{S_i F_3 [X_6 \cos(s) - X_9 \sin(s)]}{2} \quad (4.18)$$

$$\frac{dX_8}{ds} = f_8 = \frac{S_i F_3 [X_9 \cos(s) + X_6 \sin(s)]}{2} \quad (4.19)$$

$$\frac{dX_9}{ds} = f_9 = \frac{S_i F_3 [X_7 \sin(s) - X_8 \cos(s)]}{2} \quad (4.20)$$

em que:

$$G_a = 1 + X_2 \cos(s) + X_3 \sin(s) \quad (4.21)$$

$$S_i = \frac{\mu X_1^4}{[G_a^3 m_0 (1 - X_4)]} \quad (4.22)$$

$$F_1 = F \cos(A) \cos(B); \quad (4.23)$$

$$F_2 = F \cos(B) \sin(A); \quad (4.24)$$

$$F_3 = F \sin(B); \quad (4.25)$$

e ainda F é o módulo da força de empuxo e W é o módulo da velocidade de ejeção dos gases.

É realizado uma transformação de coordenadas no controle, descritas a seguir (BIGGS, 1978).

$$u_1 = s_0 \quad (4.26)$$

$$u_2 = (s_f - s_0) \cos(A_0) \cos(B_0) \quad (4.27)$$

$$u_3 = (s_f - s_0) \sin(A_0) \cos(B_0) \quad (4.28)$$

$$u_4 = (s_f - s_0) \sin(B_0) \quad (4.29)$$

$$u_5 = A' \quad (4.30)$$

$$u_6 = B' \quad (4.31)$$

Essa transformação evita que o ângulo do "range angle" final seja menor que o ângulo de "range angle" inicial, pois $s_f = s_0 + \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$.

Os vínculos que podem ser considerados no problema são descritos a seguir:

$$u_1 \geq 0 \quad (4.32)$$

$$L \geq 0 \quad (4.33)$$

$$(a - a^*)/|a_0 - a^*| = 0 \quad (4.34)$$

$$[e - e^*/|e_0 - e| \quad (4.35)$$

$$(i - i^*)/|i_0 - i^*| = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\Omega - \Omega^*}{|\Omega_0 - \Omega^*|} = 0 \quad (4.37)$$

$$(\omega - \omega^*)/|\omega_0 - \omega^*| = 0 \quad (4.38)$$

O vínculo da Equação 4.32 representa a proibição de queima no instante negativo, ou seja, o "range angle" inicial não pode ser menor que zero. A Equação 4.33 representa as regiões proibidas ao empuxo. Neste trabalho as regiões proibidas ao empuxo foram definidas em relação à longitude verdadeira. De acordo com Prado (1989), a longitude verdadeira pode ser definida como sendo a soma da ascensão reta do nodo ascendente com o argumento do perigeu e a anomalia verdadeira. Os vínculos descritos nas Equações 4.34 a 4.38 representam os vínculos determinados em elementos keplerianos da órbita final desejada. É necessário que seja especificado no mínimo um elemento kepleriano da órbita final desejada. Nas órbitas circulares, não faz sentido especificar os vínculos representados nas Equações 4.35 a 4.38. Já para órbitas equatoriais, a Equação 4.37 não precisa ser especificada. O índice subscrito "0" significa valores da órbita inicial, o asterisco indica o valor nominal desejado e o elemento kepleriano sem índice está relacionado com o estado atual do veículo espacial.

4.2. Método de Otimização

O método híbrido que é utilizado para resolver o problema é o método desenvolvido por Biggs (1979).

Com as definições das equações de estado (Equações 4.3 a 4.11), das equações de movimento (Equações 4.12 a 4.20) e do vetor u (Equações 4.26 a 4.31), o nosso problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Maximizar:} \quad J(.) = -X_4(s_f) \quad (4.40)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \frac{dX_i}{ds} = f_i(X, s, A, B), \quad i=1, \dots, 9 \quad (4.41)$$

$$\text{e} \quad S_j(X(s_f)) = 0, \quad j=1, \dots, m. \quad (4.42)$$

Na Equação 4.40, é definido o funcional que se deseja minimizar e este é dado pela equação de estado no instante s_f definido na Equação 4.6. E, ainda, a Equação 4.41 resume as equações de movimento descritas nas Equações 4.12 a 4.20. A Equação 4.42 define as condições desejadas da órbita final. Outros vínculos podem ser considerados, como limitação nos ângulos de "pitch" e "yaw".

É utilizado o Princípio de Máximo de Pontryagin para calcular o valor ótimo dos ângulos de "pitch" e "yaw".

É considerado $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ como sendo os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos e $P_1(s), \dots, P_9(s)$ como sendo os multiplicadores de Lagrange associados às equações de movimento, conhecidos como multiplicadores adjuntos.

A Hamiltoniana é dada por :

$$H = \mathbf{P}\mathbf{f} \quad (4.43)$$

em que \mathbf{P} é o multiplicador de Lagrange e as componentes f_i do vetor \mathbf{f} são definidas nas Equações 4.12 a 4.20. A partir de Biggs (1979) e da Equação 3.14, tem-se que os multiplicadores adjuntos ótimos devem satisfazer as equações adjuntas dadas a seguir:

$$\frac{dP_i}{ds} = - \sum_{j=1}^9 P_j \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \quad (4.44)$$

que, utilizando os valores conhecidos de f_i , fornecem:

$$\frac{dP_1}{ds} = - \frac{1}{X_1} \left[4 \sum_{j=1}^9 P_j f_j + P_1 f_1 - P_4 f_4 - P_5 f_5 \right] \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{ds} = \frac{\cos(s)}{G_a} \left[3 \sum_{j=1}^9 P_j f_j - P_4 f_4 - P_5 f_5 \right] - S_i P_2 F_1 - S_i \cos^2(s) (P_2 F_1 - P_3 F_2) \\ - S_i \cos(s) \sin(s) (P_2 F_2 + P_3 F_1) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_3}{ds} = \frac{\sin(s)}{G_a} \left[3 \sum_{j=1}^9 P_j f_j - P_4 f_4 - P_5 f_5 \right] - S_i P_3 F_1 \\ - S_i \cos(s) \sin(s) (P_2 F_1 - P_3 F_2) - S_i \sin^2(s) (P_2 F_2 + P_3 F_3) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{dP_4}{ds} = - \frac{1}{m_0(1 - X_4)} \left[\sum_{j=1}^9 P_j f_j - P_4 f_4 - P_5 f_5 \right] \quad (4.48)$$

$$\frac{dP_5}{ds} = 0 \quad (4.49)$$

$$\frac{dP_6}{ds} = -S_i F_3 [P_7 \cos(s) + P_8 \sin(s)]/2 \quad (4.50)$$

$$\frac{dP_7}{ds} = S_i F_3 [P_6 \cos(s) - P_9 \sin(s)]/2 \quad (4.51)$$

$$\frac{dP_8}{ds} = S_i F_3 [P_6 \sin(s) + P_9 \cos(s)]/2 \quad (4.52)$$

$$\frac{dP_9}{ds} = -S_i F_3 [P_8 \cos(s) - P_7 \sin(s)]/2. \quad (4.53)$$

E quando $s = s_f$, as condições de transversalidade dada pela Equação 4.54 devem ser satisfeitas (PRADO, 1989).

$$P_i(s_f) = \left(\frac{\partial J}{\partial X_f} \right) + \lambda \left(\frac{\partial S}{\partial X_f} \right) \quad (4.54)$$

Reescrevendo a equação acima, obtém-se as equações 4.55 e 4.56.

$$P_i(s_f) = -\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial S_j}{\partial X_i}, \quad i = 1, \dots, 9 \text{ e } i \neq 4 \quad (4.55)$$

$$P_4(s_f) = -1 - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial S_j}{\partial X_4} \quad (4.56)$$

Neste problema, os valores s_0 e s_f podem assumir quaisquer valores, portanto nos pontos $s = s_0$ e $s = s_f$, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^9 P_i f_i = 0 \quad (4.57)$$

A importância dos multiplicadores adjuntos neste contexto é a propriedade que a cada instante de propulsão os valores ótimos de "pitch" ou "yaw" resolvem o subproblema:

$$\text{Max}_{A,B} \sum_{i=1}^9 P_i f_i \quad (4.58)$$

Substituindo os valores de f_i e após algumas manipulações algébricas, chega-se à expressão (BIGGS, 1979):

$$\text{Max}_{A,B} \quad q_1 \cos(A) \cos(B) + q_2 \sin(A) \cos(B) + q_3 \sin(B) \quad (4.59)$$

em que

$$q_1 = P_1 X_1 + P_2 (X_2 + (G_a + 1) \cos(s)) + P_3 (X_3 + (G_a + 1) \sin(s)), \quad (4.60)$$

$$q_2 = P_2 G_a \sin(s) - P_3 G_a \cos(s), \quad (4.61)$$

$$q_3 = \frac{1}{2} (-P_6 (X_7 \cos(s) + X_8 \sin(s)) + P_7 (X_6 \cos(s) - X_9 \sin(s)) + P_8 (X_6 \sin(s) + X_9 \cos(s)) + P_9 (X_7 \sin(s) - X_8 \cos(s))) \quad (4.62)$$

Diferenciando a Expressão 4.59 com respeito a A e depois com respeito a B , obtém-se as equações:

$$-q_1 \sin(A) \cos(B) + q_2 \cos(A) \cos(B) = 0 \quad (4.63)$$

e

$$-q_1 \cos(A) \sin(B) - q_2 \sin(A) \sin(B) + q_3 \cos(B) = 0 \quad (4.64)$$

Isolando $\sin(A)$, $\sin(B)$, $\cos(A)$ e $\cos(B)$, obtém-se as seguintes equações:

$$\sin(A) = \frac{q_2}{E}, \quad (4.65)$$

$$\cos(A) = \frac{q_1}{E}, \quad (4.66)$$

$$\sin(B) = \frac{q_3}{E'}, \quad (4.67)$$

$$\cos(B) = \frac{S}{E'}, \quad (4.68)$$

onde $E = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ e $E' = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.

Para eliminar a ambiguidade dos sinais de S e S' , sabe-se que as segundas derivadas da Expressão 4.59 com respeito a A e B devem ser negativas, já que o problema é de maximização. Portanto, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$-q_1 \cos(A) \cos(B) - q_2 \sin(A) \cos(B) < 0 \quad (4.69)$$

$$-q_1 \cos(A) \cos(B) - q_2 \sin(A) \cos(B) - q_3 \sin(B) < 0 \quad (4.70)$$

Essas condições requerem que ambos os sinais de S e S' sejam positivos.

Dessa forma, com as condições iniciais e os ângulos ótimos de "pitch" e "yaw" a cada instante, o problema de otimização com dimensão infinita é reduzido a um problema de programação não linear com dimensão finita. Assim, a nova formulação do problema é dada pelas Equações 4.71 a 4.73.

$$\text{Maximizar:} \quad -X_4(s_f) \quad (4.71)$$

$$\text{Com relação a:} \quad s_0, s_f, A_0, B_0, A'_0, B'_0, P_i(s_0) \quad (4.72)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad S_j(X(s_f)) = 0, j = 1, \dots, m \quad (4.73)$$

Este novo problema equivale ao antigo, definido nas Equações 4.40 a 4.42, porém, neste caso, os valores de $X_4(s_f)$ e $S_j(X(s_f))$ são obtidos simultaneamente por meio de um algoritmo que integra as equações de movimento e satisfaz as condições de otimalidade (ângulos ótimos de "pitch" e "yaw").

A partir da nova formulação do problema, o algoritmo passa a ser (PRADO, 1989):

- a) Estima-se valores iniciais para $s_0, s_f, A_0, B_0, A'_0, B'_0, P_i(s_0)$;
- b) Integra-se as equações adjuntas e as de movimento simultaneamente, do "range angle" inicial s_0 até o valor estipulado final do "range angle" s_f . E a cada passo da integração, calcula-se os valores ótimos de A e B , a partir do Princípio de Máximo de Pontryagin, mostrado na Expressão 4.59;
- c) Neste passo é verificada a satisfação dos vínculos e a minimização de combustível. Caso a satisfação dos vínculos ou da busca da

minimização do combustível não esteja de acordo com uma tolerância pré-definida, alteram-se os valores iniciais por meio do método do gradiente. Deste passo, volta-se para o passo "a" e, caso a tolerância dos vínculos e da minimização do combustível seja satisfeita, o programa é finalizado.

4.3. Transformação “adjoint-control”

Uma boa estimativa inicial é essencial para garantir convergência e maior rapidez no processo de obtenção de soluções. Porém, como os multiplicadores de Lagrange não possuem significado físico, é difícil estipular valores que garantam a convergência e sejam eficazes.

Para solucionar este problema é utilizada a transformação “adjoint-control”, que consiste em obter os valores de $P_i(s_0)$ a partir de variáveis com algum significado físico. Essas variáveis são A_0 , B_0 (ângulos iniciais de A e B), A'_0 e B'_0 (taxas de variação dos ângulos de “pitch” e “yaw” iniciais) (PRADO, 1989).

A justificativa para essa mudança de quatro variáveis no lugar de nove vem das observações (BIGGS, 1979):

- a) Os multiplicadores de Lagrange não são independentes. Com exceção de X_4 e X_5 , as sete variáveis restantes derivam dos cinco elementos Keplerianos. Portanto, o número de variáveis é reduzido para sete.
- b) As equações adjuntas são homogêneas, ou seja, a mesma trajetória pode ser encontrada com os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange dados por $P_i(s_0)$ ou $kP_i(s_0)$, onde $(i = 1, \dots, 9)$ e k é uma constante positiva. Assim é possível normalizar os multiplicadores de Lagrange, diminuindo em uma unidade o número das componentes de P_i independentes, reduzindo-as a seis.

- c) Para trajetórias que não dependem do tempo, $P_5 = 0$, pois $\frac{\partial P_5}{\partial s} = 0$ e $\frac{\partial S_j}{\partial x_5} = 0$. Assim é reduzido em mais uma unidade as componentes independentes de P_i .
- d) Tem-se que o instante de início da manobra (s_0) é livre, portanto $\sum_{i=1}^9 P_i f_i = 0$, o que nos deixa apenas quatro componentes independentes.

Assim, com os valores de A_0 e B_0 e com o “range angle” igual a s_0 e depois com $A_0 + 5A'$ e $B_0 + 5B'$ com o “range angle” igual a \tilde{s} ($\tilde{s} = s_0 + 5^\circ$), onde o valor de 5 graus é definido arbitrariamente, substituí-se os ângulos na Expressão 4.59, obtendo assim os valores dos multiplicadores de Lagrange no início da manobra. É importante notar que no intervalo entre o “range angle” s_0 e \tilde{s} , a propulsão está desligada, de forma que $P_i(s_0) = P_i(\tilde{s})$.

O algoritmo que será especificado na seção 4.5 exemplifica o método utilizado para resolver o problema.

4.4. Extensões

- a) Quando há regiões onde a propulsão é proibida: Neste caso, a região onde a propulsão é proibida é definida pela longitude verdadeira, que é a soma da ascensão reta do nodo ascendente com o argumento do perigeu e a anomalia verdadeira. Neste caso, é necessária a informação dos ângulos inicial e final da longitude verdadeira onde a propulsão é proibida;
- b) Quando há vínculos nos ângulos de controle: Supõe-se os vínculos nos ângulos de "pitch" e "yaw" da seguinte forma:

$$A_u \geq A \geq A_L \quad (4.74)$$

$$B_u \geq B \geq B_L \quad (4.75)$$

onde o sub-índice “*u*” significa ângulo mínimo e “*L*” o ângulo máximo.

O vínculo é ignorado no cálculo dos ângulos ótimos A^* e B^* e, após a obtenção os ângulos ótimos, há a consideração dos vínculos de acordo com as seguintes equações:

$$A = A_u \text{ se } A^* \geq A_u \quad (4.76)$$

$$A = A_L \text{ se } A^* \leq A_L \quad (4.77)$$

$$A = A^* \text{ se } A_u \geq A^* \leq A_L \quad (4.78)$$

e

$$B = B_u \text{ se } B^* \geq B_u \quad (4.79)$$

$$B = B_L \text{ se } B^* \leq B_L \quad (4.80)$$

$$B = B^* \text{ se } B_u \geq B^* \leq B_L \quad (4.81)$$

4.5. Algoritmo utilizado

Nesta seção, será discutido o algoritmo utilizado para resolver o problema. O integrador numérico utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem. Detalhes deste método de integração numérica serão exemplificados no Apêndice A. Já no Apêndice B será apresentada a arquitetura do programa desenvolvido.

O algoritmo utilizado foi adaptado de Prado (1989):

- a) Parte-se de uma estimativa inicial para o conjunto $(A_0, B_0, A', B', s_0, s_f)$. A partir dessas estimativas, obtém-se o valor do vetor \mathbf{u} correspondente por meio das Equações 4.26 a 4.31;
- b) Utiliza-se a transformação “adjoint-control” (explicada na seção 4.3) para obter os multiplicadores de Lagrange iniciais necessários às integrações numéricas;
- c) Com esses valores, integram-se numericamente as equações de movimento e adjuntas durante todo o arco de propulsão, obtendo assim a cada passo de integração os valores de “pitch” e “yaw” a partir da Expressão 4.59 (Princípio de Máximo de Pontriagyn). Assim sendo, obtém-se o valor do vetor de estado X no instante final de propulsão do arco;
- d) Com o valor de X , utilizam-se as Equações 4.3 a 4.11 para obter os valores dos elementos Keplerianos da órbita atingida;
- e) Calcula-se numericamente, por meio de perturbações em cada um dos elementos de controle \mathbf{u} , seguidas de novas integrações numéricas, o gradiente dos vínculos e da função objetivo (combustível gasto) em relação à \mathbf{u} ;
- f) Neste passo calcula-se a satisfação dos vínculos ativos. Caso o módulo do vetor formado pelas equações de vínculos seja menor que uma tolerância especificada (zero numérico), vai-se para o passo h;
- g) Neste passo ocorre a busca da satisfação dos vínculos, dada pela Equação 3.19.

- h) Uma vez atingidos os vínculos, parte-se para a busca do mínimo da função objetivo. A direção de busca é dada pelas Equações 3.17 e 3.18.
- i) Neste passo, verifica-se o módulo do vetor \mathbf{d} e, caso ele seja menor que o valor especificado para a tolerância (zero numérico) nessa etapa, vai-se para o passo k. Nesta fase, para obter um melhor resultado numérico, a “razão de contração” RC, que é um dado inicial, e a tolerância para a direção de busca diminuem à medida que \mathbf{u} se aproxima do ponto mínimo;
- j) O módulo do passo de busca é dado por

$$PB = \frac{RC J(\mathbf{u})}{\nabla J(\mathbf{u})\mathbf{d}}. \quad (4.82)$$

E assim o passo completo é dado por

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + PB \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \quad (4.83)$$

e vai-se para o passo f;

- k) Aqui é verificada a possibilidade do ponto \mathbf{u} ser um ponto de Kuhn-Tucker. Para verificar essa condição, constrói-se o vetor \mathbf{VT} , que é o vetor formado pelos m primeiros elementos do vetor $\mathbf{W} = -(\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1}\mathbf{S}\nabla J(\mathbf{u})$, onde m é o número de vínculos ativos. Caso \mathbf{VT} não seja positivo definido, apaga-se a linha j da matriz \mathbf{S} com j escolhido de tal forma que o elemento \mathbf{VT}_j seja negativo, e vai-se novamente para o passo g.

- l) Verifica-se a etapa presente e, se não for a última etapa, parte-se para uma nova fase de busca para o mínimo da função objetivo com um valor mais refinado para a busca vai-se para o passo f. Se a etapa for a última, o programa é finalizado.

5 RESULTADOS

Neste Capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir do software desenvolvido para o cálculo de manobras orbitais ótimas com propulsão contínua. Os resultados apresentados são compostos de diferentes casos, tais como manobras escolhidas para validação do software, manobras previstas para um satélite de propulsão contínua que possui os elementos orbitais semelhantes à da órbita do CBERS (“China-Brazil Earth Resources Satellite”), e ainda, manobras com o uso dos parâmetros do propulsor a plasma desenvolvido pela Universidade de Brasília.

5.1. Relação dos dados de entrada e saída

5.1.1. Dados de entrada

Para o cálculo da manobra desejada, é necessário que sejam fornecidos os elementos orbitais das órbitas inicial e final, assim como as características do propulsor, dados do veículo, vínculos existentes durante a manobra e alguns parâmetros utilizados de ordem numérica. A relação de todos os dados iniciais necessários segue abaixo com suas respectivas unidades conforme utilizado no software.

a) Órbita inicial do veículo dada pelos elementos keplerianos:

- Semi-eixo maior: quilômetros;
- Excentricidade: adimensional;
- Inclinação : graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: graus;
- Argumento do perigeu: graus;
- Anomalia verdadeira: graus;

b) Dados do veículo no início da contagem do tempo:

- Massa total (combustível + veículo): quilogramas;
- Magnitude do empuxo disponível: Newtons;
- "Range angle" de referência: definido em graus, define a linha de referência adotada.
- Tempo inicial: em segundos, define o instante de tempo inicial da propulsão e em todas as manobras é adotado como zero.
- Velocidade de ejeção dos gases: em quilômetros por segundo, representa a velocidade com que os gases saem do propulsor.

c) Vínculos durante a execução da manobra:

- Matriz de vínculos (IV): definição de quais elementos orbitais finais são especificados na órbita final, onde IV(1) representa o semi-eixo maior, IV(2) a excentricidade, IV(3) a inclinação, IV(4) a ascensão reta nodo ascendente, IV(5) o argumento do perigeu. Cada elemento da matriz é definido por 0 ou 1, onde 1 representa que o elemento é vinculado e 0 indica que o elemento é livre;
- Matriz de regiões proibidas: são ângulos expressos em graus que definem as longitudes verdadeiras do início e do fim da região onde a propulsão é proibida;
- Matriz com valores máximos e mínimos para os ângulos de "pitch" e "yaw": definição dos valores limites admissíveis dos ângulos "pitch" e "yaw" definidos em graus;

d) Órbita final do veículo dada pelos elementos keplerianos (vínculos associados à órbita final):

- Semi-eixo maior: quilômetros;

- Excentricidade: adimensional;
 - Inclinação: graus;
 - Ascensão reta do nodo ascendente: graus;
 - Argumento do perigeu: graus;
- e) Constante geo-gravitacional (μ): adotado como $398600,5 \text{ Km}^3/\text{s}^2$ e é dado pelo produto da massa da Terra pela constante gravitacional $G = 6,672 \times 10^{-20} \text{ Km}^3/(\text{Kg} \cdot \text{s}^2)$.
- f) Parâmetros numéricos necessários:
- Passo de Integração: em graus;
 - Tolerância na satisfação dos vínculos: número positivo e adimensional que representa o zero numérico na questão do fim de busca da satisfação dos vínculos;
 - Tolerância no módulo do vetor de direção de busca: número positivo e adimensional que representa o zero numérico na questão do fim de busca;
 - Tolerância na satisfação dos vínculos de desigualdade: número positivo e adimensional que representa a extensão da "faixa" na qual o vínculo de desigualdade é considerado ativo;
 - Razão de contração: número positivo adimensional, definido na página 44, que define a velocidade que ocorre a busca do mínimo da função objetivo;
- g) Estimativa inicial da solução procurada dada pelos seguintes parâmetros:

- Início da propulsão: dado em graus e define o valor do "range angle" no início da propulsão;
- Fim da propulsão: dado em graus e define o valor do "range angle" no fim da propulsão;
- Ângulo de "pitch" inicial: dado em graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: dado em graus;
- Variação inicial do ângulo de "pitch" com o "range angle": número adimensional (grau/grau) que fornece a taxa de variação inicial de "pitch" em relação ao "range angle" inicial;
- Variação inicial do ângulo de "yaw" com o "range angle": número adimensional (grau/grau) que fornece a taxa de variação inicial de "yaw" em relação ao "range angle" inicial;
- Estimativa do combustível necessário à execução da manobra: quilogramas;

E ainda na referência de Ferreira et al.(2009) não é fornecido o valor da velocidade de ejeção dos gases necessários para os cálculos efetuados em algumas manobras, porém é fornecido o impulso específico do propulsor. Neste caso, foi utilizada a Equação 5.1, retirada em Prado (1989):

$$W = I_{sp}g_0 \quad (5.1)$$

que fornece a velocidade de ejeção dos gases, W , a partir da constante de aceleração gravitacional na superfície da Terra e o impulso específico do propulsor.

5.1.2. Dados de saída

- a) Órbita final atingida após a manobra específica pelos elementos keplerianos:
- Semi-eixo maior: quilômetros;
 - Excentricidade: adimensional;
 - Inclinação: graus;
 - Ascensão reta do nodo ascendente: graus;
 - Argumento do perigeu: graus;
 - Anomalia verdadeira: graus;
- b) Combustível consumido: quilogramas;
- c) Tempo de propulsão: em segundos, representa a duração de tempo da manobra;
- d) Valores dos ângulos “pitch” e “yaw” em função do “range angle”.

5.2. Manobras para validação

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de manobras, com o objetivo de mostrar a validade do software desenvolvido. As manobras efetuadas são comparadas com as similares encontradas na literatura, em Biggs (1978 e 1979) e Prado (1989).

Em todos os exemplos para validação os parâmetros numéricos foram obtidos da referência ou por tentativa e comparação, utilizando os seguintes critérios de escolha:

- a) O método de integração utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem com o passo fixo. Em todos os casos o passo utilizado foi menor

que das referências, de forma que os resultados obtidos fossem equivalentes em termos de precisão ou mais eficientes;

- b) O zero numérico na satisfação dos vínculos foi escolhido de forma a proporcionar uma órbita final com precisão satisfatória comparada com os resultados obtidos nas referências. Quanto menor o valor do zero numérico na satisfação dos vínculos, mais próximo são os valores da órbita final da órbita final desejada;
- c) O zero numérico na direção de busca do mínimo da função objetivo foi escolhido de forma que o seu valor fosse o menor possível, pois valores menores que um determinado valor não obtém convergência;
- d) A faixa de ativação dos vínculos de desigualdade foi escolhida de forma que o seu valor fosse o menor possível, pois valores menores que um certo valor não obtém convergência;
- e) A razão de contração foi escolhida de forma a ser a maior possível, porém valores muito altos dificultam a convergência, enquanto valores baixos aumentam o número de iterações.

5.2.1. Manobra 1

Exemplo correspondente nas referências Biggs (1979) e Prado (1989).

Dados de entrada:

- a) Órbita inicial:
 - Semi-eixo maior: 99000Km;
 - Excentricidade: 0,7;
 - Inclinação: 10 graus;

- Ascensão reta do nodo ascendente: 55 graus;
- Argumento do perigeu: 105 graus;
- Anomalia verdadeira: -105 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg;
- Empuxo disponível: 1,0 N;
- Posição inicial: 0,0 graus;
- Velocidade de ejeção de gases: 2,5 Km/s ;

c) Vínculo no controle:

- Não possui vínculo no controle;

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 104000Km;

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,005 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0002;
- Número de fases de busca: 3;
- Tolerância na direção de busca: 0,06/0,03/0,01;
- Razão de contração para cada busca: -0,2/-0,01/-0,001;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;

- Fim de propulsão: 5 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 2,5 Kg;

Os dados da variação de "pitch" e em relação ao "range angle" estão apresentados na Figura 5.1.

Houve uma pequena variação no ângulo de "yaw", porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de "yaw" pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de "yaw" foi entre 0 a 0,5 graus. O gráfico da variação de "yaw" será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

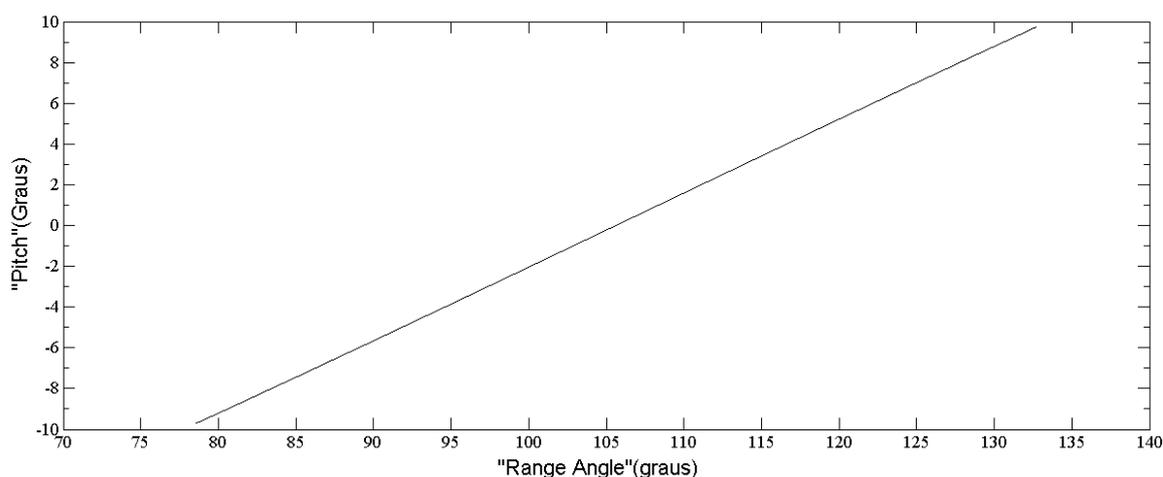


Figura 5.1 – Ângulo de controle "pitch" em função do "range angle" para a manobra 1.

Já os demais valores de saída obtidos estão na Tabela 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1 – Consumo e duração da manobra 1.

VARIÁVEL	SOL. DE BIGGS (1979)	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	2,4393	2,4390	2,4188
Duração (s)	-----	6097,3	6047,1

Tabela 5.2 – Órbita atingida da manobra 1.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	103998,50	103999,32
Excentricidade	0,714	0,714
Inclinação (graus)	10,0	10,0
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	55,0	55,0
Argumento do perigeu (graus)	105,0	105,0
Anomalia verdadeira (graus)	28,3	27,65

Neste exemplo os resultados obtidos condizem com os resultados comparados nas referências. Nota-se que o consumo de combustível na solução do software foi ligeiramente menor, assim como a duração no tempo da manobra. Os elementos Keplerianos são próximos ou iguais às soluções da referência de Prado (1989).

5.2.2. Manobra 2

Exemplo correspondente nas referências Biggs (1979) e Prado (1989).

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 99000 Km;
- Excentricidade: 0,7;
- Inclinação: 10 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 55 graus;
- Argumento do perigeu: 105 graus;
- Anomalia verdadeira: -105 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg;
- Empuxo disponível: 1,0 N;
- Posição inicial: 0,0;
- Velocidade de ejeção de gases: 2,5 Km/s;

c) Vínculo no controle:

- Ângulo de "pitch" deve permanecer entre -5,0 e 5,0 graus;

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 104000 Km;

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,005 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0002;
- Número de fases de busca: 3;
- Tolerância na direção de busca: 0,07/0,03/0,01;
- Razão de contração para cada busca: -0,2/-0,01/-0,001;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 0 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 2,5 Kg;

Os dados da variação de “pitch” e em relação ao “range angle” estão apresentados na Figura 5.2.

Houve uma pequena variação no ângulo de “yaw”, porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de “yaw” pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de “yaw” foi entre -0,05 a 0,55 graus. O gráfico da variação de “yaw” será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

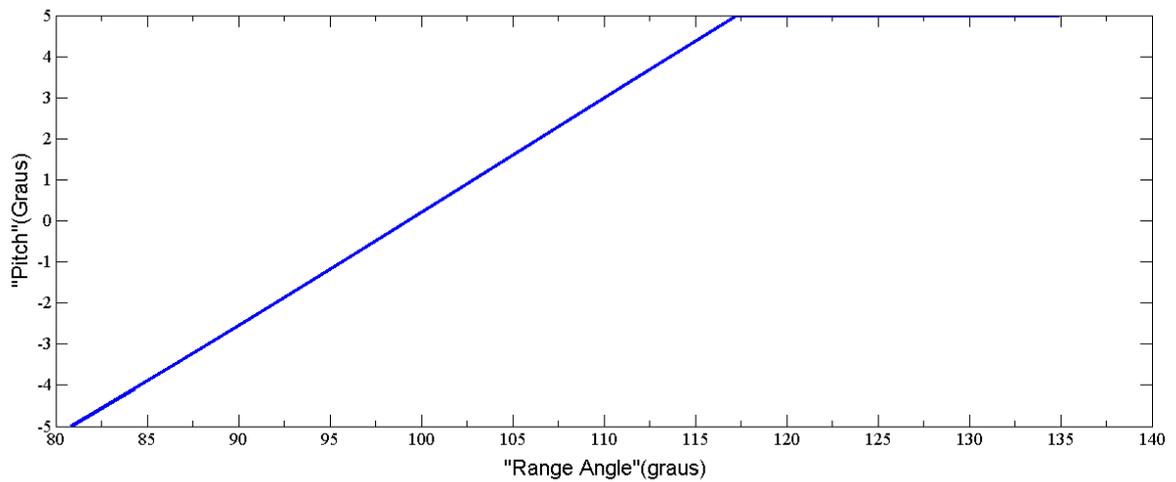


Figura 5.2 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 2.

Já os demais valores de saída obtidos estão na Tabela 5.3 e 5.4.

Tabela 5.3 – Consumo e duração da manobra 2.

VARIÁVEL	SOL. DE BIGGS (1979)	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	2,44	2,45	2,4216
Duração (s)	-----	6129,4	6053,9

Tabela 5.4 – Órbita atingida da manobra 2.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	104015,70	103999,22
Excentricidade	0,714	0,714
Inclinação (graus)	10,0	10,0
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	55,0	55,0
Argumento do perigeu (graus)	105,0	105,0
Anomalia verdadeira (graus)	27,6	29,92

Essa manobra é similar à manobra anterior e possui os mesmos dados iniciais e praticamente os mesmos parâmetros numéricos, porém há um vínculo no controle para o ângulo de “pitch”. Nota-se que com essa limitação, o consumo de combustível aumenta ligeiramente com relação ao resultado anterior.

É possível ver claramente na Figura 5.2 a saturação do ângulo de “pitch” quando atinge 5 graus, uma vez que o vínculo limita o valor máximo do ângulo de “pitch” para cinco graus. O vínculo também limita um valor mínimo para o ângulo de “pitch” e pode ser observado no resultado que não há valores menores que o valor mínimo estipulado. Portanto a satisfação no vínculo foi obtida.

Nessa manobra os resultados obtidos condizem com os resultados comparados nas referências. Nota-se que o consumo de combustível na solução do software foi ligeiramente menor, assim como a duração no tempo da manobra, comparada com as referências. Os elementos Keplerianos são próximos ou iguais às soluções da referência de Prado (1989).

5.2.3. Manobra 3

Exemplo correspondente nas referências Biggs (1979) e Prado (1989).

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 9900 Km;
- Excentricidade: 0,2;
- Inclinação: 10 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 0,0 graus;
- Argumento do perigeu: 25 graus;

- Anomalia verdadeira: -10 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg;
- Empuxo disponível: 2,0 N;
- Posição inicial: 0,0;
- Velocidade de ejeção de gases: 2,5 Km/s;

c) Vínculo no controle:

- Não possui vínculo no controle;

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 10000 Km;

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,05 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0002;
- Número de fases de busca: 3;
- Tolerância na direção de busca: 0,06/ 0,025/ 0,01;
- Razão de contração para cada busca: -0,1/ -0,01/ -0,001;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 20 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;

- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 3,5 Kg;

Os dados da variação de “pitch” e em relação ao “range angle” estão apresentados na Figura 5.3.

Houve uma pequena variação no ângulo de “yaw”, porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de “yaw” pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de "yaw" foi entre -0,65 a 0,6 graus. O gráfico da variação de "yaw" será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

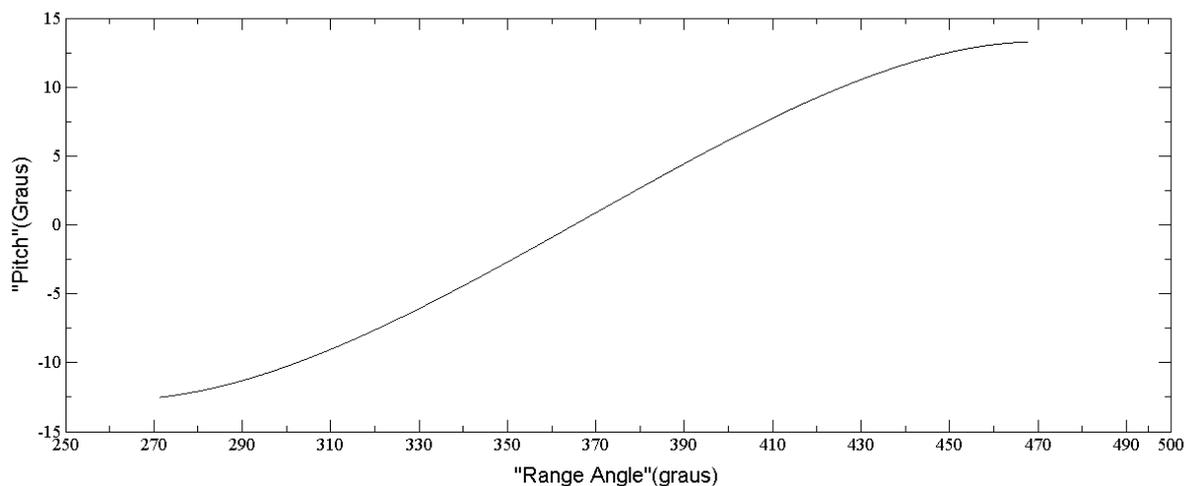


Figura 5.3 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 3.

Já os demais valores de saída obtidos estão na Tabela 5.5 e 5.6.

Tabela 5.5 – Consumo e duração da manobra 3.

VARIÁVEL	SOL. DE BIGGS (1979)	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	3,7316	3,7222	3,2839
Duração (s)	-----	4652,6	4104,9

Tabela 5.6 – Órbita atingida da manobra 3.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	9999,72	10000,00
Excentricidade	0,200	0,206
Inclinação (graus)	10,0	10,0
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	0,0	0,0
Argumento do perigeu (graus)	26,8	25,0
Anomalia verdadeira (graus)	167,1	97,6

Neste exemplo nota-se uma grande diferença no consumo de combustível entre as manobras simuladas no software com as referências. A questão que surge é se existe de fato esse mínimo encontrado na solução do software. Em Prado (1989) ele encontra o mesmo mínimo da função objetivo, porém quando o método utilizado foi o método sub-ótimo direto, no qual há a parametrização no controle como descrita nas Equações 4.1 e 4.2. Mas, se existe o mínimo no método direto, há também este mínimo no método indireto e, portanto a solução encontrada pelo software desenvolvido no presente trabalho é coerente e este exemplo pode ser considerado como validado.

A solução encontrada nos mostra que o software não é sensível às estimativas iniciais da solução. Pois, apesar das estimativas iniciais usadas neste exemplo serem próximas às estimativas utilizadas em Prado (1989) no método híbrido, o mínimo local encontrado no software foi mais satisfatório, pois o consumo foi menor comparado com as das referências.

Em Prado (1989), com o método direto, são encontrados dois mínimos. O primeiro fornece um consumo de combustível de 3,74 Kg de acordo com a página 85 em Prado (1989) e, no segundo mínimo, são usadas estimativas iniciais mais próximas da solução real, e o resultado é uma manobra cujo consumo é 3,32 Kg (que representa o mesmo mínimo encontrado na solução do software).

5.2.4. Manobra 4

Exemplo correspondente nas referências de Biggs (1978) e de Prado (1989).

Porém o método utilizado para encontrar a trajetória que minimiza o combustível nas referências foi o direto, enquanto neste trabalho foi utilizado o método híbrido.

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 99000 Km;
- Excentricidade: 0,7;
- Inclinação: 10 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 55 graus;
- Argumento do perigeu: 105 graus;
- Anomalia verdadeira: -105 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg;
- Empuxo disponível: 1,0 N;
- Posição inicial: 0,0;
- Velocidade de ejeção de gases: 2,5 Km/s;

c) Vínculo no controle:

- Proibido aplicar empuxo entre as longitudes verdadeiras 120,0 e 180,0 graus;

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 104000 Km;

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,05 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0002;
- Número de fases de busca: 3;

- Tolerância na direção de busca: 0,06/ 0,03/ 0,01;
- Razão de contração: -0,2/-0,01/-0,001;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 5 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 2,5 Kg;

Os dados da variação de "pitch" e em relação ao "range angle" estão apresentados na Figura 5.4.

Houve uma pequena variação no ângulo de "yaw", porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de "yaw" pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de "yaw" foi entre -0,1 a 1 grau. O gráfico da variação de "yaw" será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

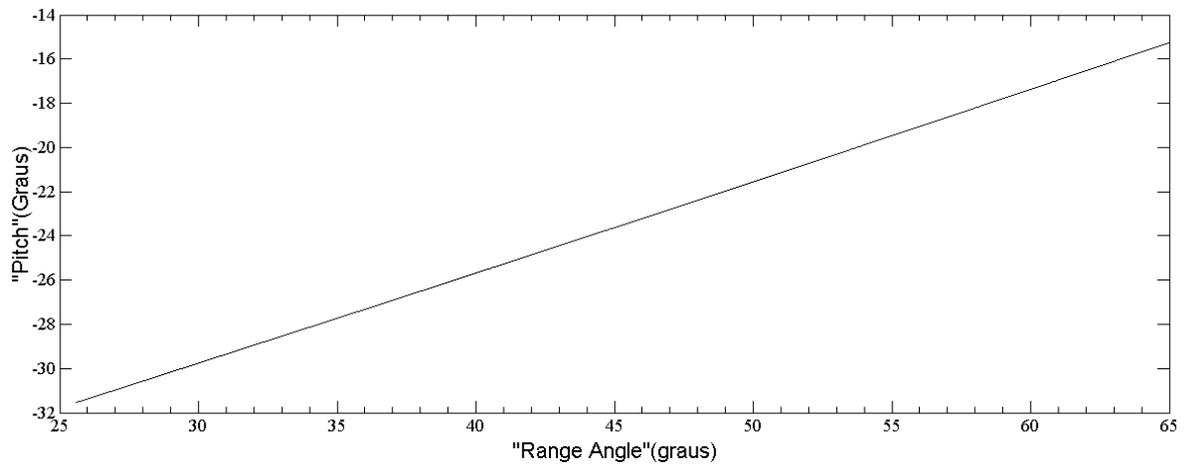


Figura 5.4 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 4.

Já os demais valores obtidos estão na Tabela 5.7 e 5.8.

Tabela 5.7 – Consumo e duração da manobra 4.

VARIÁVEL	SOL. DE BIGGS (1978)	SOL. DE PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	2,81	2,81	2,7860
Duração (s)	-----	7039,3	6965,0

Tabela 5.8 – Órbita atingida da manobra 4.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. PRADO (1989)	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	104000,05	103999,39
Excentricidade	0,713	0,713
Inclinação (graus)	10,0	10,0
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	55,0	55,0
Argumento do perigeu (graus)	104,2	104,2
Anomalia verdadeira (graus)	320,8	320,8

Nos trabalhos de Biggs (1978 e 1979) e de Prado (1989) não foram apresentados resultados desse exemplo utilizando o método híbrido, mas somente quando utilizando o método direto. Porém os mínimos encontrados nas referências e no software foram próximos, dado o consumo de combustível e os elementos keplerianos serem similares. Apesar dos métodos utilizados para a busca da solução serem diferentes, o objetivo deste exemplo foi validar o software. E as soluções obtidas entre as soluções das referências e do software foram próximas, de forma que este exemplo foi validado. É importante ressaltar que, no método direto, há a parametrização do controle, e portanto, a solução encontrada neste método não é ótima e o consumo de combustível é ligeiramente maior comparado com o método ótimo.

5.3. Manobras calculadas

Conforme citado anteriormente, nesta seção foram simuladas manobras para um satélite que possui uma órbita nominal similar à do CBERS e um sistema de propulsão contínua.

Ainda foram simuladas manobras utilizando os parâmetros de propulsão do propulsor a plasma, em desenvolvimento na Universidade de Brasília.

Para o caso em que o satélite apresenta uma órbita com os valores nominais do CBERS, foram consideradas manobras com o intuito de corrigir pequenas variações em sua órbita. De acordo com o trabalho de Rocco (1999), as características nominais do CBERS-1, consideradas nas análises de missão efetuadas naquela época, são dadas na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Órbita nominal do CBERS.

ÓRBITA NOMINAL DO CBERS	
Semi-eixo maior (Km)	7148,865
Excentricidade	0,0011

(continua)

Tabela 5.9 – Continuação

Inclinação (graus)	98,5045
Argumento do Perigeu (graus)	90

Fonte: Rocco (1999)

As tolerâncias permitidas para a missão estão especificadas na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 – Tolerâncias permitidas para os elementos orbitais do CBERS.

ELEMENTO ORBITAL	TOLERÂNCIA
Semi-eixo maior	Menor que 50 metros
Excentricidade	Menor que 0,0001
Inclinação	Menor que 0,01 graus
Argumento do Perigeu	Menor que 5 graus

Fonte: Rocco (1999)

Os parâmetros do sistema de propulsão a plasma em desenvolvimento na Universidade de Brasília foram retirados da Tabela 3.1. Foram consideradas, neste caso, manobras que utilizariam um sistema de propulsão com um propulsor PHALL I, e, em outro caso, um sistema de propulsão com dois propulsores PHALL I.

5.3.1. Manobra 5

Neste exemplo, foi considerada uma pequena variação nos elementos da órbita de um satélite que possui a orbital nominal igual à do CBERS, dada pela Tabela 5.9. A realização da manobra orbital teve como objetivo atingir as tolerâncias permitidas dos elementos orbitais dados na Tabela 5.10.

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 7142,865 Km;
- Excentricidade: 0,0001;
- Inclinação: 98,5054 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 0 graus;
- Argumento do perigeu: 92 graus;
- Anomalia verdadeira: 220 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg;
- Empuxo disponível: 1,0 N;
- Posição inicial: 0,0;
- Velocidade de ejeção de gases: 4,5 Km/s;

c) Vínculo no controle:

- Não possui vínculo no controle.

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 7148,865 Km;
- Excentricidade: 0,0011;
- Argumento do Perigeu: 90 graus.

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,05 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0001;
- Número de fases de busca: 1;
- Tolerância na direção de busca: 0,01;
- Razão de contração: -0,1;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 30 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 0,5 Kg.

Os dados da variação de “pitch” e em relação ao “range angle” estão apresentados na Figura 5.5.

Houve uma pequena variação no ângulo de “yaw”, porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de “yaw” pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de "yaw" foi entre -0,5 a 1 grau. O gráfico da variação de "yaw" será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

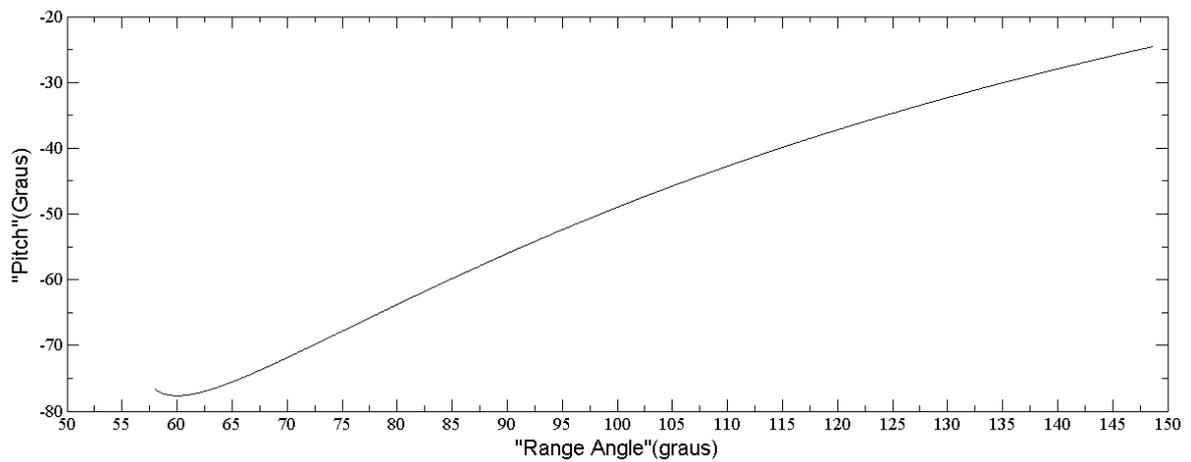


Figura 5.5 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 5.

Já os demais valores de saída obtidos estão na Tabela 5.11 e 5.12.

Tabela 5.11 – Consumo e duração da manobra 5.

VARIÁVEL	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	0,3360
Duração (s)	1512,1

Tabela 5.12 – Órbita atingida da manobra 5.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	7148,866
Excentricidade	0,0011
Inclinação (graus)	98,5057
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	0,0
Argumento do perigeu (graus)	90,60
Anomalia verdadeira (graus)	10,06

A escolha da tolerância para o zero numérico na busca da satisfação dos vínculos foi satisfatória, pois o resultado está dentro da tolerância permitida. Observa-se que os valores de tolerância para a órbita final foram atendidos de acordo com as Tabelas 5.9 e 5.10.

5.3.2. Manobra 6

Neste exemplo, foi considerado que o veículo espacial possuísse um sistema de propulsão com dois propulsores PHALL I e seus parâmetros dados pela Tabela 3.1. O vínculo da orbital final é o semi-eixo maior com o valor igual à da Tabela 5.9 e a tolerância permitida está de acordo com a Tabela 5.10.

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 7130,865 Km;
- Excentricidade: 0,0035;
- Inclinação: 98,5054 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 0 graus;
- Argumento do perigeu: 0 graus;
- Anomalia verdadeira: 220 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg.;
- Empuxo disponível: 0,252 N;
- Posição inicial: 0,0;

- Velocidade de ejeção de gases: 10,613 Km/s (Este dado não é retirado da Tabela 3.1, porém pode ser obtido a partir dos outros parâmetros fornecidos);

c) Vínculo no controle:

- Não possui vínculo no controle;

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 7148,865 Km;

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,05 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0002;
- Número de fases de busca: 3;
- Tolerância na direção de busca: 0,05/ 0,03/ 0,01;
- Razão de contração: -0,01 /-0,006/-0,00006;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 30 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;

- Combustível necessário à manobra: 0,5 Kg;

Os dados da variação de “pitch” e em relação ao “range angle” estão apresentados na Figura 5.6.

Houve uma pequena variação no ângulo de “yaw”, porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de “yaw” pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de "yaw" foi entre -0,35 a 0,35 graus. O gráfico da variação de "yaw" será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

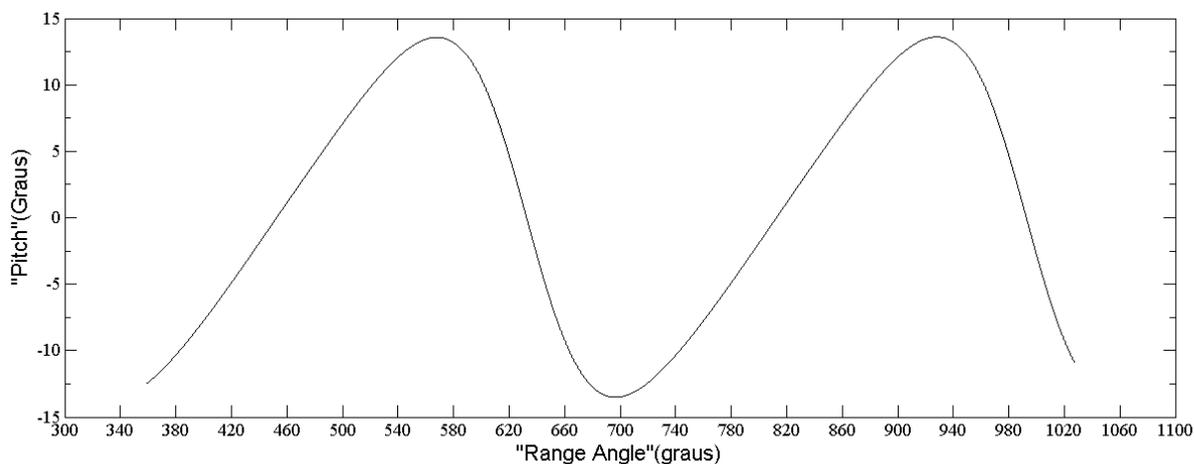


Figura 5.6 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 6.

Já os demais valores obtidos estão na Tabela 5.13 e 5.14.

Tabela 5.13 – Consumo e duração da manobra 6.

VARIÁVEL	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	0,2645
Duração (s)	11140,9

Tabela 5.14 – Órbita atingida da manobra 6.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	7148,867
Excentricidade	0,0037
Inclinação (graus)	98,5054
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	55,0
Argumento do perigeu (graus)	0,67
Anomalia verdadeira (graus)	166,54

As tolerâncias na satisfação dos vínculos e na de busca foram os mesmos valores utilizados na maioria dos exemplos. Observa-se que o valor de tolerância do erro para a órbita final foi atendido.

5.3.3. Manobra 7

Neste exemplo, a órbita inicial e a condição imposta à órbita final é idêntica à manobra 1, porém o sistema propulsivo é dado pelos parâmetros da Tabela 3.1. Neste exemplo é considerado um sistema propulsivo que possui apenas um propulsor PHALL I.

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 99000 Km;
- Excentricidade: 0,7;
- Inclinação: 10 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 55 graus;

- Argumento do perigeu: 105 graus;
- Anomalia verdadeira: -105 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 300 Kg.;
- Empuxo disponível: 0,126 N;
- Posição inicial: 0,0;
- Velocidade de ejeção de gases: 10,613 Km/s (Não é fornecido na referência, porém é facilmente calculado a partir dos outros parâmetros fornecidos).

c) Vínculo no controle:

- Não possui vínculo no controle.

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 104000 Km.

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 0,05 graus;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,0002;
- Número de fases de busca: 1;
- Tolerância na direção de busca: 0,03;
- Razão de contração: -0,1;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 20 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 0,5 Kg;

Os dados da variação de “pitch” e em relação ao “range angle” estão apresentados na Figura 5.7.

Houve uma pequena variação no ângulo de “yaw”, porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de “yaw” pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de "yaw" foi entre -0,002 a 0,1 grau. O gráfico da variação de "yaw" será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

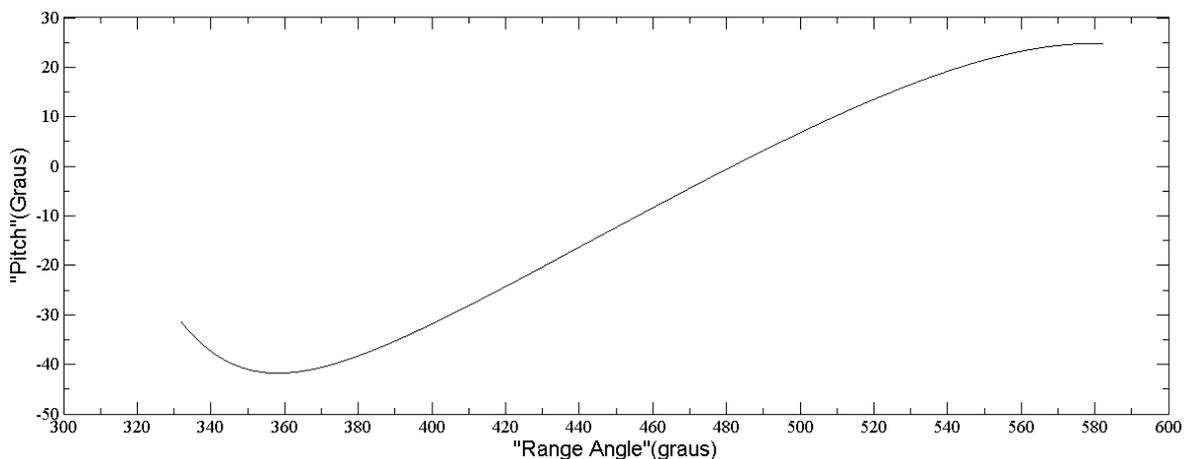


Figura 5.7 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 7.

Já os demais valores obtidos estão na Tabela 5.15 e 5.16.

Tabela 5.15 – Consumo e duração da manobra 7.

VARIÁVEL	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	0,8775
Duração (s)	69644,57

Tabela 5.16 – Órbita atingida da manobra 7.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	103999,28
Excentricidade	0,710
Inclinação (graus)	10,0
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	55,0
Argumento do perigeu (graus)	105,0
Anomalia verdadeira (graus)	117,35

Neste exemplo foram utilizados os parâmetros do propulsor desenvolvido na UnB para simular a mesma manobra proposta na manobra 1. A tolerância na satisfação dos vínculos foi a mesma utilizada na manobra 1, porém a tolerância na busca da função objetivo aumentou de 0,01 para 0,03 e o foi realizado apenas uma busca, ao contrário da manobra 1, onde foram realizadas três buscas, com diferentes valores para a tolerância para a satisfação da função objetivo.

Neste exemplo, como o propulsor utilizado possui uma magnitude de empuxo menor comparado com a manobra 1, e portanto o tempo de processamento foi maior, apesar do passo de integração neste exemplo ser menor. Dessa forma foi realizada somente uma busca na satisfação da função objetivo devido ao

tempo de processamento. O menor valor da tolerância na satisfação dos vínculos que garantisse a convergência foi, portanto, 0,03.

Este exemplo obteve um consumo bem menor comparado com a manobra 1 devido ao propulsor ser diferente, porém a duração da manobra foi maior.

5.3.4. Manobra 8

Os dados iniciais da manobra 8 são os mesmos dados utilizados na manobra 7, com exceção do vínculo no controle, no qual o ângulo de “pitch” deve permanecer entre 5 graus e -5 graus. Este exemplo é similar à manobra 2, porém neste caso utiliza-se no sistema propulsivo um propulsor PHALL I desenvolvido na UnB.

Os dados da variação de “pitch” e em relação ao “range angle” estão apresentados na Figura 5.8.

Houve uma pequena variação no ângulo de “yaw”, porém como a mudança orbital é no plano, a manobra ótima está confinada no mesmo plano da órbita inicial e a pequena variação de “yaw” pode ser interpretada como erro numérico. A variação do ângulo de “yaw” foi entre -0,05 a 0,18 graus. O gráfico da variação de “yaw” será omitido neste trabalho por não apresentar resultados relevantes.

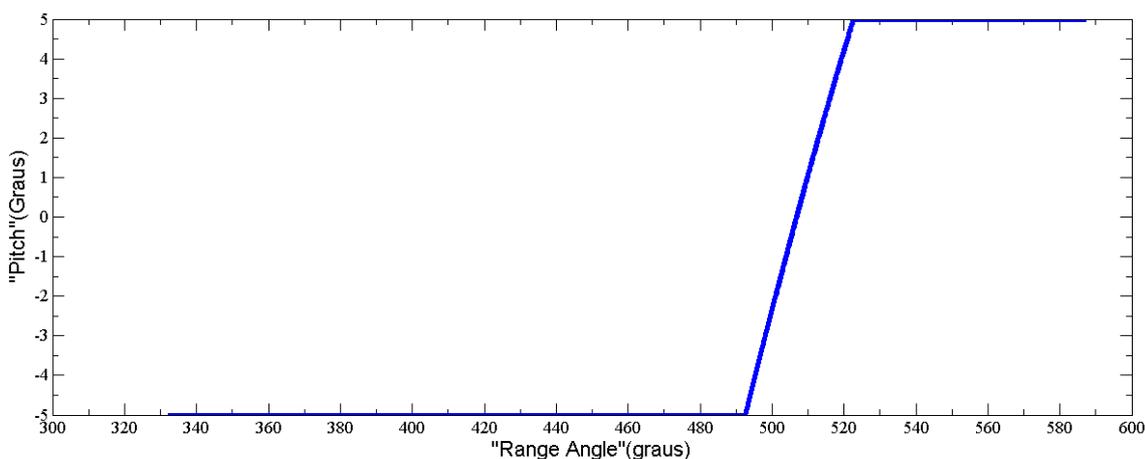


Figura 5.8 – Ângulo de controle “pitch” em função do “range angle” para a manobra 8.

Já os demais valores obtidos estão na Tabela 5.17 e 5.18.

Tabela 5.17 – Consumo e duração da manobra 8.

VARIÁVEL	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	0,9352
Duração (s)	74221,15

Tabela 5.18 – Órbita atingida da manobra 8.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	103999,61
Excentricidade	0,709
Inclinação (graus)	10
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	55,0
Argumento do perigeu (graus)	105,0
Anomalia verdadeira (graus)	122,62

Com o vínculo no controle, determinado neste exemplo, o consumo foi ligeiramente maior comparado com o exemplo no qual não existe esse vínculo, dado pela manobra 7. É possível ver claramente que a variação nos ângulos de “pitch” está confinada entre -5 a 5 graus.

5.3.5. Manobra 9

Este exemplo tem como objetivo realizar uma manobra que inclui uma mudança no plano orbital. Os dados da órbita vem a seguir.

Dados de entrada:

a) Órbita inicial:

- Semi-eixo maior: 7500Km;
- Excentricidade: 0,5;
- Inclinação: 5 graus;
- Ascensão reta do nodo ascendente: 0 graus;
- Argumento do perigeu: 0 graus;
- Anomalia verdadeira: 90 graus;

b) Dados iniciais do veículo:

- Massa total (veículo + combustível): 11300 Kg.;
- Empuxo disponível: 7800N;
- Posição inicial: 0,0;
- Velocidade de ejeção de gases: 4,25 Km/s;

c) Vínculo no controle:

- Não possui vínculo no controle;

d) Condição imposta à órbita final:

- Semi-eixo maior: 109000 Km;
- Inclinação: 0 graus;

e) Parâmetros numéricos utilizados:

- Passo de integração: 1 grau;
- Tolerância na satisfação dos vínculos: 0,035;

- Número de fases de busca: 1;
- Tolerância na direção de busca: 0,05;
- Razão de contração: -0,1;

f) Estimativa inicial da solução:

- Início de propulsão: 0 graus;
- Fim de propulsão: 20 graus;
- Ângulo de "pitch" inicial: 0 graus;
- Ângulo de "yaw" inicial: 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "pitch": 0 graus;
- Taxa inicial de variação em "yaw": 0 graus;
- Combustível necessário à manobra: 2000 Kg;

Os dados da variação de "pitch" e "yaw" em relação ao "range angle" estão apresentados na Figura 5.9 e na Figura 5.10.

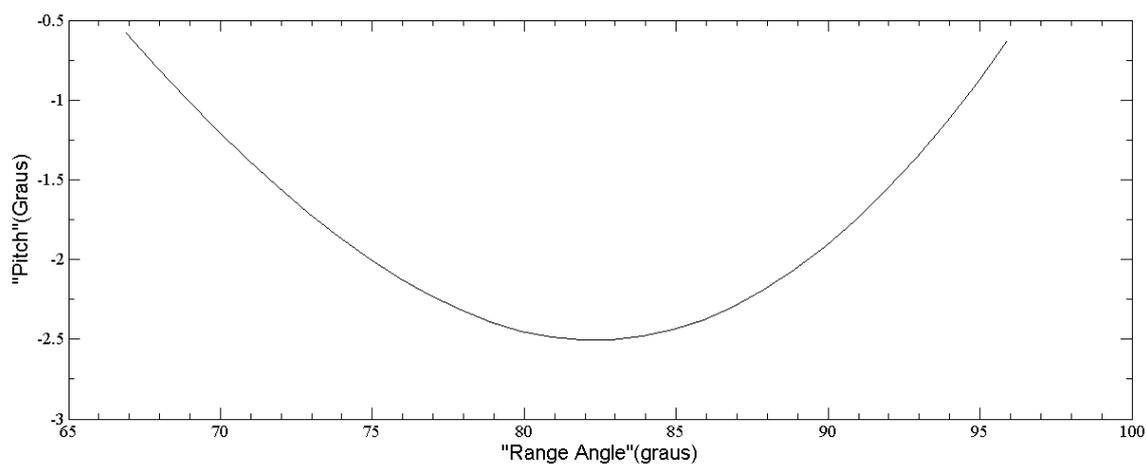


Figura 5.9 – Ângulo de controle "pitch" em função do "range angle" para a manobra 9.

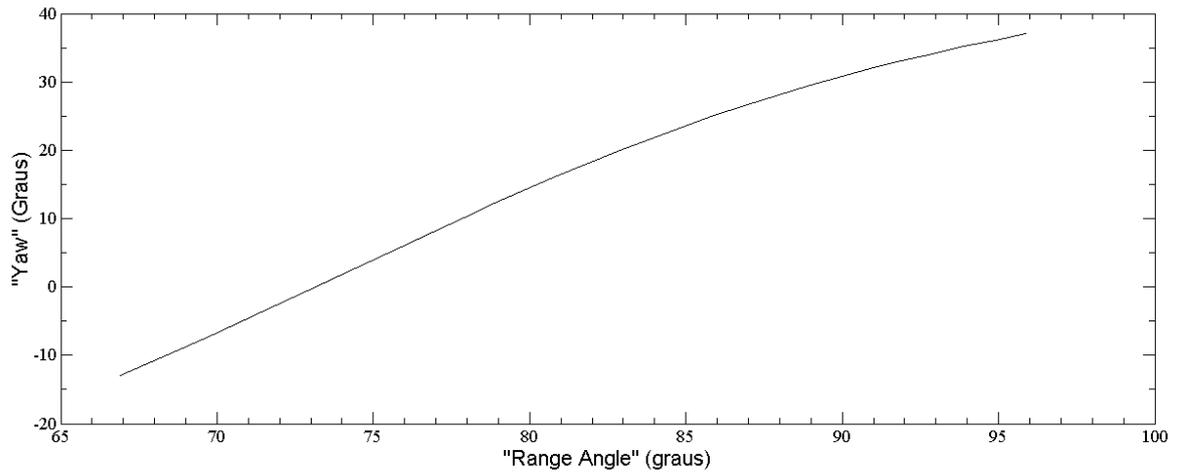


Figura 5.10 – Ângulo de controle “yaw” em função do “range angle” para a manobra 9.

Já os demais valores obtidos estão na Tabela 5.19 e 5.20.

Tabela 5.19 – Consumo e duração da manobra 9.

VARIÁVEL	SOL. DO SOFTWARE
Consumo (Kg)	2028,056
Duração (s)	1105,03

Tabela 5.20 – Órbita atingida da manobra 9.

ÓRBITA EFETIVAMENTE ATINGIDA	SOL. DO SOFTWARE
Semi-eixo maior (Km)	10861,56
Excentricidade	0,1156
Inclinação (graus)	0,165
Ascensão reta do nodo ascendente (graus)	0,0
Argumento do perigeu (graus)	0,0
Anomalia verdadeira (graus)	0,0

Este exemplo teve como objetivo realizar uma manobra com uma mudança no plano orbital. Neste exemplo foi difícil encontrar soluções para o zero numérico na satisfação dos vínculos de 0,0002 utilizado em vários exemplos. Para a garantia de convergência o menor valor viável foi o de 0,035. Assim como para garantir a convergência, o menor zero numérico na busca da função objetivo foi de 0,05.

A manobra ótima foi encontrada com sucesso de acordo com os parâmetros numéricos estipulados. É possível ver claramente que com um valor maior para a tolerância na satisfação dos vínculos, o erro no semi-eixo maior foi bem maior comparado com o erro nos outros exemplos.

6 SIMULAÇÃO DAS MANOBRAS ORBITAIS ÓTIMAS

Neste capítulo são realizadas simulações de algumas manobras calculadas no capítulo anterior utilizando o ambiente de simulação SRTS. A justificativa das simulações, assim como uma explicação mais detalhada do simulador utilizado vem a seguir.

Uma vez obtida a solução ótima para o problema, deve-se simular a aplicação dessa solução da forma mais realista possível. Para isto vários aspectos que não foram considerados na modelagem do problema devem ser considerados na simulação. Por exemplo, as características construtivas e de operação dos subsistemas que compõe o veículo, tais como: não linearidades, falhas, erros e perturbações externas e internas, devem ser avaliadas de maneira a determinar o desvio na reprodução da solução ótima definida anteriormente.

Todas essas características poderiam fazer parte da modelagem do problema, e portanto, a solução ótima já contemplaria todos esses efeitos. No entanto, não é possível prever com exatidão quando uma falha ocorrerá, ou ainda, prever a magnitude do erro na trajetória devido a um sensor ou atuador defeituoso. Um modelo que levasse em conta todos os aspectos do problema seria extremamente complexo e de difícil solução.

Além disso, para manobras que utilizam propulsão contínua recomenda-se a utilização de um sistema de controle de trajetória em malha fechada (MARCELINO, 2009). Esse sistema de controle deve ser projetado para corrigir os desvios, causados por todos os fatores acima mencionados, tornando o sistema o mais robusto possível.

Portanto, pode-se dividir o estudo do problema de manobrar um veículo utilizando propulsão contínua em duas partes fundamentais: a obtenção da manobra ótima e a simulação da aplicação da manobra.

A obtenção da solução ótima do problema, obtida por meio dos métodos clássicos de otimização e pelo software desenvolvido, foi apresentada nos itens anteriores. Os resultados da simulação das manobras ótimas, obtidos por meio do software STRS, serão apresentados nos itens 6.1 e 6.2.

Pode-se resumir a estrutura de funcionamento do ambiente de simulação STRS da seguinte maneira (Rocco, 2008).

- a) A simulação ocorre de forma discreta, ou seja, a cada passo da simulação (tempo de amostragem) o estado do veículo (posição e velocidade) deve ser calculado. Para isso todos os efeitos de perturbação, não linearidades, erros e falhas devem ser determinados.
- b) Como se trata de um sistema de controle em malha fechada, ocorre a determinação do estado de referência, que é determinado pela aplicação da manobra ótima, e a determinação do estado atual que segue o estado de referência, mas considera os efeitos das perturbações e das características construtivas do veículo.
- c) A diferença entre o estado de referência e o estado atual gera um sinal de erro que é inserido em um controlador PID (proporcional, integral e derivativo).
- d) O controlador produz um sinal de controle de acordo com a lei de controle PID e os ganhos que foram ajustados.
- e) Por sua vez, o sinal de controle é inserido no modelo do atuador (propulsor) onde as não linearidades inerentes à construção do atuador podem ser consideradas. Dessa forma, o comportamento do propulsor pode ser reproduzido por meio do adequado ajuste dos parâmetros do modelo, que são fornecidos pelo fabricante do atuador.

- f) Finalmente, um sinal de atuação (V) é enviado ao modelo da dinâmica do movimento orbital. A esse sinal de atuação ainda poderiam ser somados os incrementos de velocidade devidos às perturbações orbitais.
- g) Com o sinal de atuação, somado as possíveis perturbações, o modelo da dinâmica orbital fornece o estado (posição e velocidade) após a aplicação da propulsão.
- h) Por meio da utilização de sensores, modelados de forma a considerar os seus aspectos construtivos, determina-se o estado atual que será comparado com o estado de referência de maneira a fechar a malha de controle.

6.1. Simulação da manobra obtida na manobra 1

Nesta simulação as direções de “pitch” e “yaw”, determinadas pelo software desenvolvido para o cálculo da manobra ótima, foram consideradas como dados de entrada para o ambiente de simulação STRS. Também foram consideradas as mesmas órbitas, inicial e final, e o mesmo valor de impulso específico (equivalente à velocidade de ejeção de 2,5 Km/s) utilizados na manobra 1. Inicialmente tentou-se apenas reproduzir a manobra ótima para validar os resultados obtidos. O cálculo da manobra ótima determinou um gasto total de combustível de 2,4188 kg. O valor do consumo total fornecido pelo simulador STRS, para o caso onde todas as não linearidades e erros estavam desativados, foi de 2,4198 kg, valor próximo ao determinado pela solução ótima. Os resultados são apresentados nas Figuras 6.1 a 6.6.

A Figura 6.1 mostra a força de empuxo aplicada ao longo do tempo. Pode-se notar que existe uma fase de regime transitório até aproximadamente os 250 s da simulação. Este regime transitório ocorre devido ao fato de se tratar de um sistema de controle em malha fechada. Ele surge no início da manobra quando se liga o propulsor. A Figura 6.2 apresenta um detalhe do regime transitório. O

comportamento do sistema de controle pode ser ajustado alterando-se os ganhos do controlador PID de maneira a obter uma resposta adequada à missão, porém as análises dos ganhos e do desempenho do controlador não fazem parte dos objetivos deste trabalho. Assim, optou-se por uma resposta sub-amortecida para destacar a atuação do sistema de controle. No entanto essa resposta provoca um desvio maior com relação à manobra ótima. Mesmo assim o sistema de controle foi capaz de trazer a força de empuxo aplicada para próximo do valor de 1 N que é o valor determinado pela referência.

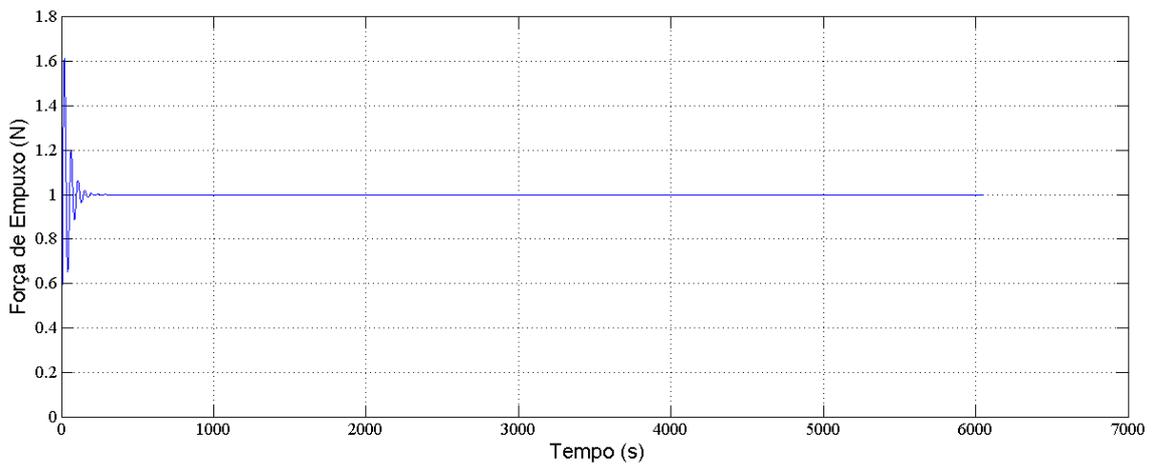


Figura 6.1 – Força de empuxo aplicada para a manobra 1.

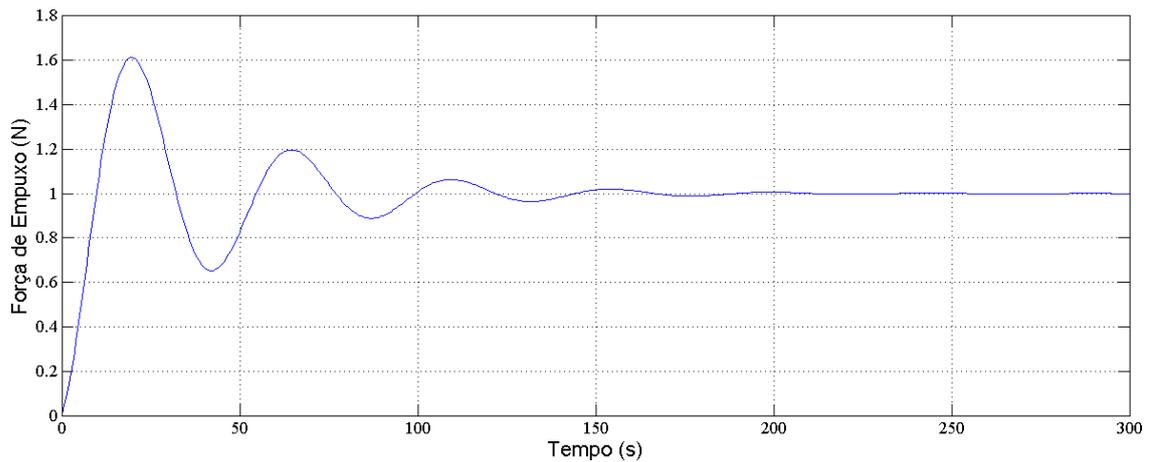


Figura 6.2 – Detalhe da força de empuxo aplicada para a manobra 1.

As Figuras 6.3 e 6.4 mostram o desvio da excentricidade ao longo do tempo. Este desvio é a diferença entre o valor da excentricidade da órbita durante a transferência, determinada pela manobra ótima, e o valor da excentricidade atual. Percebe-se que existe novamente um regime transitório que coincide com o regime transitório apresentado nas figuras 6.1 e 6.2 com relação à força aplicada. Isto é esperado já que o desvio na força obrigatoriamente produzirá um desvio nos elementos keplerianos. Porém, logo a seguir, o desvio torna-se praticamente zero.

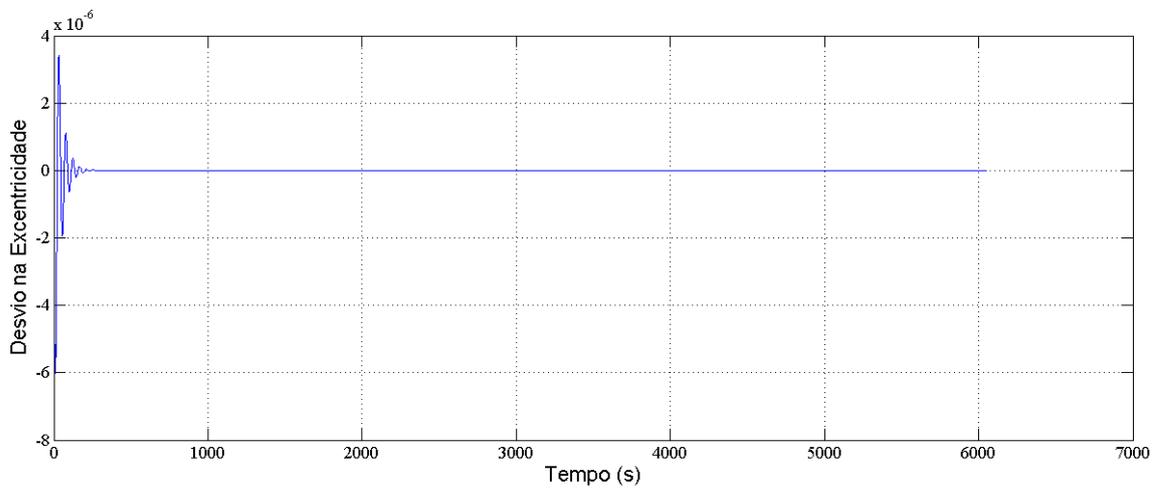


Figura 6.3 – Desvio na excentricidade da órbita de transferência para a manobra 1.

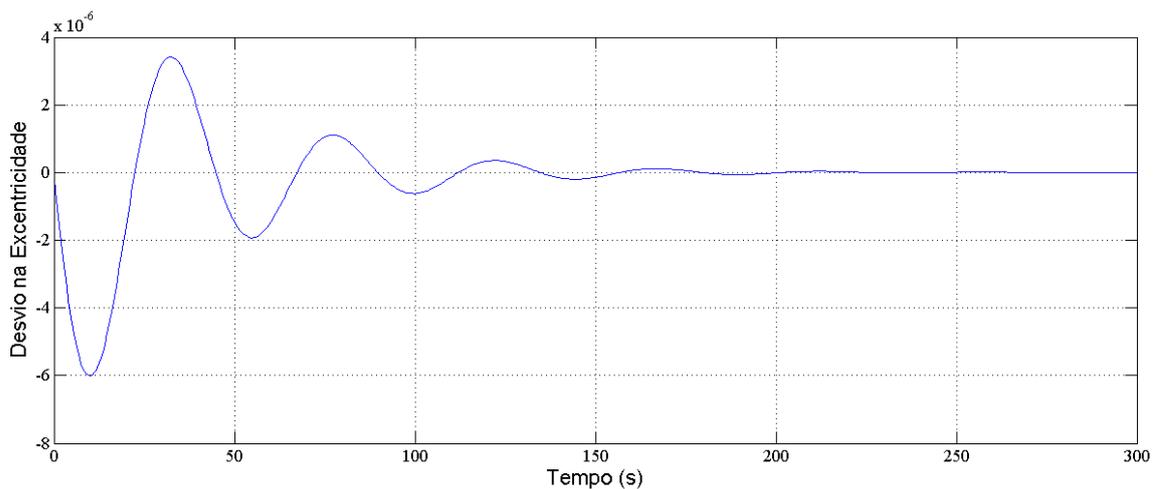


Figura 6.4 – Detalhe do desvio na excentricidade da órbita de transferência para a manobra 1.

As Figuras 6.5 e 6.6 mostram o desvio do semi-eixo maior ao longo do tempo. A evolução do desvio do semi-eixo maior da órbita durante a transferência apresenta as mesmas características do desvio da excentricidade, inclusive com um regime transitório semelhante. Mais uma vez o desvio torna-se praticamente zero, o que mostra que o sistema de controle foi capaz de seguir a trajetória ótima a contento.

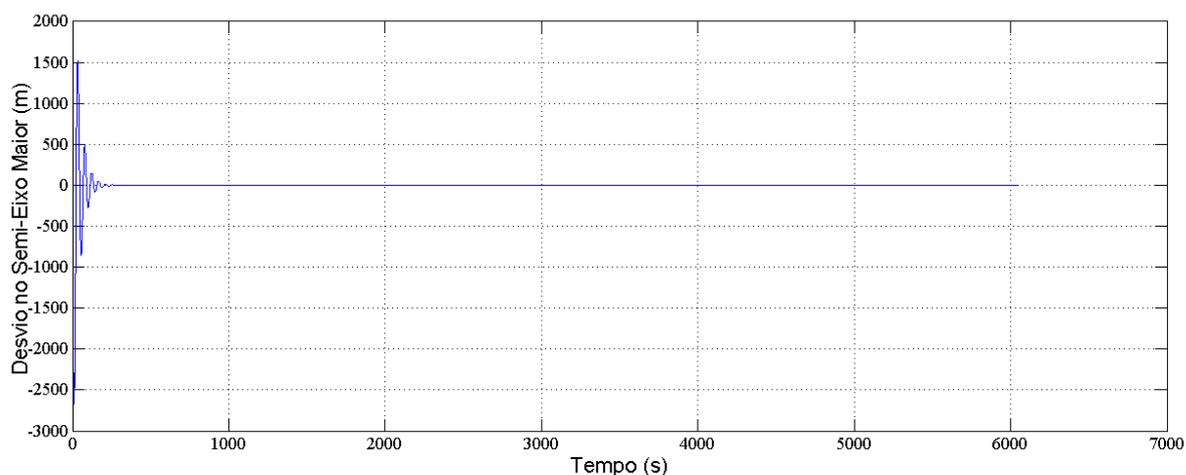


Figura 6.5 – Desvio no semi-eixo maior da órbita de transferência para a manobra 1.

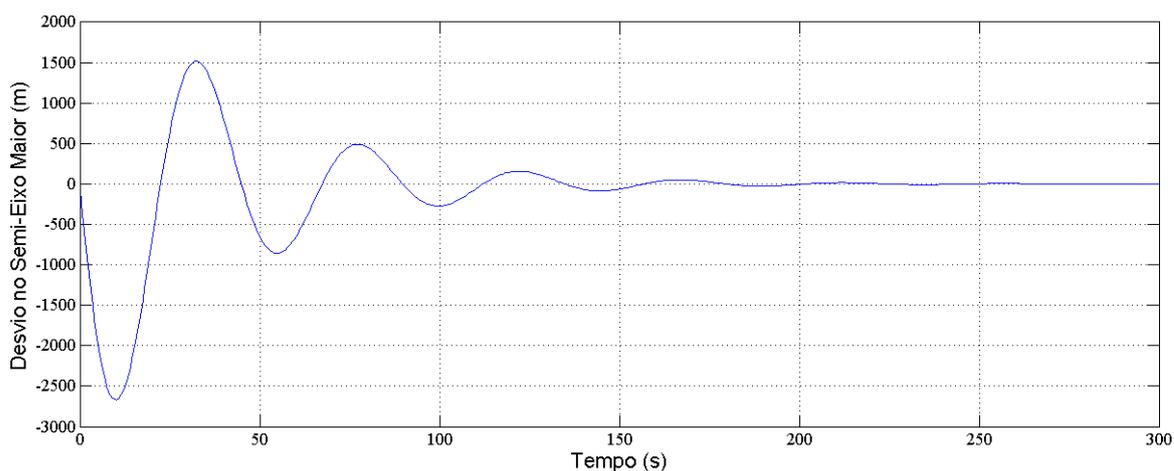


Figura 6.6 – Detalhe do desvio no semi-eixo maior da órbita de transferência para a manobra 1.

As Figuras 6.7 a 6.12 ilustram uma segunda simulação usando o STRS, ainda tendo como base a manobra ótima determinada para a manobra 1, mas agora considerando que existe um erro de magnitude e direção da força de empuxo aplicada. Esse erro pode ser modelado como sendo um ruído representado por uma variância e um viés, como mostram as Figuras 6.7 e 6.8. Percebe-se que a força não se estabiliza no valor de referência de 1 N mesmo depois do regime transitório.

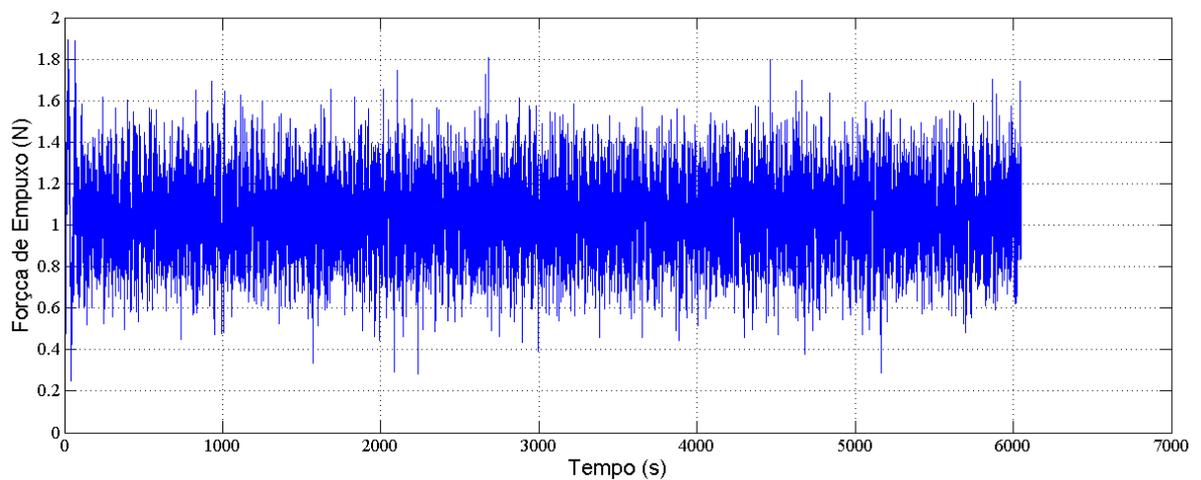


Figura 6.7 – Força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 1.

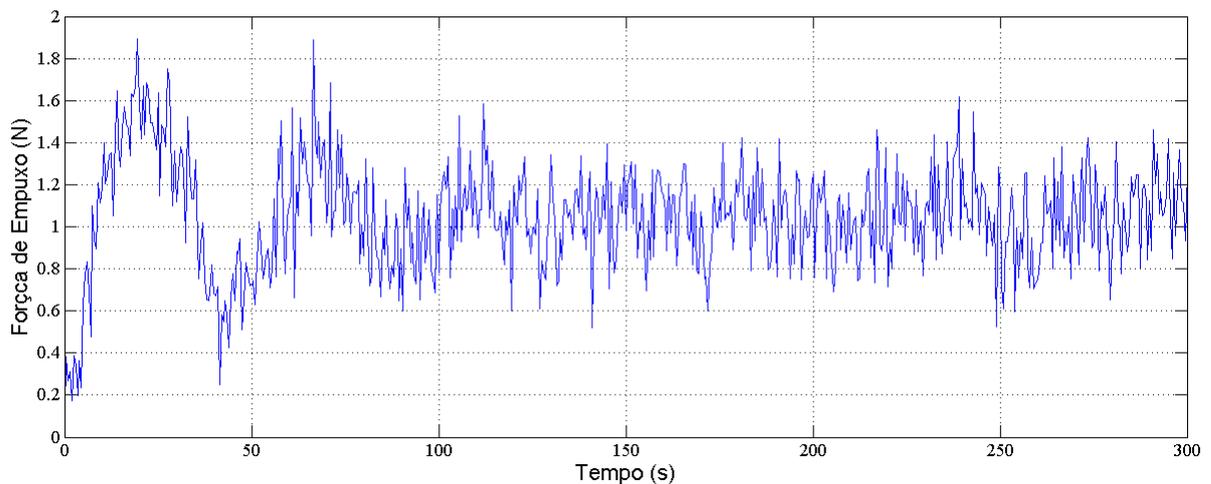


Figura 6.8 – Detalhe da força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 1.

As Figuras 6.9 e 6.10 mostram o desvio na velocidade absoluta do veículo. Mais uma vez fica evidente o efeito do erro na aplicação da força de empuxo. O desvio na velocidade do veículo com relação à referência causa um desvio semelhante em todos os elementos keplerianos da órbita.

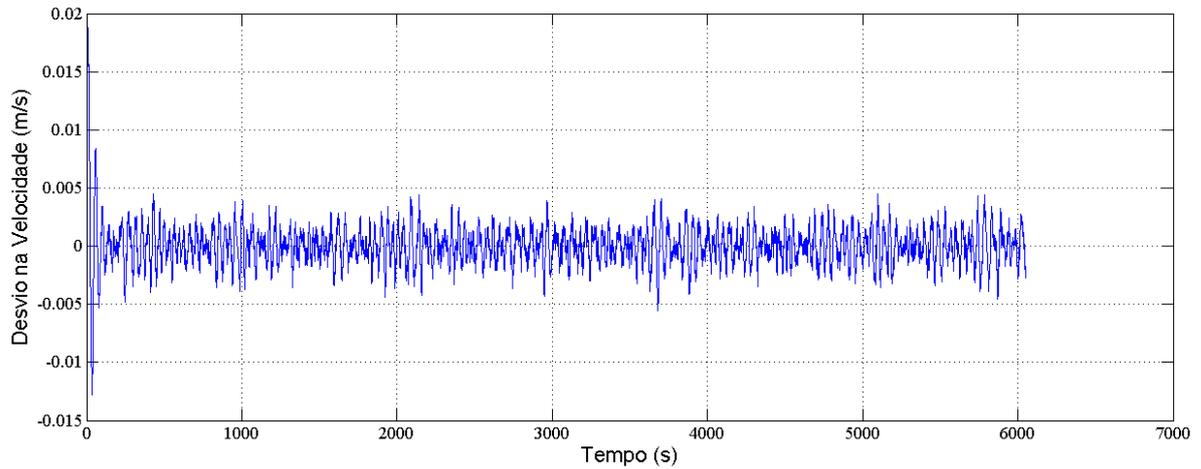


Figura 6.9 – Desvio na velocidade absoluta do veículo considerando erro nos propulsores para a manobra 1.

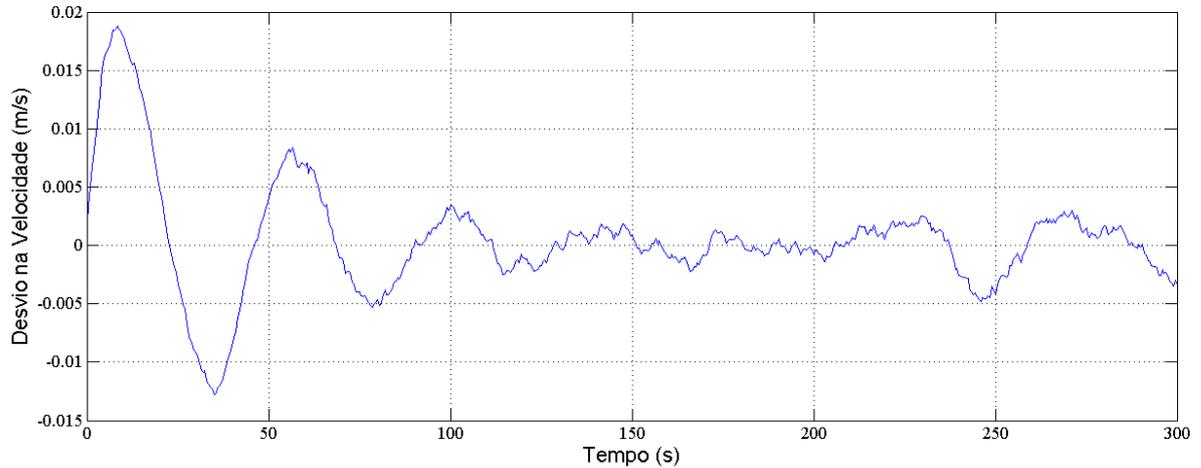


Figura 6.10 – Detalhe do desvio na velocidade absoluta do veículo considerando erro nos propulsores para a manobra 1.

Devido ao fato de existirem erros na aplicação da força, o gasto total de combustível deve ser maior que o gasto determinado pela manobra ótima. A Figura 6.11 apresenta a diferença entre o gasto de combustível quando se consideram os erros e o gasto de combustível ótimo, essa diferença foi de

aproximadamente 98 g. A Figura 6.12 mostra o período em que ocorre o regime transitório.

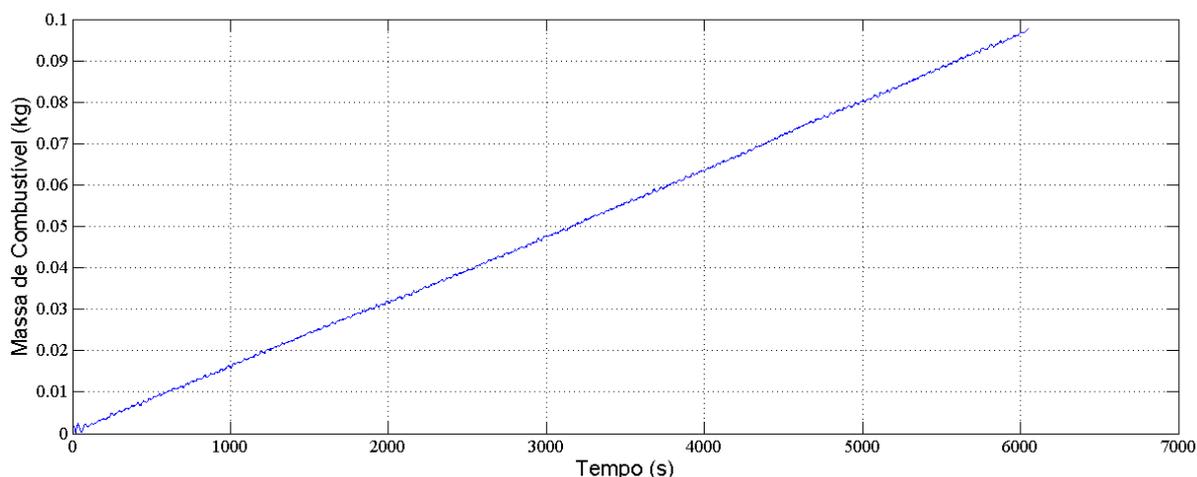


Figura 6.11 – Diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 1.

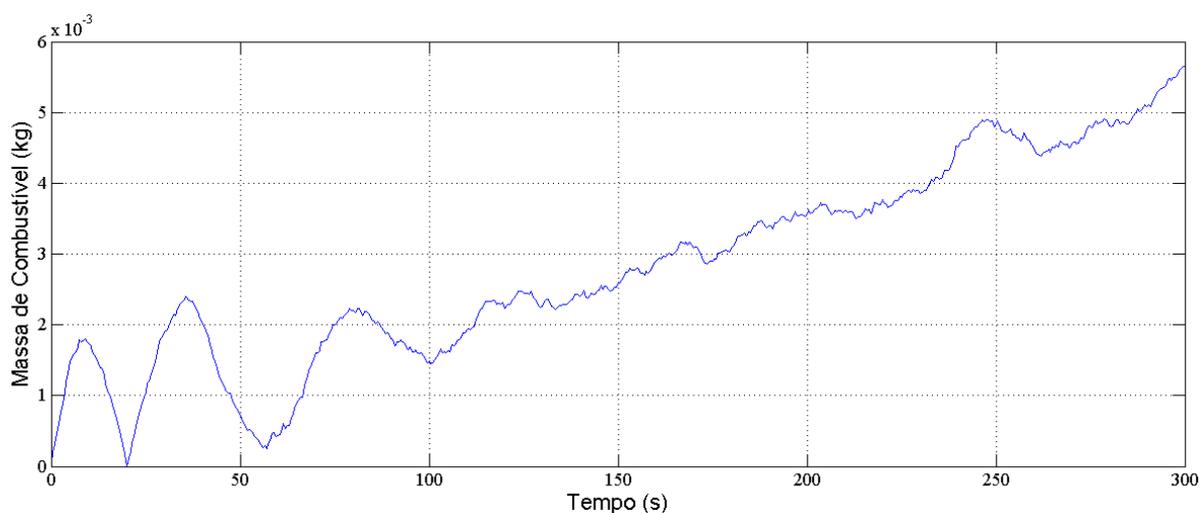


Figura 6.12 – Detalhe da diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 1.

6.2. Simulação da manobra obtida na manobra 3

Nesta simulação as direções de “pitch” e “yaw”, determinadas pelo cálculo da manobra ótima para a manobra 3, foram consideradas como dados de entrada para o ambiente de simulação STRS. Novamente, realizou-se em uma primeira simulação apenas a reprodução da manobra ótima para validar os resultados

obtidos. Neste caso, o cálculo da manobra ótima determinou um gasto total de combustível de 3,2839 kg. O valor do consumo total fornecido pelo simulador STRS, para o caso onde todas as não linearidades e erros estavam desativados, foi de 3,28239 kg, o que tornam válidos os resultados encontrados pelo simulador STRS e pelo software desenvolvido para o cálculo da manobra ótima. As Figuras 6.13 a 6.15 apresentam a evolução de alguns parâmetros ao longo do tempo para esta primeira simulação.

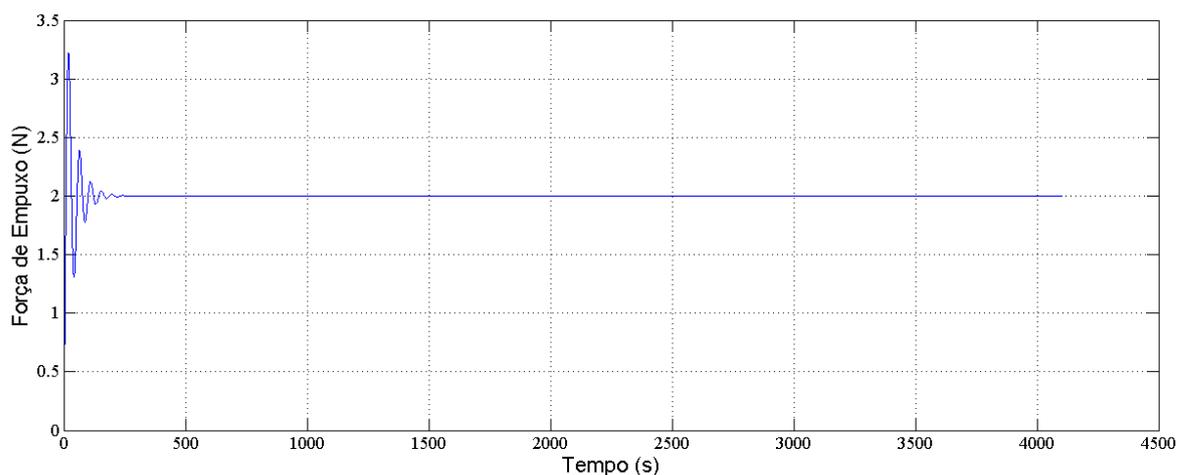


Figura 6.13 – Força de empuxo aplicada para a manobra 3.

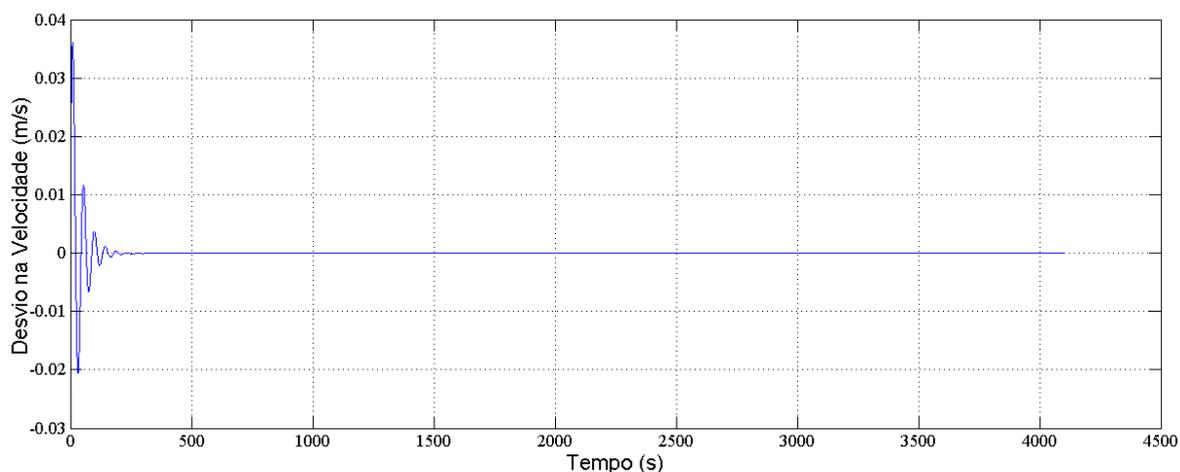


Figura 6.14 – Desvio na velocidade absoluta para a manobra 3.

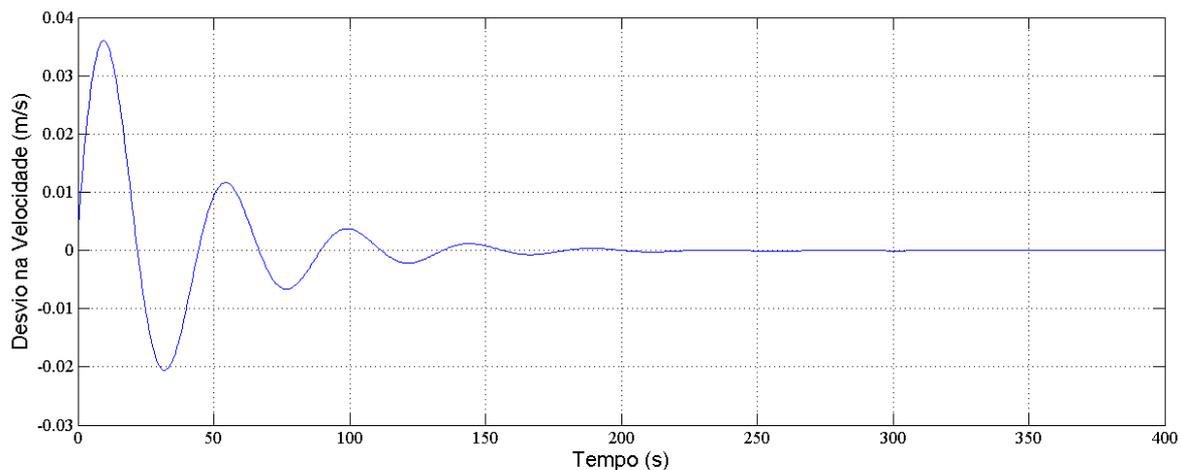


Figura 6.15 – Detalhe do desvio na velocidade absoluta para a manobra 3.

Os resultados obtidos considerando erros nos propulsores são apresentados nas Figuras 6.16 a 6.21. O erro absoluto nos propulsores, representado por um desvio no valor do incremento de velocidade aplicado, pode ser verificado na Figura 6.16. Nota-se que novamente foi aplicado um ruído e um viés na modelagem dos erros dos propulsores. Esses erros provocam desvios na aplicação da força de empuxo mostrada na Figura 6.17. O valor da força oscila em torno do valor de referência de 2N. Mesmo após o regime transitório, evidenciado na Figura 6.18, o valor da força continua oscilando devido aos erros nos propulsores.

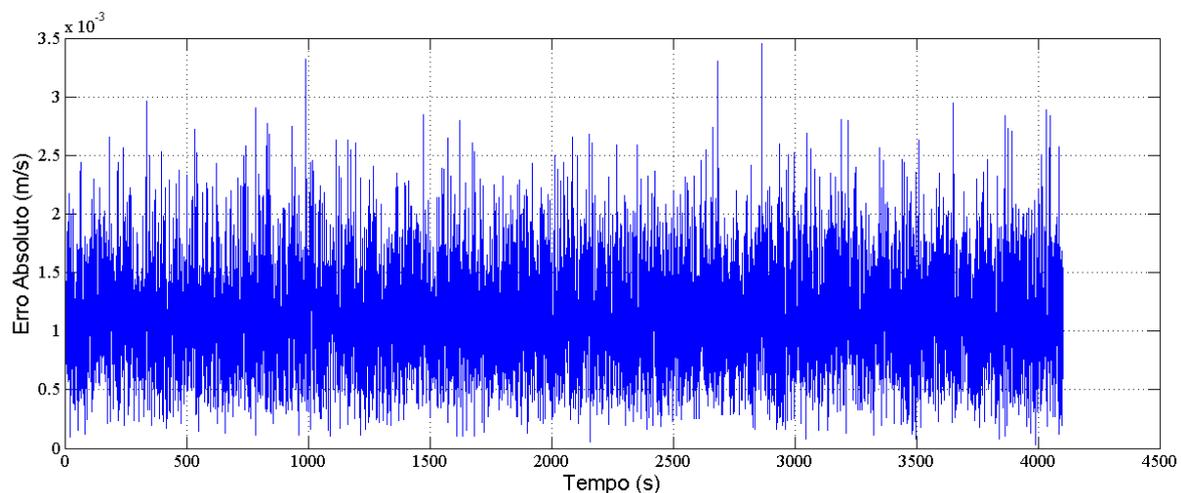


Figura 6.16 – Erro absoluto nos propulsores para a manobra 3.

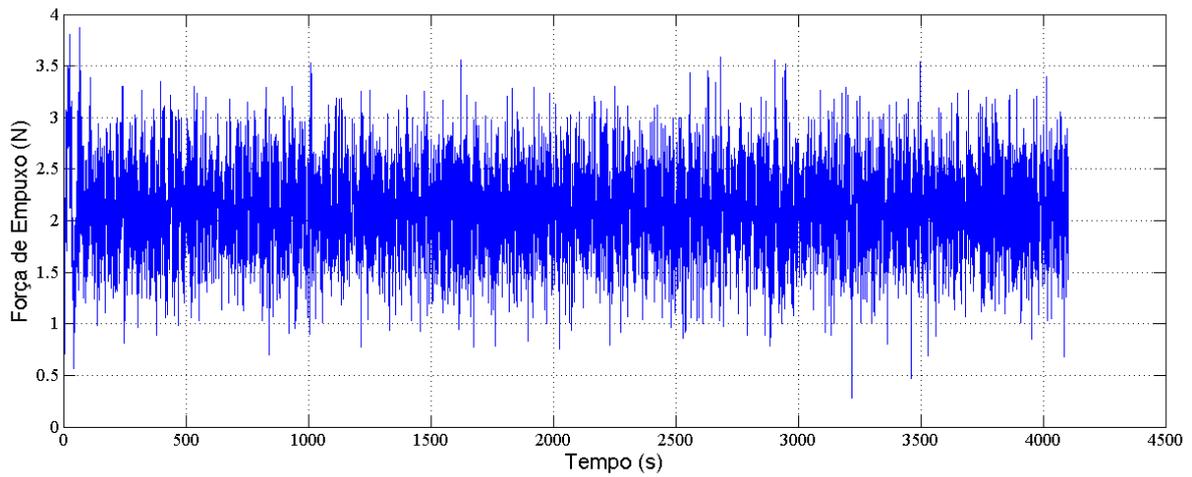


Figura 6.17 – Força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 3.

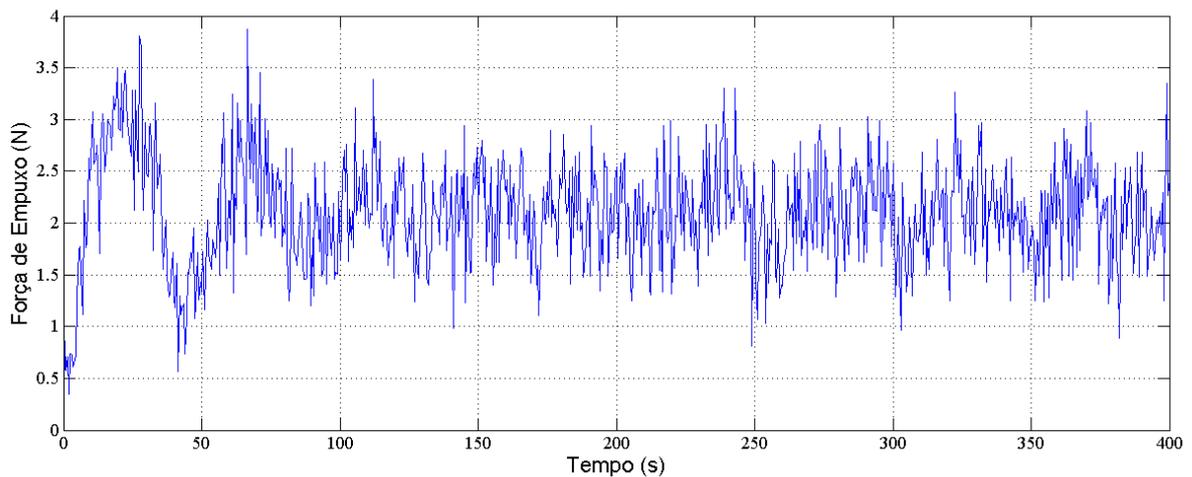


Figura 6.18 – Detalhe da força de empuxo aplicado com erro nos propulsores para a manobra 3.

A Figura 6.19 apresenta o desvio na velocidade absoluta do veículo. Desvios semelhantes ocorrem em todos os elementos keplerianos da órbita.

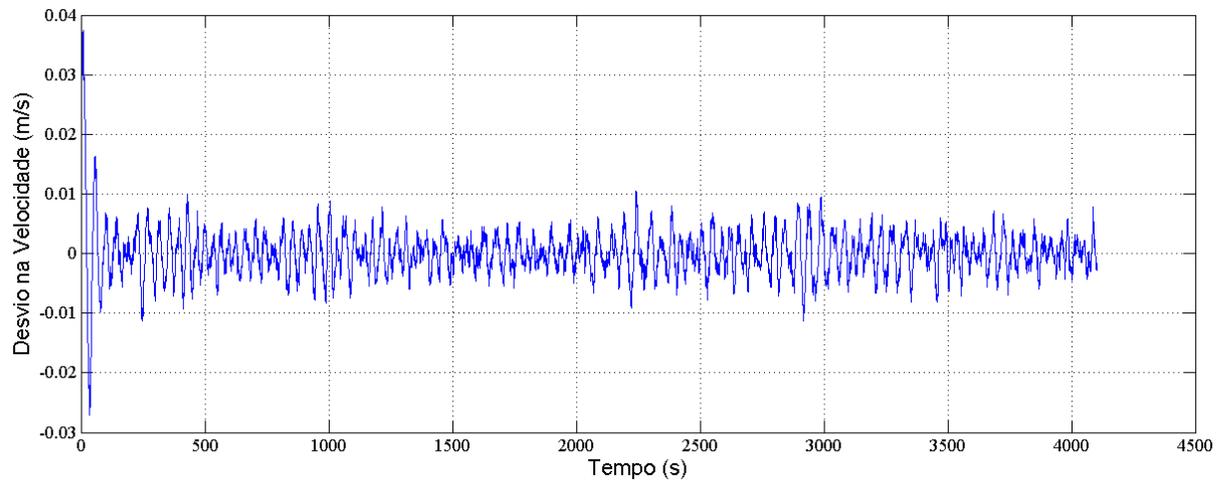


Figura 6.19 – Desvio na velocidade absoluta do veículo considerando erro nos propulsores para a manobra 3.

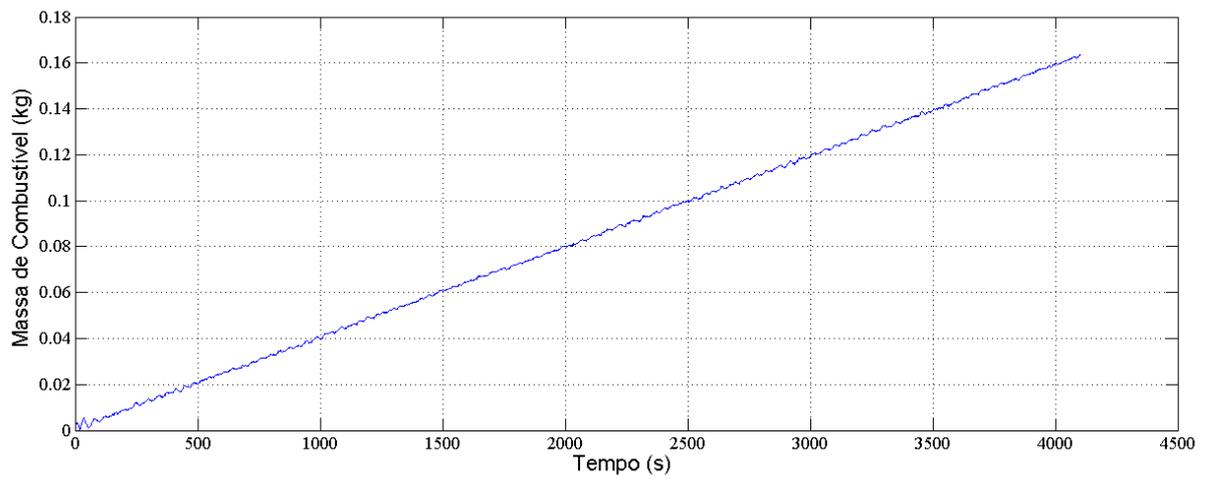


Figura 6.20 – Diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 3.

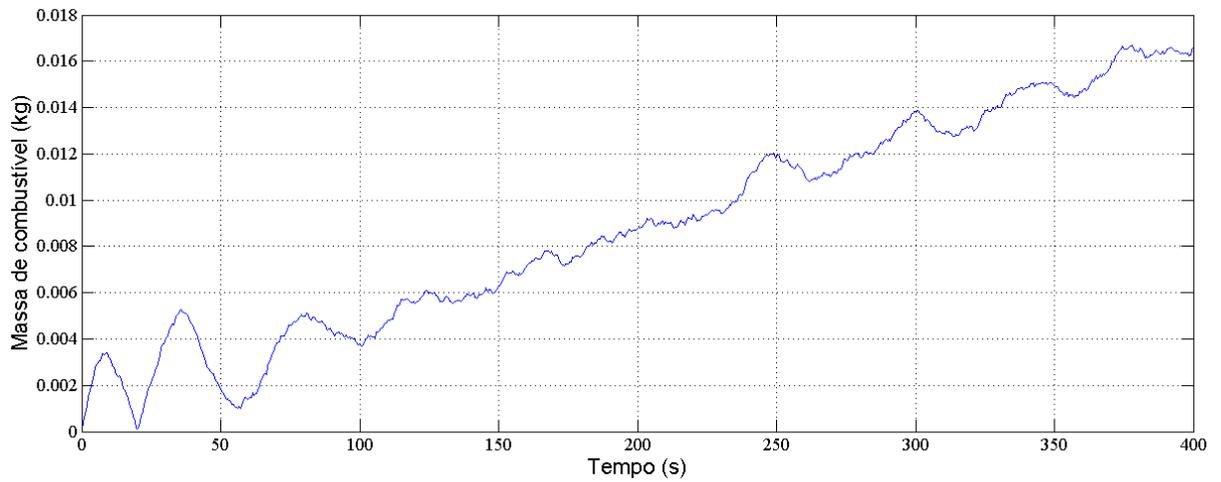


Figura 6.21 – Detalhe da diferença no consumo de combustível quando se consideram os erros nos propulsores para a manobra 3.

A diferença entre o gasto de combustível quando se consideram os erros e o gasto de combustível ótimo é mostrada nas Figuras 6.20 e 6.21. A diferença obtida foi de aproximadamente 163 g.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1. Conclusões

Neste trabalho foi realizado um estudo da literatura existente sobre métodos que visem manobras ótimas, considerando como critério de otimização o menor consumo de combustível, para veículos espaciais. O problema em questão é conhecido como o "problema fundamental da astronáutica". De acordo com a revisão da literatura, embora este problema tenha sido estudado há muitos anos, o tema proposto ainda é atual, pois há vários trabalhos que ainda surgem sobre este assunto.

Além disso, a maior parte dos trabalhos trata de manobras impulsivas. Há poucos trabalhos, em particular no Brasil, sobre manobras ótimas de propulsão contínua.

Neste contexto, esse trabalho pode ser aplicado tanto em manobras de transferência como para correções de órbitas com qualquer magnitude de empuxo. O software desenvolvido foi validado e pode ser utilizado em diversas missões, como mostrado nos exemplos.

O método escolhido para a solução do problema foi ótimo, onde não há parametrização no controle.

Foram realizados testes numéricos para validar o trabalho desenvolvido nas manobras 1 a 4, e apesar de diferentes resultados obtidos entre as soluções do software e da literatura, o requisito fundamental para a validação do trabalho, que é o consumo de combustível, o software desenvolvido apresentou resultados coerentes com a literatura, e em geral mais eficientes.

Além disso, os resultados obtidos por meio do software desenvolvido mostraram que os resultados apresentados foram coerentes com os resultados obtidos na literatura ou até melhores em relação ao consumo de combustível, assim o software se mostrou mais eficiente em relação às referências.

As manobras que não apresentam restrições quanto as regiões de aplicação de empuxo ou limites no ângulo de controle possuem o menor consumo de combustível, como demonstrado nas manobras 1, 2 e 4 e nas manobras 7 e 8;

O programa com o algoritmo que busca primeiramente uma solução com o zero numérico para a fase de busca da função objetivo com uma maior tolerância, e após essa busca, uma busca mais refinada, com valores para a tolerância menor, apresentou uma melhor eficiência nos resultados e uma melhor precisão para o consumo de combustível;

Foi feita a escolha do "range angle" como a variável independente no equacionamento e solução do problema. Porém, quando uma manobra incluía uma mudança do plano orbital, o "range angle" deixa de ter uma relação geométrica direta com a anomalia verdadeira (PRADO, 1989). E, neste caso, a relação entre o "range angle" e o tempo, definido na Equação 3.16, se torna essencial pois usa-se o tempo para identificar o instante de tempo que o propulsor é ligado ou desligado;

As soluções obtidas mostraram-se dependentes dos parâmetros numéricos escolhidos. A escolha da tolerância para o zero numérico na satisfação de vínculos foi satisfatória, assim como a tolerância para o zero numérico da direção de busca. A escolha foi satisfatória porque, nos exemplos de validação, foram obtidos resultados ligeiramente melhores que os das referências e nos demais exemplos, a satisfação dos vínculos impostos, assim como a tolerância no erro foram atendidos. Porém, nos casos em que não houve uma mudança no plano orbital, os resultados apresentaram uma pequena variação no ângulo de "yaw". A solução é ótima para a tolerância especificada para o zero numérico da direção de busca, e uma solução para refinar a solução obtida e diminuir os erros numéricos associados é refinar a tolerância para o zero numérico na busca do mínimo da função objetivo, acrescentando mais etapas de busca, com tolerâncias cada vez menores.

Por último, as manobras ótimas obtidas nas manobras 1 e 3 foram simuladas no "Spacecraft Trajectory Simulador" (ROCCO 2006, 2008), um programa que simula manobras orbitais em um ambiente em opera em malha fechada. Os resultados obtidos foram satisfatórios, pois o controlador conseguiu atingir a órbita final desejada e o consumo de combustível foi próximo ao consumo da órbita ótima calculada. Com a validação da integração do software desenvolvido com o STRS, agora há a possibilidade de calcular manobras ótimas de empuxo contínuo e simulá-las em um ambiente computacional que considera distúrbios externos somados com não-linearidades dos sensores e atuadores.

7.2. Sugestões para extensões desse trabalho

A primeira sugestão é a ampliação desse programa considerando manobras com mais de um arco de propulsão. Neste caso, se a manobra possui mais um arco de propulsão, o número de parâmetros a serem otimizados aumenta, e portanto, a diferença do consumo de combustível diminui comparado com o caso de um arco de propulsão apenas.

Outra idéia para estender o trabalho é a inclusão de elementos perturbadores, tais como o arrasto atmosférico, a não esfericidade da Terra, a pressão de radiação, etc. Estes elementos perturbadores devem ser incluídos nas equações de movimento.

E ainda pode-se realizar um estudo mais detalhado para as imprecisões obtidas numericamente. Portanto, uma modelagem do erro numérico no algoritmo pode ser implementado. Neste contexto, pode-se também incluir especificações para os erros permitidos nos vínculos propostos. Assim os resultados obtidos, principalmente na direção de aplicação de controle, se tornam mais precisos.

Por último, o software desenvolvido calcula manobras ótimas e podemos simular a aplicação destas manobras utilizando o modelo capaz de considerar

as características dos propulsores, incluindo suas não-linearidades, conhecido como o "Spacecraft Trajectory Simulador" (ROCCO 2006, 2008), assim como incluir perturbações no sistema. Portanto o estudo integrando desses dois programas pode ser estendido à medida que o software que calcula manobras ótimas é aperfeiçoado. Com o STRS há a possibilidade de considerar o movimento orbital perturbado por distúrbios externos somados com não-linearidades tanto nos sensores como nos atuadores. Este simulador opera em malha fechada controlando a trajetória a cada instante de tempo e cujo passo é definido como um dos parâmetros de entrada.

Dessa forma as manobras orbitais ótimas calculadas podem ser testadas em um simulador que possui modelos matemáticos mais próximos da realidade, tais como a consideração de perturbações externas e não linearidades nos equipamentos do veículo espacial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAZARAA, M.S.; SHETTY, C.M. **Nonlinear programming: theory and algorithms**. 3 ed. Hoboken, New Jersey: John Willey & Sons, 1976. 853 p. ISBN(978047148600810).

BIGGS, M.C.B. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres**. Part I: Linearly varying thrust angles. The Hatfield Polytechnic. Numerical Optimisation Centre, Oct.1978.

BIGGS, M.C.B. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres**. Part II: Using Pontryagin's maximum principle. The Hatfield Polytechnic. Numerical Optimisation Centre, Jan.1979.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8 ed.. Rio de Janeiro, RJ: Livros técnicos e científicos editora S.A., 2006. 434 p. ISBN (852161499-3).

BROWN, C. D. **Spacecraft mission design**. 1. ed. Washington DC. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992. 187 p. ISBN(1-56347-041-1).

CARROLL, V. C.; WILLIAMS, S. N. Optimal low thrust trajectories using differential inclusion concepts. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 42, n. 4, p. 379-393, Oct – Dec, 1994.

CARVALHO, F. C. **Transferências ótimas a baixo empuxo e potência limitada entre órbitas elípticas quaisquer**. 2004. 191 p. (INPE-16641-TDI/1605). Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2004. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/jeferson/2004/08.03.16.03>>. Acesso em: 02 fev. 2012.

CHIARADIA, A.P.M.; Kuga, H.K.; Prado, A.F.B.A. Single frequency gps measurements for real time determination of artificial satellite orbit. In: Othon C. Winter e A. F. Bertachini A. Prado (ed.) **Advances in space dynamics 3 applications in astronautics**. São José dos Campos: INPE, 2002. ISBN: 85-85-17-00006-4, p. 88-99.

CHOBOTOV, V. A. **Orbital mechanics**. 3. ed. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. 460 p. ISBN(1-56347-537-5).

CURTIS, H. C. **Orbital mechanics for engineering students**. 2 ed. Oxford, UK: Elsevier, 2009. 722 p. ISBN (9780123747785).

FERREIRA, J. L.; POSSA G. C.; MORAES B. S.; SOUZA, J. H. C.; CARVALHO G. M.; MOURÃO, D.C.; WINTER O.C. Permanent magnet hall thruster for

satellite orbit maneuvering with low power. **Advances in Space Research**, v. 01, p. 166-182, 2009. Série: 01. ISSN/ISBN(02731177).

GODDARD, R. H. **A method of reaching extreme altitudes**. Washington: Smithsonian Inst. Publ. Misc., 1919, Collect 71(2).

GOLFETTO, W. A. **Aplicações de métodos de segunda ordem para a otimização de trajetórias espaciais**. 2004. 267p. Tese (Doutorado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.

GOMES, V. M. **Determinação de órbita e manobras utilizando GPS e motor com baixo empuxo**. 2008. 184 p. (INPE-15300-TDI/1352). Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2008. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2008/08.11.15.18>>. Acesso em: 11 jan. 2012.

HABERKOM, T.; MARTINON, P.; GERGAUD, J. Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 27, n. 6, p.1046-1059, Nov – Dec, 2004.

HOELKER, R. F.; Silber, R. **The bi-elliptic transfer between circular coplanar orbits**. Alabama, Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Jan. 1959 (DA Tech Memo 2-59).

HOHMANN, W. **Die erreichbarkeit der himmelskorper**. Munique: Oldenbourg, 1925.

KIRK, D.E. **Optimal control theory: an introduction**. 1.ed. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 1970. 452 p. ISBN (0486434842).

KLUEVER, C. A. Optimal low-thrust interplanetary trajectories by direct method techniques. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 45, n. 3, p. 247-262, July – Sep, 1997.

KLUEVER, C. A.; OLESON, S. R. A direct approach for computing near optimal low-thrust transfers. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 97, n. 2, p. 1783-1800, 1997.

KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. **Introdução à mecânica orbital**. 2. ed. São José dos Campos: INPE, 2008. 68 p. (INPE-5615-PUD/064).

LAWDEN, D. F. Optimal programming of rocket thrust direction. *Astronautica Acta*: v. 1, n. 1, p. 41-56, Jan-fev, 1955.

LUEMBERGER, D.G. **Linear and non-linear programming**. 3 ed. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2008. 546p. ISBN(9780387745022).

MARCELINO, E. W. **Controle de trajetória orbital em manobras de empuxo contínuo de longo prazo**. 2009. 186 p. (INPE-15757-TDI/1500). Dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/05.25.20.23>>. Acesso em: 11 jan. 2012.

MAREC, J. P. **Optimal Space Trajectories**. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1979. 329 p. ISBN(0-444-41812-1).

MOSKOWITZ, S.E. On the accuracy of approximate thrust steering schedules in optimal correctional maneuvers. *Astronautica Acta*, v. 9, n. 1, p. 20-30, Jan./Feb. 1963.

NAH, R.; VADALI, S. R.; Braden, E. Fuel-optimal, low-thrust, three-dimensional Earth-Mars trajectories. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 24, n. 6, p. 1100-1107, Nov – Dec, 2001.

PRADO, A. F. B. A. **Análise, seleção e implementação de procedimentos que visem manobras ótimas de satélites artificiais**. 1989. 246 p. (INPE-5003-TDL/397). Dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1989.

ROCCO, E. M. **Estudo da estratégia de manobra para o controle de órbita do satélite CBERS**. São José dos Campos: INPE, 1999. 72 p. (INPE-7035-NTC/336).

ROCCO, E. M. **Manutenção orbital de constelações simétricas de satélites utilizando manobras impulsivas ótimas com vínculo de tempo**. 2002. Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos. 2002.

ROCCO, E. M. **Perturbed orbital motion with a PID control system for the trajectory**. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE DINÂMICA ORBITAL, 14., 2008, Águas de Lindóia. **Anais...** UNESP: Guaratinguetá, 2008, 2008a.

ROCCO, E. M. **Tools for analysis and simulation of spacecraft trajectories in keplerian orbit**. Bremen: Center of Applied Space Technology and Microgravity ZARM. University of Bremen, Germany, 2006. Relatório técnico.

ROCCO, E. M. **Transferências orbitais bi-impulsivas com limites de tempo**. 168 p. (INPE-6676-TDI/626). Dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 1997.

ROTH, H. L. Minimization of the velocity increment for a bi-elliptic transfer with plane change. **Astronautical Acta**: 13(2), 119-130, Maio-Abr, 1967.

SANTOS, D. P. S. **Otimização de trajetórias espaciais com propulsão elétrica solar e manobras gravitacionalmente assistidas**. 2009. 128 p. (INPE-16618-TDI/1594). Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/10.06.12.40>>. Acesso em: 02 fev. 2012.

SANTOS, W. G.; ROCCO, E. M. Controle de Manobras de um Veículo Espacial por meio de Variações Aerodinâmicas. In: WORKSHOP EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA ESPACIAIS, 1. (WETE), 2010, São José dos Campos. **Anais...** São José dos Campos: INPE, 2010. v. IWETE2010-1017. DVD. ISSN 2177-3114. Disponível em: <<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/38UFRAP>>. Acesso em: 11 jan. 2012.

SCHULZ, W. **Transferências bi-impulsivas entre orbitas elípticas não coplanares com consumo mínimo de combustível**. 1997. 112 p. (INPE-6385-TDI/604). Dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1997.

SCHULZ, W.; PRADO, A. F. B. A.; MORAES, R. V. Trajectory optimization using atmospheric maneuvers. In: WINTER, Othon Cabo; PRADO, Antonio Fernando Bertachini de Almeida. (Ed.). **Advances in space dynamics 3: applications in astronautics**. São José dos Campos: INPE, 2002. p. 336-347. (INPE-9535-PRE/5188).

SIDI, M. J.. **Spacecraft dynamics & control: a practical engineering approach**. 1 ed. New York, NY: Cambridge university press, 1997. 409 p. ISBN (0521787807).

STEWART, D. J.; MELTON, R. G. Approximate analytic representations for low-thrust trajectories. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 76, n. 2, p. 1455-1467, 1991

STHTERNFELD, A. **Soviet space science**. New York: Basil Books, 1959. p. 109-111.

TSIEN, H.S. Take-off from satellite orbit. **Journal of the American Rocket Society**, 23(4)233-236, July/Aug. 1953.

VADALI, S. R.; NAH, R.; BRADEN, E.; JOHNSON Jr, I. L. Fuel-optimal planar interplanetary trajectories using low-thrust exhaust-modulated propulsion. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 102 (I), p. 431-448, 1999.

VENDITTI, F. C. F.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; SUHKANOV, A. Gravity assist maneuvers applied on interplanetary trajectories. In: WORKSHOP EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA ESPACIAIS, 1. (WETE), 2010, São José dos Campos. **Anais...** São José dos Campos: INPE, 2010. v.

IWETE2010-1051. ISSN 2177-3114. Disponível em:
<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/38UFRKL>>. Acesso em: 11 jan. 2012.

APÊNDICE A – O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

O método de Runge-Kutta utilizado neste trabalho é um método numérico para resolver problemas de valor inicial associados a um sistema de equação de primeira ordem. Equações de ordem mais alta sempre podem ser reduzidas a um sistema de primeira ordem, portanto, o método aqui descrito abrange todos os sistemas de equações.

Em notação vetorial, vamos supor um sistema de equações

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A. 1})$$

e as condições iniciais

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{A. 2})$$

onde a Equação A.1 é composta por equações diferenciais, \mathbf{f} é a função vetorial e \mathbf{x}_0 é o estado inicial. O método de Runge-Kutta do passo t_n para o t_{n+1} é dado por Boyce et al. (2006):

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \left(\frac{h}{6}\right) (\mathbf{k}_{n1} + 2\mathbf{k}_{n2} + 2\mathbf{k}_{n3} + \mathbf{k}_{n4}) \quad (\text{A. 3})$$

onde

$$\mathbf{k}_{n1} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (\text{A. 4})$$

$$\mathbf{k}_{n2} = \mathbf{f}\left(t_n + \left(\frac{h}{2}\right), \mathbf{x}_n + \left(\frac{h}{2}\right) \mathbf{k}_{n1}\right), \quad (\text{A. 5})$$

$$\mathbf{k}_{n3} = \mathbf{f}\left(t_n + \left(\frac{h}{2}\right), \mathbf{x}_n + \left(\frac{h}{2}\right) \mathbf{k}_{n2}\right) \quad (\text{A. 6})$$

e

$$\mathbf{k}_{n4} = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_{n3}). \quad (\text{A. 7})$$

Este método descrito é conhecido como Runge-Kutta de quarta ordem e é o mesmo usado neste trabalho nas integrações numéricas. O erro por passo é da ordem de h^5 , enquanto o erro total acumulado tem a ordem de h^4 .

A interpretação geométrica da equação (A.3), dada por Boyce et al. (2006), é que o valor de \mathbf{x}_{n+1} é determinado pelo valor atual de \mathbf{x}_n somado com o produto do tamanho do intervalo h e a inclinação estimada. Esta inclinação estimada é uma média ponderada de inclinações. A primeira inclinação do intervalo é \mathbf{k}_{n1} , no extremo esquerdo do intervalo. A segunda é \mathbf{k}_{n2} , no ponto médio do intervalo usando a equação de Euler de t_n até $t_n + \left(\frac{h}{2}\right)$ e a inclinação de \mathbf{k}_{n1} . A terceira inclinação \mathbf{k}_{n3} é a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio. A última inclinação é \mathbf{k}_{n4} , no final do intervalo, é o coeficiente angular em $t_n + h$ por meio da equação de Euler e o coeficiente angular \mathbf{k}_{n3} para ir de t_n a $t_n + h$.

A equação de Euler, citada no parágrafo anterior, é simplesmente uma aproximação linear de uma integração numérica. Supondo mais uma vez um

sistema composto pelas Equações A.1 e A.2. O método de Euler do passo t_n para o t_{n+1} é dado por

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n). \quad (\text{A.8})$$

O método de Runge-Kutta é três ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler. O Runge-Kutta é relativamente fácil de implementar. Neste trabalho foi escolhido o Runge-Kutta de quarta ordem pela sua precisão, pela fácil implementação e pela eficiência nos resultados.

APÊNDICE B – ARQUITETURA DO PROGRAMA QUE CALCULA MANOBRAS ÓTIMAS COM PROPULSÃO CONTÍNUA

Esta seção tem como objetivo apresentar a arquitetura principal do programa. O programa foi desenvolvido em ambiente de modelagem e simulação *Matlab/Simulink*®. O *Simulink* tem como vantagem fornecer um ambiente visual prático e de fácil utilização.

O programa é dividido em um sistema principal e dois subsistemas. O sistema principal é apresentado na Figura B.1.

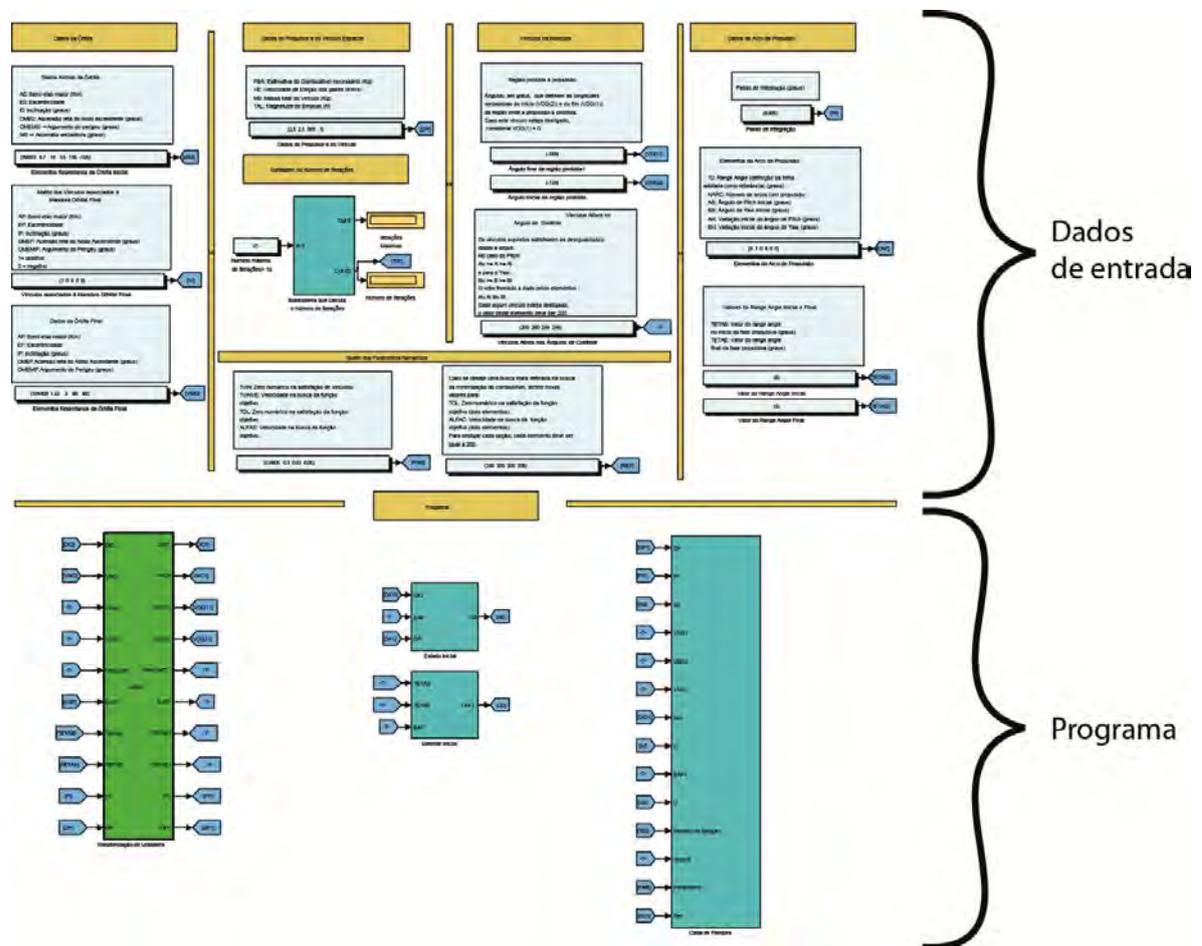


Figura B.1 – Arquitetura geral do programa que calcula manobras ótimas com propulsão contínua.

Ainda na Figura B.1, o sistema principal é dividido dois módulos com os dados de entrada e o programa. O módulo de entrada de dados é composto pelos principais parâmetros editáveis do simulador, permitindo ao usuário alterar a condição inicial do cálculo da manobra ótima.

Nas Figuras B.2, B.3, B.4, B.5 e B.6 é possível visualizar os parâmetros de entrada do programa.

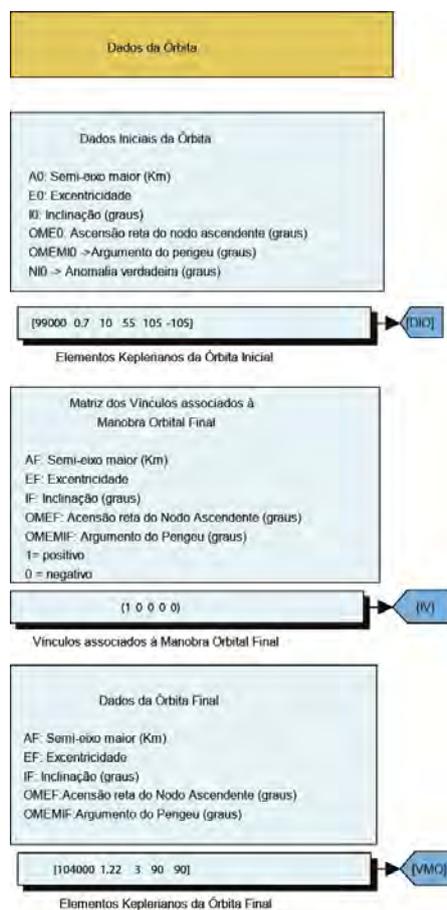


Figura B.2 – Entrada dos dados da órbita

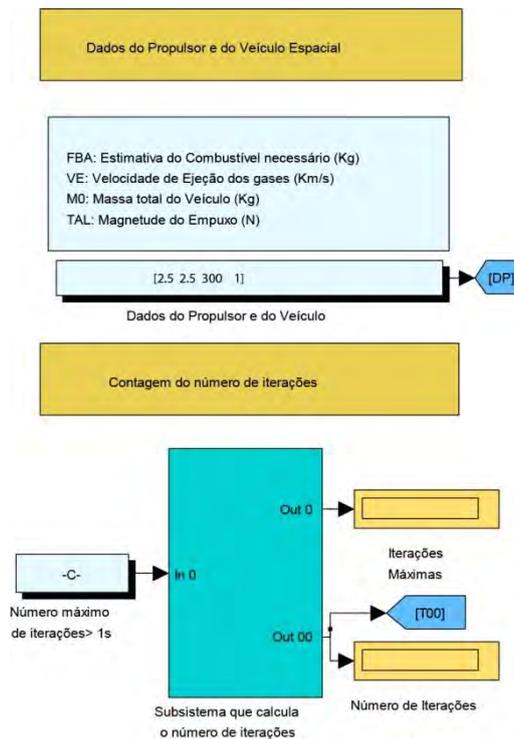


Figura B.3 – Entrada dos dados do propulsor e o sistema de contagem do número de iterações.

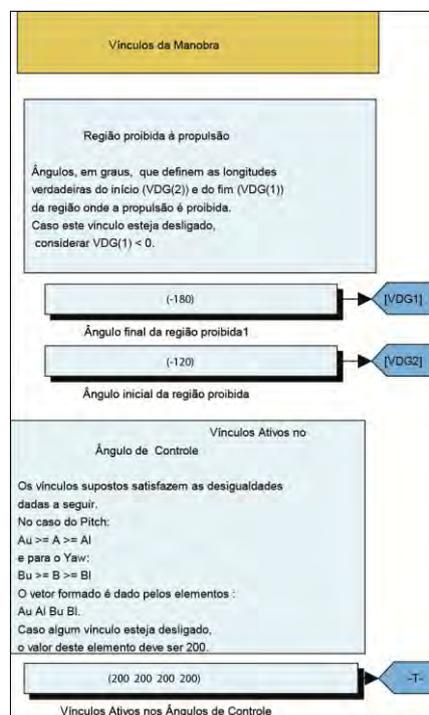


Figura B.4 – Entrada dos vínculos da manobra.

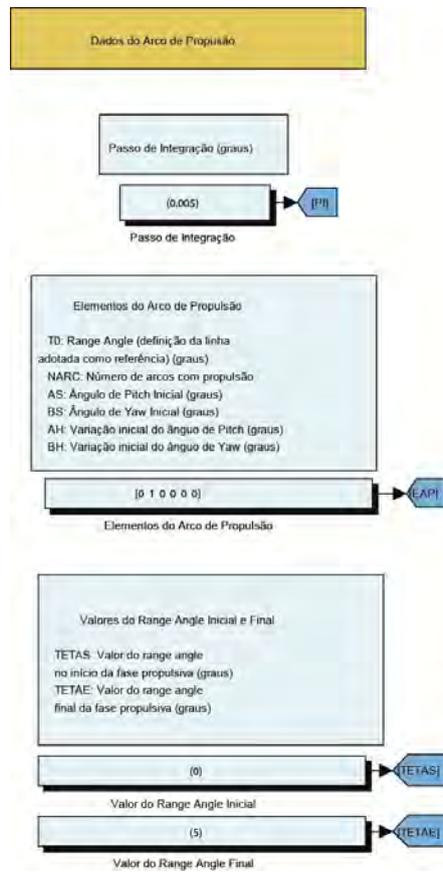


Figura B.5 – Entrada de dados do arco de propulsão.

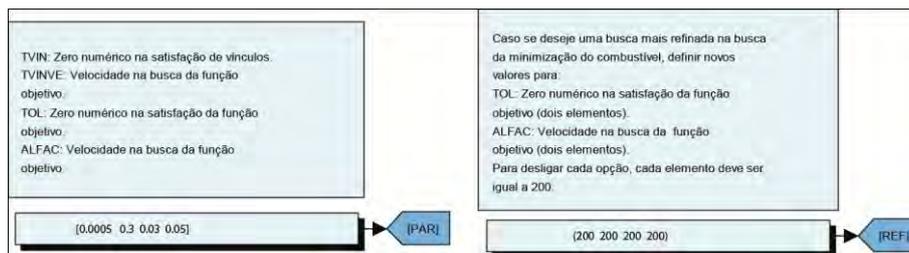


Figura B.6 – Entrada dos parâmetros numéricos.

A Figura B.7 é a segunda parte do sistema principal e a caixa azul é um subsistema.

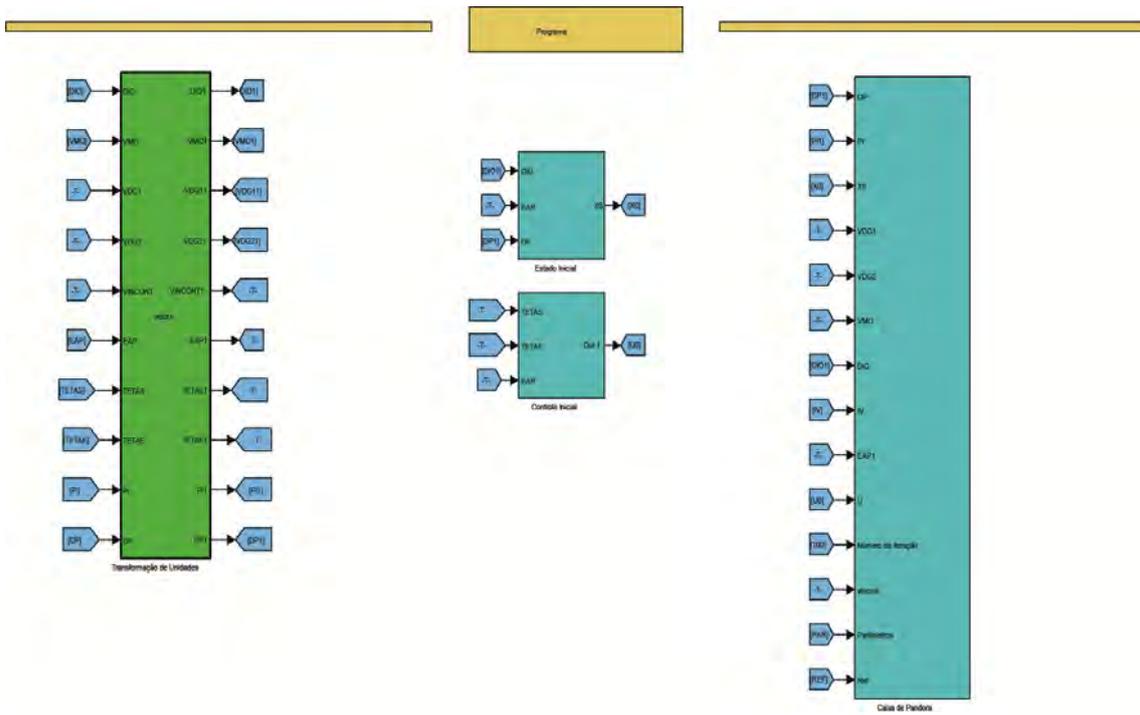


Figura B.7 – Programa principal.

Dentro desse subsistema, temos a Figura B.8.

A partir da Figura B.8, a indicação “1” pode ser melhor visualizada na Figura B.9.

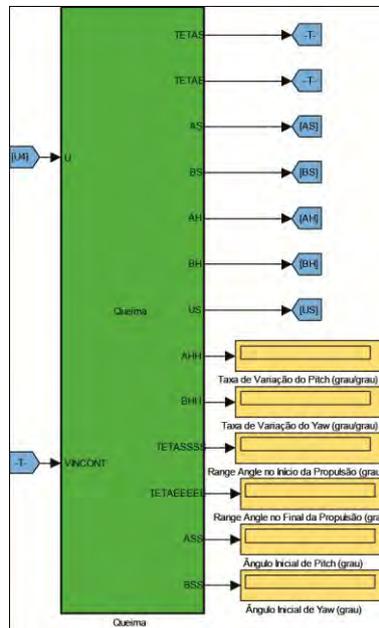


Figura B.9 – Cálculo dos elementos de queima.

Na Figura B.9, os displays em amarelo apresentam os valores de A_0 , B_0 , A'_0 , B'_0 , s_0 e s_f da órbita.

A indicação “2” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.10.

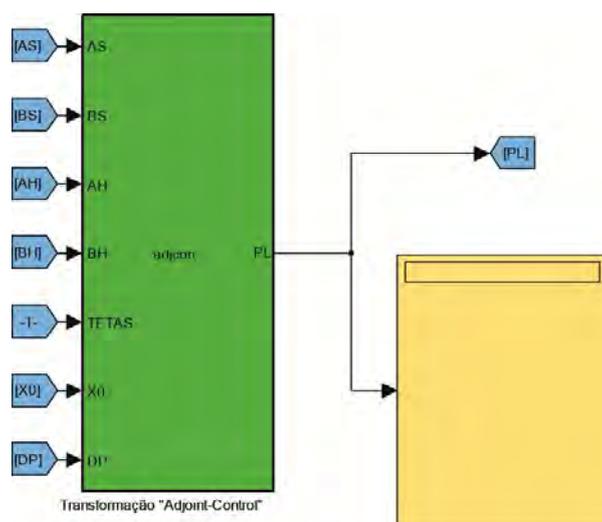


Figura B.10 – Cálculo dos multiplicadores de Lagrange.

Nesta etapa é calculado os valores dos multiplicadores de Lagrange. A indicação “3” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.11.

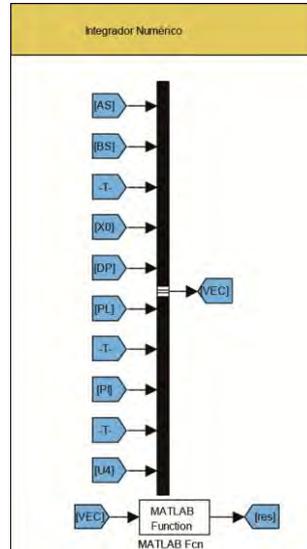


Figura B.11 – Sistema de integração numérica.

Nesta etapa ocorre a integração numérica e os dados de saída são salvos no *workspace* do *Matlab*. Os dados de saída contém os valores do “pitch” e “yaw” em função do “range angle”, assim como o estado do veículo em cada passo de integração. Com estes resultados é usado outro programa para gerar os gráficos obtidos nos resultados.

A indicação “4” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.12.

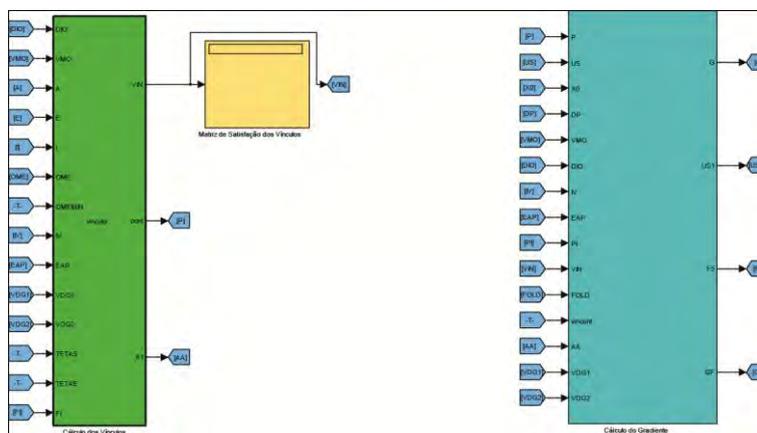


Figura B.12 – Cálculo dos elementos keplerianos da órbita e do consumo de combustível.

Nesta etapa, são calculados os elementos keplerianos da órbita, o consumo de combustível e outros parâmetros importantes no funcionamento do programa. Os *displays* em amarelo mostram estes valores.

A indicação “5” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.13.

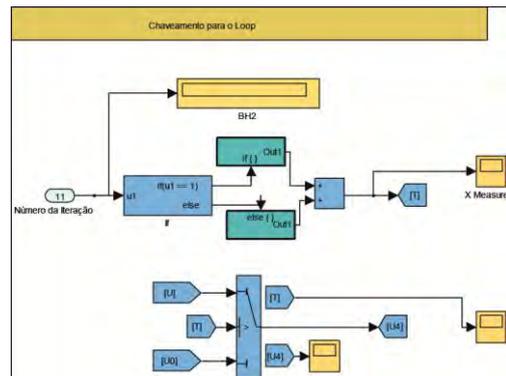


Figura B.13 – Chaveamento do loop.

Esta etapa controla o chaveamento para o *loop*.

A indicação “6” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.14.

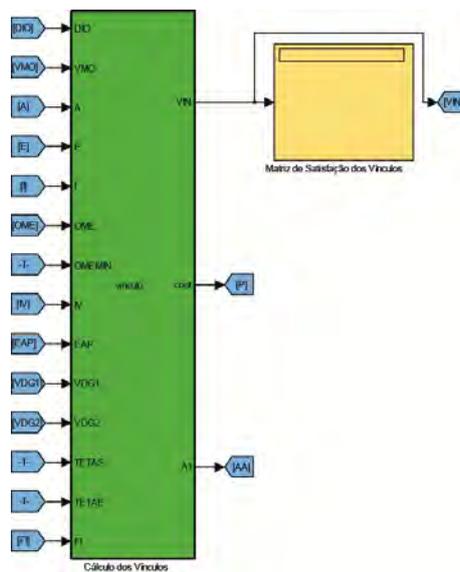


Figura B.14 – Cálculo do vetor dos vínculos.

Nesta etapa é calculado o vetor dos vínculos associados à órbita final. O *display* em amarelo mostra os elementos desta matriz.

A indicação “7” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.15.

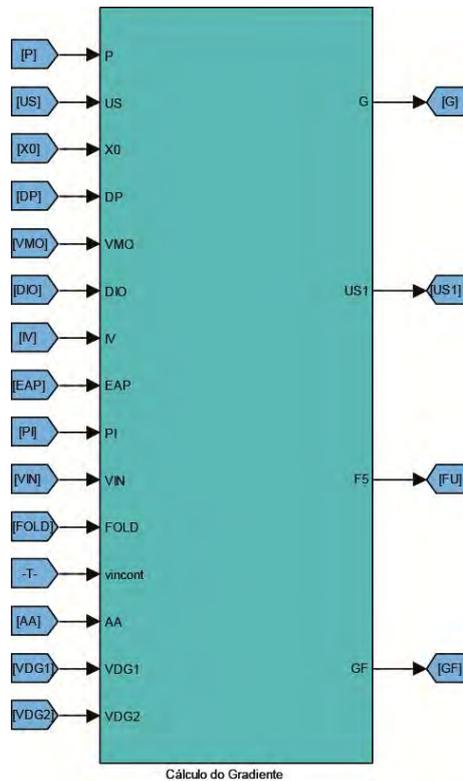


Figura B.15 – Cálculo do gradiente.

A caixa azul é o segundo subsistema do programa e nesta etapa é calculada o gradiente do funcional e o gradiente no vetor de vínculos associados à órbita final.

A indicação “8” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.16.

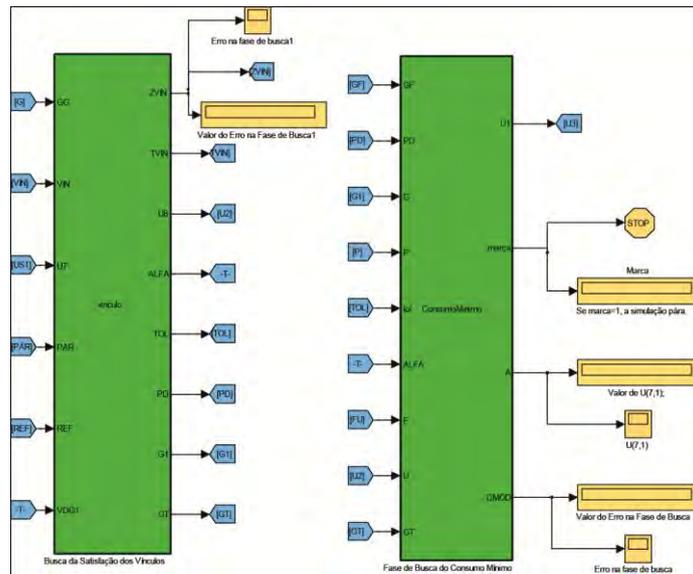


Figura B.16 – Busca da satisfação dos vínculos e do mínimo da função objetivo.

Nesta etapa é dividida em duas partes como ilustrado na Figura B.16. A primeira parte consiste na fase de busca dos vínculos, enquanto a segunda consiste na fase de busca do mínimo da função objetivo.

A indicação “9” da Figura B.9 pode ser melhor visualizada na Figura B.17.

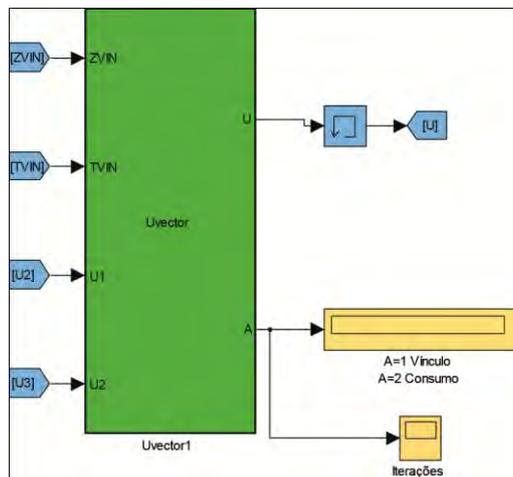


Figura B.17 – Segunda etapa para o chaveamento para o loop.

Esta etapa faz parte do chaveamento para o *loop*.