



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/10.13.16.15-TDI

## **O SISTEMA TRIPLO DE ASTERÓIDES 2001 SN263: DINÂMICA ORBITAL E ESTABILIDADE**

Rosana Aparecida Nogueira de Araujo

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Othon Cabo Winter, Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Alexander A. Sukhanov, aprovada em 07 de novembro de 2011.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3AK44AL>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr<sup>a</sup> Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Deicy Farabello - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/10.13.16.15-TDI

## **O SISTEMA TRIPLO DE ASTERÓIDES 2001 SN263: DINÂMICA ORBITAL E ESTABILIDADE**

Rosana Aparecida Nogueira de Araujo

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Othon Cabo Winter, Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Alexander A. Sukhanov, aprovada em 07 de novembro de 2011.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3AK44AL>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Araujo, Rosana Aparecida Nogueira de.  
Ar15s O sistema triplo de asteróides 2001 SN263: dinâmica orbital e estabilidade / Rosana Aparecida Nogueira de Araujo. – São José dos Campos : INPE, 2011.  
xxvi + 104 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2011/10.13.16.15-TDI)

Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2011.

Orientadores : Drs. Othon Cabo Winter, Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Alexander A. Sukhanov.

1. NEAS. 2. Sistemas triplos. 3. Estabilidade. 4. 2001 SN263. 5. Asteróides. I. Título.

CDU 523.44

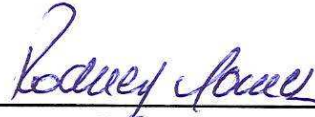
---

Copyright © 2011 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2011 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Rodney da Silva Gomes



Presidente / ON/RJ / Rio de Janeiro - RJ

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



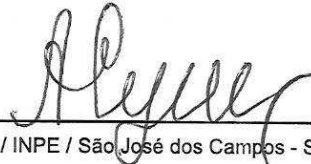
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Othon Cabo Winter




Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Alexander A. Sukhanov



Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Cristiano Fiorilo de Melo



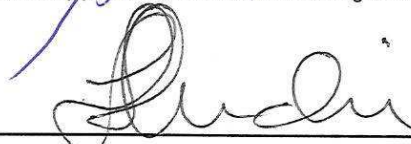
Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Dr. Ernesto Vieira Neto



Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi



Convidado(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

( ) unanimidade

Aluno (a): Rosana Aparecida Nogueira de Araujo

São José dos Campos, 07 de novembro de 2011



*“We are a way for the cosmos to know itself.”*

CARL SAGAN





*Dedico este trabalho a meus pais Francisco Ferraz de Araújo  
e Benedita Heronides Nogueira de Araújo.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meus pais Francisco e Benedicta, que mesmo sem entenderem tecnicamente o meu trabalho, compreendem a importância que ele tem para mim, e por isso nunca deixaram de me apoiar.

Agradeço aos meus orientadores Dr. Othon Cabo Winter, Dr. Antônio F. Bertachini de A. Prado e Dr. Alexander A. Sukhanov, pelos ensinamentos, pelo exemplo de profissionais, e por acreditarem e me incentivar profissionalmente.

Agradeço as minhas amigas Paula Cristiane, Roberta Veloso, Pryscilla Maria, e as todas as amigas de infância (Andréia, Daniela, Elaine e Mariley), por estarem sempre presentes compartilhando os momentos desta longa jornada, seja celebrando as conquistas, ou com uma palavra de estímulo nos momentos mais difíceis. Neste sentido faço um especial agradecimento a Rafael Sfair, que além de toda amizade contribuiu significativamente com questões técnicas relacionadas ao trabalho.

Agradeço ainda ao Dr. Ernesto Vieira Neto, novamente ao amigo Rafael Sfair e aos alunos de pós-graduação em física da FEG-UNESP, Luiz Augusto Boldrin e Helton Gaspar, pela colaboração com a parte computacional e de programação.

Agradeço a todos os alunos e professores da pós-graduação do INPE e da FEG-UNESP que fizeram parte desta história.

Por fim, agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

A todos vocês, meu muito obrigada.



## RESUMO

O corpo celeste 2001 SN263 é um NEA (*Near-Earth Asteroid*) com semi-eixo maior de 1,99 UA, excentricidade de 0,48 e inclinação orbital 6,7 graus. Curvas de Luz obtidas no Observatório de Haute-Provence, em Janeiro de 2008, levaram à conclusão de que este asteroide se tratava de um sistema binário. Em fevereiro de 2008 o sistema foi observado ao longo de 16 dias por radioastrônomos do Observatório de Arecibo, em Porto Rico, e a conclusão foi de que o asteroide 2001 SN263 era na verdade um sistema triplo. Os componentes do sistema têm diâmetros de cerca de 2,6 km, 0,78 km e 0,58 km. Com relação ao corpo principal, o segundo componente tem o semi-eixo maior 16,6 km (período de 6,2 dias) e o terceiro componente tem o semi-eixo maior 3,8 km (período de 0,7 dias). Como os corpos são de tamanhos comparáveis, as perturbações entre os três componentes não são desprezíveis. Além disso, devido às características orbitais do sistema, as perturbações do Sol e dos planetas Júpiter, Marte e Terra, devem ser consideradas. O presente estudo tem como objetivo caracterizar a dinâmica do sistema triplo 2001 SN263 e determinar regiões de estabilidade e instabilidade em torno de três asteroides e em torno de todo o sistema. O trabalho foi baseado em integrações numéricas do problema de N-corpos. Foram analisadas as órbitas dos asteroides quando há apenas a perturbação gravitacional mútua (problema de três corpos) e quando ele sofre perturbação externa do Sol e dos planetas Terra, Marte e Júpiter (problema de sete corpos). Com o objetivo de determinar regiões de estabilidade e instabilidade, a região interna ao sistema asteroides foi dividida em quatro regiões distintas. Utilizando o integrador Gauss-Radau foram realizadas integrações numéricas de um sistema compostos pelos sete corpos citados acima e por milhares de partículas distribuídas aleatoriamente dentro das regiões demarcadas, para os casos plano, prógrado ( $0, 0^\circ \leq I \leq 90, 0^\circ$ ) e retrógrado ( $90, 0^\circ < I \leq 180, 0^\circ$ ). Os resultados são diagramas de semi-eixo maior versus excentricidade nos quais são mostrados os percentuais de partículas que sobrevivem para cada conjunto de condições iniciais. As regiões onde 100% das partículas sobrevivem são definidas como regiões estáveis e as regiões onde menos de 10% sobrevivem são as regiões instáveis. Com esta etapa concluída, o estudo foi estendido para a região externa ao sistema, para os mesmos casos anteriores (planar, prógrado e retrógrado). A seguir foi feita a discussão sobre a regiões de estabilidade internas em longo período para o caso específico: plano e circular.



# THE TRIPLE SYSTEM OF ASTEROIDS 2001 SN263: ORBITAL DYNAMICS AND STABILITY

## ABSTRACT

The celestial body 2001 SN263 is a Near-Earth Asteroid (NEA) with semi-major axis 1.99 AU, eccentricity 0.48 and orbital inclination 6.7 degrees. Light-curves obtained in the Observatory of Haute-Provence, in January 2008, lead to the conclusion that this asteroid was a binary system. In February 2008 the system was observed along 16 days by the radio-astronomy station of Arecibo, in Puerto Rico, and the conclusion was that 2001 SN263 is actually a triple system. The components of the system have diameters of about 2.6 km, 0.78 km and 0.58 km. With respect to the major body, the second component has a semi-major axis of about 16.6 km (period of 6.2 days) and the third component has a semi-major axis of about 3.8 km (period of 0.7 days). Since the bodies are of comparable sizes, the perturbations among the three components are not negligible. Besides that, due to the orbital characteristics of the system, the perturbations from the Sun and from the planets Jupiter, Mars and Earth must be considered. Taking this into account, the present study is aimed to characterize the dynamics of the triple system 2001 SN263 and to determine regions of stability and instability around the three asteroids and around the whole system. The work was based on numerical integrations of the N-body problem. It was analyzed the orbits of the asteroids when there are only the mutual gravitational perturbation (three-body problem) and when it suffers external perturbation from the Sun and the planets Earth, Mars and Jupiter (7-body problem). In order to determine regions of stability and instability, the internal region around the asteroids was divided into four distinct regions. Using the Gauss-Radau numerical integrator it was performed numerical integrations of systems composed by the seven bodies cited above and by thousands of particles randomly distributed within the demarcated regions for the planar, prograde ( $0, 0^\circ \leq I \leq 90, 0^\circ$ ) and retrograde ( $90, 0^\circ < I \leq 180, 0^\circ$ ) cases. The results are diagrams of semi-major axis versus eccentricity where it is shown the percentage of particles that survive for each set of initial conditions. The regions where 100% of the particles survive is defined as stable regions and the regions where less than 10% survive are the unstable regions. With this stage completed, the study was extended to the region outside the system, for the same previous cases (planar, prograde and retrograde). The following discussion was made on the internal regions of stability for long period, for the specific case: planar and circular.





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Representação das órbitas de NEAs pertencentes aos grupos Apolo, Atenas, Amor e Atira. . . . .	4
3.1 Sistema triplo de asteróides 2001 SN263. Sequência de imagens obtidas nos dias 13, 14, 18, 21 e 23 do mês de fevereiro de 2008 (Nolan,2008) . . .	9
3.2 Representação dos componentes do sistema 2001 SN263. . . . .	11
3.3 Evolução orbital do sistema 2001 SN263 (JPL-NASA). . . . .	11
4.1 a)Variação de semi-eixo maior do asteróide Beta por um período de 10 dias. b) Variação de semi-eixo maior do asteróide Gama por um período de 10 dias. c) Variação de semi-eixo maior do asteróide Beta por um período de 1000 anos. d) Variação de semi-eixo maior do asteróide Gama por um período de 1000 anos. . . . .	15
4.2 a)Variação de excentricidade do asteróide Beta por um período de 10 dias. b) Variação de excentricidade do asteróide Gama por um período de 10 dias. c) Variação de excentricidade do asteróide Gama por um período de 1000 anos. d) Variação de excentricidade do asteróide Gama por um período de 1000 anos. . . . .	16
4.3 a)Variação de inclinação do asteróide Beta por um período de 10 anos. b) Variação de inclinação do asteróide Gama por um período de 20 dias. c)Variação de inclinação do asteróide Beta por um período de 1000 anos. d) Variação de inclinação do asteróide Gama por um período de 1000 anos. . . . .	17
4.4 a)Variação da longitude do nodo ascendente de Beta para um período de 1000 anos. b) Variação da longitude do nodo ascendente de Gama para um período de 1000 anos. . . . .	18
4.5 a)Variação do argumento do pericentro do asteróide Beta. b) Variação do argumento do pericentro do asteróide Gama . . . . .	19
4.6 a)Variação da longitude do nodo ascendente de Gama, pelo período de 5 anos. b) Variação do argumento do pericentro de Gama, pelo período de 10 anos. . . . .	21
4.7 Variação dos elementos orbitais de Alfa em sua órbita heliocêntrica por um período de 100.000 anos. a) Variação de semi-eixo maior em UA. b) Variação de excentricidade. . . . .	23

4.8	Variação dos elementos orbitais de Alfa em sua órbita heliocêntrica por um período de 100.000 anos. a) Variação de inclinação. b) Variação do argumento do pericentro. c) Variação da longitude do nodo ascendente. . . . .	24
4.9	Transição do sistema entre os grupos Amor e Apolo. a) Pericentro do sistema $q = a(1 - e)$ , ao longo de 100.000 anos. A linha horizontal tracejada demarca o apocentro da Terra $Q_T = 1,017$ UA. As linhas verticais tracejadas demarcam os instantes em que o pericentro do sistema é menor que o apocentro da Terra: $17.200 \leq t \leq 54.000$ anos e $70.800 \leq t \leq 100.000$ anos. b) Distância $r_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ do sistema ao Sol. A linha horizontal tracejada demarca a distância da Terra ao Sol no apocentro $Q_T = 1,017$ UA. As linhas verticais tracejadas demarcam os instantes em que a distância do sistema ao Sol é menor que a distância da Terra ao Sol no apocentro. . . . .	25
4.10	Passagens do sistema 2001 SN263 pela esfera de influência da Terra e de Marte no período de 100.000 anos. As linhas verticais tracejadas demarcam os instantes em que o pericentro da órbita do sistema é menor que o apocentro da Terra, de acordo com o discutido na subseção 4.3.2. . . . .	26
4.11	“Saltos” em semi-eixo maior de Alfa devido à encontros próximos com Terra e Marte. . . . .	27
4.12	Variação de semi-eixo maior e excentricidade de Beta e Gama por um período de 100.000 anos no problema de sete corpos. a) Variação de semi-eixo maior de Beta. b) Variação de excentricidade de Beta. c) Variação de semi-eixo maior de Gama d)Variação de excentricidade de Gama. . . . .	28
5.1	Representação do sistema 2001 SN263 e das regiões internas. Em azul estão representados os raios de Hill dos asteróides Beta e Gama. A linha tracejada em vermelho representa os limites das regiões 1 e 2. . . . .	33
5.2	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 1 para um período de 2 anos. A escala ao lado vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência (estabilidade). As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de colisão com Alfa, e a linha da direita é a linha de escape da região 1. . . . .	36

5.3	Exemplos de trajetórias para partículas estáveis por um período de 2 anos na região 1. Alfa é o corpo central. Para todas as partículas $e = 0,0$ e $I = 0,0^\circ$ , com semi-eixo maior: a) $a = 1,4$ km, b) $a = 1,6$ km, c) $a = 1,8$ km, d) $a = 2,0$ km, e) $a = 2,2$ km, f) $a = 2,4$ km. . . . .	37
5.4	Exemplos de órbitas de partículas que colidem dentro do período de 2 anos na região 1. Alfa é o corpo central. Partículas com $e = 0,0$ , $I = 0,0^\circ$ e $a = 2,6$ km. a) Colisão com Gama. A linha verde tracejada representa a trajetória de Gama. A circunferência preta tracejada representa o limite do raio de Gama. b) Colisão com Alfa. A circunferência preta tracejada representa o limite do raio de Alfa. . . . .	38
5.5	Exemplo da órbita de uma partícula, com $e = 0,0$ e $I = 0,0^\circ$ e $a = 2,8$ km, que escapa da região 1. Alfa é o corpo central. a) $t \approx 1,5$ dia. b) $t \approx 6$ dia. A linha verde representa a órbita de Gama, que delimita a região 1. . . . .	39
5.6	Espalhamento das partículas na região 1. As linhas pontilhadas em azul correspondem às linhas de colisão e de escape. . . . .	40
5.7	Diagrama de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 para um período de 2 anos. A escala abaixo vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência. As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de provável colisão com Gama, e a linha da direita é a linha de escape da região 2. . . . .	41
5.8	Espalhamento das partículas na região 2. As linhas pontilhadas em azul correspondem às linhas de provável colisão e de escape. . . . .	42
5.9	Variação dos elementos orbitais de uma partícula orbitando Alfa na região 2 com $a = 7,9$ km, $e = 0,0$ . A partícula colide com Gama em $t \approx 1,6$ anos. a) Variação de semi-eixo maior em km. b) Variação de excentricidade. . . . .	45
5.10	Variação do ângulo ressonante $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$ para uma partícula na região 2 que colide com Gama, com $a = 7,9$ km. a) $t \approx 1,6$ anos. b) $t$ indo de 1,2 a 1,3 anos ( $\approx 5,3$ períodos orbitais de Beta). c) $t$ indo de 1,36 a 1,5 anos ( $\approx 8$ períodos orbitais de Beta). d) $t$ indo de 1,5 a 1,6 anos ( $\approx 5,3$ períodos orbitais de Beta). . . . .	46
5.11	Variação dos elementos orbitais de uma partícula orbitando Alfa na região 2 com $a = 7,9$ km, $e = 0,0$ . a) Variação de semi-eixo maior em km. b) Variação de excentricidade. . . . .	47

5.12	Variação do ângulo ressonante $\varphi = 3\lambda' - \lambda - \varpi - \Omega$ para uma partícula na região 2 com $a = 7,9$ km. a) $t = 2,0$ anos. b) $t$ indo de 0,45 a 1,05 anos ( $\approx 318$ períodos orbitais de Gama). c) $t$ indo de 0,85 a 0,92 anos ( $\approx 37$ períodos orbitais de Gama). d) $t$ indo de 1,5 a 2,0 anos ( $\approx 265$ períodos orbitais de Gama). . . . .	48
5.13	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Beta na região 3 para um período de 2 anos. A escala ao lado vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência. As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de colisão com Beta, e a linha da direita é a linha de escape da região 3 . . . . .	50
5.14	Porcentagem de colisões, escapes e sobreviventes para regiões 1, 2 e 3. . . . .	51
5.15	Porcentagem de colisões das partículas com cada um dos componentes do sistema 2001 SN263 para cada uma das regiões internas. . . . .	51
5.16	Representação das regiões de estabilidade (em amarelo) e instabilidade (em vermelho) no sistema triplo de asteróides 2001 SN263, para partículas com excentricidade e inclinação nula pelo período de 2 anos. . . . .	52
6.1	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 1 por um período de 2 anos para inclinações: a) $15,0^\circ$ . b) $30,0^\circ$ . c) $45,0^\circ$ . d) $60,0^\circ$ . e) $75,0^\circ$ . f) $90,0^\circ$ . . . . .	55
6.2	Variação do ângulo ressonante $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$ para uma partícula na região 1 com $a = 1,8$ km, $e = 0,0$ e $I = 15,0^\circ$ . a) $t = 2$ anos. b) $t$ indo de 0,41 a 0,49 anos ( $\approx 42$ períodos orbitais de Gama). c) $t$ indo de 1,3 a 1,45 anos ( $\approx 79$ períodos orbitais de Gama). d) $t$ indo de 1,95 a 2,0 anos ( $\approx 26$ períodos orbitais de Gama). . . . .	57
6.3	Variação do ângulo ressonante $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$ para uma partícula na região 1 com $a = 1,8$ km, $e = 0,0$ e $I = 30,0^\circ$ . a) $t = 2$ anos. b) $t$ indo de 0,17 a 0,3 anos ( $\approx 69$ períodos orbitais de Gama). c) $t$ indo de 1,0 a 1,25 anos ( $\approx 132$ períodos orbitais de Gama). d) $t$ indo de 1,135 a 1,17 anos ( $\approx 19$ períodos orbitais de Gama). . . . .	58
6.4	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações: a) $15,0^\circ$ . b) $30,0^\circ$ . c) $45,0^\circ$ . d) $60,0^\circ$ . . . . .	60
6.5	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações: a) $75,0^\circ$ . b) $90,0^\circ$ . . . . .	61

6.6	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Beta na região 3 por um período de 2 anos para inclinações a) $15,0^\circ$ . b) $30,0^\circ$ . c) $45,0^\circ$ . d) $60,0^\circ$ . e) $75,0^\circ$ . f) $90,0^\circ$ . . . . .	63
7.1	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 1 por um período de 2 anos para inclinações: a) $105,0^\circ$ . b) $120,0^\circ$ . c) $135,0^\circ$ . d) $150,0^\circ$ . e) $165,0^\circ$ . f) $180,0^\circ$ . . . . .	67
7.2	Varição do ângulo ressonante $\varphi = 2\lambda - \lambda' - \varpi'$ para uma partícula na região 1 com $a = 2,4$ km, $e = 0,0$ e $I = 150,0^\circ$ . a) $t = 2,0$ anos. b) $t$ indo de $0,0$ a $0,5$ anos ( $\approx 264$ períodos orbitais de Gama). c) $t$ indo de $1,0$ a $1,1$ anos ( $\approx 53$ períodos orbitais de Gama). d) $t$ indo de $1,5$ a $1,8$ anos ( $\approx 159$ períodos orbitais de Gama). . . . .	69
7.3	Varição dos elementos orbitais da partícula orbitando Alfa na região 1 com $a = 2,4$ km, $e = 0,0$ $I = 150,0^\circ$ . a) Varição de semi-eixo maior em km. b) Varição de excentricidade. . . . .	70
7.4	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações: a) $105,0^\circ$ . b) $120,0^\circ$ . c) $135,0^\circ$ . . . . .	71
7.5	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações a) $I = 150,0^\circ$ . b) $I = 165,0^\circ$ . c) $180,0^\circ$ . . . . .	72
7.6	Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Beta na região 3 por um período de 2 anos para inclinações a) $105,0^\circ$ . b) $120,0^\circ$ . c) $135,0^\circ$ . d) $150,0^\circ$ . e) $165,0^\circ$ . f) $180,0^\circ$ . . . . .	74
8.1	Diagrama de estabilidade na região externa por um período de 2 anos. A escala a baixo vai de $0,0\%$ – $10,0\%$ de sobreviventes (vermelho) até $90\%$ – $100\%$ de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com $100\%$ de sobrevivência. As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de provável colisão com Beta, e a linha da direita é a linha de escape da região. . . . .	79
8.2	a) Porcentagem de colisões, escapes e sobreviventes para regiões externa - caso plano. b) Porcentagem de colisões das partículas com cada um dos componentes do sistema. . . . .	80
8.3	Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações: a) $15,0^\circ$ . b) $30,0^\circ$ . c) $45,0^\circ$ . . . . .	81

8.4	Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações: a) $60,0^\circ$ . b) $75,0^\circ$ . c) $90,0^\circ$ . . . . .	82
8.5	Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações (de cima para baixo): $105,0^\circ$ , $120,0^\circ$ e $135,0^\circ$ . . . . .	84
8.6	Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações (de cima para baixo): $150,0^\circ$ , $165,0^\circ$ e $180,0^\circ$ . . . . .	85
9.1	Porcentagem de sobreviventes para cada semi-eixo maior “estável”na região 1 pelos períodos de 2 anos (linha laranja tracejada) e 2000 anos (preenchido em amarelo). . . . .	88
9.2	Porcentagem de sobreviventes para cada semi-eixo maior “estável”na região 2 pelos períodos de 2 anos (linha laranja tracejada) e 2000 anos (preenchido em amarelo). . . . .	89
9.3	Porcentagem de sobreviventes para cada semi-eixo maior “estável”na região 3 pelos períodos de 2 anos (linha laranja tracejada) e 2000 anos (preenchido em amarelo). . . . .	90
9.4	Representação das regiões de estabilidade (em amarelo) e instabilidade (em vermelho) no sistema triplo de asteróides 2001 SN263, para partículas com excentricidade e inclinação nula, pelo período de 2000 anos. . . . .	91

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Classificação dos NEAs. . . . .	4
2.2 Visão geral de algumas das principais missões realizadas ou planejadas para um NEA. . . . .	8
3.1 Dados físicos e orbitais dos componentes do sistema 2001 SN263. . . . .	10
4.1 Taxas de Precessão de $\Omega$ e $\omega$ para os satélites do sistema 2001 SN263 obtidos por Fang et al. (2011). . . . .	20
4.2 Problema de 3 corpos - Perturbação mútua. . . . .	21





## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 NEAs E MISSÕES ESPACIAIS</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 NEAs: Near-Earth Asteroids. . . . .	3
2.1.1 NEAs: Origem e evolução. . . . .	4
2.1.2 NEAs: Sistemas múltiplos. . . . .	5
2.2 Missões Espaciais e os NEAs . . . . .	6
<b>3 O SISTEMA TRIPLO DE ASTERÓIDES 2001 SN263</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>4 2001 SN263: EVOLUÇÃO ORBITAL</b> . . . . .	<b>13</b>
4.1 Integração numérica. . . . .	13
4.2 Problema de 3-corpos: A perturbação mútua. . . . .	13
4.2.1 Variação em semi-eixo maior. . . . .	14
4.2.2 Variação em excentricidade. . . . .	15
4.2.3 Variação em inclinação. . . . .	17
4.2.4 Variação da longitude do nodo ascendente - $\Omega$ . . . . .	18
4.2.5 Variação do argumento do pericentro. . . . .	18
4.2.6 Precessão dos ângulos $\Omega$ e $\omega$ . . . . .	19
4.2.7 Problema de três corpos - resultados. . . . .	21
4.3 Problema de 7-corpos. . . . .	22
4.3.1 Perturbação externa. . . . .	22
4.3.2 Transição do sistema entre os grupos Amor e Apolo. . . . .	24
4.3.3 Encontros próximos. . . . .	26
4.4 Comentários. . . . .	29
<b>5 ESTABILIDADE NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA TRIPLO 2001 SN263: CASO PLANO</b> . . . . .	<b>31</b>
5.1 Metodologia . . . . .	31
5.1.1 Condições Iniciais . . . . .	31
5.1.2 Critérios de estabilidade. . . . .	33
5.1.3 Integração numérica. . . . .	34

5.2	Resultados - caso plano . . . . .	35
5.2.1	Regiões de estabilidade na região 1. . . . .	35
5.2.2	Regiões de estabilidade e instabilidade na região 2. . . . .	40
5.2.2.1	Ressonância na região 2. . . . .	42
5.2.3	Regiões de estabilidade e instabilidade na região 3. . . . .	48
5.3	Comentários . . . . .	52
<b>6</b>	<b>ESTABILIDADE NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA</b>	
	<b>TRIPLO 2001 SN263 - CASOS PRÓGRADOS . . . . .</b>	<b>53</b>
6.1	Considerações iniciais. . . . .	53
6.2	Resultados. . . . .	53
6.2.1	Região 1. . . . .	53
6.2.1.1	Ressonância na região 1. . . . .	56
6.2.2	Região 2. . . . .	58
6.2.3	Região 3. . . . .	61
6.3	Comentários. . . . .	64
<b>7</b>	<b>ESTABILIDADE NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA</b>	
	<b>TRIPLO 2001 SN263 - CASOS RETRÓGRADOS . . . . .</b>	<b>65</b>
7.1	Considerações iniciais. . . . .	65
7.2	Resultados. . . . .	65
7.2.1	Região 1. . . . .	65
7.2.1.1	Ressonância na região 1 - caso retrógrado. . . . .	68
7.2.2	Região 2. . . . .	70
7.2.3	Região 3. . . . .	72
7.3	Comentários. . . . .	75
<b>8</b>	<b>ESTABILIDADE NA REGIÃO EXTERNA DO SISTEMA TRI-</b>	
	<b>PLO 2001 SN263 . . . . .</b>	<b>77</b>
8.1	Definição da região externa. . . . .	77
8.2	Metodologia. . . . .	78
8.3	Caso Plano. . . . .	78
8.3.1	Condições iniciais. . . . .	78
8.3.2	Resultado. . . . .	79
8.4	Casos prógrados. . . . .	80
8.5	Casos retrógrados. . . . .	83
8.6	Comentários. . . . .	86

<b>9 CASO PLANO E CIRCULAR: ESTABILIDADE EM LONGO PERÍODO NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA 2001</b>	
<b>SN263</b> . . . . .	<b>87</b>
9.1 Região 1. . . . .	87
9.2 Região 2. . . . .	88
9.3 Região 3. . . . .	89
9.4 Comentários. . . . .	90
<b>10 CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>97</b>
<b>APÊNDICE A - O PROBLEMA DE N-CORPOS.</b> . . . . .	<b>.101</b>
<b>APÊNDICE B - PERTURBAÇÃO SECULAR: TAXAS DE PRE-CESSÃO DE <math>\Omega</math> E <math>\omega</math>.</b> . . . . .	<b>.103</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Asteróides são corpos que orbitam o Sol, mas que são pequenos demais para serem considerados planetas. Eles podem receber diferentes classificações de acordo com suas características orbitais, físicas, químicas e mineralógicas, e por serem exemplares de objetos primordiais, podem contribuir no entendimento do processo de formação do nosso sistema solar, justificando o crescente interesse na exploração e estudo destes objetos.

Sob o enfoque de missões destinadas à asteróides, os NEAs se mostram especialmente interessantes. “NEAs” é a sigla para *Near-Earth Asteroids*, e como o próprio nome sugere, designa os asteróides que em sua evolução orbital se aproximam periodicamente da órbita da Terra. O atual interesse das agências espaciais em mandar sondas para estes corpos se deve justamente à esta maior acessibilidade, dispensando o planejamento de uma missão ao cinturão principal, o que tornaria a missão mais cara e demorada.

Dentre os NEAs destacam-se os sistemas binários e agora os recém descobertos sistemas triplos: 2001 SN263, descoberto em fevereiro de 2008, e 1994 CC, descoberto em junho de 2009. Estudar a dinâmica que rege o movimento destes corpos se mostra particularmente interessante, já que além da perturbação gravitacional mútua entre os corpos que compõem o sistema, existem ainda as perturbações externas, principalmente quando ocorrem encontros com planetas.

Além disso, recentemente, o NEA 2001 SN263 foi escolhido como alvo da missão ASTER (SUKHANOV, 2010). Surge então a necessidade de se caracterizar regiões estáveis internas e externas ao sistema. Esta informação é de grande importância já que irá fornecer parâmetros para o planejamento da missão (inserção da sonda no sistema e escolha dos instrumentos científicos, por exemplo).

Diante deste cenário, neste trabalho é apresentado o estudo numérico a respeito da dinâmica do sistema triplo de asteróides 2001 SN263. Este estudo está basicamente dividido em duas partes. Na primeira parte foi feita a caracterização da evolução orbital do sistema. Foi analisado como as órbitas dos asteróides são perturbadas devido à perturbação mútua, como a órbita heliocêntrica do sistema é perturbada pelos planetas Terra, Marte e Júpiter e como os asteróides satélites são afetados por estas perturbações. Na segunda parte foram determinadas as regiões de estabilidade e

instabilidade dentro e fora do sistema, seguindo alguns critérios que serão detalhados nos capítulos dedicados à cada um destes tópicos.

O trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 2, é feita uma breve introdução à respeito dos NEAs e de missões que foram ou que estão destinadas à estes corpos. No capítulo 3, o sistema é apresentado, com detalhes sobre a órbita e aspectos físicos dos asteróides. No capítulo 4, são apresentados os resultados de simulações numéricas em que foi analisada a evolução orbital do sistema com a discussão de como os asteróides se perturbam mutuamente e como alguns dos planetas influenciam nesta dinâmica. O estudo da estabilidade do sistema foi dividido em cinco tópicos, apresentados em capítulos separados. No capítulo 5, é apresentado o estudo da estabilidade na região interna ao sistema considerando o caso plano. No capítulo 6, é apresentado o estudo da estabilidade para as mesmas regiões internas, considerando o caso prógrado, e, no capítulo 7, os casos retrógrados foram discutidos. No capítulo 8, o estudo da estabilidade é estendido para a região externa, para os casos plano, prógrados e retrógrados. No capítulo 9, foi feita a discussão sobre as regiões de estabilidade internas em longo período para o caso específico plano e circular. No capítulo 10, estão os comentários finais, com as principais conclusões do trabalho. A seguir, estão as referências bibliográficas, o apêndice A com um resumo da teoria do problema de N-corpos, e o pênndice B a respeito da teoria da perturbação secular.

## 2 NEAs E MISSÕES ESPACIAIS

O objetivo deste trabalho é analisar a dinâmica orbital do sistema triplo de asteróides 2001 SN263 e caracterizar suas regiões de estabilidade. Por se tratar de um NEA e por ter sido escolhido como alvo de uma missão, torna-se interessante uma revisão de estudos à respeito desse grupo de asteróides e de missões similares à missão ASTER. Diante disto, neste capítulo é feita uma introdução à respeito dos NEAs e uma revisão das missões que já foram realizadas, ou que estão planejadas, e que têm NEAs como alvo.

### 2.1 NEAs: Near-Earth Asteroids.

NEOs é a sigla em inglês para *Near-Earth Objects*, e como o próprio nome sugere, designa objetos que em sua evolução orbital se aproximam periodicamente da órbita da Terra. Em uma definição mais específica, classifica-se como NEO qualquer objeto que orbita o Sol com um periélio  $q \leq 1,3$  UA e com um afélio  $Q \geq 0,983$  UA (considerando que a grande maioria dos NEOs possuem órbitas próximas do plano da eclíptica). Pode-se dividir o grupo dos NEOs em três subgrupos: os *Near-Earth Meteoroids* (objetos com diâmetros menores que 10 metros), os *Near-Earth Asteroids* (NEAs) e os *Near-Earth Comets* (NECs).

Os NEAs são classificados em quatro grupos: Atenas, Apollo, Amor e Atira (ou IEO - Interior to Earth Orbit), de acordo com suas características orbitais dadas especificamente pelo periélio ( $q$ ), pelo afélio ( $Q$ ) e pelo semi-eixo maior de suas respectivas órbitas. A tabela 1 traz um detalhamento destas características, e foi feita considerando os dados da órbita da Terra: afélio  $Q_T = 1,017$  UA, periélio  $q_T = 0,983$  UA e semi-eixo maior  $a = 1,0$  UA. A figura 1 é uma ilustração das órbitas.

De acordo com informações da NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) os NEAs são predominantes dentro do grupo dos NEOs. Dados atualizados setembro de 2011 mostram que dos 8266 NEOs conhecidos, 90 são cometas enquanto que 8176 são asteróides (destes, 0,1% Atira, 8,10% Atenas, 54,2% Apolo e 37,60% Amor.) (JPL-NASA, 2011).

Tabela 2.1 - Classificação dos NEAs.

Grupo	Porcentagem	$q(\text{UA})$	$Q(\text{UA})$	$a(\text{UA})$	Características
Apolo	54,2%	$q < Q_T$		$a > a_T$	Cruzam a órbita da Terra.
Atenas	8,1%		$Q > q_T$	$a < a_T$	Cruzam a órbita da Terra.
Amor	37,6%	$Q_T < q < 1,3 \text{ UA}$		$a > a_T$	Se aproximam da órbita da Terra e cruzam a órbita de Marte.
Atira (IEO)	0,1%	$Q < q_T$		$a < a_T$	Órbita interna à órbita da Terra Sem cruzamento das órbitas.

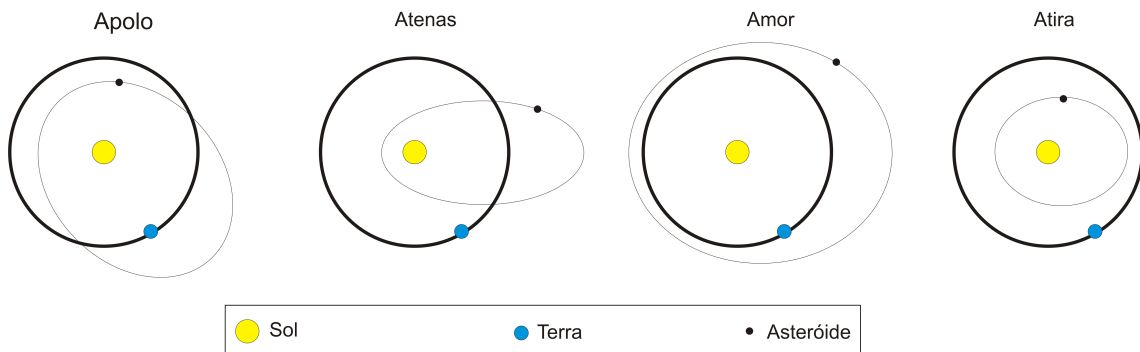


Figura 2.1 - Representação das órbitas de NEAs pertencentes aos grupos Apolo, Atenas, Amor e Atira.

### 2.1.1 NEAs: Origem e evolução.

Os NEOs compõem o grupo de corpos celestes que representam ameaça para a vida na Terra, já que existe a possibilidade de um evento catastrófico causado por impactos destes corpos com a superfície de nosso planeta. Sendo assim, além do esforço para aumentar o número de NEOs conhecidos, é igualmente importante caracterizar a composição destes corpos, entender o processo que dá origem à estes corpos e analisar como eles evoluem dinamicamente.

O trabalho realizado por Gladman et al. (2000) mostrou que o tempo de vida dos NEOs é da ordem de 10 milhões de anos, e foi estimado que ao longo deste período



10% – 20% dos corpos colidem com um dos planetas terrestres (principalmente com Terra e Vênus), aproximadamente 15% são ejetados do Sistema Solar, e mais da metade colide com o Sol. O tempo de vida dos NEOs encontrado neste trabalho é considerado curto quando comparado à idade do Universo, ou do próprio Sistema Solar, que é da ordem de bilhões de anos e, assim sendo, concluí-se que a população de NEOs vem sendo constantemente realimentada por corpos vindos de outras regiões.

Os primeiros trabalhos realizados visando explicar qual seria o mecanismo responsável por manter esta população indicavam uma origem cometária para os NEOs (OPIK, 1961). Em 1964 e 1965, começam a aparecer os primeiros trabalhos que passaram a considerar a origem asteroidal dos NEOs, como discutido em [Anders and Arnold \(1965\)](#), que concluíram que alguns NEOs com altos valores de excentricidade e inclinação seriam núcleos extintos de cometas, enquanto os demais NEOs conhecidos na época seriam asteróides vindos do cinturão principal de asteróides, e que encontros com o planeta Marte fariam com que estes corpos atingissem órbitas típicas dos NEOs.

Recentemente, [Morbidelli et al. \(2002\)](#) mostraram que os NEOs teriam origem predominantemente asteroidal. Através de integrações numéricas, foi demonstrado como os asteróides podem escapar do cinturão principal através da ação de ressonâncias localizadas em regiões específicas no cinturão, e, com isso, suprir a população de NEOs conhecidos. De acordo com seus estudos, apenas 6% dos NEOs teriam origem cometária.

### **2.1.2 NEAs: Sistemas múltiplos.**

Dentro do grupo dos NEAs, destacam-se os sistemas de asteróides binários e triplos. [Bottke \(1996\)](#) estimou, através da análise de crateras de impactos na Terra e em Vênus, que aproximadamente 15% da população de NEAs que cruzam a órbita da Terra, deve ser formada por sistemas binários de asteróides. Para os NEAs que cruzam a órbita de Marte, a estimativa de binários é de 5% da população. Apesar desta estimativa alta, atualmente apenas 36 asteróides são reconhecidos como sistemas múltiplos de asteróides, sendo 34 sistemas binários e 2 sistemas triplos ([JPL-NASA, 2011](#)).

No ano de 2008, foi anunciada a descoberta do primeiro sistema triplo de asteróides pertencente ao grupo dos NEAs ([NOLAN et al., 2008](#)). Trata-se do sistema 2001

SN263. O corpo primário foi descoberto em 2001 e foi classificado como sendo do tipo Amor. Em fevereiro de 2008, através de observações realizadas pelo Radiotelescópio de Arecibo, descobriu-se que o que antes acreditava-se ser um asteroide único era na verdade composto por três corpos, de aproximadamente 2,6 km, 0,78 km, e 0,58 km de diâmetro. Este sistema é apresentado em maiores detalhes no capítulo 3.

Em junho de 2009 foi anunciado que o *NEA 1994 CC* (do tipo Apollo) também é um sistema triplo de asteroides, composto por um corpo primário (descoberto em 1994) de aproximadamente 0,3 km de raio, e por corpos secundários de raios aproximados de 0,025 km e 0,05 km (FANG *et al.*, 2011).

Pensando em missões espaciais que têm asteroides como alvo, os NEAs se mostram especialmente interessantes tanto em termos científicos como em relação ao planejamento de missões, como será discutido na próxima sessão.

## 2.2 Missões Espaciais e os NEAs

A missões espaciais que têm asteroides como alvo, se tornam especialmente vantajosas quando os NEAs são considerados, isto porque:

- Os NEAs possuem órbitas que periodicamente se aproximam da Terra e com isso a missão seria mais vantajosa em termos econômicos (economia de combustível ou com sistemas de telecomunicação, por exemplo) e em uma possível diminuição no tempo necessário para que o alvo seja alcançado.
- Por parcialmente passarem pela região dos planetas internos do Sistema Solar pode haver um bom aproveitamento da energia solar.
- O fato de serem potencialmente perigosos para a vida na Terra. Conhecer sua dinâmica e composição ajuda na avaliação de riscos de colisões com nosso planeta e no planejamento de possíveis soluções.
- No caso dos sistemas compostos por mais de um corpo existe a possibilidade de que os corpos secundários tenham se formado a partir de colisões e que haja a exposição de regiões internas destes corpos, as quais poderão ser observadas pela missão.

Por vantagens como estas, cresce cada vez mais o interesse do meio científico e das agências espaciais no estudo dos asteroides. Em maio de 2003, a *Japan Aerospace*

*Exploration Agency* lançou a missão Hayabusa para o NEA (25413) Itokawa, o qual foi atingido dois anos depois, em setembro de 2005. A mesma agência planeja para os anos de 2014, ou 2015, uma nova missão chamada Hayabusa 2, que utilizará a mesma tecnologia e conceitos da primeira missão, dessa vez tendo como alvo o *NEA* 1999 JU3 (YOSHIKAWA et al, 2006).

A ESA (European Space Agency) possui alguns estudos que avaliam missões direcionadas à NEAs, como no programa Don Quijote (ESA) (GALVEZ, 2003) onde é proposto lançar dois veículos espaciais com órbitas distintas. O plano é fazer um destes veículos impactar um NEA e, então, o outro veículo se aproximaria do asteroide impactado e permaneceria alguns meses em órbita ao redor dele colhendo informações relativas à estrutura interna do asteroide e da deflexão causada pelo impacto.

O programa ISHTAR (ESA) (D'ARRIGO, 2003) está previsto para ser lançado em 2011 e tem como objetivo visitar ao menos dois NEAs e caracterizar todos os parâmetros físicos dos asteroides como sua distribuição de massa, densidade, propriedades de superfície, e propriedades de coesão interna dos asteroides (determinante para analisar os efeitos de sua entrada na atmosfera terrestre, por exemplo).

A missão SIMONE (ESA) (WELLS, 2003) foi planejada para ser composta por 5 micro-satélites de baixo-custo, os quais irão estudar individualmente NEOs - *Near Earth Objects*, de diferentes classificações. A missão Marco Polo também faz parte do programa de missões da ESA, e seu objetivo principal é retornar para a Terra trazendo uma amostra de algum NEO.

A ESA também apresenta o *NEA-SR: Near-Earth Asteroid Sample Return*, que é um estudo conceitual que visa entender os requerimentos e as tecnologias necessários para retornar para a Terra com uma amostra de um NEA. De acordo com o documento de divulgação (AGNOLON, 2007), a escolha deste tipo de corpo se deve primeiramente ao fato de que “asteroides são uma fonte de informações sobre a história do Sistema Solar”, e a escolha de um *NEA* se deve justamente a “uma maior acessibilidade em termos de mecânica orbital”. O corpo apresentado como alvo neste estudo também é o *NEA* 1999 JU3, isto porque este asteroide foi avaliado como sendo do tipo C (considerado o tipo mais primitivo de asteroide) e foi dentre os de classificação espectral conhecida, o que apresentou a maior acessibilidade para a missão.

Tabela 2.2 - Visão geral de algumas das principais missões realizadas ou planejadas para um NEA.

Missão	Desenvolvedores	Objetivos
Hayabusa	Japan Aerospace Agency	Visitar o NEA (25413) Itokawa e retornar à Terra com uma amostra do asteróide.
Hayabusa 2	Japan Aerospace Agency	Visitar o NEA 1999 JU3 com a mesma tecnologia da Hayabusa (2003).
Don Quijote	ESA	Lançamento de dois veículos espaciais com órbitas distintas. O primeiro deles impactaria um NEA enquanto o outro colheria informações a respeito do alvo e dos efeitos do impacto.
ISHTAR	ESA	Visitar ao menos dois NEAs e caracterizar todos os parâmetros físicos dos asteróides.
SIMONE	ESA	Composta por 5 micro-satélites de baixo-custo que irão estudar individualmente NEOs.
Marco Polo	ESA	Visitar um NEO e retornar para a Terra trazendo uma amostra do alvo.
NEA-SR	ESA	Estudo conceitual que visa entender os requerimentos e as tecnologias necessários para retornar para a Terra com uma amostra de um NEA primitivo.
HERA	Arkansas Center for Planetary Science e JPL-NASA	Enviar uma sonda para 3 NEAs para coletar amostras destes asteróides, e então retornar para a Terra
ASTER	Brasil	Enviar uma sonda para o NEA 2001 SN263 e colher informações do alvo.

A missão HERA é um projeto sendo desenvolvido em conjunto entre o *Arkansas Center for Planetary Science* e o *Jet Propulsion Laboratory*. O objetivo da missão é enviar uma sonda para 3 NEAs para coletar amostras destes asteróides, e então retornar para a Terra (SEARS et al., 2004).

Recentemente, o sistema triplo de asteróides 2001 SN263 foi anunciado como alvo da missão ASTER, planejada para ser a primeira missão brasileira de espaço profundo.

A tabela 2.2 traz um resumo das características das missões citadas acima.

O sistema triplo 2001 SN263 é o objeto de estudo desta tese e a inclusão dele na missão ASTER vem aumentar o interesse no melhor conhecimento da dinâmica deste sistema, além, é claro, do interesse puramente científico. O capítulo seguinte traz as informações sobre o sistema.

### 3 O SISTEMA TRIPLO DE ASTERÓIDES 2001 SN263

O asteróide 2001 SN263 foi descoberto em 2001 pelo programa *LINEAR* (*Lincoln Near-Earth Asteroid Research*) - desenvolvido em conjunto pela força aérea norte americana, pela NASA e pelo *Lincoln Laboratory-MIT*.

Observações realizadas no início do ano de 2008, aproveitando uma aproximação do asteróide 2001 SN263 com a Terra, revelaram que, o que antes acreditava-se tratar de um asteróide único, era na realidade de um sistema múltiplo. Curvas de luz obtidas pelo *Observatory of Haute-Provence* em Janeiro de 2008 indicavam que o asteróide era um sistema binário. Em Fevereiro do ano de 2008, foram feitas observações durante 16 dias pelos radio-astrônomos do Observatório de Arecibo-Porto Rico, que mostraram que o asteróide 2001 SN263 é um sistema triplo de asteróides (ver figura 3.1) (NOLAN et al., 2008).

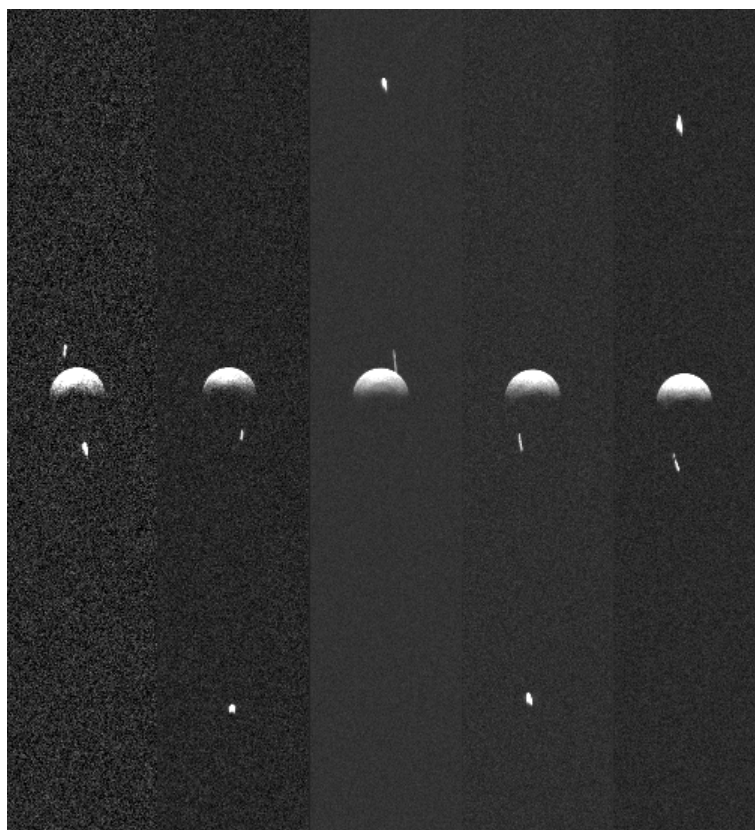


Figura 3.1 - Sistema triplo de asteróides 2001 SN263. Sequência de imagens obtidas nos dias 13, 14, 18, 21 e 23 do mês de fevereiro de 2008 (Nolan,2008)

Em Janeiro de 2009, [Becker et al. \(2009\)](#) apresentaram dados preliminares sobre os aspectos físicos dos asteróides. Este estudo estimou que o asteróide primário seria aproximadamente um esferóide com eixos principais de aproximadamente  $2,8 \pm 0,1$  km,  $2,7 \pm 0,1$  km,  $2,5 \pm 0,2$  km e com uma densidade de  $1,3 \pm 0,6$  g/cm<sup>3</sup>. Até então, pouco se sabia a respeito do sistema, tanto em relação às características físicas (massa dos satélites e formato do corpo central, por exemplo), como em relação às órbita dos asteróides satélites.

Dados atualizados sobre as órbitas dos dois NEAs triplos conhecidos até o momento, 2001 SN263 e 1994 CC, foram apresentados por [Fang et al. \(2011\)](#). Baseados em dados observacionais de radar do Observatório de Arecibo-Porto Rico e do Observatório Goldstone (Califórnia-USA), e através da integração numérica do problema de N-corpos, foram derivados as massas dos componentes dos sistema, o coeficiente gravitacional  $J_2$  (relacionado com o achatamento do corpo central) e os elementos orbitais dos asteróides satélites. A tabela 3.1 traz os dados relativos ao sistema 2001 SN263. Nesta tabela, e no restante do trabalho, foi adotada a mesma nomenclatura adotada por [Fang et al. \(2011\)](#), sendo Alfa o asteróide central (mais massivo), Beta o segundo menos massivo, e Gama o menos massivo dos corpos.

Ainda de acordo com o mesmo trabalho, o corpo central Alfa é achatado, com o valor de  $J_2 = 0,013 \pm 0,008$ .

Tabela 3.1 - Dados físicos e orbitais dos componentes do sistema 2001 SN263.

Asteróide	Orbita	a <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	I <sup>1</sup> (*)	Período <sup>1</sup>	Raio	Massa <sup>1</sup>
Alfa	Sol	1,99 UA	0,48	6,7°	2,80 anos	1,3 km <sup>(1)</sup>	$M_\alpha = 917,47 \times 10^{10}$ kg
Beta	Alfa	16,633 km	0,015	0,0°	6,23 dias	0,39 km <sup>(**)</sup>	$M_\beta = 24,04 \times 10^{10}$ kg
Gama	Alfa	3,804 km	0,016	13,87°	0,69 dias	0,29 km <sup>(**)</sup>	$M_\gamma = 9,77 \times 10^{10}$ kg

1 - [Fang et al. \(2011\)](#)

(\*) Inclinação de Alfa em relação ao plano da eclíptica. Inclinações de Beta e Gama relativas ao equador de Alfa.

(\*\*) Valores calculados.

Como pode ser visto pela figura 3.2, que é uma representação em escala do sistema, feita considerando os dados da tabela 3.1, o corpo mais interno é o menos massivo

(Gama), enquanto que o segundo menos massivo é o corpo mais externo (Beta).

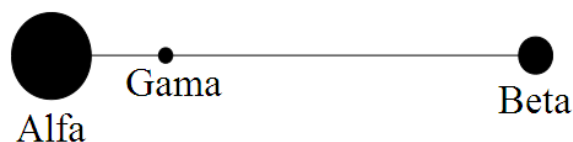


Figura 3.2 - Representação dos componentes do sistema 2001 SN263.

Por ser um NEA do tipo Amor, este sistema é o primeiro sistema triplo de asteróides conhecido a sofrer aproximação com a Terra, e a cruzar a órbita do planeta Marte, além de cruzar o cinturão principal de asteróides, como mostra a figura 3.3.

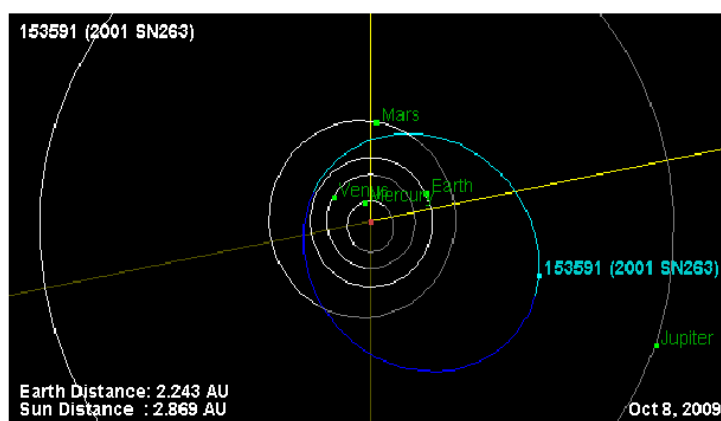


Figura 3.3 - Evolução orbital do sistema 2001 SN263 (JPL-NASA).

Assim sendo, a evolução orbital do sistema deve ser dominada por encontros próximos com os planetas. Outra particularidade deste sistema é que os três asteróides possuem valores de diâmetros e de massas próximos, e a distância entre eles é relativamente pequena, e portanto devem se perturbar de forma significativa. O capítulo a seguir é destinado a caracterizar tais perturbações.





## 4 2001 SN263: EVOLUÇÃO ORBITAL

Neste capítulo, é apresentado o estudo sobre as órbitas dos asteróides que compõem o sistema triplo 2001 SN263. Primeiramente, foi analisado como estes corpos se perturbam, considerando apenas a interação gravitacional mútua (problema de 3 corpos). A seguir foram analisadas as perturbações externas. Para isso, além dos três asteróides, foram considerados o Sol, e os planetas Terra, Marte e Júpiter (problema de 7 corpos). Assim, além de caracterizar a evolução orbital do sistema em sua órbita heliocêntrica, ainda foram discutidos efeitos nas órbitas dos satélites devido a encontros próximos com os planetas Marte e Terra. As considerações sobre as integrações numéricas realizadas são apresentadas na primeira seção, e a seguir têm-se a discussão dos resultados.

### 4.1 Integração numérica.

As integrações numéricas das equações do problema de N-corpos (apêndice A), foram realizadas utilizando o integrador numérico Gauss-Radau (EVERHART, 1985).

No chamado problema de 3-corpos, foram considerados apenas os asteróides que compõem o sistema 2001 SN263: Alfa, Beta e Gama. No problema de 7-corpos, são considerados, além dos três asteróides, o Sol, e os planetas Terra, Marte e Júpiter. Nestas integrações têm-se Terra, Marte, Júpiter e Alfa orbitando o Sol, e os asteróides Beta e Gama orbitando Alfa, levando em conta o seu achatamento e a sua obliquidade.

Os elementos orbitais dos corpos Beta e Gama, do sistema 2001 SN263, usados como condições iniciais nas integrações, são dados por Fang et al. (2011). Os dados apresentados por eles são válidos na época 54509.0 MJD (*Modified Julian Date*), no sistema de referência equatorial J2000. Os elementos orbitais dos demais corpos (Alfa, Terra, Marte e Júpiter) foram obtidos através do *JPL's horizons system* (NASA-HORIZONS, 2011), para a mesma época, e, para o mesmo sistema de referência.

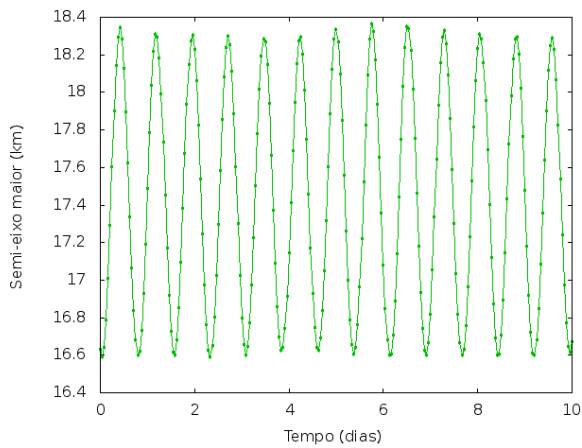
### 4.2 Problema de 3-corpos: A perturbação mútua.

Usando o procedimento descrito na seção anterior, foi realizada uma integração numérica considerando apenas os três asteróides ( $N = 3$ ) por um período de 1000 anos ( $\approx 60.000$  períodos orbitais de Beta ou  $\approx 600.000$  períodos orbitais de Gama).

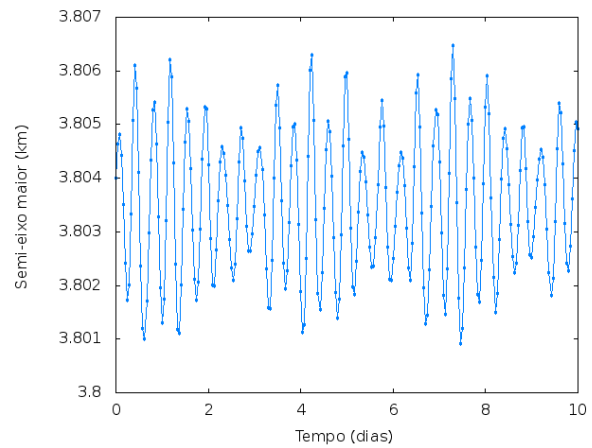
Como se sabe, se houvesse apenas dois corpos, os elementos orbitais keplerianos permaneceriam constantes. No entanto, a presença do terceiro corpo causa perturbações, mudando este comportamento. Nas seções seguintes, estas perturbações são discutidas através da análise da variação de cada um dos elementos orbitais dos asteróides satélites. Estes elementos são dados no sistema de referência centrado no equador de Alfa.

#### **4.2.1 Variação em semi-eixo maior.**

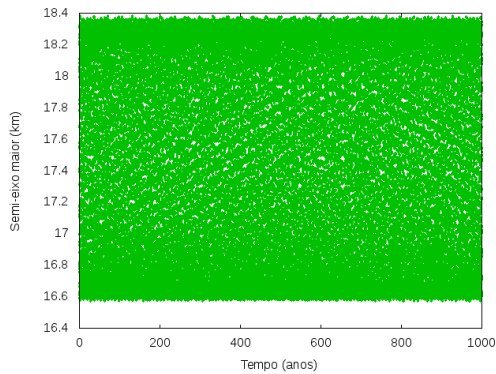
Os resultados das simulações mostram que os asteróides satélites se perturbam de modo a causar uma variação em semi-eixo  $\Delta a \approx 1,7$  km para o asteróide Beta e uma pequena variação  $\Delta a \approx 0,005$  km para o asteróide Gama. Essa é uma variação periódica com frequência menor que um dia para ambos asteróides, como mostra os gráficos a) e b) da figura 4.1. Nesta mesma figura, os gráficos c) e d) mostram o mesmo resultados, mas para o período de 1000 anos.



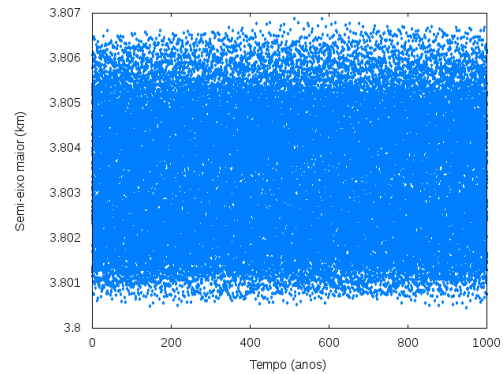
(a)



(b)



(c)



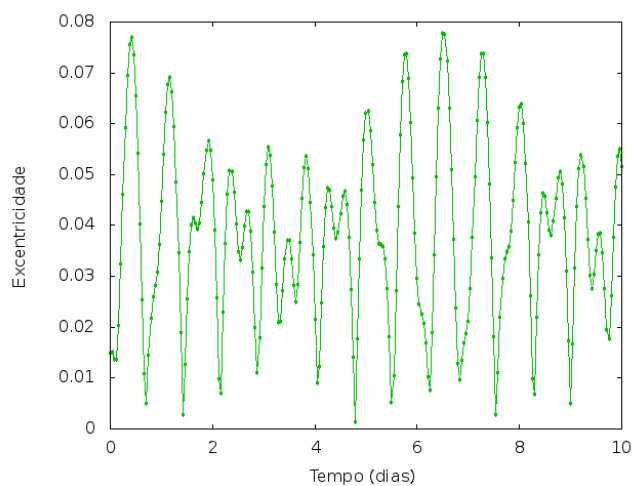
(d)

Figura 4.1 - a) Variação de semi-eixo maior do asteróide Beta por um período de 10 dias.  
 b) Variação de semi-eixo maior do asteróide Gama por um período de 10 dias.  
 c) Variação de semi-eixo maior do asteróide Beta por um período de 1000 anos.  
 d) Variação de semi-eixo maior do asteróide Gama por um período de 1000 anos.

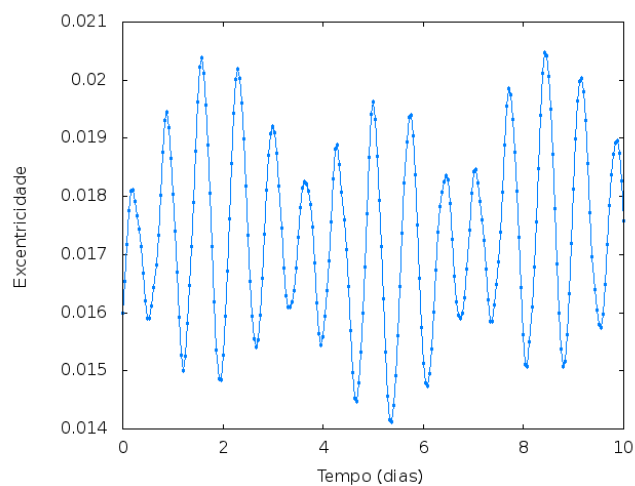
#### 4.2.2 Variação em excentricidade.

Em relação à excentricidade as simulações mostraram que a perturbação mútua dos asteróides causa um  $\Delta e \approx 0,08$  para o asteróide Beta, que vai de um valor mínimo  $e \approx 0,00$  e chega próximo de um valor máximo de  $e \approx 0,08$ , como mostra o gráfico

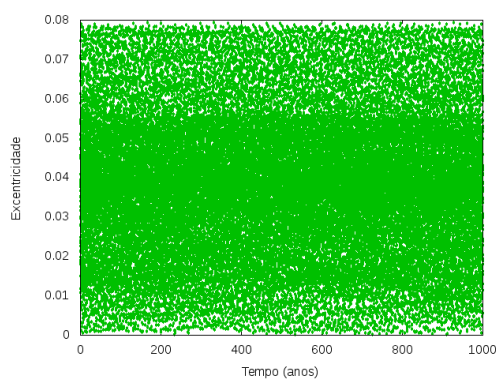
a) da figura 4.2. Para Gama a variação em excentricidade é de  $\Delta e \approx 0,0065$ , com valor máximo de excentricidade  $e \approx 0,0205$ , e um valor mínimo  $e \approx 0,014$ , como mostra o gráfico b) da figura 4.2. Nesta mesma figura, os gráficos c) e d) mostram os mesmos resultados para o período de 1000 anos.



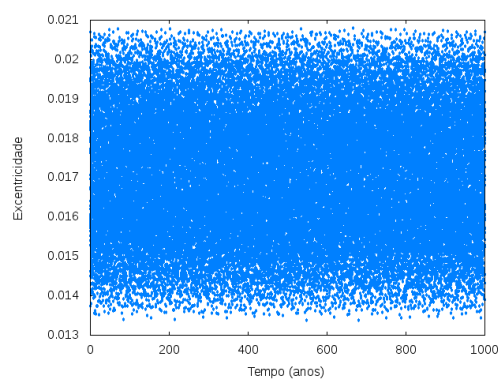
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.2 - a) Variação de excentricidade do asteroide Beta por um período de 10 dias. b) Variação de excentricidade do asteroide Gama por um período de 10 dias. c) Variação de excentricidade do asteroide Gama por um período de 1000 anos. d) Variação de excentricidade do asteroide Gama por um período de 1000 anos.

### 4.2.3 Variação em inclinação.

O asteroide Beta encontra-se inicialmente no plano do equador do asteroide central Alfa. A perturbação devido à interação gravitacional com Gama causa uma pequena variação na inclinação de Beta que oscila de  $I \approx 0,00^\circ$  até o valor máximo  $I \approx 0,8^\circ$ , como mostra o gráfico a) da figura 4.3. O asteroide Gama tem inicialmente  $I = 13,87^\circ$ , em relação ao equador de Alfa. A interação gravitacional com Beta praticamente não afeta a inclinação de Gama, que apresenta uma pequena oscilação com valor máximo  $I \approx 13,92^\circ$ .

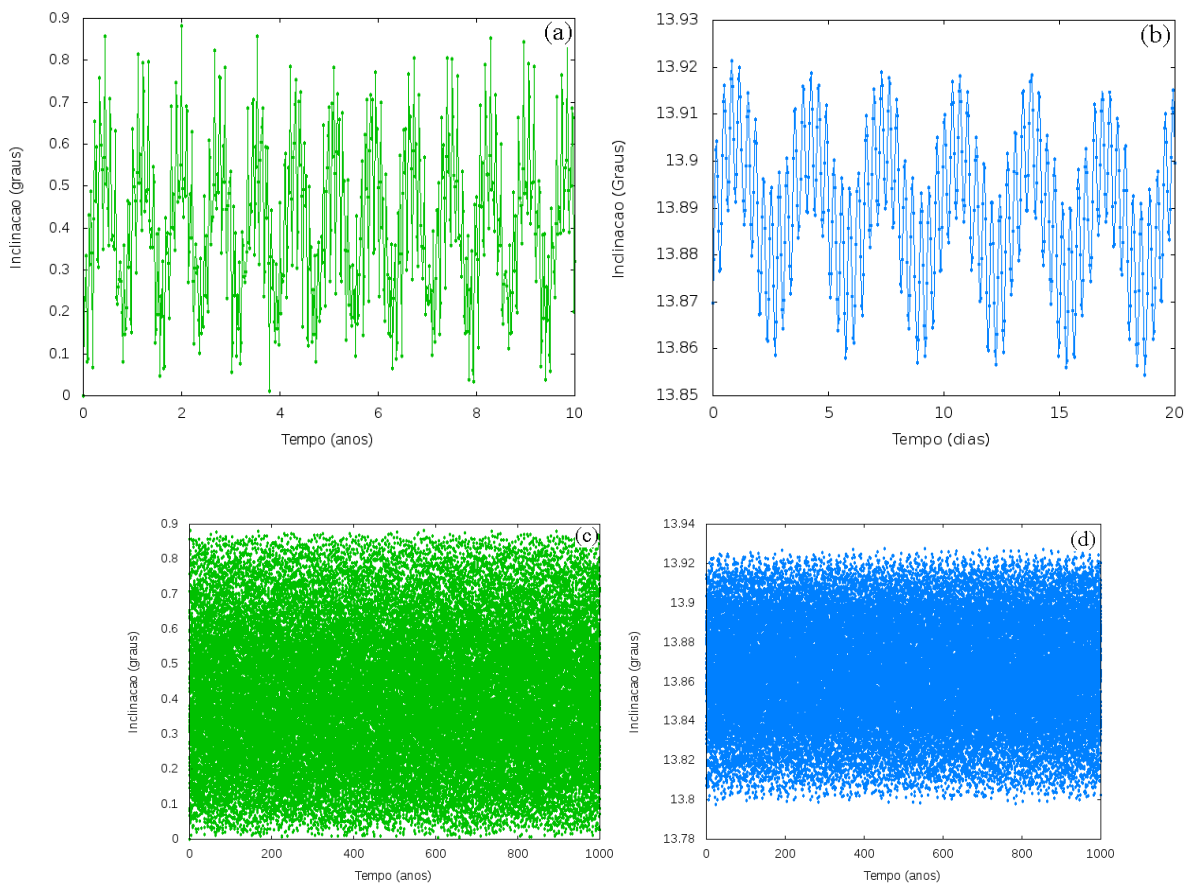


Figura 4.3 - a) Variação de inclinação do asteroide Beta por um período de 10 anos.  
b) Variação de inclinação do asteroide Gama por um período de 20 dias.  
c) Variação de inclinação do asteroide Beta por um período de 1000 anos.  
d) Variação de inclinação do asteroide Gama por um período de 1000 anos.

#### 4.2.4 Variação da longitude do nodo ascendente - $\Omega$

Em relação à variação da longitude do nodo ascendente, vê-se pelos gráficos da figura 4.4, que a perturbação mútua entre Beta e Gama, bem como o achatamento do corpo central, levam à circulação deste ângulo, para ambos os corpos. Na subseção 4.2.6 é feita a discussão sobre a taxa de precessão deste ângulo.

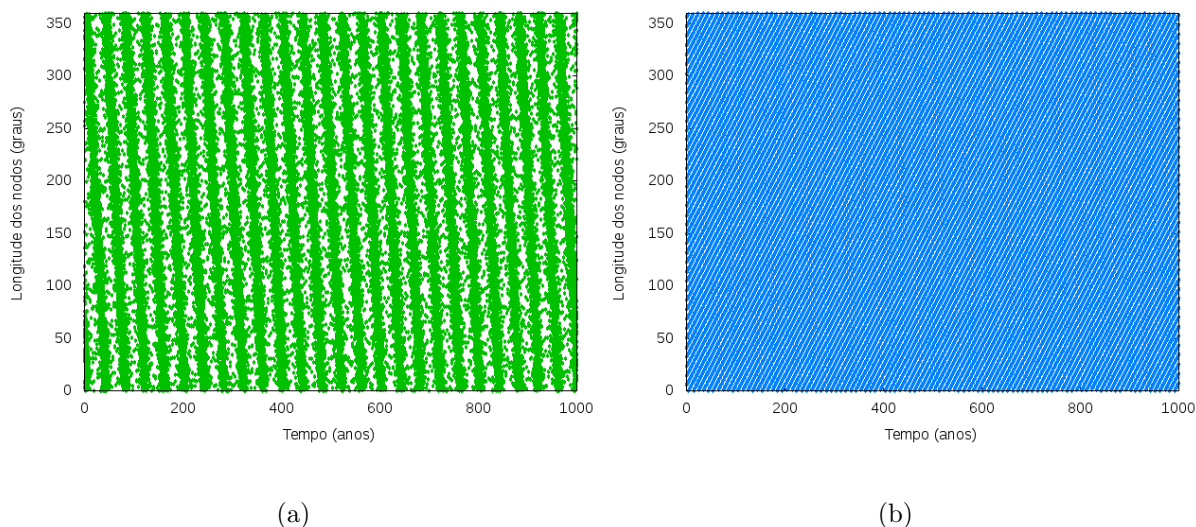


Figura 4.4 - a) Variação da longitude do nodo ascendente de Beta para um período de 1000 anos. b) Variação da longitude do nodo ascendente de Gama para um período de 1000 anos.

#### 4.2.5 Variação do argumento do pericentro.

Em relação à variação do argumento do pericentro, vê-se pelos gráficos da figura 4.5, que a perturbação mútua entre Beta e Gama, bem como o achatamento do corpo central, levam à circulação deste ângulo, para ambos os corpos. Na subseção 4.2.6 é feita a discussão sobre a taxa de precessão deste ângulo.

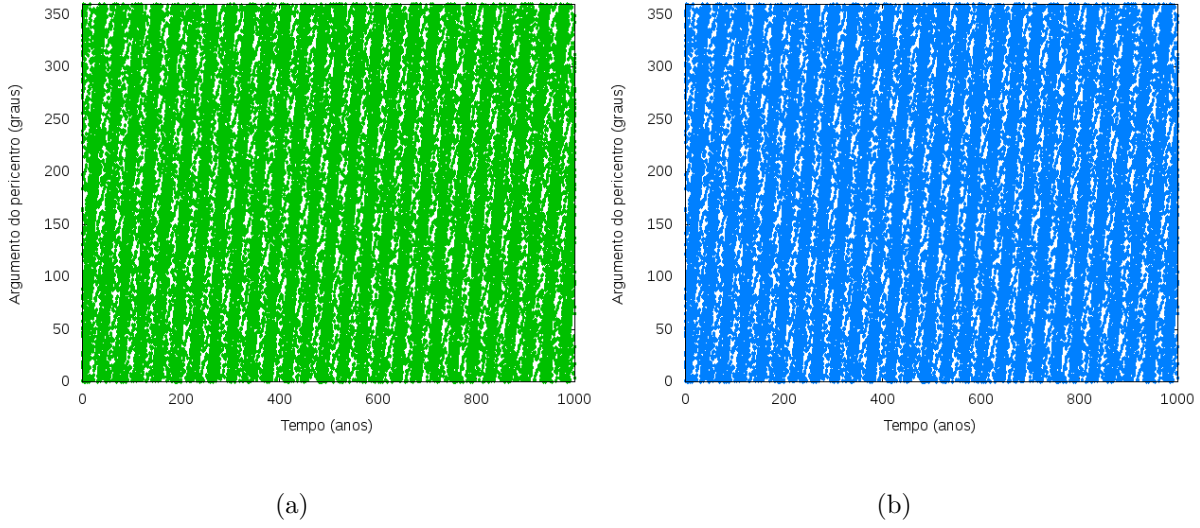


Figura 4.5 - a)Variação do argumento do pericentro do asteróide Beta. b) Variação do argumento do pericentro do asteróide Gama

#### 4.2.6 Precessão dos ângulos $\Omega$ e $\omega$ .

A taxa de precessão da longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ), bem como do argumento do pericentro ( $\omega$ ), devido ao achatamento do corpo central é dada por Murray e Dermott (1999), sendo:

$$\dot{\Omega} \approx -\frac{3}{2}nJ_2 \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 \frac{\cos I}{(1-e^2)^2} \quad (4.1)$$

$$\dot{\omega} \approx \frac{3}{2} \frac{nJ_2}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\cos^2 I - \frac{1}{2}\right) \quad (4.2)$$

em que,  $n$  é o movimento médio dos satélites (Beta e Gama),  $R_p$  é o raio do corpo central (Alfa),  $J_2$  é o coeficiente gravitacional relacionado com o achatamento do corpo central, e  $a, e, I$  são respectivamente os semi-eixo maior, excentricidade e inclinação dos satélites, em relação ao equador do corpo central.

A taxa de precessão da longitude do nodo ascendente e do argumento do pericentro, devido apenas à interação gravitacional entre os satélites, é dada pela teoria da

perturbação secular, e é brevemente apresentada no apêndice B.

Utilizando estas duas abordagens, Fang et al. (2011) apresentam o cálculo destas taxas de precessão, considerando separadamente, os efeitos devido ao achatamento do corpo central, e devido à perturbação mútua, obtendo assim a taxa de precessão total dos ângulos. Também é apresentada uma comparação entre os valores totais teóricos que foram calculados, com os valores numéricos das simulações por eles realizadas. Na tabela 4.1 são apresentados os dados obtido no trabalho citado.

Tabela 4.1 - Taxas de Precessão de  $\Omega$  e  $\omega$  para os satélites do sistema 2001 SN263 obtidos por Fang et al. (2011).

Ângulos	Beta				Gama			
	Secular	$J_2$	Total	Total Numérico	Secular	$J_2$	Total	Total Numérico
$\dot{\omega}$ ( $^{\circ}/dia$ )	0,110	0,014	0,124	0,093	0,314	2,239	2,552	2,466
$\dot{\Omega}$ ( $^{\circ}/dia$ )	-0,081	-0,007	-0,087	-0,063	-0,167	-1,171	-1,338	-1,295
$\dot{\varpi}$ ( $^{\circ}/dia$ )	0,030	0,007	0,037	0,030	0,146	1,068	1,214	1,120

Estes dados foram conferidos e confirmados tanto analítica quanto numericamente para o asteroide Gama. Nos gráficos da figura 4.6 está um *zoom* dos gráficos para a longitude do nodo ascendente e do argumento do pericentro de Gama (figuras 4.4b e 4.5b). Através da análise do número de revoluções completas destes ângulos, dentro do intervalo de tempo adotado, é possível estimar numericamente as taxas de precessão de  $\Omega$  e  $\omega$ . Os valores encontrados foram  $\dot{\Omega} \approx -1,283(^{\circ}/dia)$  e  $\dot{\omega} \approx 2,466(^{\circ}/dia)$ , os quais mostram boa concordância com o apresentado por (FANG et al., 2011).



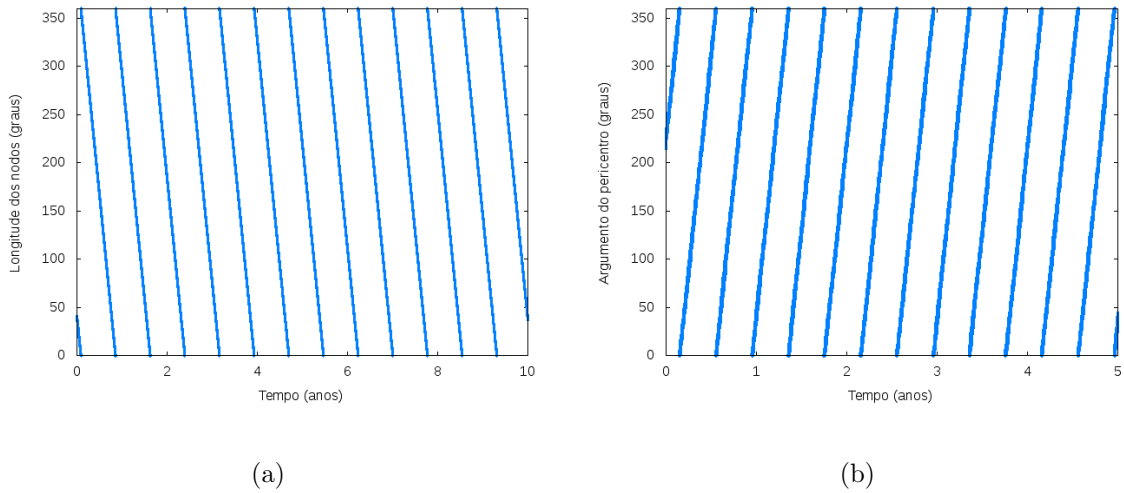


Figura 4.6 - a) Variação da longitude do nodo ascendente de Gama, pelo período de 5 anos.  
 b) Variação do argumento do pericentro de Gama, pelo período de 10 anos.

#### 4.2.7 Problema de três corpos - resultados.

A tabela 4.2 traz os resultados descritos nas seções anteriores de forma sintetizada, mostrando quais os efeitos nas órbitas dos asteróides satélites devido apenas à suas perturbações mútuas.

Tabela 4.2 - Problema de 3 corpos - Perturbação mútua.

Elementos orbitais	Beta	Gama
Semi-eixo maior	$\Delta a \approx 1,7 \text{ km}$	$\Delta a \approx 0,005 \text{ km}$
Excentricidade	$\Delta e \approx 0,08$	$\Delta e \approx 0,0065$
Inclinação	$\Delta I \approx 0,8^\circ$	$\Delta I \approx 0,05^\circ$
Longitude dos nodos	Circulando	Circulando
Argumento do pericentro	Circulando	Circulando

### 4.3 Problema de 7-corpos.

Como dito anteriormente, o sistema triplo de asteróides 2001 SN263 é um *NEA* do tipo *Amor*, o que significa que ele cruza a órbita do planeta Marte e se aproxima da órbita do planeta Terra, sendo possível, portanto, o acontecimento de encontros próximos do sistema com estes planetas.

Com o objetivo de analisar como tais planetas influenciam na dinâmica deste sistema, foi realizada uma simulação numérica do problema de sete corpos considerando, os três asteróides (Alfa, Beta e Gama), o Sol, e mais três planetas: Terra e Marte, e também o planeta Júpiter (por ter um valor de massa significativo, e também, porque em parte de sua órbita, o sistema passa pelo cinturão principal de asteróides), usando o procedimento descrito na seção 4.1, por um período de integração de 100.000 anos. Foi analisado como estes corpos massivos perturbam a órbita do sistema, e como os asteróides satélites são afetados neste período.

#### 4.3.1 Perturbação externa.

Os gráficos a seguir mostram as variações nos elementos orbitais do asteróide Alfa, em sua órbita heliocêntrica, pelo período de 100.000 anos, perturbada pelos planetas Terra, Marte e Júpiter.

Na figura 4.7 estão as variações em semi-eixo maior e excentricidade. Observa-se por estes gráficos que o sistema apresenta uma evolução caótica no tempo. Consegue-se associar tal comportamento com encontros próximos, realizados pelo sistema com os planetas Marte e Terra. Este mecanismo é melhor discutido na subseção 4.3.3.

Ainda nos gráficos de semi-eixo maior e excentricidade, observa-se um comportamento característico de uma ressonância, no período aproximado indo de  $t \approx 10.000$  até  $t \approx 30.000$  anos. A busca por comensurabilidades de movimento médio do sistema com a Terra e com Marte não retornou nenhum valor para ressonância abaixo da ordem 5. Os menores valores encontrados foram as comensurabilidades 4:11 com a Terra e 21:31 com Marte.

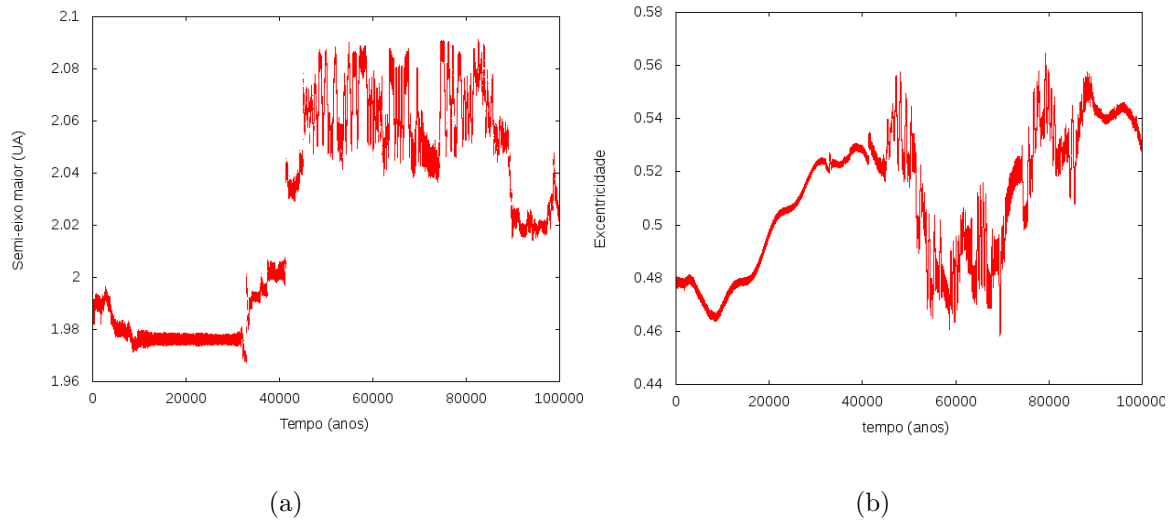


Figura 4.7 - Variação dos elementos orbitais de Alfa em sua órbita heliocêntrica por um período de 100.000 anos. a) Variação de semi-eixo maior em UA. b) Variação de excentricidade.

Em relação aos ângulos, vê-se pelos gráficos da figura 4.8, que o argumento do pericentro está circulando e a longitude do nodo ascendente está librando. A inclinação sofre uma variação periódica de aproximadamente  $14,0^\circ$  (elementos dados no sistema de referência equatorial J2000).

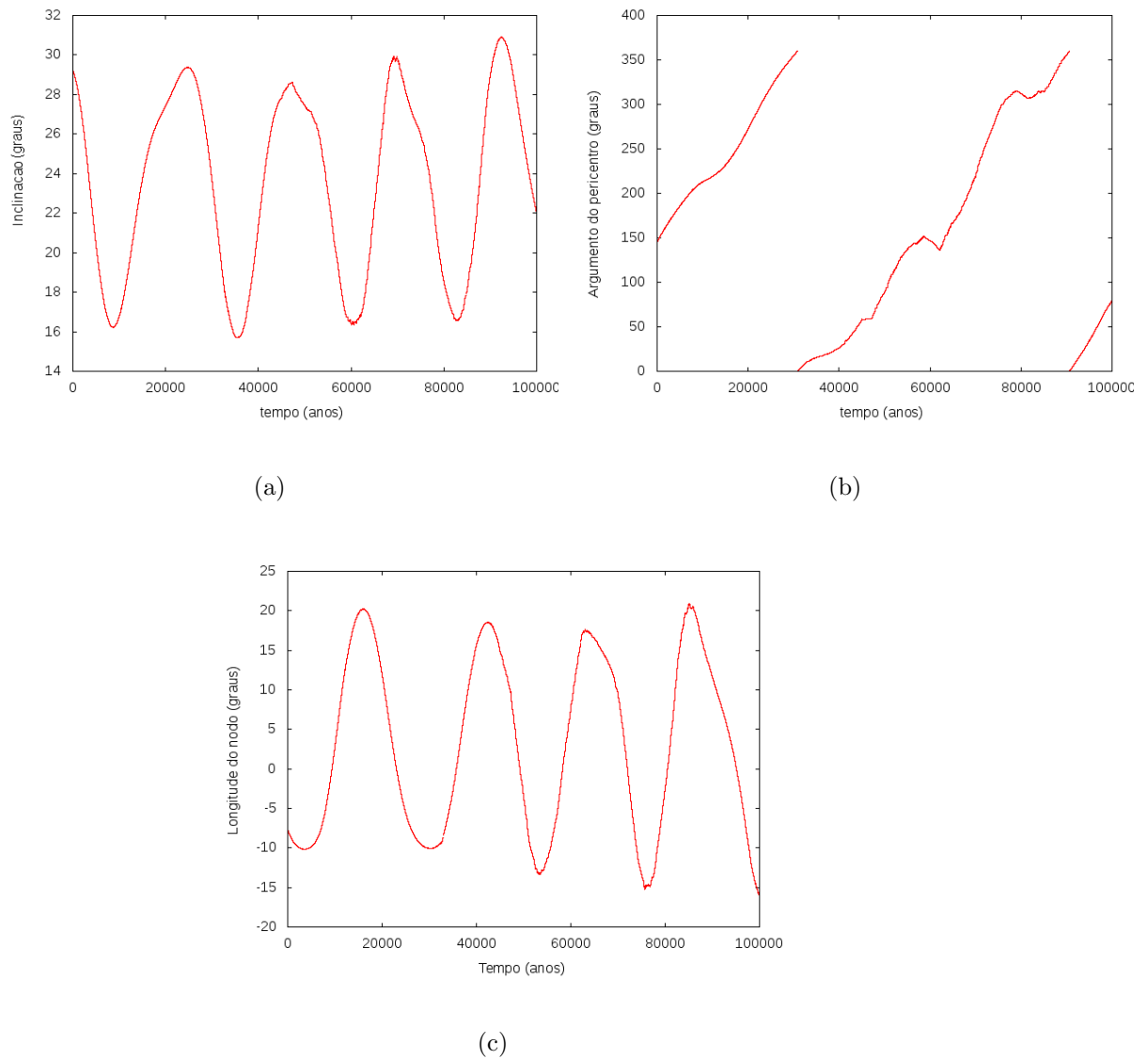


Figura 4.8 - Variação dos elementos orbitais de Alfa em sua órbita heliocêntrica por um período de 100.000 anos. a) Variação de inclinação. b) Variação do argumento do pericentro. c) Variação da longitude do nodo ascendente.

#### 4.3.2 Transição do sistema entre os grupos Amor e Apolo.

A partir dos dados iniciais da órbita heliocêntrica do sistema, determina-se que o sistema 2001 SN263 pertence ao grupo Amor, com:  $a > a_T$  e  $Q_T < q < 1,3$  UA, como dado na tabela 2.1.

De acordo com o gráfico para o semi-eixo maior (figura 4.7a), verifica-se que a primeira condição é sempre satisfeita. No entanto, em determinados momentos da evolução orbital do sistema, a perturbação externa leva ao aumento da excentricidade da órbita (figura 4.7b). Este aumento de excentricidade, combinado com a variação de semi-eixo maior, é tal que em dados períodos o pericentro  $q$  da órbita do sistema é menor que o apocentro da Terra  $Q_T$ , como mostra o gráfico da figura 4.9a.

Assim sendo, verifica-se que, em dados momentos o sistema triplo 2001 SN263 passa a pertencer ao grupo Apolo, e como característica dos corpos desse grupo, passa a cruzar a órbita da Terra. Esta informação é confirmada pelo gráfico da figura 4.9b, que traz a distância do sistema ao Sol, e no qual observa-se que de fato, em um dado intervalo, esta distância é menor que a distância da Terra ao Sol no apocentro, caracterizando o cruzamento das órbitas.

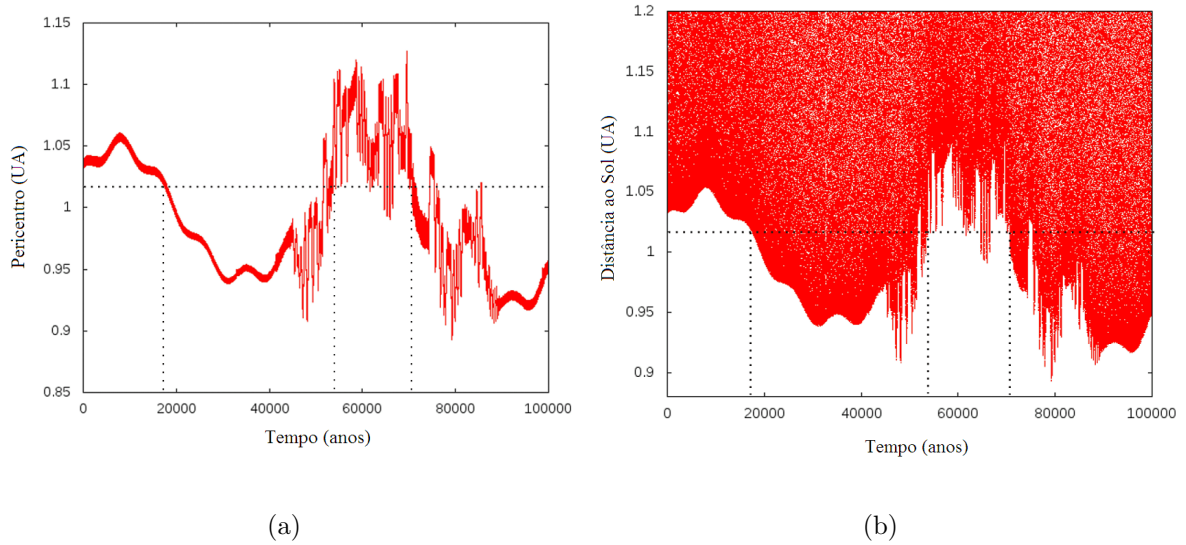


Figura 4.9 - Transição do sistema entre os grupos Amor e Apolo. a) Pericentro do sistema  $q = a(1 - e)$ , ao longo de 100.000 anos. A linha horizontal tracejada demarca o apocentro da Terra  $Q_T = 1,017$  UA. As linhas verticais tracejadas demarcam os instantes em que o pericentro do sistema é menor que o apocentro da Terra:  $17.200 \leq t \leq 54.000$  anos e  $70.800 \leq t \leq 100.000$  anos. b) Distância  $r_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  do sistema ao Sol. A linha horizontal tracejada demarca a distância da Terra ao Sol no apocentro  $Q_T = 1,017$  UA. As linhas verticais tracejadas demarcam os instantes em que a distância do sistema ao Sol é menor que a distância da Terra ao Sol no apocentro.

### 4.3.3 Encontros próximos.

Os gráficos da figura 4.10 mostram os instantes em que o sistema de asteróides passa dentro, e próximo de, um raio de Hill da Terra e de Marte <sup>1</sup>, ao longo do tempo de integração, caracterizando encontros próximos entre o sistema com estes planetas.

Nestes gráficos foram novamente destacados, com as linhas verticais tracejadas, os limites dentro dos quais o sistema pertence ao grupo Apolo (seção 4.3.2), e verifica-se que, as passagens próximas observadas ocorrem justamente quando o sistema está neste regime, podendo cruzar tanto a órbita de Marte, quanto a órbita da Terra.

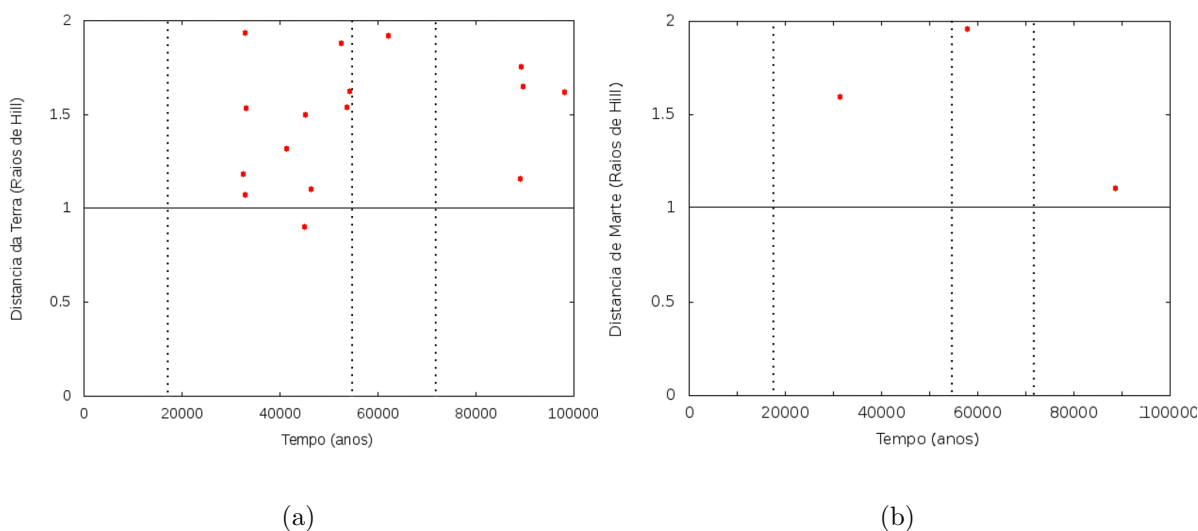


Figura 4.10 - Passagens do sistema 2001 SN263 pela esfera de influência da Terra e de Marte no período de 100.000 anos. As linhas verticais tracejadas demarcam os instantes em que o pericentro da órbita do sistema é menor que o apocentro da Terra, de acordo com o discutido na subseção 4.3.2.

Observa-se ainda que, no período de 100.000 anos, o sistema sofre apenas um encontro dentro de 1 raio de Hill com a Terra e fica bem próximo de um encontro dentro de 1 raio de Hill com Marte. Os efeitos destes encontros são as variações significativas observadas na órbita do sistema. Destaca-se o encontro com a Terra,

<sup>1</sup> $R_{Hill} = (\mu_2/3)^{(1/3)}r_{12}$ , em que  $\mu_2$  é a razão de massa e  $r_{12}$  é a distância entre os primários (Murray e Dermott, 1999). Um raio de Hill da Terra  $\approx 0,01$  UA. Um raio de Hill de Marte  $\approx 0,007$  UA.

em  $t \approx 45.000$  anos e também a passagem próxima de 1 raio de Hill por Marte em  $t \approx 89.000$  anos. Através de um *zoom* no gráfico da figura 4.7a é possível ver em cada um desses instantes um salto do semi-eixo maior de Alfa, como demonstrado nas figuras 4.11.

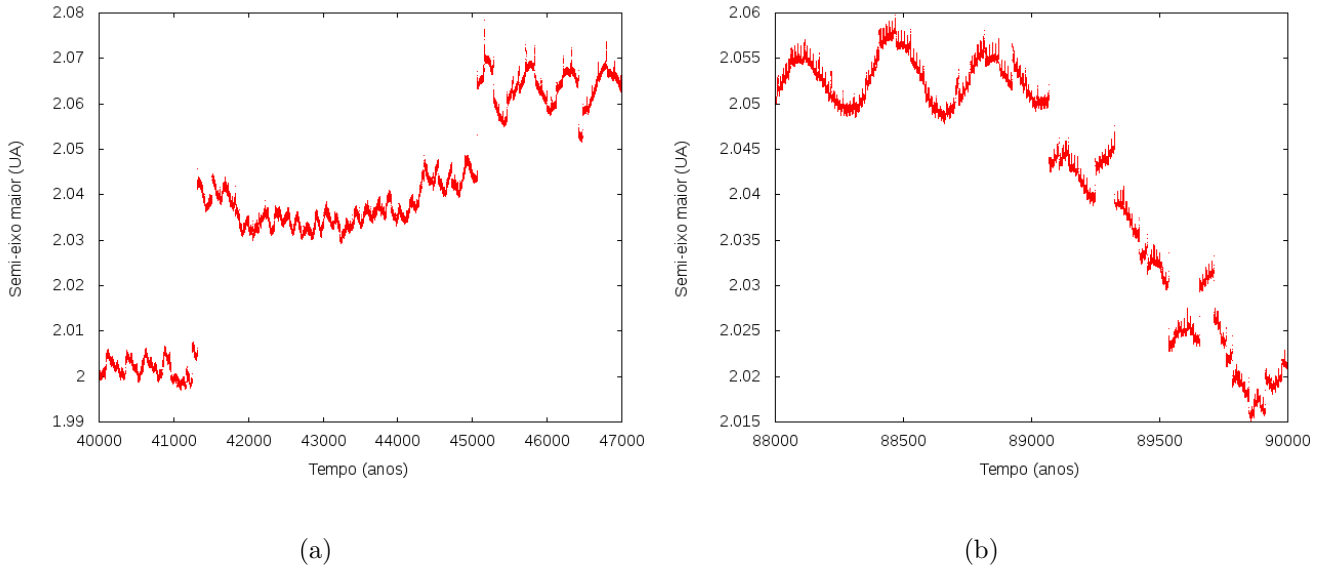


Figura 4.11 - “Saltos” em semi-eixo maior de Alfa devido à encontros próximos com Terra e Marte.

Os efeitos destes encontros são também sentidos pelos asteróides satélites, como pode ser visto pelos gráficos da figura 4.12 que mostram as variações em semi-eixo e excentricidade de Beta e Gama.

Comparando estes gráficos com os apresentados nas figuras 4.1 e 4.2, observa-se que além da variação observada anteriormente devido á perturbação mútua, há também pequenos saltos, que correspondem exatamente aos instantes no quais houve aproximação do sistema com os planetas Terra ou Marte (de acordo com a informação dada pelos gráficos na figura 4.10). Verifica-se também que o asteróide Beta, por ser o corpo mais afastado do sistema, é o mais perturbado pelo encontro.

Portanto, os encontros próximos do sistema com Terra e Marte perturbam tanto o sistema em sua órbita heliocêntrica, quanto as órbitas dos satélites. No entanto, pelo

período de 100.000 anos integrados foram verificadas apenas pequenas perturbações nas órbitas dos satélites, que não chegam a comprometer a integridade do sistema (com ejeção ou colisão dos satélites, por exemplo).

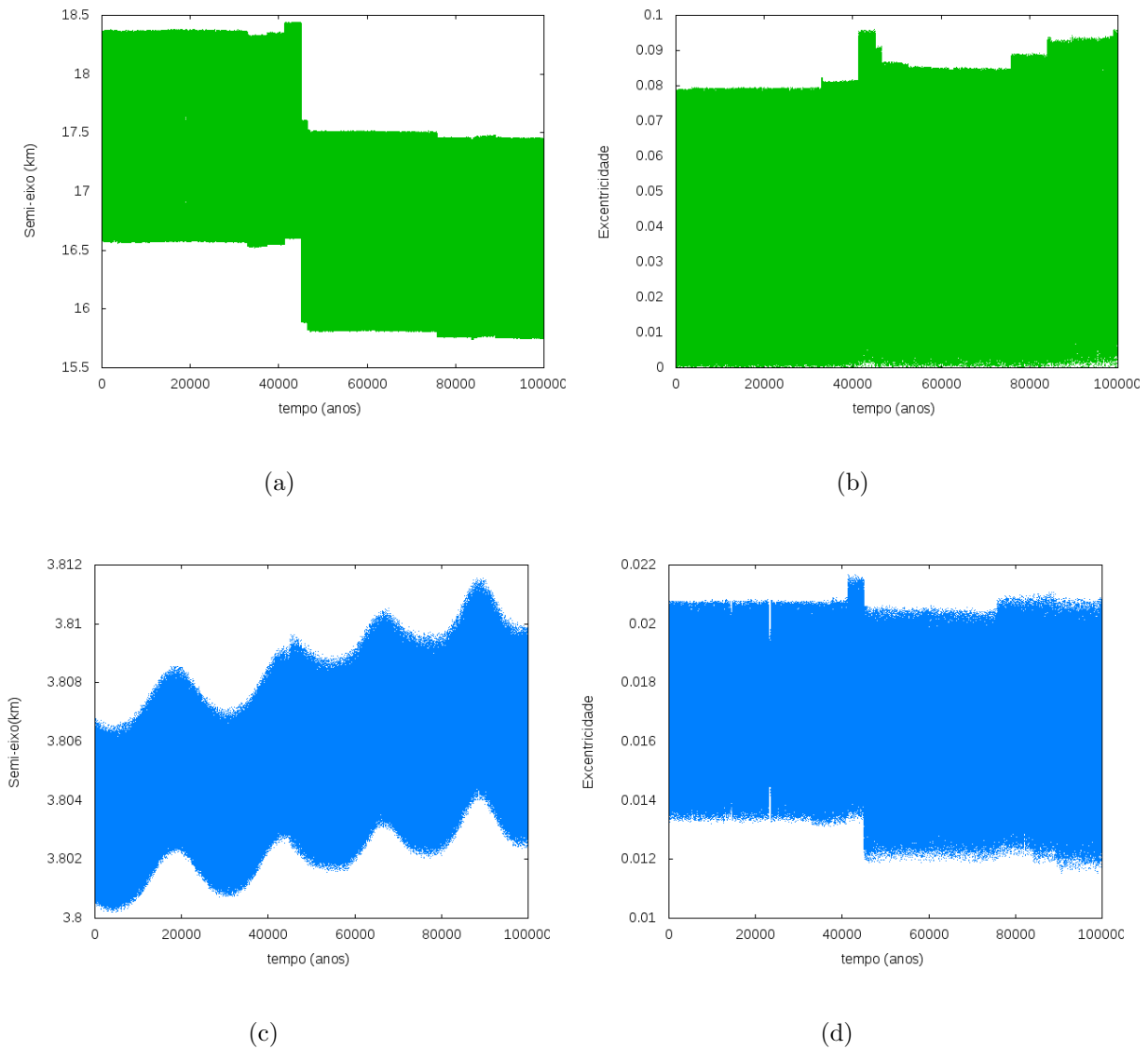


Figura 4.12 - Variação de semi-eixo maior e excentricidade de Beta e Gama por um período de 100.000 anos no problema de sete corpos. a) Variação de semi-eixo maior de Beta. b) Variação de excentricidade de Beta. c) Variação de semi-eixo maior de Gama d)Variação de excentricidade de Gama.



#### 4.4 Comentários.

Neste capítulo a evolução orbital do sistema triplo 2001 SN263 foi discutida, tanto da órbita dos satélites em relação ao asteroide central, como da órbita do sistema como um todo em sua órbita heliocêntrica.

Primeiramente foi verificado como se dá a interação gravitacional entre os asteroides. Mostrou-se que esta interação leva a uma variação periódica de semi-eixo maior e excentricidade e que os argumentos do pericentro e a longitude do nodo ascendente dos satélites circulam. As inclinações dos satélites sofrem pequenas variações, menores que um grau, devido à interação mútua.

Depois foi verificado que o sistema tem uma evolução orbital caótica em semi-eixo maior e excentricidade, causada especialmente por encontros próximos com a Terra, que ocorrem quando o sistema transita entre os grupos Amor e Apolo. Os efeitos destes encontros são sentidos pelos asteroides satélites, causando perturbações em suas órbitas, no entanto, pelo período de 100.000 anos nenhum desses encontros perturbou o sistema o suficiente para comprometer sua integridade, isto é, não houve perturbação que fizesse um dos corpos escapar ou colidir com o outro corpo.

Todas essas perturbações devem influenciar nas regiões de estabilidade deste sistema. Este é o problema tratado no próximo capítulo.



## 5 ESTABILIDADE NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA TRIPLO 2001 SN263: CASO PLANO

Neste capítulo é apresentado o estudo sobre a estabilidade na região interna do sistema de asteróides 2001 SN263 considerando o caso plano. O objetivo nesta etapa do estudo é determinar as regiões estáveis do sistema 2001 SN263 nas regiões vizinhas aos asteróides que o compõe. Para isso, é necessário primeiramente, que se delimite as regiões que serão consideradas e, depois, que se desenvolva um método a partir do qual se estabeleça os critérios de estabilidade. Estas considerações são descritas nas seções seguintes.

### 5.1 Metodologia

A metodologia adotada consiste no monitoramento da evolução orbital de partículas que estão inicialmente orbitando os componentes do sistema 2001 SN263 através da integração numérica do problema de N-corpos com achatamento (apêndice A). Para isso, milhares de partículas são colocadas na vizinhança dos asteróides, de acordo com critérios explicados na seção 5.1.1, e integradas por um dado período. Ao longo do período de integração é feito o acompanhamento das partículas que colidem, com qualquer um dos asteróides, das partículas que escapam das regiões que serão definidas, e das partículas que sobrevivem (não colidem ou escapam), definindo-se assim as regiões de estabilidade (maiores detalhes na seção 5.1.2).

Nesta etapa, foram consideradas partículas orbitando os asteróides com inclinação inicial nula, justificando a referência para o problema como “caso plano”.

#### 5.1.1 Condições Iniciais

Considera-se um sistema formado por sete corpos massivos, sendo eles: os três asteróides do sistema 2001 SN263, o Sol e os planetas Terra, Marte e Júpiter, e além disso uma quantidade significativa de partículas orbitando cada um dos asteróides.

As condições iniciais das órbitas dos asteróides são as dadas na tabela 3.1. As condições iniciais das partículas foram escolhidas seguindo os critérios:

- a) Distribuição espacial: a região ao redor dos três corpos foi dividida em quatro regiões utilizando o conceito da esfera de Hill, calculado através de  $R_{Hill} = (\mu_2/3)^{(1/3)}r_{12}$ , em que  $\mu_2$  é a razão de massa e  $r_{12}$  é a distância

entre os primários (Murray e Dermott, 1999):

Considerando os três asteróides, foi calculado o raio de Hill para os problemas formados por Alfa e Beta, e por Alfa e Gama, separadamente. Os valores encontrados foram:

Primários	Raio de Hill
Alfa-Beta	$\approx 3,4$ km
Alfa-Gama	$\approx 0,6$ km

Estes valores são uma aproximação, já que a presença do terceiro corpo leva à uma diminuição da região de influência, ainda assim, o raio de Hill calculado desta forma serve como um parâmetro para delimitar espacialmente as regiões onde cada um destes corpos predomina gravitacionalmente. A figura 5.1 é uma representação do sistema de asteróides onde foram destacados os raios de Hill para cada corpo. Ela ajuda a visualizar as regiões que foram definidas da seguinte maneira:

Região	Descrição da região	Partículas
1	Região entre o asteróide Alfa e o asteróide Gama	orbitando Alfa
2	Região entre o asteróide Gama e o asteróide Beta	orbitando Alfa
3	Região ao redor do asteróide Beta (delimitado pelo raio de Hill)	orbitando Beta
4	Região ao redor do asteróide Gama (delimitado pelo raio de Hill)	orbitando Gama

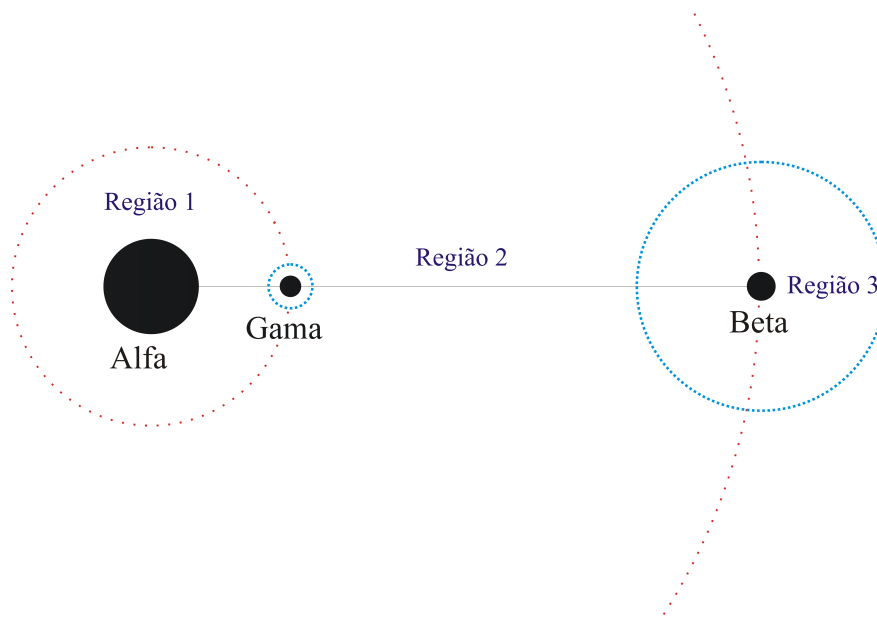


Figura 5.1 - Representação do sistema 2001 SN263 e das regiões internas. Em azul estão representados os raios de Hill dos asteróides Beta e Gama. A linha tracejada em vermelho representa os limites das regiões 1 e 2.

- b) Em relação à excentricidade, foram colocadas nestas regiões partículas indo de órbitas circulares ( $e = 0,0$ ) até órbitas excêntricas com valor máximo de excentricidade  $e = 0,5$ , em intervalos de  $\Delta e = 0,05$ .
- c) As partículas foram distribuídas angularmente de forma aleatória. Para cada par de condição inicial ( $a \times e$ ) foram consideradas 100 partículas com valores aleatórios para anomalia verdadeira ( $f$ ), argumento do pericentro ( $\omega$ ) e longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ), no intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .
- d) Quanto à inclinação, foram considerados apenas casos planos, isto é  $I = 0,0^\circ$ .

Devido à estes critérios na escolha das condições iniciais, o número total de partículas varia para cada região (regiões maiores têm mais partículas que as menores), o que será discutido nas seções com os resultados.

### 5.1.2 Critérios de estabilidade.

Define-se como região estável a região na qual 100% das partículas sobrevivem (não colidem e não escapam) para um dado intervalo de tempo. Para aplicar esta definição

é preciso então que se determine o intervalo de tempo a ser considerado, e quais os parâmetros que definem uma colisão ou um escape. Os critérios adotados foram:

- Tempo: o monitoramento de escapes e colisões foi feito por um período de 2 anos. Este valor corresponde a aproximadamente 100 períodos orbitais de Beta (ou aproximadamente 1000 períodos orbitais de Gama). Este período também foi escolhido por ser suficiente para garantir a aplicabilidade dos resultados encontrados no planejamento de uma missão espacial ao sistema.
- Colisões: considera-se que houve uma colisão quando a distância da partícula à um corpo é menor que o raio deste corpo.
- Escapes: as distâncias de escapes são definidas de formas distintas para cada uma das regiões. Na região 1, o limite é a órbita de Gama, tomada como circular, ou seja, se as partículas nesta região ficam a uma distância  $d > 3,804$  km de Alfa, então considera-se que ela escapou da região. Na região 2 o limite é a órbita de Beta tomada como circular, ou seja, a distância de escape é  $d > 16,663$  km de Alfa. Os escapes para as regiões 3 e 4 são definidos pelos próprios raios de Hill de Gama e Beta. Assim, se uma partícula orbitando Beta na região 3 se afasta a uma distância maior que 3,4 km, é considerado que ela escapou, o mesmo sendo válido para a região 4, sendo a distância de escape igual a 0,6 km de Gama. Estes limites estão representados na figura 5.1. Os escapes são verificados ao longo do período de integração.

### 5.1.3 Integração numérica.

Considerando um sistema formado por Sol, Terra, Marte, Júpiter, Alfa, Beta e Gama, foram realizadas integrações numéricas do problema de  $7\text{corpos} + n$  partículas, utilizando o integrador numérico Gauss-Radau por um período de 2 anos, para cada uma das regiões descritas na seção 5.1.1.

Nestas integrações têm-se Terra, Marte, Júpiter e Alfa orbitando o Sol, Beta e Gama orbitando Alfa (levando em conta o achatamento), e  $n$ -partículas orbitando os asteroídes.

## 5.2 Resultados - caso plano

A seguir são apresentados os resultados para cada uma das regiões descritas na seção 5.1.1, exceto pela região 4, que não foi considerada por ser extremamente pequena, com  $\approx 0,6$  km de raio (lembrando que essa distância é uma aproximação e que a ação gravitacional dos outros asteróides diminui ainda mais este valor).

### 5.2.1 Regiões de estabilidade na região 1.

Nesta região, foram colocadas partículas orbitando Alfa com os seguintes elementos orbitais: semi-eixo maior  $1,4 \leq a \leq 3,2$  km, com valores tomados a cada  $0,2$  km, o que resulta em 10 valores para  $a$ . De acordo com a seção 5.1.1, têm-se para cada um destes valores, 11 valores de excentricidade ( $0,0 \leq e \leq 0,5$ , a cada  $0,05$ ), e 100 partículas para cada um destes pares ( $a \times e$ ), com valores aleatórios de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude do nodo ascendente, resultando em um total de 11.000 partículas na região 1, que foram integradas de acordo com o descrito na seção 5.1.3.

O resultado da integração foi organizado em um diagrama de  $(a \times e)$  iniciais, como o da figura 5.2. Cada um dos pequenos “quadrados” carregam as informações das 100 partículas que foram distribuídas angularmente. A escala que se vê ao lado do diagrama traz a porcentagem de sobrevivência, e vai de  $(0,0\% - 10,0\%)$  de sobreviventes (vermelho), até  $90\% - 100\%$  de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com exatos  $100\%$  de sobrevivência - indicando estabilidade.

As linhas brancas, no mesmo diagrama, indicam os limites da região. À esquerda está a linha de colisão, que corresponde ao limite a partir do qual o pericentro  $r_p$ , das órbitas das partículas orbitando Alfa, são menores que o raio do próprio Alfa ( $R_{Alfa}$ ). Ou seja,  $r_p \leq R_{Alfa}$ . Sendo  $r_p = a(1 - e)$ , então,  $a(1 - e) \leq R_{Alfa}$ ; logo, partículas com  $a \leq R_{Alfa}/(1 - e)$ , em que  $0,0 \leq e \leq 0,5$  e  $R_{Alfa} = 1,3$  km, irão colidir com Alfa, sendo o limite dado quando  $a = R_{Alfa}/(1 - e)$ , definindo-se a linha de colisão. À direita do diagrama, está a linha de escape, que denota o ponto a partir do qual o apocentro  $r_a$ , das órbitas das partículas orbitando Alfa, estão além do limite de escape para esta região, que é  $d = 3,804$  km, ou seja,  $r_a \geq d$ . Sendo  $r_a = a(1 + e)$ , então a relação  $a = d/(1 + e)$ , fornece numericamente este limite, para  $0,0 \leq e \leq 0,5$ .

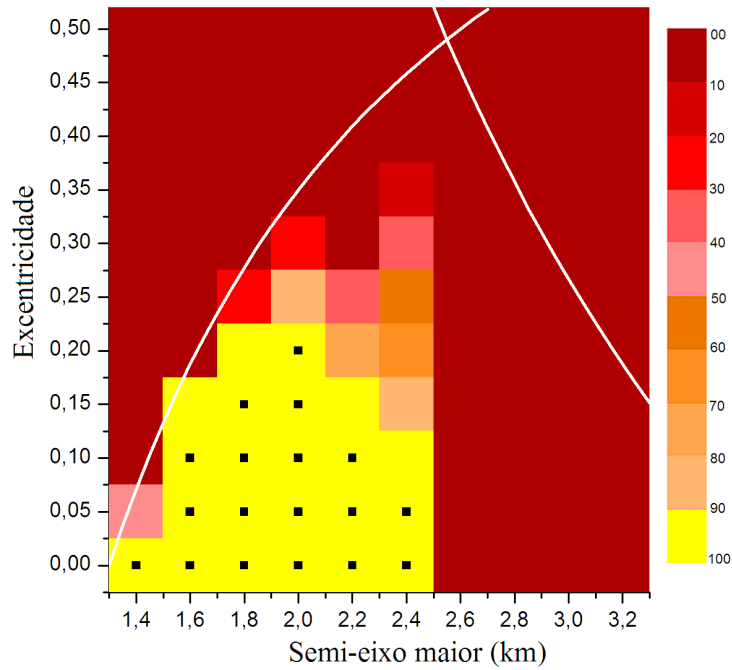


Figura 5.2 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 1 para um período de 2 anos. A escala ao lado vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência (estabilidade). As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de colisão com Alfa, e a linha da direita é a linha de escape da região 1.

Os Gráficos das figuras 5.3, 5.4 e 5.5 são exemplos de trajetórias de partículas que sobreviveram, colidiram ou que escaparam nesta região, no período de 2 anos. As partículas que sobrevivem apresentam em geral uma órbita bem comportada, sendo as mais externas as que sofrem maior perturbação, o que é esperado devido á proximidade destas com Gama.



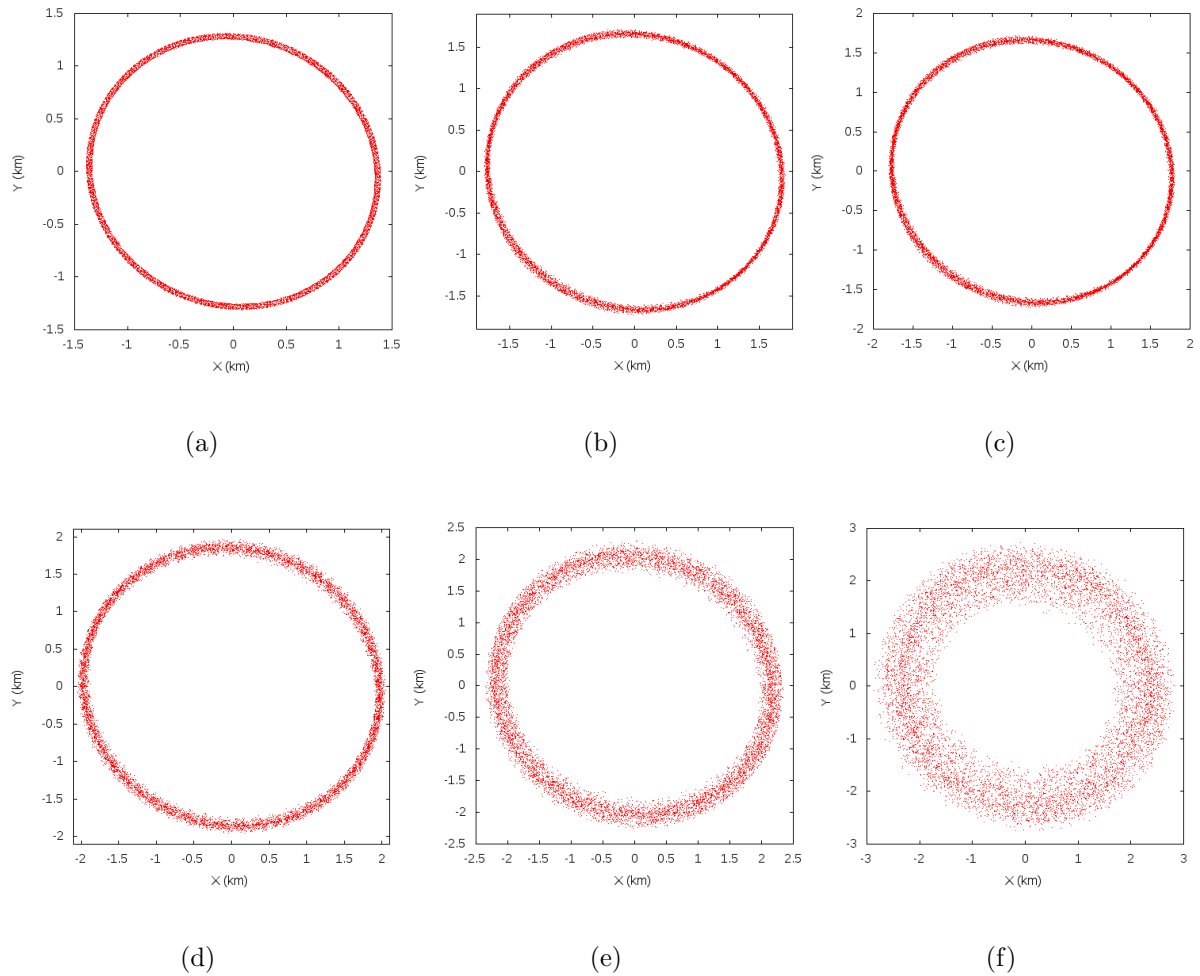


Figura 5.3 - Exemplos de trajetórias para partículas estáveis por um período de 2 anos na região 1. Alfa é o corpo central. Para todas as partículas  $e = 0,0$  e  $I = 0,0^\circ$ , com semi-eixo maior: a)  $a = 1,4$  km, b)  $a = 1,6$  km, c)  $a = 1,8$  km, d)  $a = 2,0$  km, e)  $a = 2,2$  km, f)  $a = 2,4$  km.

Na figura 5.4 estão a trajetória de duas partículas que colidem, uma com Alfa e outra com Gama, e percebe-se que elas são bastante perturbadas, tendo diversas passagens próximas pelos asteróides, o que acaba levando às colisões.

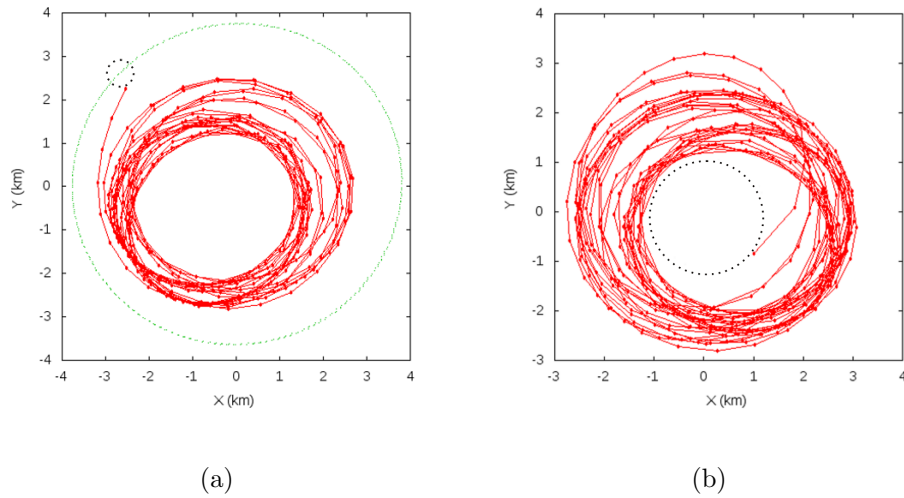


Figura 5.4 - Exemplos de órbitas de partículas que colidem dentro do período de 2 anos na região 1. Alfa é o corpo central. Partículas com  $e = 0,0$ ,  $I = 0,0^\circ$   $a = 2,6$  km. a) Colisão com Gama. A linha verde tracejada representa a trajetória de Gama. A circunferência preta tracejada representa o limite do raio de Gama. b) Colisão com Alfa. A circunferência preta tracejada representa o limite do raio de Alfa.

A figura 5.5 traz o exemplo de uma partícula que escapou da região 1, cujo limite de escape é a distância  $d = 3,804$  km (representada pela linha verde na figura). O escape é verificado ao longo da integração. Pela figura 5.5b) é possível verificar que, a mesma partícula, acaba escapando do próprio sistema.

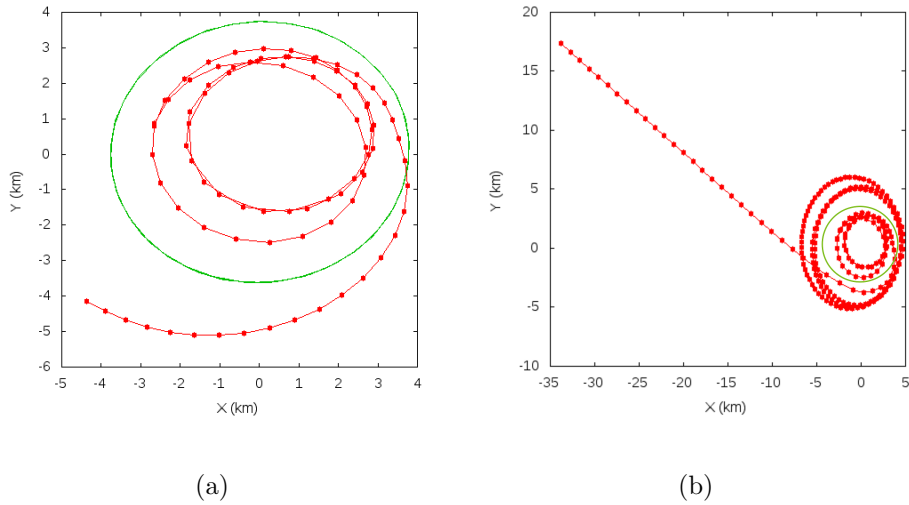


Figura 5.5 - Exemplo da órbita de uma partícula, com  $e = 0,0$  e  $I = 0,0^\circ$  e  $a = 2,8$  km, que escapa da região 1. Alfa é o corpo central. a)  $t \approx 1,5$  dia. b)  $t \approx 6$  dia. A linha verde representa a órbita de Gama, que delimita a região 1.

A análise do diagrama na figura 5.2 mostra que a região de estabilidade nesta região, ou seja, a região onde todas as partículas sobrevivem por 2 anos, é aquela que fica bem próxima do asteroide Alfa, para baixas excentricidades. Conforme  $e$  aumenta, as partículas ficam mais próximas da condição de colisão com Alfa, dando origem à instabilidade. O mesmo acontece quando  $a$  aumenta e as partículas se aproximam de Gama, aumentando as chances de colisão com este corpo, ou de escape da região. Por ser uma região limitada por dois corpos relativamente próximos, com uma distância de aproximadamente 4 km entre eles, as colisões são muito mais frequentes. Poucas são as partículas que conseguem escapar desta região, como pode ser visto pelo gráfico da figura 5.14, que traz a porcentagem das partículas que sobrevivem, escapam ou colidem nas regiões internas do sistema. O gráfico da figura 5.15 traz a porcentagem de colisões das partículas com Alfa, Beta e Gama, e observa-se que na região 1 prevalece as colisões com Alfa.

O gráfico da figura 5.6 mostra o espalhamento das partículas, em termos de  $a$  e  $e$  que pertencem ao conjunto de condições iniciais que resultaram em 100% de sobrevivência. Este gráfico considera a variação de semi-eixo maior e excentricidade de todas estas partículas ao longo de 2 anos, e mostra que de fato, as partículas nas regiões estáveis permanecem confinadas dentro dos limites da região. As partículas

apresentam um aumento de excentricidade, e praticamente nenhuma variação em semi-eixo maior, e as partículas mais perturbadas são as mais externas, que estão na fronteira entre as regiões estável e instável.

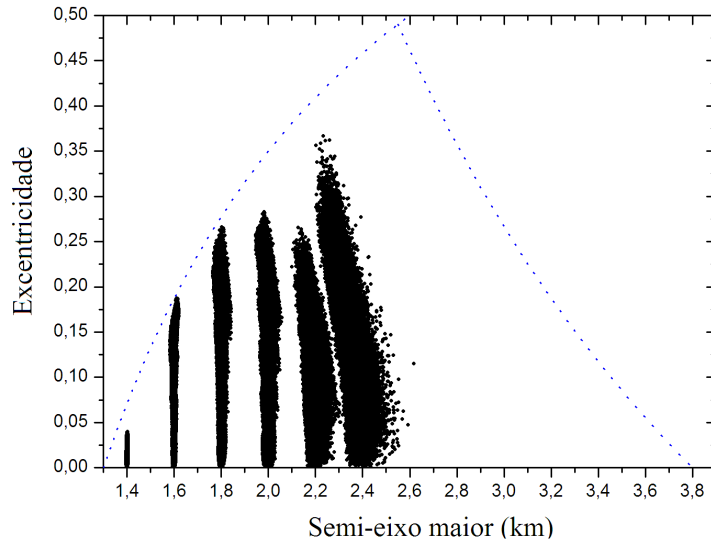


Figura 5.6 - Espalhamento das partículas na região 1. As linhas pontilhadas em azul correspondem às linhas de colisão e de escape.

### 5.2.2 Regiões de estabilidade e instabilidade na região 2.

Nesta região foram colocadas partículas orbitando o asteroide Alfa com  $4,5 \leq a \leq 13,5$  km, com valores tomados a cada 0,2 km, o que resulta portanto em 46 valores para semi-eixo maior. As demais condições iniciais são como as descritas na seção anterior, e portanto no total foram integradas nesta região 50.600 partículas.

O diagrama da figura 5.7 mostra o resultado encontrado para esta região. As linhas brancas no diagrama indicam os limites da região. À esquerda, está a linha de provável colisão com Gama, que corresponde ao limite a partir do qual, as partículas orbitando Alfa Gama passam a cruzar a órbita de Gama. Esta linha também pode entendida como o limite entre as regiões 1 e 2, além da qual, colisões com Alfa e Gama se tornam possíveis. Sendo o limite da região 1 dado por  $d=3,804$  km, e sendo  $r_p = a(1 - e)$  o pericentro das partículas, então a relação  $a = d/(1 - e)$ , fornece

numericamente este limite, para  $0,0 \leq e \leq 0,5$ . À direita, está a linha de escape, que denota o ponto a partir do qual os apocentros  $r_a$ , das órbitas das partículas orbitando Alfa, estão além da distância de escape para esta região, que é  $d = 16,663$  km, e cujo limite é dado por  $a = d/(1 + e)$ , para  $0,0 \leq e \leq 0,5$ .

Por este diagrama observa-se que a região onde mais partículas sobrevivem está concentrada no meio da região 2, e que em apenas três valores específicos de semi-eixo maior ( $a = 9,1; 9,5; 9,7$ ) km com  $e = 0,0$  se encontra o conjunto de partículas com 100% de sobrevivência (estáveis).

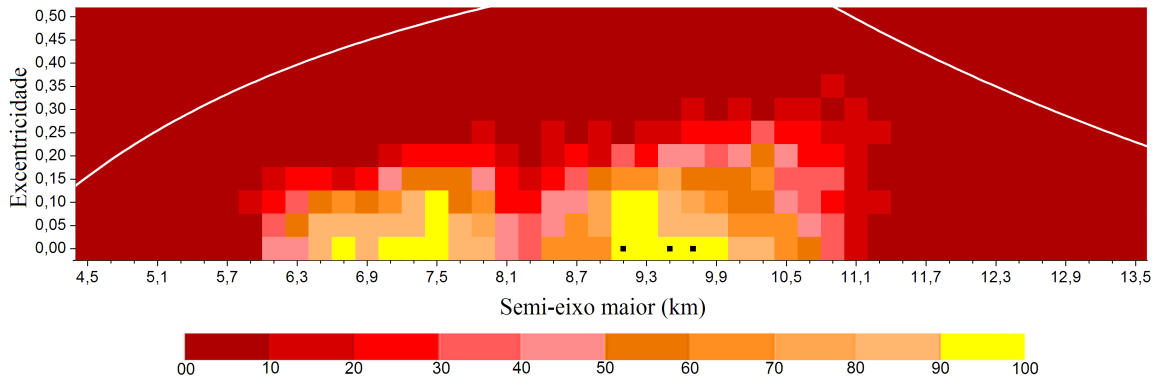


Figura 5.7 - Diagrama de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 para um período de 2 anos. A escala abaixo vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência. As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de provável colisão com Gama, e a linha da direita é a linha de escape da região 2.

O gráfico da figura 5.8 mostra o espalhamento destas partículas e confirmam que as partículas pertencentes ao conjunto de condições iniciais com 100% de sobrevivência permanecem confinadas dentro dos limites da região.

Nesta região as colisões ainda prevalecem sobre os escapes, como pode ser visto pelo gráfico da figura 5.14, sendo as colisões com Beta mais frequentes (figura 5.15).

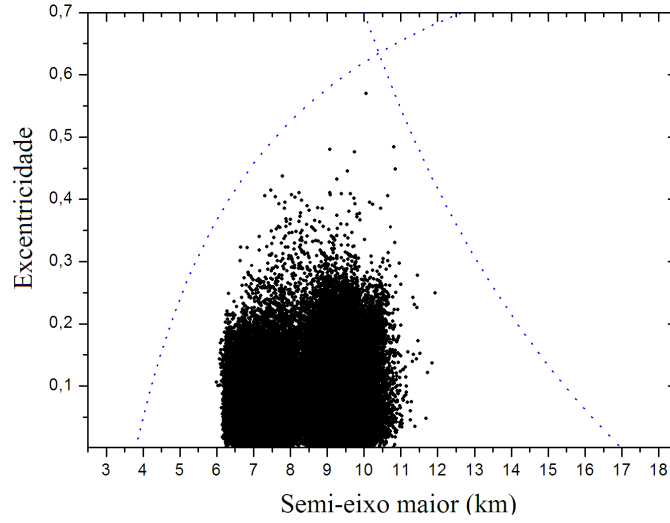


Figura 5.8 - Espalhamento das partículas na região 2. As linhas pontilhadas em azul correspondem às linhas de provável colisão e de escape.

### 5.2.2.1 Ressonância na região 2.

A lacuna localizada aproximadamente no meio da região 2 (figura 5.7) indica a presença de possíveis ressonâncias entre as partículas e os asteróides satélites. Para mostrar que tal instabilidade é de fato resultado deste mecanismo, foi feito primeiramente uma busca por comensurabilidades entre os movimentos médios das partículas e de ambos satélites, Beta e Gama.

Para isso, os movimentos médios dos satélites ( $n$ ) foram calculados, através da equação 5.1, que considera o achatamento do corpo central. O movimento médio das partículas ( $n'$ ) foi calculado através da mesma equação, para valores de semi-eixo maior indo de 7,7 km a 8,9 km (intervalo em que se observa a instabilidade na região 2) tomados a cada 0,1 metro. Para cada um destes valores, foi analisado quando a relação  $\phi = j_1 n \pm j_2 n' \approx 0$  se verificava.

$$n = \frac{Gmp}{a^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 \right] \quad (5.1)$$

Conhecendo estes valores para  $j_1$  e  $j_2$ , é preciso que se determine os coeficientes  $j_3$ ,  $j_4$ ,  $j_5$  e  $j_6$  para os quais o ângulo ressonante:

$$\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega \quad (5.2)$$

esteja librando (Murray e Dermott, 1999), de modo que se demonstre que os corpos estão em ressonância. Nesta equação,  $\lambda$  é a longitude média.

É dito que um corpo está em uma *ressonância exata* quando a variação no tempo do ângulo ressonante é igual a zero, ( $\dot{\varphi} = 0$ ). Da equação 5.2 têm-se então que:

$$\dot{\varphi} = j_1n' + j_2n + j_3\dot{\varpi}' + j_4\dot{\varpi} + j_5\dot{\Omega}' + j_6\dot{\Omega} \approx 0 \quad (5.3)$$

Na equação 5.2,  $\varpi'$  e  $\varpi$ , são a longitude do pericentro da partícula e de Beta, e  $\Omega'$ ,  $\Omega$  são a longitude do nodo ascendente da partícula e do satélite, respectivamente, e a variação destes ângulo no tempo, considerando o achatamento do corpo central são dados por (Murray e Dermott, 1999):

$$\dot{\varpi} = +n_0 \left[ \frac{3}{2}J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{15}{4}J_4 \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 \right] \quad (5.4)$$

$$\dot{\Omega} = -n_0 \left[ \frac{3}{2}J_2 \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 - \left( \frac{9}{4}J_2^2 + \frac{15}{4}J_4 \right) \left( \frac{R_p}{a} \right)^4 \right] \quad (5.5)$$

em que  $n_0 = (Gm_p/a^3)^{1/2}$ .

Conhecendo-se a variação destes ângulo no tempo, determina-se um conjunto de combinações lineares dos coeficientes  $j_k$  tal que a condição  $\dot{\varphi} = 0$  se verifique, respeitando a condição  $\sum_{j=1}^6 j_i = 0$ .

Com estes coeficientes definidos, determina-se a equação para  $\varphi$  e verifica-se a sua libração, caracterizando a ressonância.

Através da equação 5.1 foi calculado que as partículas com  $a = 7,9997$  km têm uma comensurabilidade de movimento médio 3:1 com Beta, e que partículas com

$a = 7,9095$  têm uma comensurabilidade de movimento médio 1:3 com Gama.

### **Ressonância com Beta.**

Com as equações 5.4 e 5.5 calcula-se que:  $\dot{\Omega} \approx 0,0068^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi} \approx 0,0068^\circ/dia$  para Beta e  $\dot{\Omega}' \approx -0,088^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi}' \approx 0,088^\circ/dia$  para uma partícula com  $a = 7,9997$  km orbitando Alfa.

Dentre as combinações possíveis, demonstra-se que a combinação:  $j_1 = -1, j_2 = 3, j_3 = -1, j_4 = 0, j_5 = -1, j_6 = 0$ , tal que  $\dot{\varphi} = 0$ , leva ao ângulo ressonante:  $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$ , que apresenta um comportamento intermitente, hora circulando, hora librando, como mostra os gráficos da figura 5.10, (feito considerando uma partícula na região 2 com  $a = 7,9$  km,  $e = 0,0$ , que colide com Gama em  $t \approx 1,6$  anos), demonstrando que as partículas na região 2, com semi-eixos maiores na vizinhança de  $a = 8,0$  km, sofrem os efeitos de uma ressonância 3:1 com Beta.

Na equação do ângulo ressonante entraram os elementos angulares da partícula ( $\varpi'$  e  $\Omega'$ ), considerando apenas o efeito devido ao  $J_2$ , isto porque, a partícula está mais próxima do corpo central que Beta, além disso, a perturbação secular em Beta devido a Gama é pequena (ver tabela 4.1), sendo o mesmo esperado para a partícula, e portanto o efeito devido ao achatamento de Alfa deve dominar.

A figura 5.9 traz a variação de semi-eixo maior e da excentricidade da partícula, em que se observa o aumento da excentricidade devido à ressonância, o que a leva a cruzar as linhas que limitam a região (colisão ou escape), gerando a instabilidade observada.



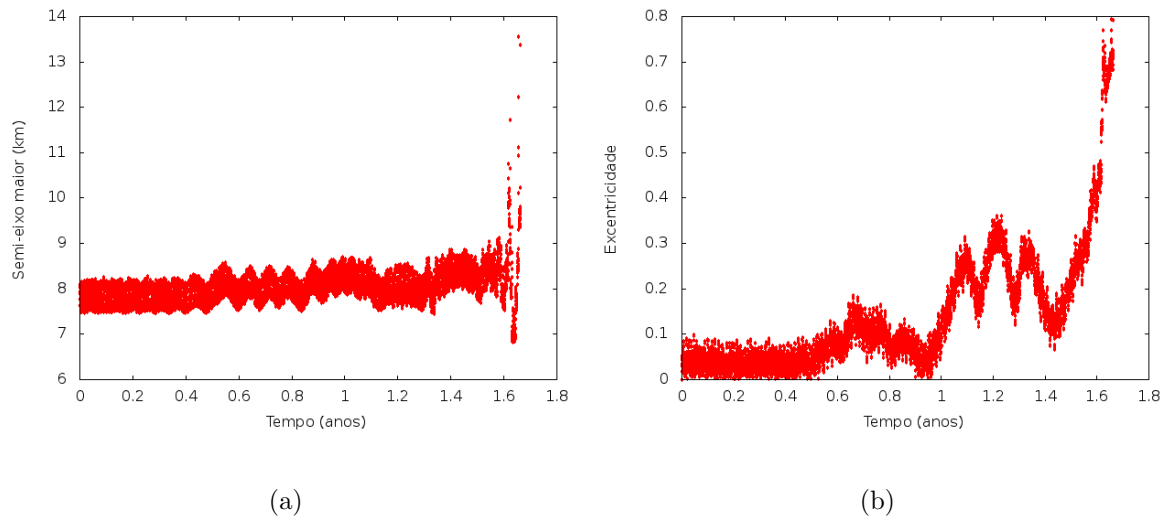


Figura 5.9 - Variação dos elementos orbitais de uma partícula orbitando Alfa na região 2 com  $a = 7,9$  km,  $e = 0,0$ . A partícula colide com Gama em  $t \approx 1,6$  anos. a) Variação de semi-eixo maior em km. b) Variação de excentricidade.

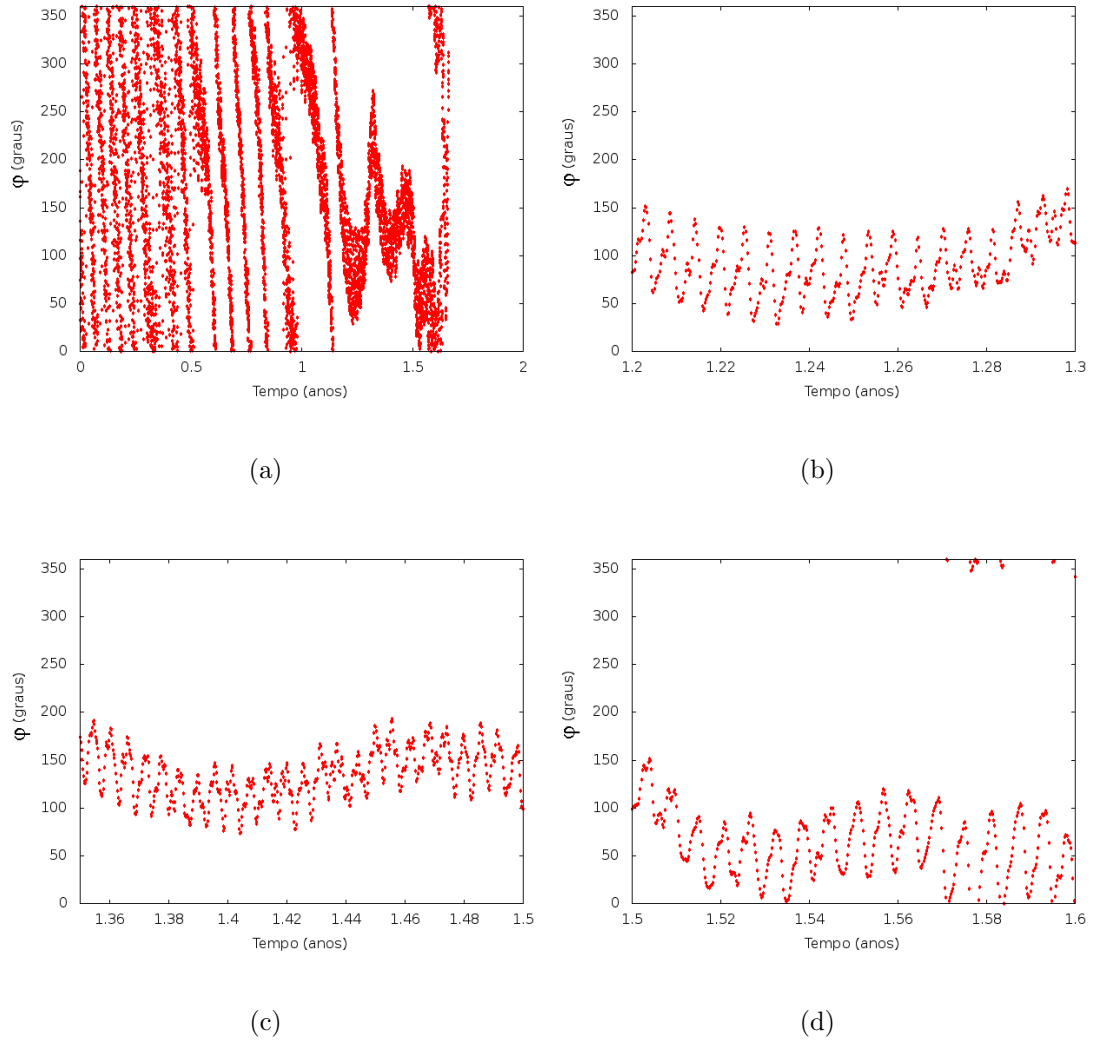


Figura 5.10 - Variação do ângulo ressonante  $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$  para uma partícula na região 2 que colide com Gama, com  $a = 7,9$  km. a)  $t \approx 1,6$  anos. b)  $t$  indo de 1,2 a 1,3 anos ( $\approx 5,3$  períodos orbitais de Beta). c)  $t$  indo de 1,36 a 1,5 anos ( $\approx 8$  períodos orbitais de Beta). d)  $t$  indo de 1,5 a 1,6 anos ( $\approx 5,3$  períodos orbitais de Beta).

### Ressonância com Gama.

Com as equações 5.4 e 5.5 calcula-se que:  $\dot{\Omega} \approx -1,19^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi} \approx 1,19^\circ/dia$  para Gama e  $\dot{\Omega}' \approx -0,0917^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi}' \approx 0,0917^\circ/dia$  para uma partícula com  $a = 7,9095$  km orbitando Alfa.

Dentre as combinações possíveis, demonstra-se que a combinação:  $j_1 = 3, j_2 = -1, j_3 = 0, j_4 = -1, j_5 = 0, j_6 = -$ , tal que  $\dot{\varphi} = 0$ , leva ao ângulo ressonante:  $\varphi = 3\lambda' - \lambda - \varpi - \Omega$ , que apresenta um comportamento intermitente (circulando e librando), como mostra os gráficos da figura 5.12, (feito considerando uma partícula na região 2 com  $a = 7,9$  km e  $e = 0,0$ ), demonstrando que as partículas na região 2, com semi-eixos maiores na vizinhança de  $a = 7,9$  km, sofrem os efeitos de uma ressonância 1:3 com Gama.

Na equação do ângulo ressonante entraram os elementos angulares de Gama ( $\varpi'$  e  $\Omega'$ ), considerando apenas o efeito devido ao  $J_2$ , isto porque Gama está bem próximo do corpo central, além disso, a perturbação secular em Gama devido a Beta é significativamente menor que a perturbação devido ao  $J_2$  (ver tabela 4.1), assim sendo o efeito em Gama devido ao achatamento de Alfa deve dominar.

A figura 5.11 traz a variação de semi-eixo maior e da excentricidade da partícula, onde novamente se observa o aumento da excentricidade devido à ressonância, levando à colisões e escapes, contribuindo para a instabilidade observada na região.

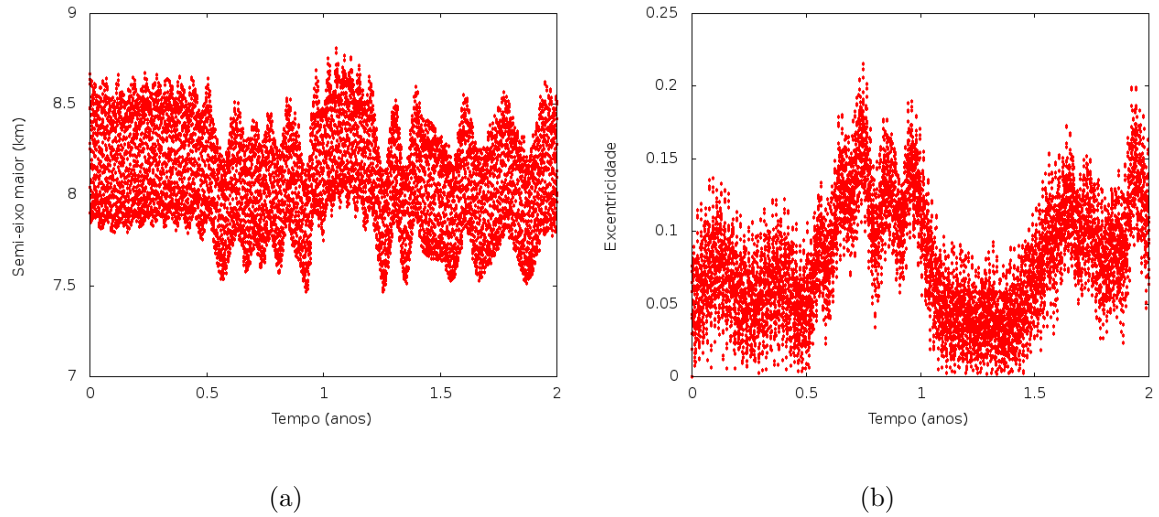


Figura 5.11 - Variação dos elementos orbitais de uma partícula orbitando Alfa na região 2 com  $a = 7,9$  km,  $e = 0,0$ . a) Variação de semi-eixo maior em km. b) Variação de excentricidade.

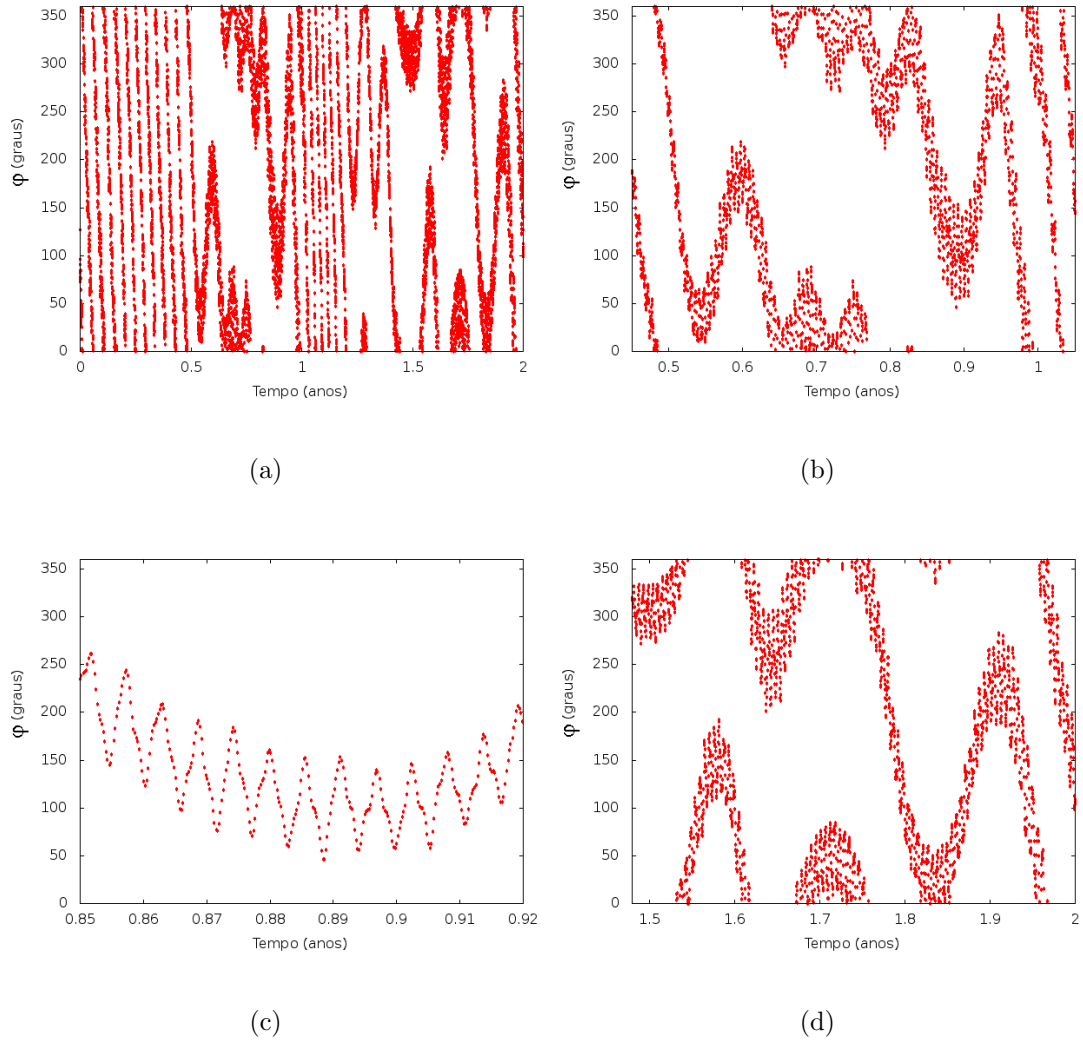


Figura 5.12 - Variação do ângulo ressonante  $\varphi = 3\lambda' - \lambda - \varpi - \Omega$  para uma partícula na região 2 com  $a = 7,9$  km. a)  $t = 2,0$  anos. b)  $t$  indo de 0,45 a 1,05 anos ( $\approx 318$  períodos orbitais de Gama). c)  $t$  indo de 0,85 a 0,92 anos ( $\approx 37$  períodos orbitais de Gama). d)  $t$  indo de 1,5 a 2,0 anos ( $\approx 265$  períodos orbitais de Gama).

### 5.2.3 Regiões de estabilidade e instabilidade na região 3.

Nesta região foram colocadas partículas orbitando o asteroide Beta com  $0,8 \leq a \leq 3,4$  km, com valores tomados a cada 0,2 km, o que resulta portanto em 14 valores para semi-eixo maior levando a 15.400 partículas integradas nesta região, com os

demais elementos orbitais tomados da mesma maneira que o feito para as regiões 1 e 2.

O diagrama da figura 5.13 mostra o resultado encontrado para esta região. As linhas em branco indicam os limites da região. À esquerda está a linha de colisão, que corresponde ao limite a partir do qual o pericentro  $r_p$ , das órbitas das partículas orbitando Beta, são menores que o raio do próprio Beta ( $R_{Beta}$ ). Ou seja,  $r_p \leq R_{Beta}$ . Sendo  $r_p = a(1 - e)$ , então,  $a(1 - e) \leq R_{Beta}$ ; logo, partículas com  $a \leq R_{Beta}/(1 - e)$ , em que  $0, 0 \leq e \leq 0, 5$  e  $R_{Beta} = 0, 39$  km, irão colidir com Beta, sendo o limite dado quando  $a = R_{Beta}/(1 - e)$ , definindo-se a linha de colisão. À direita do diagrama, está a linha de escape, que denota o ponto a partir do qual o apocentro  $r_a$ , das órbitas das partículas orbitando Beta, estão além do limite de escape para esta região, delimitado pelo raio de Hill de Beta, com valor  $d = 3, 4$  km, ou seja,  $r_a \geq d$ . Sendo  $r_a = a(1 + e)$ , então a relação  $a = d/(1 + e)$ , fornece numericamente este limite, para  $0, 0 \leq e \leq 0, 5$ .

Observa-se que similarmente ao que acontece na região 1, a região de estabilidade é aquela próxima ao asteroide que ela orbita, neste caso, o asteroide Beta. O gráfico da figura 5.14 traz a porcentagem de escapes, colisões e sobreviventes. Observa-se que nesta região o número de escapes aumenta, o que faz sentido já que o asteroide Beta é o corpo mais afastado do sistema. Também por este motivo, as colisões com Beta prevalecem, como mostra os dados na figura 5.15 .

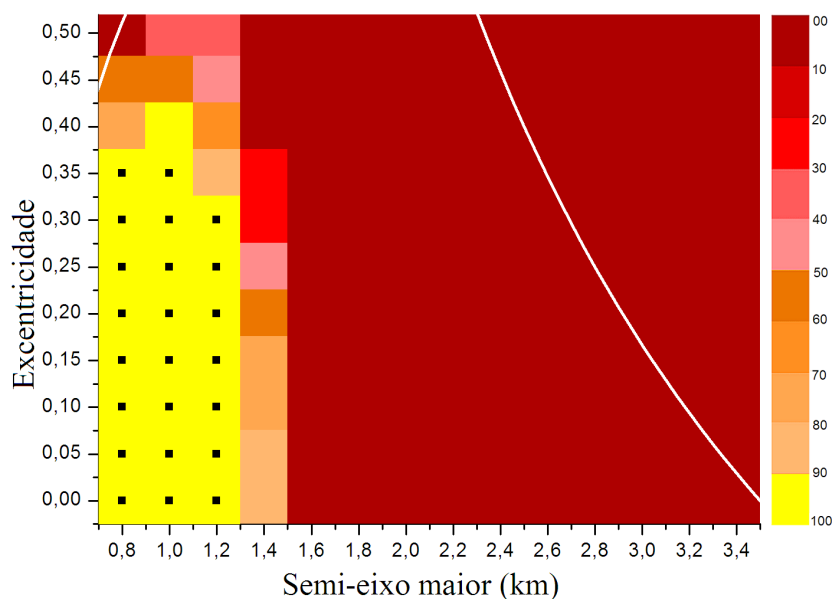


Figura 5.13 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Beta na região 3 para um período de 2 anos. A escala ao lado vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência. As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de colisão com Beta, e a linha da direita é a linha de escape da região 3

Como citado ao longo do texto, os gráficos a seguir trazem as contagens de colisões, escape e sobreviventes para cada uma das regiões internas, para o caso plano. No caso das colisões, foram contabilizadas a porcentagem das colisões das partículas com cada um dos componentes do sistema 2001 SN263. Observa-se que na região 1 não são contabilizadas colisões de partículas com Beta. Devido ao critério de estabilidade adotado, ao cruzar a órbita de Beta, já foi considerado que a partícula escapou da região, e por isso ela não entra mais na contagem. Algo semelhante acontece na região 3, onde são possíveis colisões apenas com o corpo central Beta. Para colidir com Alfa ou Gama a partícula tem que se afastar de Beta além da distância que delimita a região, sendo considerada como um caso de escape.

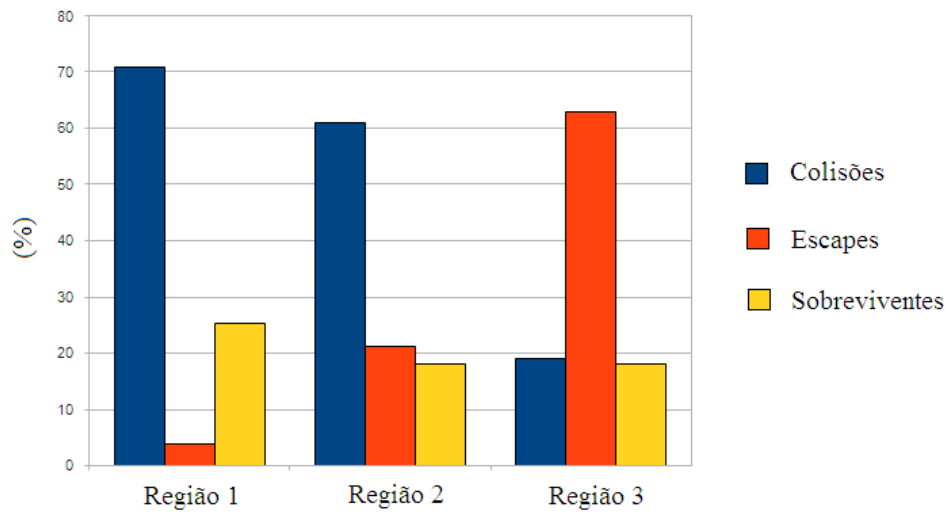


Figura 5.14 - Porcentagem de colisões, escapes e sobreviventes para regiões 1, 2 e 3.

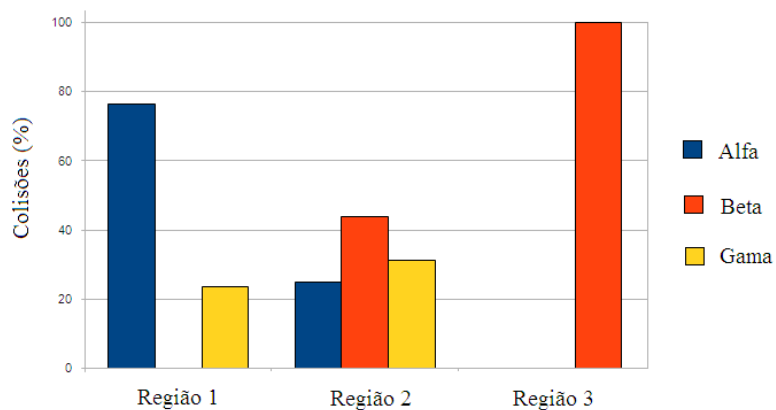


Figura 5.15 - Porcentagem de colisões das partículas com cada um dos componentes do sistema 2001 SN263 para cada uma das regiões internas.

Pensando apenas nas partículas com órbita circular, as regiões de estabilidade e instabilidade encontradas dentro do sistema podem ser melhor visualizadas em um diagrama como o da figura a seguir, que mostra bem que as partículas que sobrevivem são aquelas que ficam mais próximas dos 2 asteróides mais massivos e que fora dali

nenhuma partícula sobrevive.

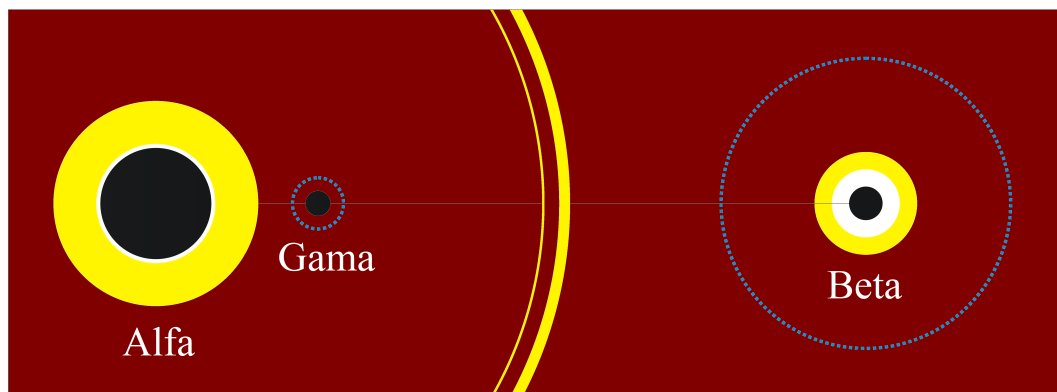


Figura 5.16 - Representação das regiões de estabilidade (em amarelo) e instabilidade (em vermelho) no sistema triplo de asteroides 2001 SN263, para partículas com excentricidade e inclinação nula pelo período de 2 anos.

### 5.3 Comentários

Foram determinadas regiões de estabilidade e instabilidade nas regiões internas ao sistema triplo de asteroides 2001 SN263 para o caso plano. Mostrou-se que as regiões estáveis são aquelas bem próximas dos asteroides Alfa e Beta.

As regiões que foram caracterizadas como instáveis, em um período de 2 anos, são um indicativo de que estas são regiões onde outros corpos não seriam encontrados, como por exemplo, outros pequenos satélites ainda não observados, ou pequenos detritos. Esta informação pode ser útil no planejamento de uma missão, principalmente se forem identificadas nestas regiões condições para as quais têm-se 100% de sobrevivência para um período menor que 2 anos (6 meses, por exemplo), pois isso indicaria uma região com menos probabilidade de se encontrar detritos, sendo ideal para posicionar a sonda.

Na região entre os asteroides Gama e Beta, aqui chamada de região 2, foi encontrada estabilidade para partículas que estavam inicialmente no meio da região. No entanto, mostrou-se que a presença de movimentos ressonantes desta partícula com ambos asteroides satélites afeta a dinâmica destas partículas, fazendo-as colidir ou escapar do sistema, causando a instabilidade observada.



## 6 ESTABILIDADE NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA TRIPLO 2001 SN263 - CASOS PRÓGRADOS

No capítulo anterior, foram caracterizadas as regiões de estabilidade nas regiões internas do sistema triplo 2001 SN263 considerando o caso plano, isto é, aplicando o método descrito na seção 5.1 apenas para partículas com  $I = 0, 0^\circ$ . Neste capítulo é apresentado o estudo da estabilidade para as mesmas regiões internas, mas agora considerando partículas com órbitas inclinadas, indo de  $15, 0^\circ \leq I \leq 90, 0^\circ$  (movimento prógrado).

### 6.1 Considerações iniciais.

Nesta etapa do trabalho serão consideradas as mesmas regiões que foram definidas no capítulo anterior, mais especificamente na seção 5.1.1, sendo portanto: região 1, região 2 e região 3.

Os critérios de estabilidade, bem como as condições iniciais do problema relativas ao semi-eixo maior (intervalo variável para cada região), excentricidade ( $0, 0 \leq e \leq 0, 5$ ) e aos ângulos  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $f$  (tomados aleatoriamente no intervalo de  $0, 0^\circ$  a  $360, 0^\circ$ ), continuam os mesmos descritos nas seções 5.1.1 e 5.1.2.

O que muda neste estudo em relação ao caso plano é a inclinação das partículas (em relação ao equador do corpo central) que foi tomada de  $15, 0^\circ \leq I \leq 90, 0^\circ$  em intervalos de  $15, 0^\circ$ . Foi analisado como o aumento das inclinações das partículas influencia as regiões de estabilidade encontradas para cada uma das três regiões internas no caso plano. Com isso define-se as regiões de estabilidade internas ao sistema para o caso prógrado.

### 6.2 Resultados.

As condições iniciais, bem como os resultados das integrações são discutidos separadamente para cada uma das regiões nas seções seguintes.

#### 6.2.1 Região 1.

Assim como no caso plano, nesta região as partículas estão orbitando o asteroide central Alfa, com  $1, 4 \leq a \leq 3, 2$  km, tomados a cada  $0, 2$  km,  $0, 0 \leq e \leq 0, 5$ , a cada  $0, 05$ , e 100 partículas para cada um destes pares ( $a \times e$ ), com valores de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude dos nodos aleatórios, resultando

em um total de 11.000 partículas, que foram integradas de acordo com o descrito na seção 5.1.3, com inclinações indo de  $15,0^\circ \leq I \leq 90,0^\circ$  a cada  $15,0^\circ$ .

As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas da figura 6.1. Novamente, foi adotado um diagrama de  $a \times e$  para cada um dos casos inclinados.

Os limites da região indicados nos diagramas pelas linhas em branco continuam sendo os mesmos: À esquerda está a linha de colisão que corresponde ao limite a partir do qual o pericentro das partículas orbitando Alfa é menor que o raio do próprio Alfa. À direita está a linha de escape que denota o ponto a partir do qual o apocentro da órbita da partícula orbitando Alfa está além do limite de escape para esta região, que é de 3,804 km. Maiores detalhes sobre estes limites são dados na seção 5.2.1.

Os diagramas mostram que as regiões de estabilidade encontradas na região 1, para o caso plano, permanecem as mesmas para os casos inclinados, até o valor crítico  $I = 60,0^\circ$ , quando a região estável diminui significativamente, efeito causado pelo mecanismo de Kozai (Kozai, 1962). Na região 1 as partículas com inclinações maiores ou iguais a  $60^\circ$  têm uma inclinação relativa ao plano orbital de Gama de aproximadamente  $46^\circ$ , e portanto já ultrapassaram o chamado *ângulo crítico de Kozai* dado por  $I_{crit} \approx 39,2^\circ$ . Um efeito conhecido deste mecanismo é levar à oscilações da excentricidade e inclinação mútuas. Estas oscilações aumentam a possibilidade de encontros e geram a instabilidade observada. Uma exceção é o ligeiro aumento na região de estabilidade quando a inclinação se aproxima de  $90^\circ$ .

Os diagramas da figura 6.1 também mostram que existe uma lacuna na região estável para partículas com  $a = 1,8$  km, e que a porcentagem de sobreviventes nesta condição diminui em função do aumento da inclinação. Tal característica sugere a presença de uma ressonância das partículas, com esta condição inicial, com um dos asteróides satélites, o que é discutido na próxima subseção.

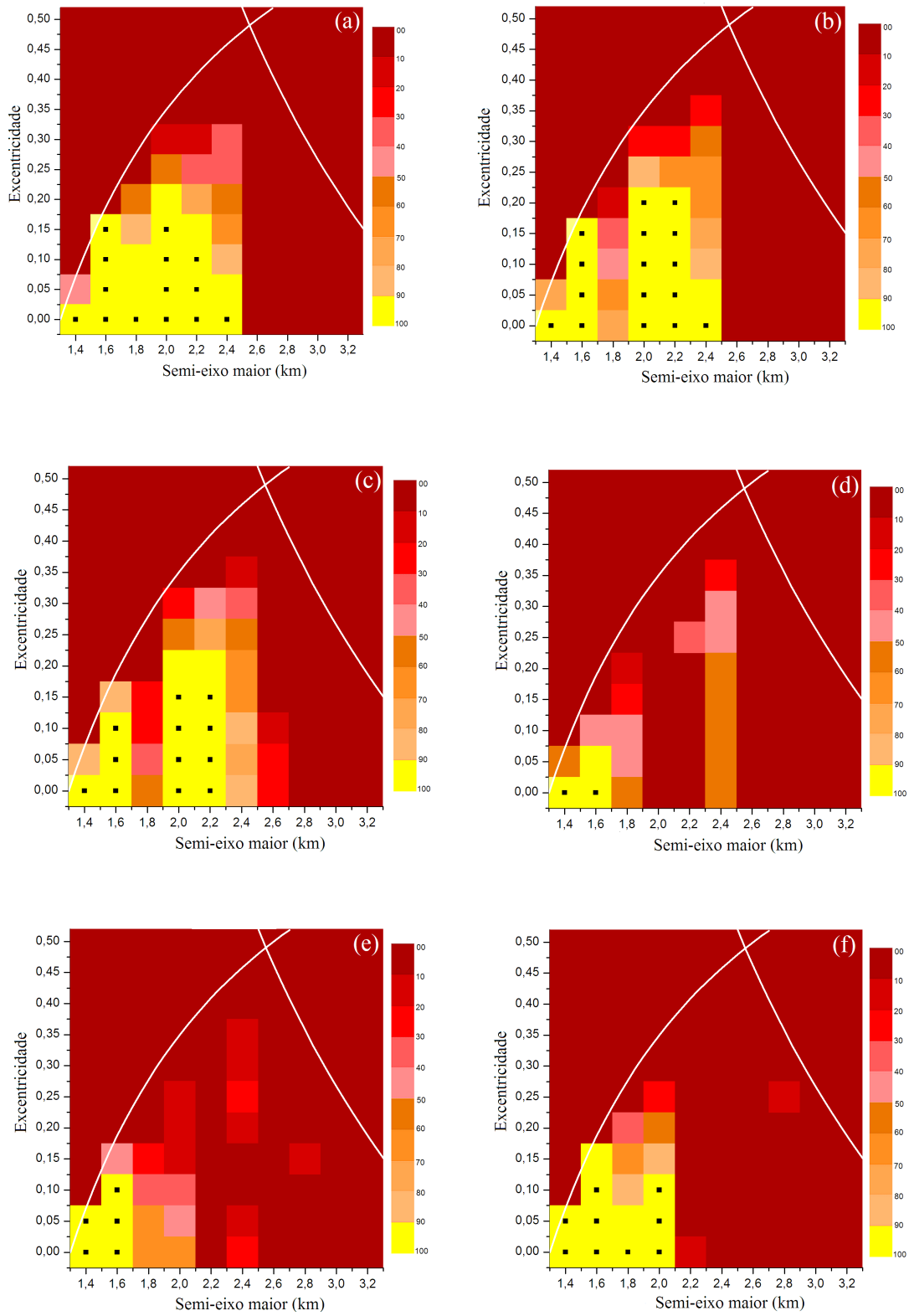


Figura 6.1 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 1 por um período de 2 anos para inclinações: a)  $15,0^\circ$ . b)  $30,0^\circ$ . c)  $45,0^\circ$ . d)  $60,0^\circ$ . e)  $75,0^\circ$ . f)  $90,0^\circ$ .

### 6.2.1.1 Ressonância na região 1.

Através da equação 5.1 foi calculado que as partículas com  $a = 1,8$  km têm uma comensurabilidade de movimento médio 3:1 com Gama. Das equações 5.4 e 5.5 calcula-se que:  $\dot{\Omega} \approx -1,19^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi} \approx 1,19^\circ/dia$  para Gama e  $\dot{\Omega}' \approx -15,2^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi}' \approx 15,3^\circ/dia$  para uma partícula com  $a = 1,8$  km orbitando Alfa.

Dentre as combinações possíveis, demonstra-se que a combinação:  $j_1 = 3, j_2 = -1, j_3 = 0, j_4 = -1, j_5 = 0, j_6 = -1$ , tal que  $\dot{\varphi} = 0$ , leva ao ângulo ressonante:  $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$ , que apresenta um comportamento intermitente, hora circulando, hora librando, como mostram os gráficos das figuras 6.2 e 6.3, (feito considerando uma partícula na região 1 com  $a = 1,8$  km,  $e = 0,0$ , com  $I = 15,0^\circ$  e  $I = 30,0^\circ$ , respectivamente), demonstrando que as partículas com na região 1, com semi-eixos maiores na vizinhança de  $a = 1,8$  km, sofrem os efeitos de uma ressonância 3:1 com Gama.

Na equação do ângulo ressonante entraram os elementos angulares da partícula ( $\varpi'$  e  $\Omega'$ ), considerando apenas o efeito devido ao  $J_2$ , isto porque, a partícula está mais próxima do corpo central que Gama, e a perturbação secular em Gama devido a Beta é relativamente pequena quando comparada à perturbação devido ao  $J_2$  (ver tabela 4.1), o mesmo sendo esperado para a partícula, e portanto o efeito na partícula devido ao achatamento de Alfa deve dominar.

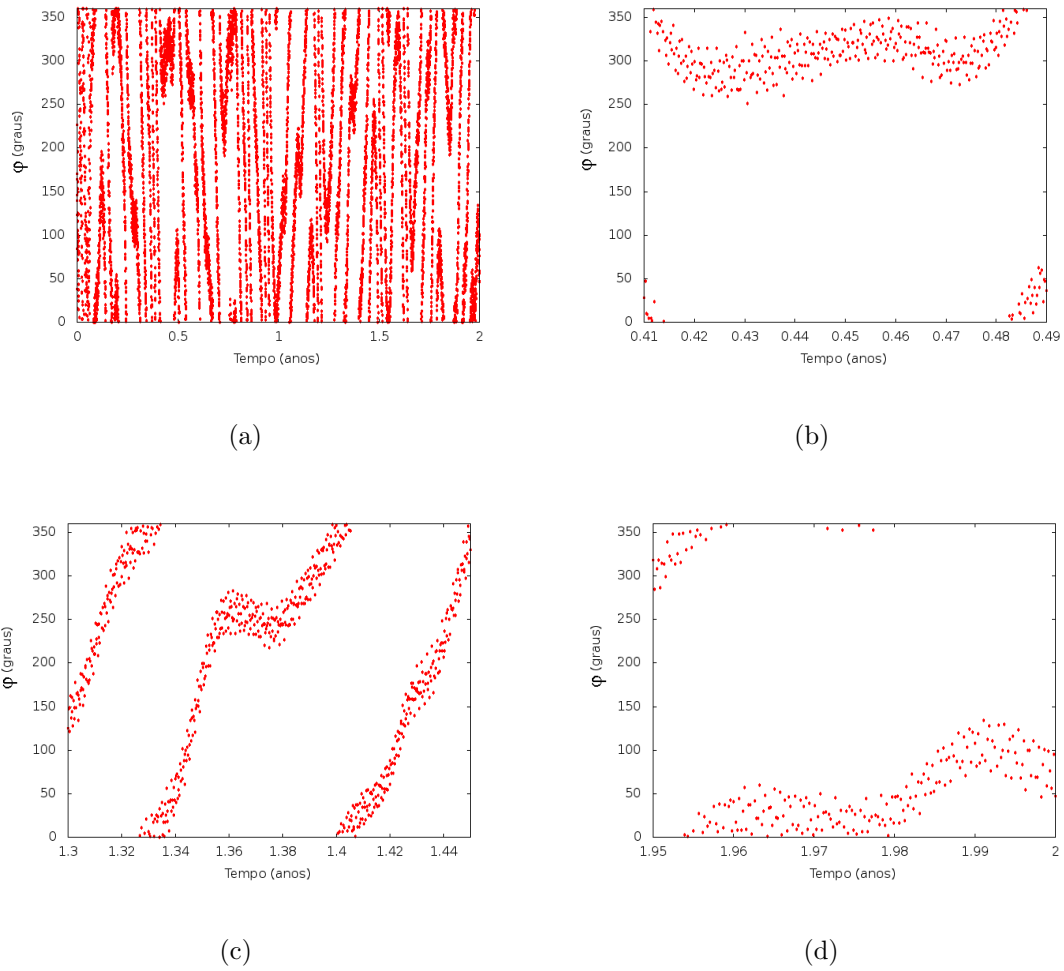


Figura 6.2 - Variação do ângulo ressonante  $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$  para uma partícula na região 1 com  $a = 1,8$  km,  $e = 0,0$  e  $I = 15,0^\circ$ . a)  $t = 2$  anos. b)  $t$  indo de 0,41 a 0,49 anos ( $\approx 42$  períodos orbitais de Gama). c)  $t$  indo de 1,3 a 1,45 anos ( $\approx 79$  períodos orbitais de Gama). d)  $t$  indo de 1,95 a 2,0 anos ( $\approx 26$  períodos orbitais de Gama).

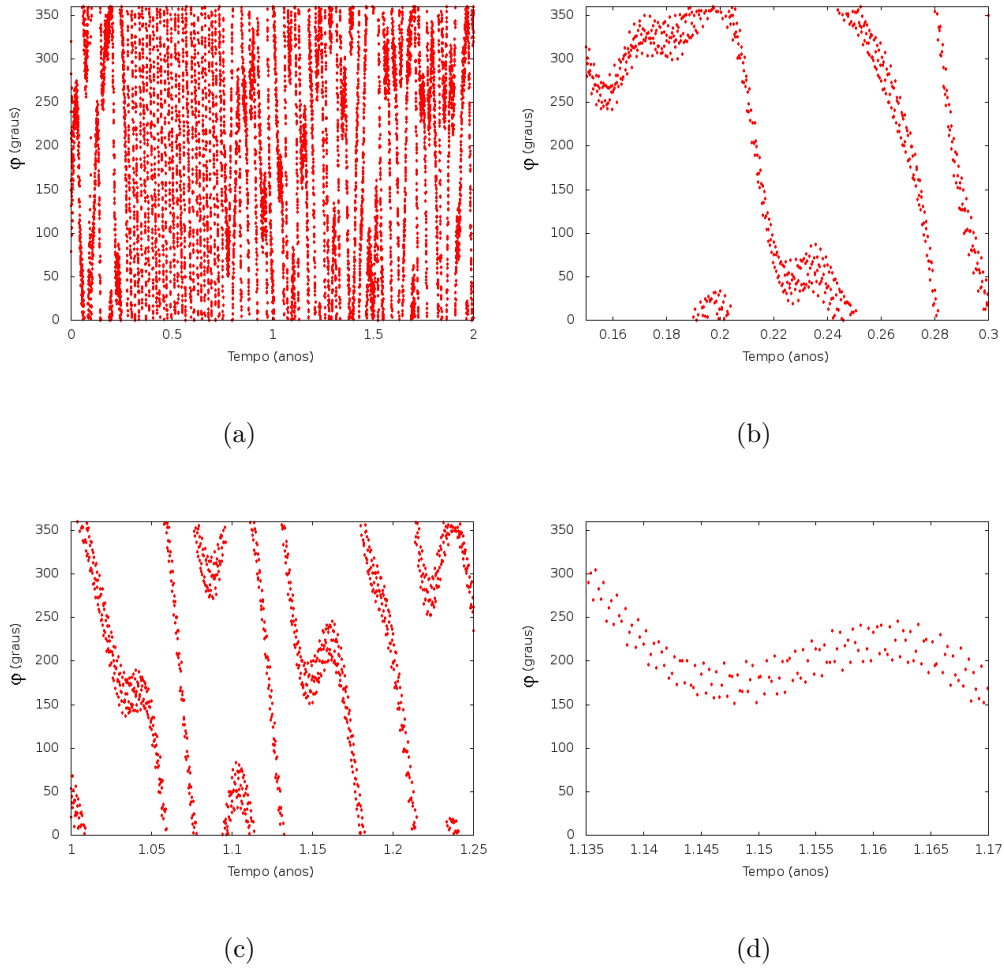


Figura 6.3 - Variação do ângulo ressonante  $\varphi = 3\lambda - \lambda' - \varpi' - \Omega'$  para uma partícula na região 1 com  $a = 1,8$  km,  $e = 0,0$  e  $I = 30,0^\circ$ . a)  $t = 2$  anos. b)  $t$  indo de 0,17 a 0,3 anos ( $\approx 69$  períodos orbitais de Gama). c)  $t$  indo de 1,0 a 1,25 anos ( $\approx 132$  períodos orbitais de Gama). d)  $t$  indo de 1,135 a 1,17 anos ( $\approx 19$  períodos orbitais de Gama).

### 6.2.2 Região 2.

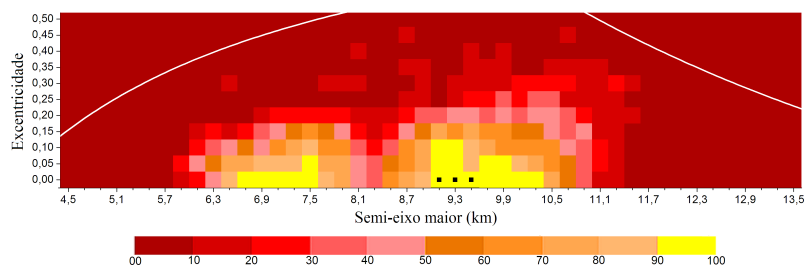
Assim como no caso plano, nesta região as partículas estão orbitando o asteroide central Alfa, com  $4,5 \leq a \leq 13,5$  km tomados a cada 0,2 km,  $0,0 \leq e \leq 0,5$  a cada 0,05, e 100 partículas para cada um destes pares  $(a \times e)$ , com valores de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude dos nodos aleatórios, resultando em um total de 50.600 partículas, que foram integradas de acordo com o descrito na

seção 5.1.3, com inclinações indo de  $15,0^\circ \leq I \leq 90,0^\circ$  a cada  $15,0^\circ$ .

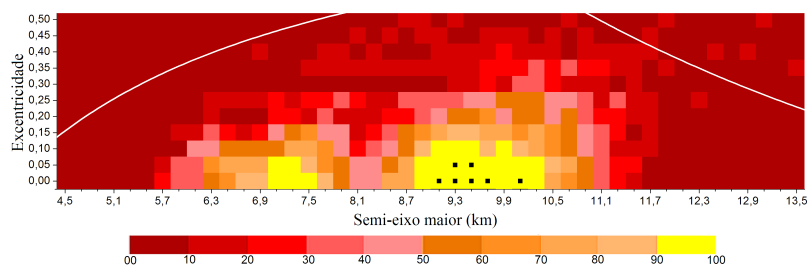
As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas das figuras 6.4 e 6.5. Novamente foi adotado um diagrama de  $a \times e$  para cada um dos casos inclinados.

Os limites da região indicados nos diagramas pelas linhas em branco continuam sendo os mesmos: À esquerda está a linha de provável colisão com Gama, que corresponde ao limite a partir do qual as partículas orbitando Alfa passam a cruzar a órbita de Gama. À direita está a linha de escape que denota o ponto a partir do qual o apocentro da órbita da partícula orbitando Alfa está além do limite de escape para esta região, que é de 16,663 km. Maiores detalhes sobre estes limites são dados na seção 5.2.2.

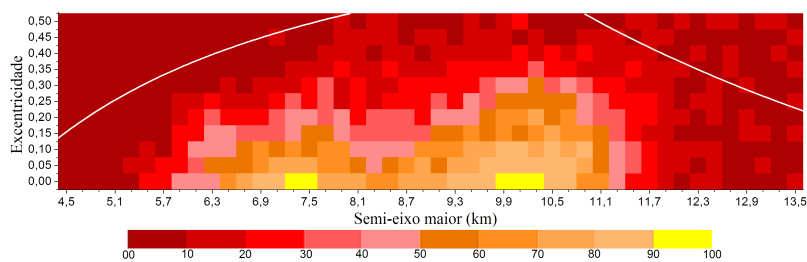
Comparações entre estes diagramas com o diagrama para o caso plano mostram um comportamento similar, com regiões de estabilidade distintas no meio da região e com uma lacuna aproximadamente no centro, indicando a presença de uma ressonância, que foi identificada na seção 5.2.2.1. Vê-se também que para  $I \geq 60,0^\circ$  não há regiões estáveis, fenômeno similar ao ocorrido na região 1, novamente um indicativo da ação do mecanismo de Kozai (Kozai, 1962).



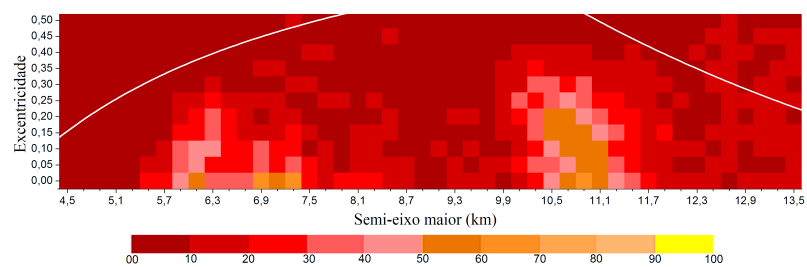
(a)



(b)



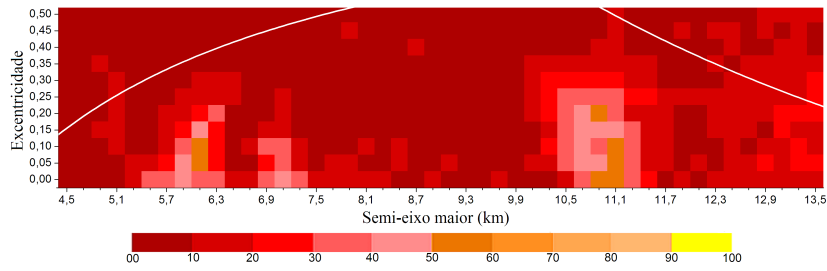
(c)



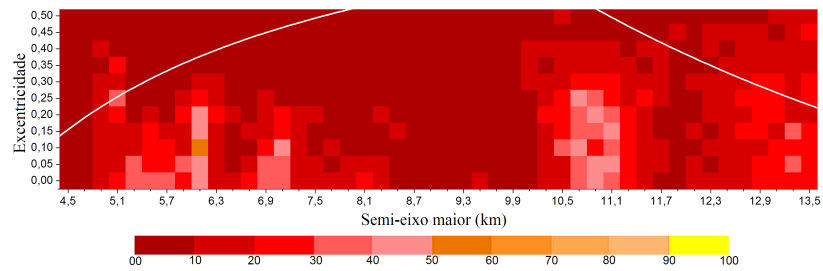
(d)

Figura 6.4 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações: a)  $15,0^\circ$ . b)  $30,0^\circ$ . c)  $45,0^\circ$ . d)  $60,0^\circ$ .





(a)



(b)

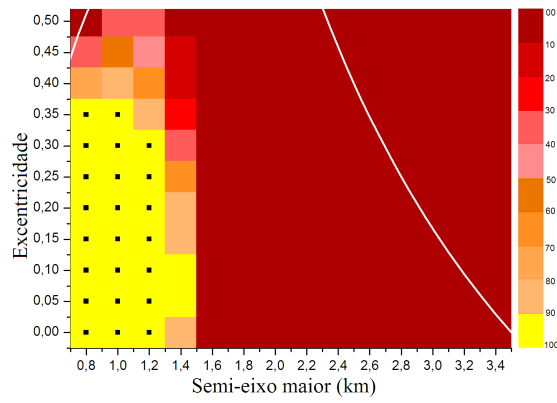
Figura 6.5 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações: a)  $75,0^\circ$ . b)  $90,0^\circ$ .

### 6.2.3 Região 3.

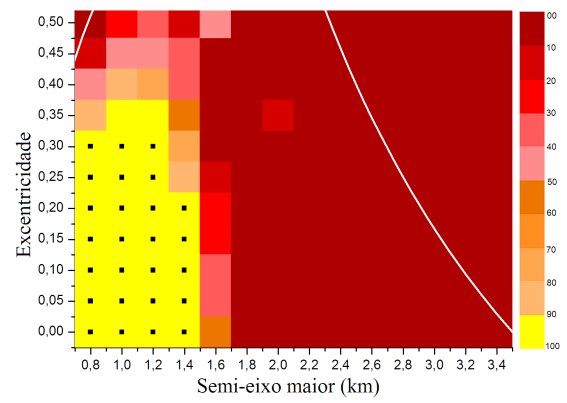
Assim como no caso plano, nesta região as partículas estão orbitando o asteroide central Beta, com  $0,8 \leq a \leq 3,4$  km tomados a cada  $0,2$  km,  $0,0 \leq e \leq 0,5$  a cada  $0,05$ , e 100 partículas para cada um destes pares  $(a \times e)$ , com valores de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude dos nodos aleatórios, resultando em um total de 15.400 partículas, que foram integradas de acordo com o descrito na seção 5.1.3, com inclinações indo de  $15,0^\circ \leq I \leq 90,0^\circ$  a cada  $15,0^\circ$ .

As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas  $a \times e$  da figura 6.6. Os limites da região indicados nos diagramas pelas linhas em branco continuam sendo os mesmos: A linha da esquerda é a linha de colisão com Beta, e a linha da direita é a linha de escape da região 3. Maiores detalhes sobre estes limites são dados na seção 5.2.3.

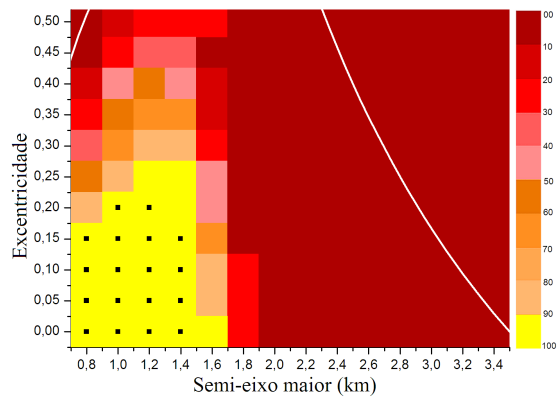
Vê-se, por estes diagramas, que para as partículas com inclinação indo de  $I = 0,0^\circ$  até  $I = 45,0^\circ$ , as regiões estáveis são aproximadamente as mesmas, com partículas bem próximas de Beta, mesmo para altas excentricidades. Observa-se também que, similar ao que acontece para as regiões 1 e 2, a região estável desaparece para  $I \geq 60,0^\circ$ . Devido à alta inclinação relativa entre as órbitas das partículas e dos satélites, novamente atribuí-se este comportamento à ação do mecanismo de Kozai (Kozai, 1962).



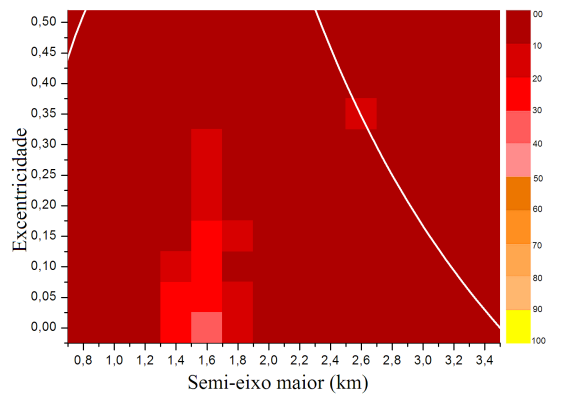
(a)



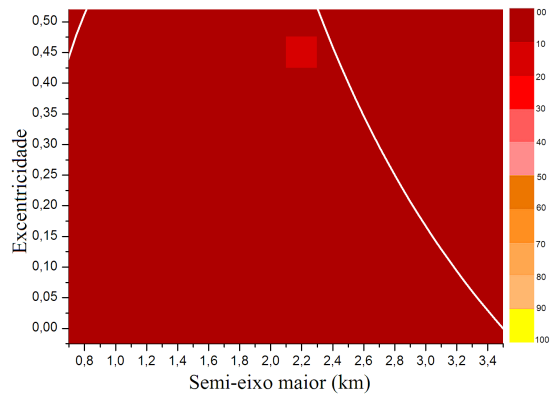
(b)



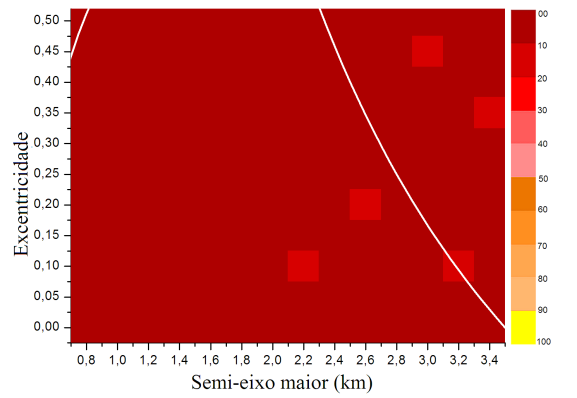
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.6 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Beta na região 3 por um período de 2 anos para inclinações a)  $15,0^\circ$ . b)  $30,0^\circ$ . c)  $45,0^\circ$ . d)  $60,0^\circ$ . e)  $75,0^\circ$ . f)  $90,0^\circ$

### 6.3 Comentários.

Neste capítulo foram determinadas as regiões de estabilidade internas ao sistema 2001 SN263 para os casos prógrados. Para isso foram distribuídas milhares de partículas nas regiões internas previamente definidas, com inclinação indo de  $15,0^\circ$  a  $90,0^\circ$  em intervalos de  $15,0^\circ$ .

Para as três regiões foi demonstrado que as regiões estáveis para o caso prógrado são similares às encontradas para o caso plano, até  $I = 45,0^\circ$ . Para valores maiores de inclinação, observa-se que as regiões estáveis das regiões internas desaparecem (regiões 2 e 3) ou diminuem significativamente (região 1), resultado da ação do mecanismo de Kozai que tem efeito quando as órbitas das partículas ultrapassam a inclinação relativa crítica de  $I = 39,2^\circ$  (ângulo de Kozai).

No capítulo anterior foram identificadas as ressonâncias 1:3 com Gama e 3:1 com Beta, na região 2 para o caso plano. Os efeitos dessas ressonâncias, gerando uma lacuna no centro da região, continuam sendo observados para os casos prógrados.

Para a região 1, com o aumento da inclinação, tornou-se evidente o efeito de uma ressonância para partículas com  $a = 1,8$  km. Trata-se da ressonância 3:1 com Gama, que gera instabilidade na sua vizinhança, através do aumento da excentricidade dos corpos, levando-os a cruzar a linha de colisão com Alfa, ou eventualmente escapar da região.

## 7 ESTABILIDADE NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA TRIPLO 2001 SN263 - CASOS RETRÓGRADOS

No capítulo 5 foram caracterizadas as regiões de estabilidade nas regiões internas do sistema triplo 2001 SN263 considerando o caso plano, e no capítulo 6 foi discutido como as regiões de estabilidade são alteradas quando as partículas passam a ter uma inclinação em relação ao equador do asteroide central, considerando apenas os casos prógrados. Neste capítulo é apresentada uma análise semelhante, mas considerando agora os casos retrógrados, isto é, partículas orbitando as mesmas regiões internas previamente definidas, com inclinações entre  $90, 0^\circ < I \leq 180, 0^\circ$ .

### 7.1 Considerações iniciais.

Nesta etapa do trabalho serão consideradas as mesmas regiões internas que foram consideradas nos capítulos anteriores, sendo portanto: região 1, região 2 e região 3.

Os critérios de estabilidade, bem como as condições iniciais do problema relativas ao semi-eixo maior (intervalo variável para cada região), excentricidade ( $0, 0 \leq e \leq 0, 5$ ) e aos ângulos  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $f$  (tomados aleatoriamente no intervalo de  $0, 0^\circ$  a  $360, 0^\circ$ ) continuam as mesmas descritas nas subseções 5.1.1 e 5.1.2.

O que muda neste estudo em relação ao caso plano e prógrado, tratados nos capítulos anteriores, é a inclinação das partículas (em relação ao equador do corpo central) que foi tomada de  $105, 0^\circ \leq I \leq 180, 0^\circ$  em intervalos de  $15, 0^\circ$ . Foi analisado como as regiões de estabilidade encontradas para cada uma das três regiões é modificada quando as partículas passam a ter movimento retrógrados. Com isso define-se as regiões de estabilidade internas ao sistema para o caso retrógrado.

### 7.2 Resultados.

As condições iniciais, bem como os resultados das integrações são discutidos separadamente para cada uma das regiões nas subseções seguintes.

#### 7.2.1 Região 1.

Assim como nos casos plano e prógrados, nesta região as partículas estão orbitando o asteroide central Alfa, com  $1, 4 \leq a \leq 3, 2$  km, tomados a cada  $0, 2$  km,  $0, 0 \leq e \leq 0, 5$ , a cada  $0, 05$ , e 100 partículas para cada um destes pares ( $a \times e$ ), com valores de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude do nodo ascendente

aleatórios, resultando em um total de 11.000 partículas, que foram integradas de acordo com o descrito na seção 5.1.3, com inclinações indo de  $105,0^\circ \leq I \leq 180,0^\circ$  a cada  $15,0^\circ$ .

As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas da figura 7.1. Novamente foi adotado um diagrama de  $a \times e$  para cada um dos casos inclinados. Os limites da região indicados nos diagramas pelas linhas em branco e correspondem ao mesmo limites estabelecidos anteriormente, para os casos planos e prógrados. Maiores detalhes sobre estes limites são dados na seção 5.2.1.

Observa-se que existe uma simetria para os casos prógrados e retrógrados, entre a região estável e a inclinação das partículas. Tal efeito está relacionado com o mecanismo de Kozai. Para os casos retrógrados a inclinação crítica corresponde ao valor  $I \approx 141,0^\circ$ , acima destes valores observa-se um aumento nas regiões estáveis, o que é observado não só na região 1 mas também nas regiões 2 e 3 que serão apresentadas nas próximas seções.

Os diagramas da figura 7.1, mostram que existe uma lacuna na região estável para as partículas com  $a = 2,4$  km, e que a porcentagem de sobreviventes nesta condição aumenta em função do aumento da inclinação. Tal característica sugere a presença de uma ressonância das partículas, com esta condição inicial, com um dos asteróides satélites, o que é discutido na próxima subseção.

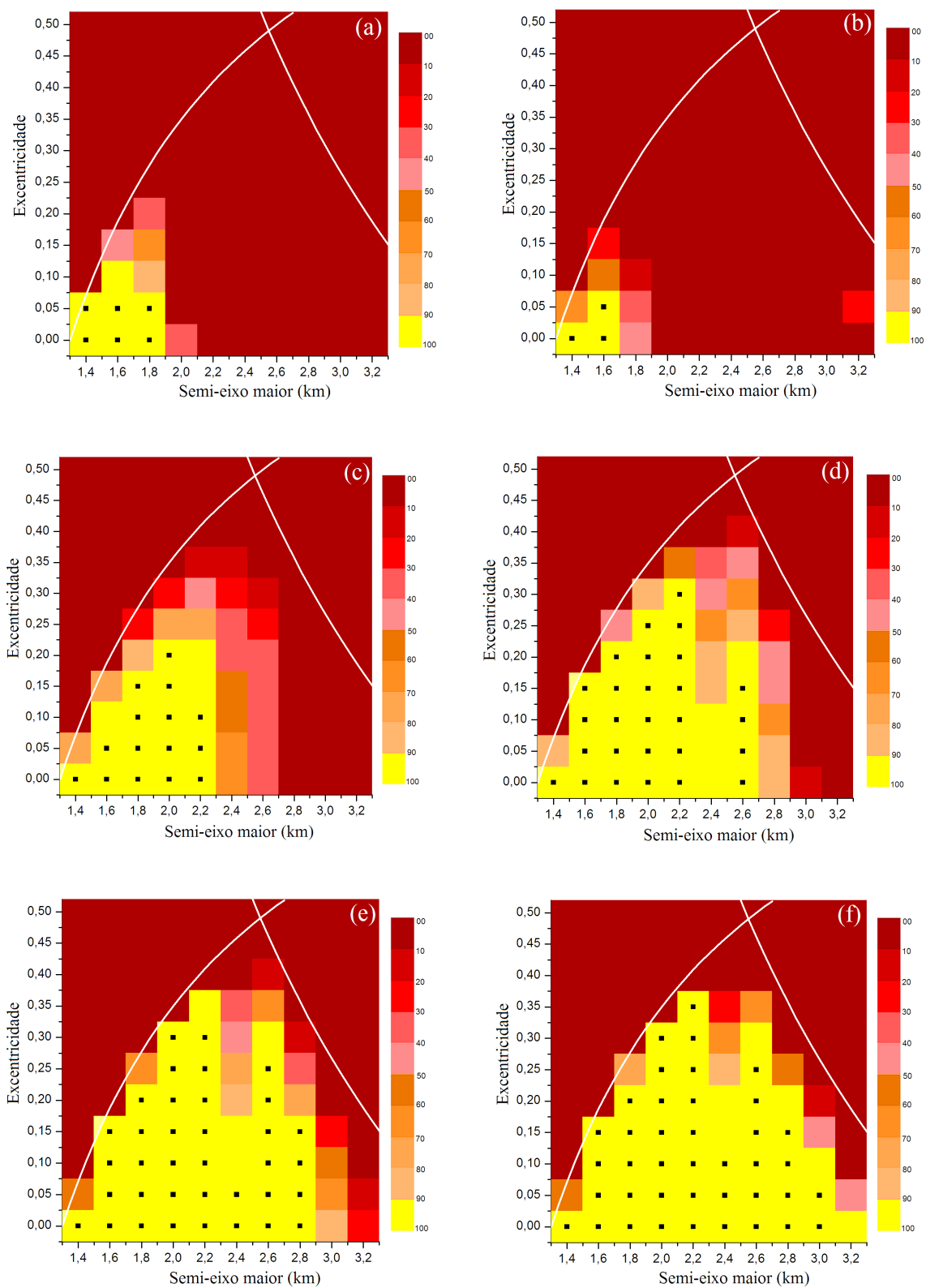


Figura 7.1 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 1 por um período de 2 anos para inclinações: a) 105,0°. b) 120,0°. c) 135,0°. d) 150,0°. e) 165,0°. f) 180,0°.

### 7.2.1.1 Ressonância na região 1 - caso retrógrado.

Através da equação 5.1 foi calculado que as partículas com  $a = 2,398$  km têm uma comensurabilidade de movimento médio 2:1 com Gama. Das equações 5.4 e 5.5 calcula-se que:  $\dot{\Omega} \approx -1,19^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi} \approx 1,19^\circ/dia$  para Gama e  $\dot{\Omega}' \approx -6.0^\circ/dia$  e  $\dot{\varpi}' \approx 6.0^\circ/dia$  para uma partícula com  $a = 2,4$  km orbitando Alfa. Dentre as combinações possíveis, demonstra-se que a combinação:  $j_1 = 2, j_2 = -1, j_3 = 0, j_4 = -1, j_5 = 0, j_6 = 0$ , tal que  $\dot{\varphi} = 0$ , leva ao ângulo ressonante:  $\varphi = 2\lambda - \lambda' - \varpi'$ , que apresenta um comportamento intermitente, hora circulando, hora librando, como mostra o gráfico da figura 7.2, (feito considerando uma partícula na região 1 com  $a = 2,4$  km,  $e = 0,0$ , com  $I = 150,0^\circ$ ), demonstrando que as partículas com movimento retrógrado na região 1, com semi-eixos maiores na vizinhança de  $a = 2,4$  km, sofrem os efeitos de uma ressonância 2:1 com Gama.

Na equação do ângulo ressonante entrou o ângulo  $\varpi'$ , considerando nele apenas o efeito devido ao  $J_2$ , isto porque, a partícula está mais próxima do corpo central que Gama, e a perturbação secular em Gama devido a Beta é relativamente pequena quando comparada à perturbação devido ao  $J_2$  (ver tabela 4.1), o mesmo sendo esperado para a partícula, e portanto o efeito na partícula devido ao achatamento de Alfa deve dominar.

A figura 7.3 traz a variação de semi-eixo maior e da excentricidade da partícula, em que se observa o aumento da excentricidade devido à ressonância, o que a leva a cruzar as linhas que limitam a região (colisão ou escape) causando instabilidade.



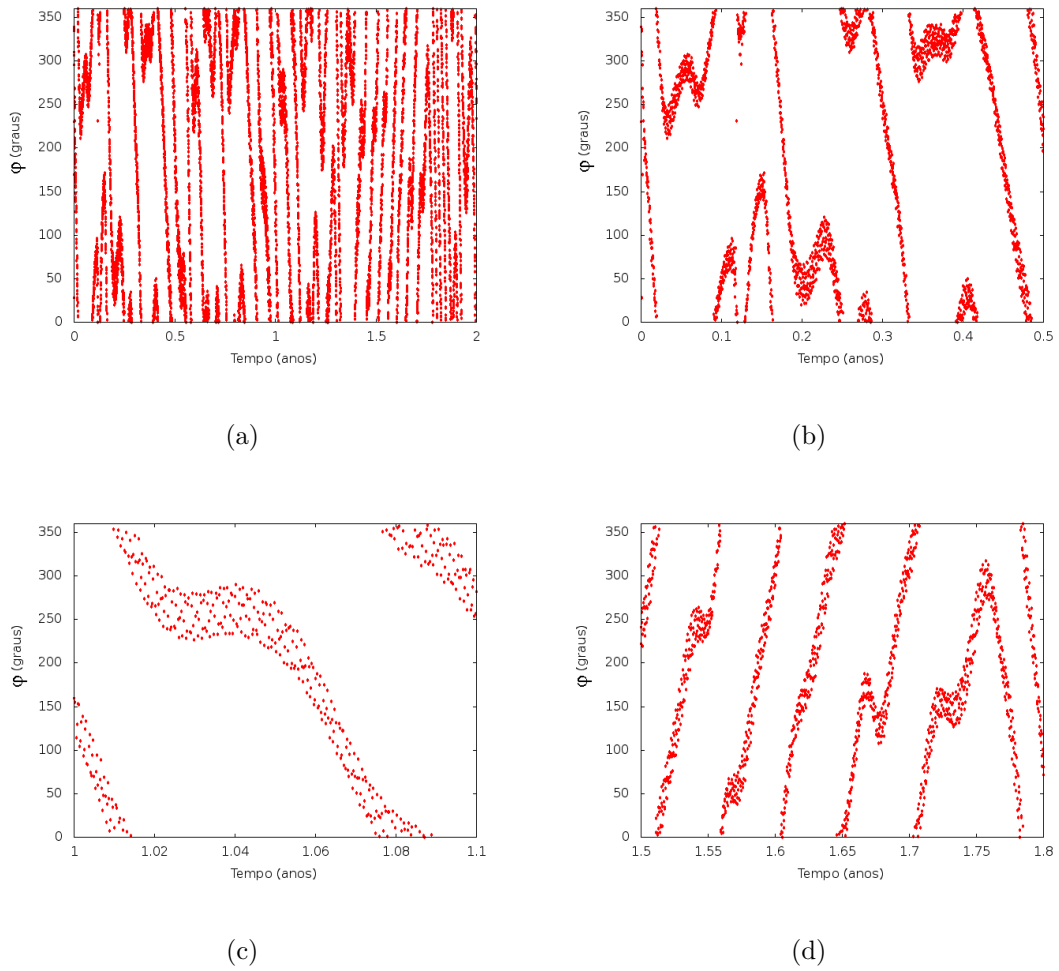


Figura 7.2 - Variação do ângulo ressonante  $\varphi = 2\lambda - \lambda' - \varpi'$  para uma partícula na região 1 com  $a = 2,4$  km,  $e = 0,0$  e  $I = 150,0^\circ$ . a)  $t = 2,0$  anos. b)  $t$  indo de 0,0 a 0,5 anos ( $\approx 264$  períodos orbitais de Gama). c)  $t$  indo de 1,0 a 1,1 anos ( $\approx 53$  períodos orbitais de Gama). d)  $t$  indo de 1,5 a 1,8 anos ( $\approx 159$  períodos orbitais de Gama).

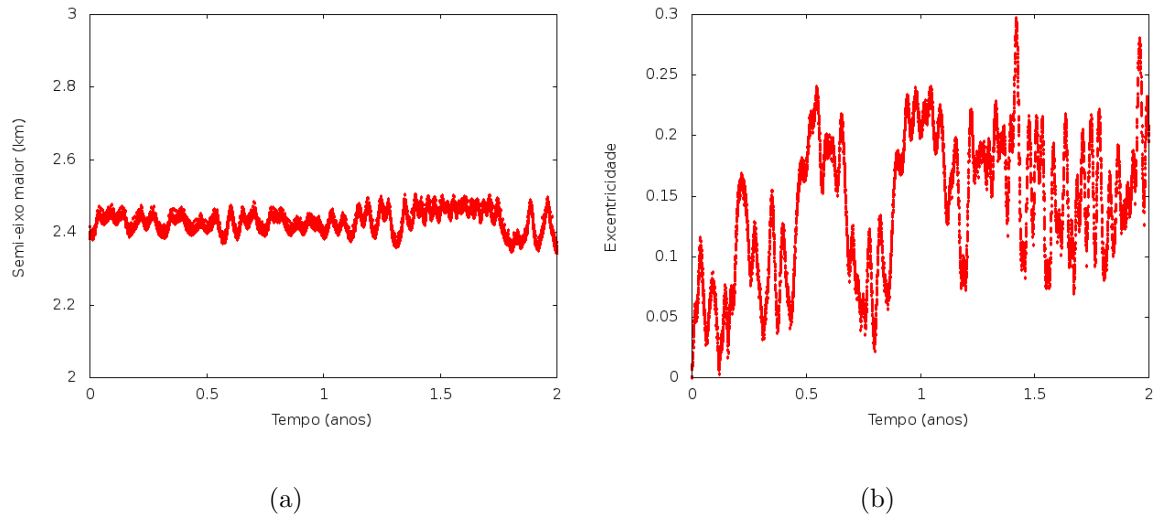


Figura 7.3 - Variação dos elementos orbitais da partícula orbitando Alfa na região 1 com  $a = 2,4$  km,  $e = 0,0$   $I = 150,0^\circ$ . a) Variação de semi-eixo maior em km. b) Variação de excentricidade.

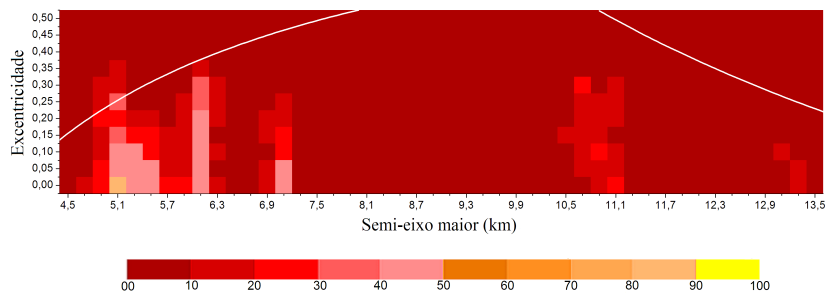
### 7.2.2 Região 2.

Assim como no caso plano, nesta região as partículas estão orbitando o asteroide central Alfa, com  $4,5 \leq a \leq 13,5$  km tomados a cada 0,2 km,  $0,0 \leq e \leq 0,5$  a cada 0,05, e 100 partículas para cada um destes pares ( $a \times e$ ), com valores de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude dos nodos aleatórios, resultando em um total de 50.600 partículas, que foram integradas de acordo com o descrito na seção 5.1.3, com inclinações indo de  $105,0^\circ \leq I \leq 180,0^\circ$  a cada  $15,0^\circ$ .

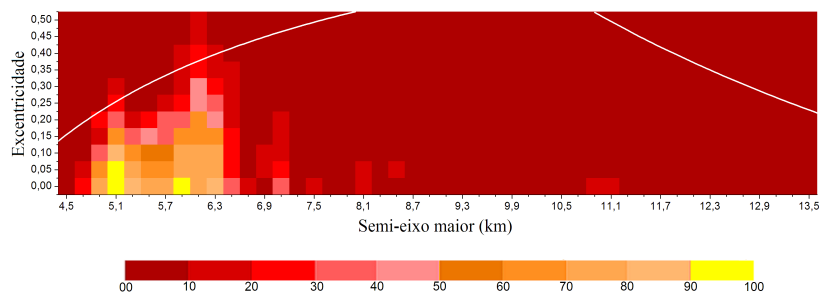
As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas das figuras 7.4 e 7.5. Novamente foi adotado um diagrama de  $a \times e$  para cada um dos casos inclinados. Os limites da região indicados nos diagramas pelas linhas em branco e correspondem ao mesmo limites estabelecidos anteriormente, para os casos planos e prógrados. Maiores detalhes sobre estes limites são dados na seção 5.2.2.

Verifica-se que para valores de inclinação a partir de  $135^\circ$  (próximo de atingir a inclinação crítica corresponde ao valor  $I \approx 141,0^\circ$  para os casos retrógrados), as regiões estáveis passam a ser significativas na região. Ao contrário do observado para

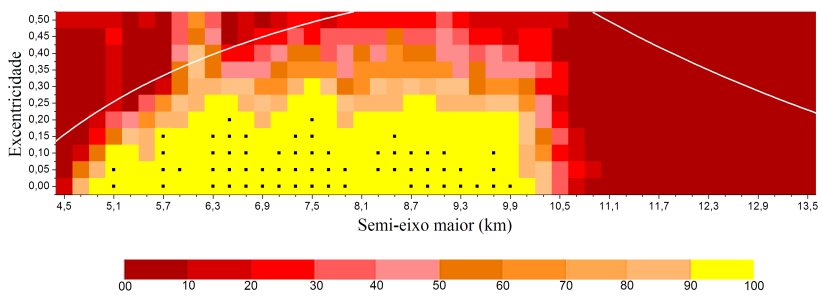
os casos prógrado e plano, encontra-se para este caso uma grande região estável. A instabilidade aparece para condições iniciais bem próximas dos limites da região (condição de escape ou colisão).



(a)

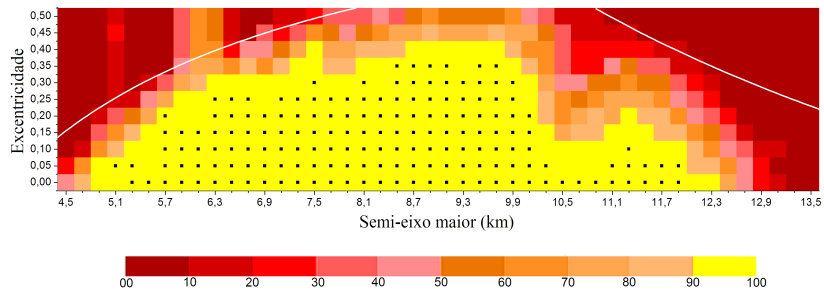


(b)

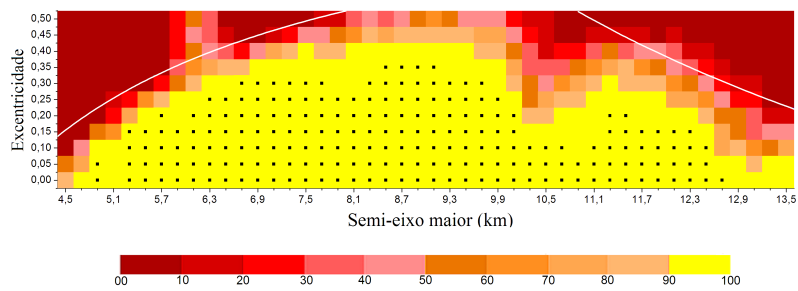


(c)

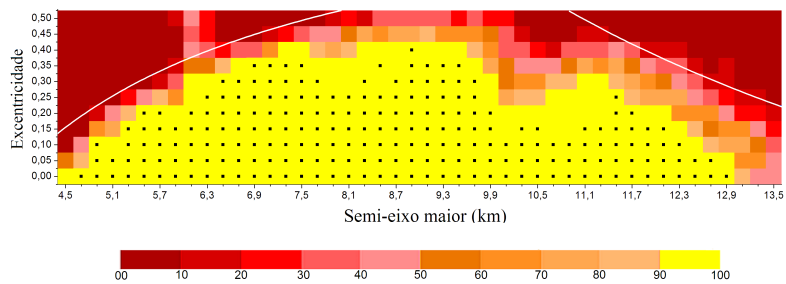
Figura 7.4 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações: a)  $105,0^\circ$ . b)  $120,0^\circ$ . c)  $135,0^\circ$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 7.5 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Alfa na região 2 por um período de 2 anos para inclinações a)  $I = 150,0^\circ$ . b)  $I = 165,0^\circ$ . c)  $180,0^\circ$ .

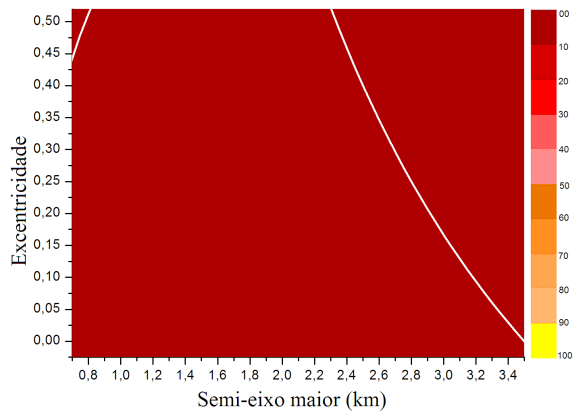
### 7.2.3 Região 3.

Assim como no caso plano, nesta região as partículas estão orbitando o asteróide central Beta, com  $0,8 \leq a \leq 3,4$  km tomados a cada 0,2 km,  $0,0 \leq e \leq 0,5$  a cada

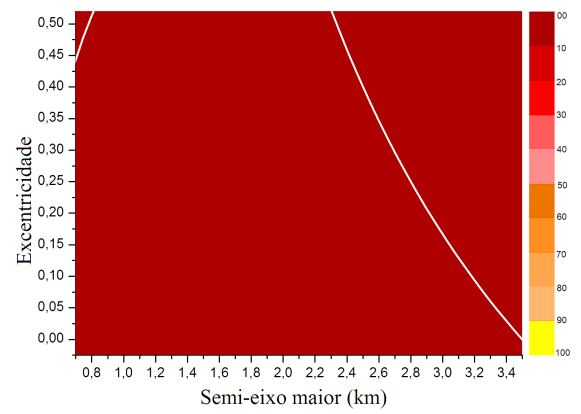
0,05, e 100 partículas para cada um destes pares ( $a \times e$ ), com valores de anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude dos nodos aleatórios, resultando em um total de 15.400 partículas, que foram integradas de acordo com o descrito na seção 5.1.3, com inclinações indo de  $105,0^\circ \leq I \leq 180,0^\circ$  a cada  $15,0^\circ$ .

As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas  $a \times e$  da figura 7.6. Os limites da região indicados nos diagramas pelas linhas em branco continuam sendo os mesmos adotados para a região 3, nos casos planos e prógrados. Maiores detalhes sobre estes limites são dados na seção 5.2.3.

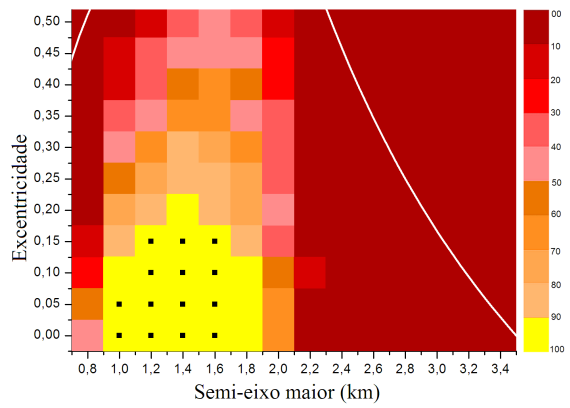
Novamente verifica-se que as regiões estáveis aparecem quando a inclinação está próxima de atingir a inclinação crítica ( $I \approx 141,0^\circ$ ). Praticamente toda a região fica estável. A instabilidade aparece apenas nos limites da região (condição de escape ou colisão).



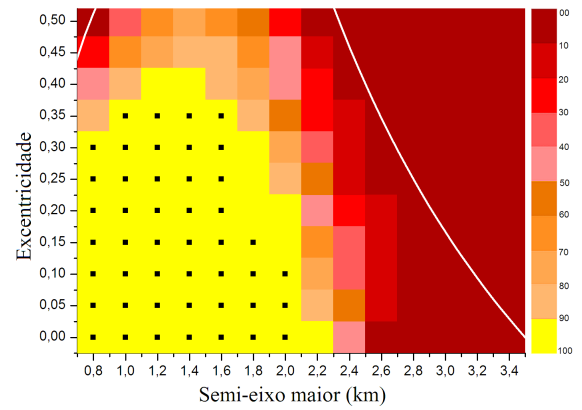
(a)



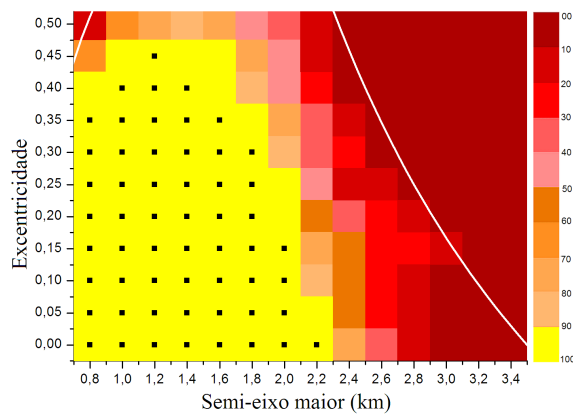
(b)



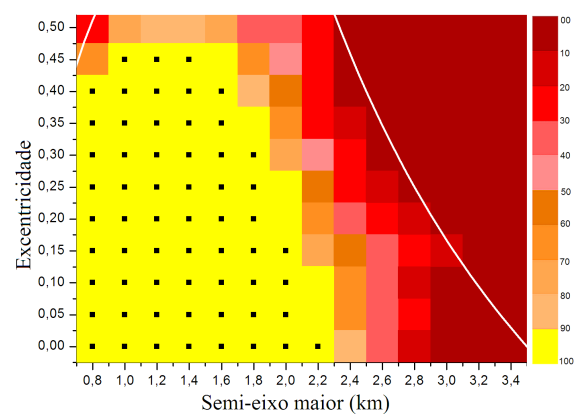
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 7.6 - Região de estabilidade e instabilidade ao redor de Beta na região 3 por um período de 2 anos para inclinações a)  $105,0^\circ$ . b)  $120,0^\circ$ . c)  $135,0^\circ$ . d)  $150,0^\circ$ . e)  $165,0^\circ$ . f)  $180,0^\circ$

### 7.3 Comentários.

Neste capítulo foram determinadas as regiões de estabilidade nas regiões internas ao sistema 2001 SN263 para os caso retrógrados. Como feito anteriormente para os casos plano e prógrado, o método de trabalho consistiu na integração numérica do problema de N-corpos, no qual foram consideradas milhares de partículas na região interna ao sistema, além de sete corpos massivos. Foram dadas à estas partículas, inclinações no intervalo de  $90,0^\circ$  a  $180,0^\circ$ , iniciando em  $I = 105,0^\circ$ , tomados a cada  $15,0^\circ$ .

Nas três regiões internas, os efeitos devido à ação do mecanismo de Kozai (instabilidade) são observados para os casos com inclinação abaixo de  $I = 135,0^\circ$ , como mostram os diagramas de estabilidade. Acima deste valor começam a aparecer as regiões estáveis, tanto na região 1, quanto nas regiões 2 e 3. Este resultado está dentro do previsto pela teoria, que prevê um valor crítico de inclinação de aproximadamente  $I = 141,0^\circ$  para casos retrógrados.

Para os casos com inclinação além da inclinação crítica, verificou-se que as regiões estáveis internas encontradas para os casos retrógrados, nas três regiões internas, são significativamente maiores que as encontradas para o caso prógrado. A instabilidade aparece apenas para as partículas com condições iniciais bem próximas dos limites das respectivas regiões.

Para a região 1, o aumento da inclinação das partículas evidenciou os efeitos da ressonância 2:1 com Gama, que afeta as partículas com semi-eixo maior próximos a  $a = 2,4$  km.

A conclusão desta etapa do trabalho finaliza a análise relativa á estabilidade na região interna do sistema 2001 SN263. O próximo capítulo é dedicado ao estudo da estabilidade na região externa.





## 8 ESTABILIDADE NA REGIÃO EXTERNA DO SISTEMA TRIPLO 2001 SN263

Nos capítulos anteriores, foram caracterizadas as regiões de estabilidade internas ao sistema triplo 2001 SN263, com discussões e análises considerando os casos plano, prógrados e retrógrados. Neste capítulo uma análise semelhante é feita, considerando estes três regimes, mas desta vez para partículas orbitando a região externa do sistema, com o objetivo de se determinar as regiões estáveis externas do sistema 2001 SN263. Para isso é necessário, primeiramente, que se defina a região que será considerada, o método adotado e os critérios de estabilidade. Estas considerações são descritas nas seções seguintes.

### 8.1 Definição da região externa.

Para se definir os limites da região externa, foi utilizado novamente a definição de raio de Hill. Para isso, considera-se um sistema formado por Sol e por um corpo C que o orbita com a mesma órbita heliocêntrica do sistema 2001 SN263, e cuja massa  $M$  é igual à soma das massas dos componentes do sistema ( $M = M_\alpha + M_\beta + M_\gamma$ ), e calcula-se então o raio de Hill para estes primários. Com isso obtém-se uma pequena região em que a influência gravitacional do corpo C prevalece sobre a influência gravitacional do Sol, e esta aproximação servirá de parâmetro para se definir a região de influência do sistema.

Como pode ser visto pelos dados da tabela 3.1, a órbita heliocêntrica do sistema possui alta excentricidade ( $e = 0,47$ ), e portanto o periélio  $q$  desta órbita difere bastante do afélio  $Q$ , ( $q \approx 1,05$  UA e  $Q \approx 2,93$  UA). O raio de Hill é calculado em função das massas dos corpos primário e da distância entre estes corpos ( $R_{Hill} = (\mu_2/3)^{(1/3)}r_{12}$ , em que  $\mu_2$  é a razão de massa e  $r_{12}$  é a distância entre os primários (Murray e Dermott, 1999)). Assim sendo, a região de influência do sistema será maior no afélio (menor perturbação do Sol) que no periélio (maior perturbação do Sol). Utilizando a equação acima, foi calculado que o raio de Hill do corpo C é  $R_{Hill} \approx 500,0$  km no afélio e  $R_{Hill} \approx 180,0$  km no periélio.

A região externa do sistema é então definida com base nestes valores. Foi tomado como limite a situação em que o sistema está sofrendo maiores perturbações, ou seja, no periélio, com o correspondente  $R_{Hill} \approx 180,0$  km. Além disso, de acordo com Domingos et al. (2006), para órbitas prógradas o limite de órbitas estáveis é de

aproximadamente  $\approx 0,5R_{Hill}$ , enquanto que para órbitas retrógradas este limite é de  $\approx 1,0R_{Hill}$ . Assim sendo, os limites superiores da região externa serão  $d = 90,0$  km para os casos prógrados e  $d = 180,0$  km para os casos retrógrados, contados a partir do asteroide central Alfa. O limite inferior é de  $20,0$  km a partir de Alfa, valor que corresponde à fronteira da região interna, limitada pelo raio de Hill de Beta (ver figura 5.1).

## 8.2 Metodologia.

A metodologia adotada consiste na integração numérica do problema de N-corpos com achatamento (apêndice A), utilizando o integrador Gauss-Radau, de um sistema formado por Sol, Terra, Marte, Júpiter, Alfa, Beta e Gama, e por n-partículas orbitando Alfa (o centro de massa do sistema está localizado dentro deste corpo), dentro dos limites expostos na seção anterior.

É feito então o monitoramento das partículas que colidem com qualquer dos corpos massivos, das partículas que escapam (as distâncias de escape irão variar dos casos prógrados para os retrógrados, pois as regiões foram definidas com tamanhos diferentes para estes problemas), e das partículas que sobrevivem por dois anos.

As análises tanto para o caso plano, quanto para os prógrados e retrógrados, são apresentados nas seções a seguir.

## 8.3 Caso Plano.

Nesta seção é apresentado o estudo sobre as regiões de estabilidade na região externa ao sistema 2001 SN263 para o caso plano. Os limites desta região foram discutidos na seção 8.1, e baseadas nestas informações, se definem as condições iniciais do problema.

### 8.3.1 Condições iniciais.

Nesta região as partículas orbitam Alfa com  $20,0 \leq a \leq 90,0$  km tomados a cada  $1,0$  km, angularmente distribuídas com valores aleatórios para  $\Omega$ ,  $\omega$ , e  $f$  indo de  $0,0^\circ$  a  $360,0^\circ$ , com excentricidade no intervalo  $0,0 \leq e \leq 0,5$  em intervalos de  $0,05$ , e sem inclinação ( $I = 0,0^\circ$ ). Este conjunto de condições iniciais leva a um total de 78.100 partículas integradas nesta região.

### 8.3.2 Resultado.

O resultado da simulação para o caso plano é apresentado no diagrama da figura 8.1. As linhas em branco neste diagrama indicam os limites da região. À esquerda está a linha de provável colisão com Beta que corresponde ao limite a partir do qual as partículas passam a cruzar a órbita de Beta. Esta linha também pode ser entendida como o limite entre as regiões internas e externas, de acordo com a forma como estas regiões foram definidas. Considerando o limite da região interna dada por  $d=16,663$  km, e sendo  $r_p = a(1 - e)$  o pericentro das partículas, então a relação  $a = d/(1 - e)$ , fornece numericamente este limite, para  $0, 0 \leq e \leq 0,5$ . À direita, está a linha de escape, que denota o ponto a partir do qual os apocentros  $r_a$ , das órbitas das partículas orbitando Alfa, estão além da distância de escape para esta região, que é  $d = 90,0$  km, e cujo limite é dado por  $a = d/(1 + e)$ , para  $0, 0 \leq e \leq 0,5$ .

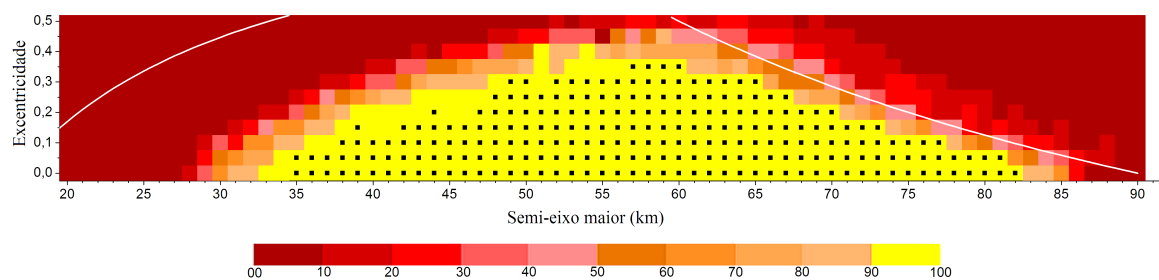


Figura 8.1 - Diagrama de estabilidade na região externa por um período de 2 anos. A escala a baixo vai de 0,0% – 10,0% de sobreviventes (vermelho) até 90% – 100% de sobreviventes (amarelo). Os quadrados amarelos marcados com pequenos pontos pretos representam os casos com 100% de sobrevivência. As linhas em branco indicam os limites da região. A linha da esquerda é a linha de provável colisão com Beta, e a linha da direita é a linha de escape da região.

Por este diagrama, observa-se que as regiões instáveis são encontradas além do limite da linha de escape, e na vizinhança de Beta (instabilidade resultante em sua maioria, das colisões das partículas com este asteroide, como pode ser visto na figura 8.2b). A região de estabilidade é predominante (ver figura 8.2a) e aproximadamente 30% das partículas estão na região onde 100% das partículas sobrevivem 2 anos (região em amarelo marcado com os pontos pretos no diagrama de estabilidade.)

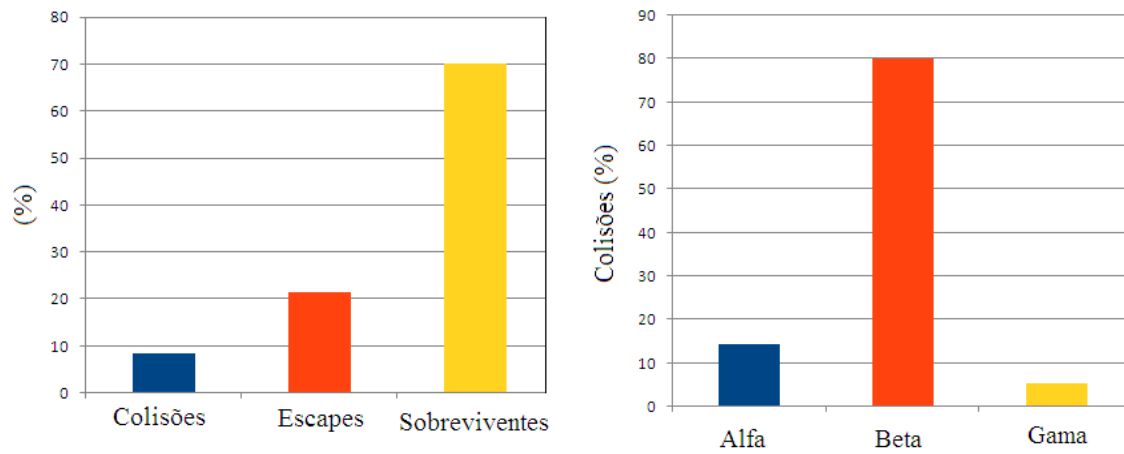
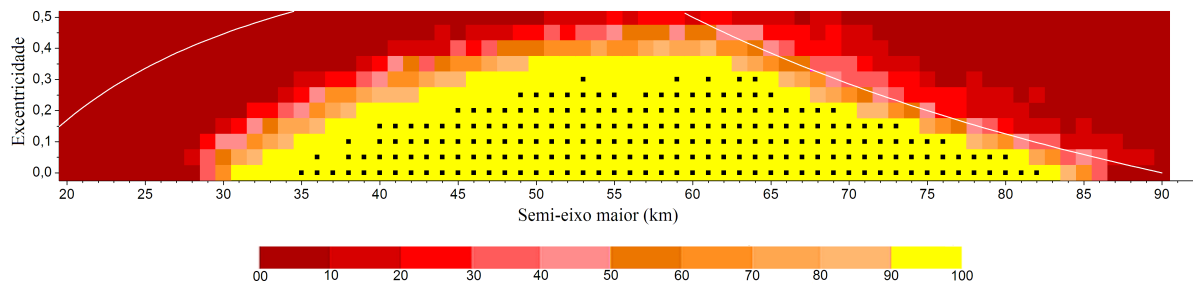


Figura 8.2 - a) Porcentagem de colisões, escapes e sobreviventes para regiões externa - caso plano. b) Porcentagem de colisões das partículas com cada um dos componentes do sistema.

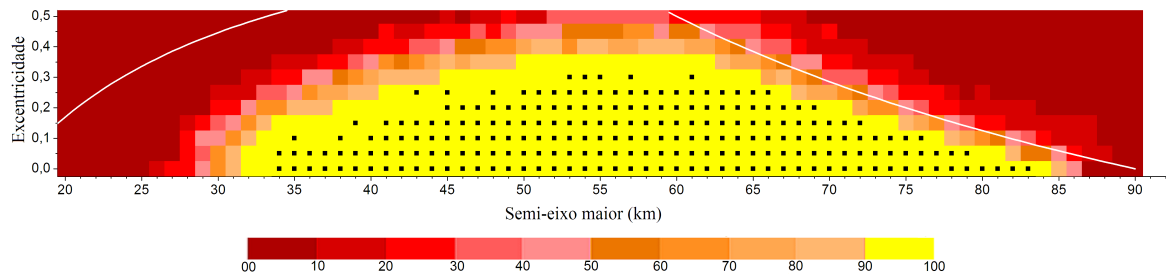
#### 8.4 Casos prógrados.

Nesta seção o estudo da estabilidade para a região externa é estendido, passando agora a considerar partículas com órbitas inclinadas. Nesta etapa as condições iniciais e demais considerações feitas para o estudo da região externa continuam as mesmas das descritas na seções anteriores deste capítulo, com exceção das inclinações das partículas, que agora irão assumir valores  $15,0^\circ \leq I \leq 90,0^\circ$  (movimento prógrado), tomados em intervalos de  $15,0^\circ$ .

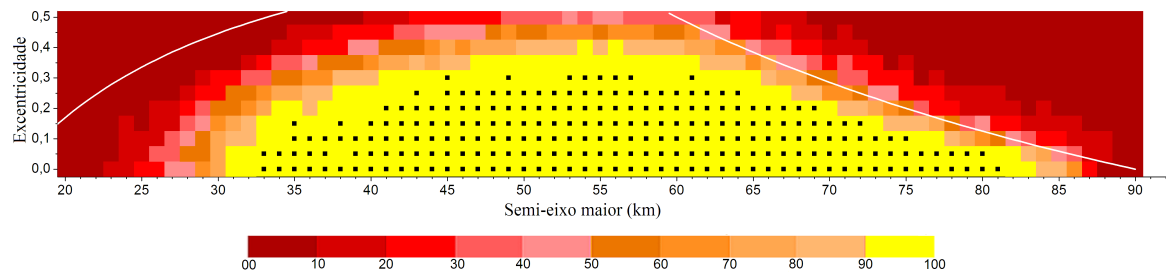
As regiões de estabilidade e instabilidade encontradas para estas condições são apresentadas nos diagramas das figuras 8.3 e 8.4. Comparando estes diagramas entre si, e com os diagrama para o caso plano (figura 8.1), concluí-se que a variação na inclinação não modifica as regiões estáveis e instáveis do sistema por um período de 2 anos.



(a)

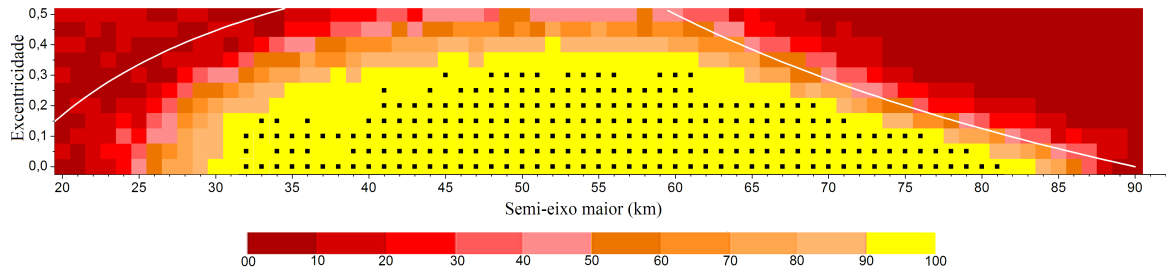


(b)

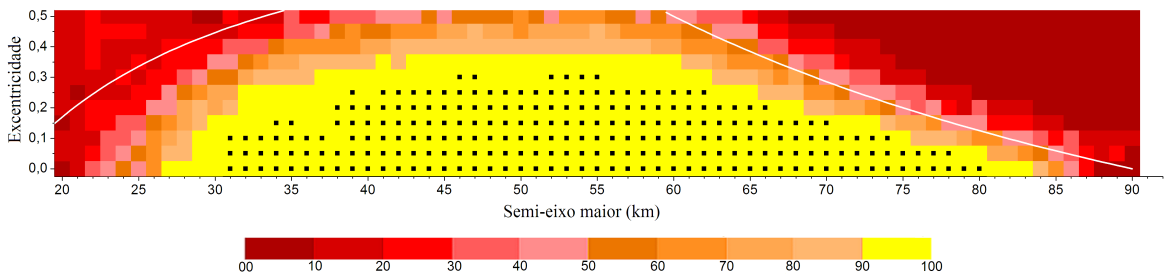


(c)

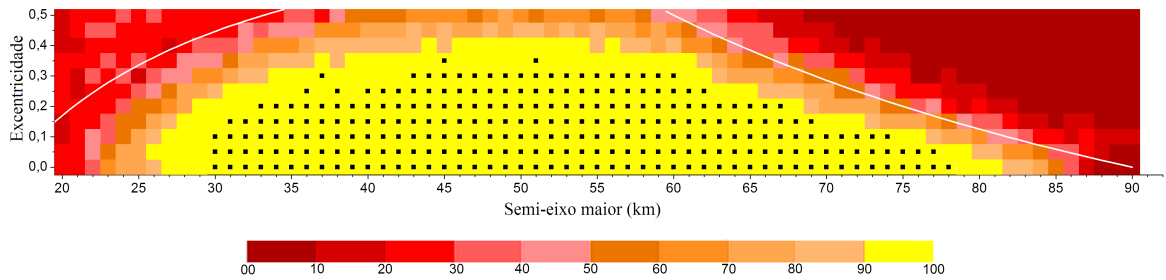
Figura 8.3 - Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações: a)  $15,0^\circ$ . b)  $30,0^\circ$ . c)  $45,0^\circ$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 8.4 - Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações: a)  $60,0^\circ$ . b)  $75,0^\circ$ . c)  $90,0^\circ$ .

## 8.5 Casos retrógrados.

Para o estudo dos casos retrógrados repete-se o que foi feito seção anterior, mas agora com  $105,0^\circ \leq I \leq 180,0^\circ$  (movimento retrógrado), tomados em intervalos de  $15,0^\circ$ , e lembrando que o limite de escape para os casos retrógrados é de  $\approx 1$  raio de Hill.

Os resultados destas integrações são apresentados nos diagramas de estabilidade das figuras 8.5 e 8.6. Observa-se que, apesar do limite de escape para estes casos ter sido aumentado ( $\approx 1$  raio de Hill), neste problema composto pelos três asteróides do sistema 2001 SN263, não foram encontradas regiões estáveis para partículas a distâncias maiores que 0,7 raios de Hill ( $\approx 120,0$  km).

Novamente, vê-se que a mudança na inclinação praticamente não altera as regiões estáveis e instáveis na região externa do sistema, sendo observados apenas alguns efeitos nas bordas, próximos dos limites da região.

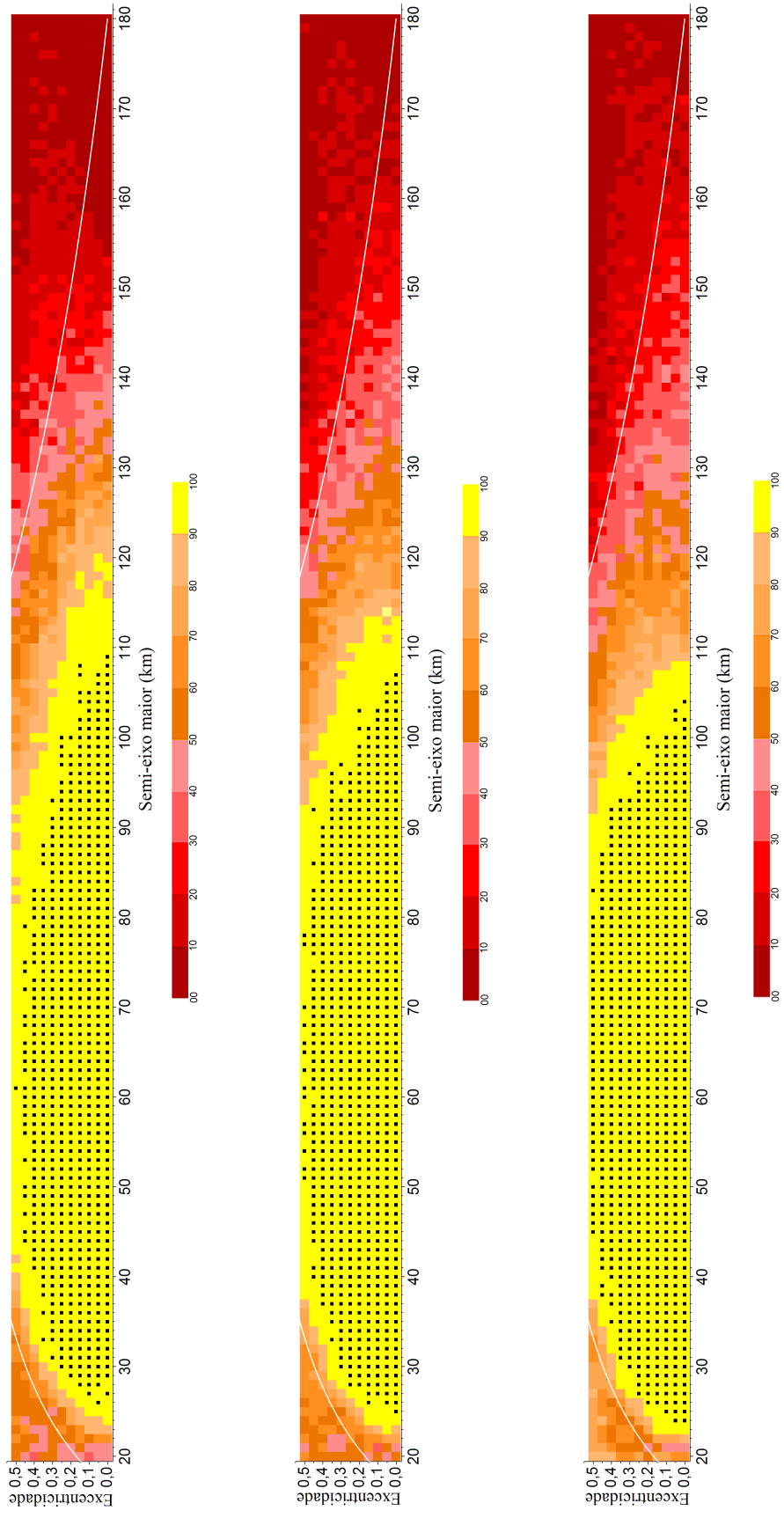


Figura 8.5 - Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações (de cima para baixo):  $105, 0^\circ$ ,  $120, 0^\circ$  e  $135, 0^\circ$ .



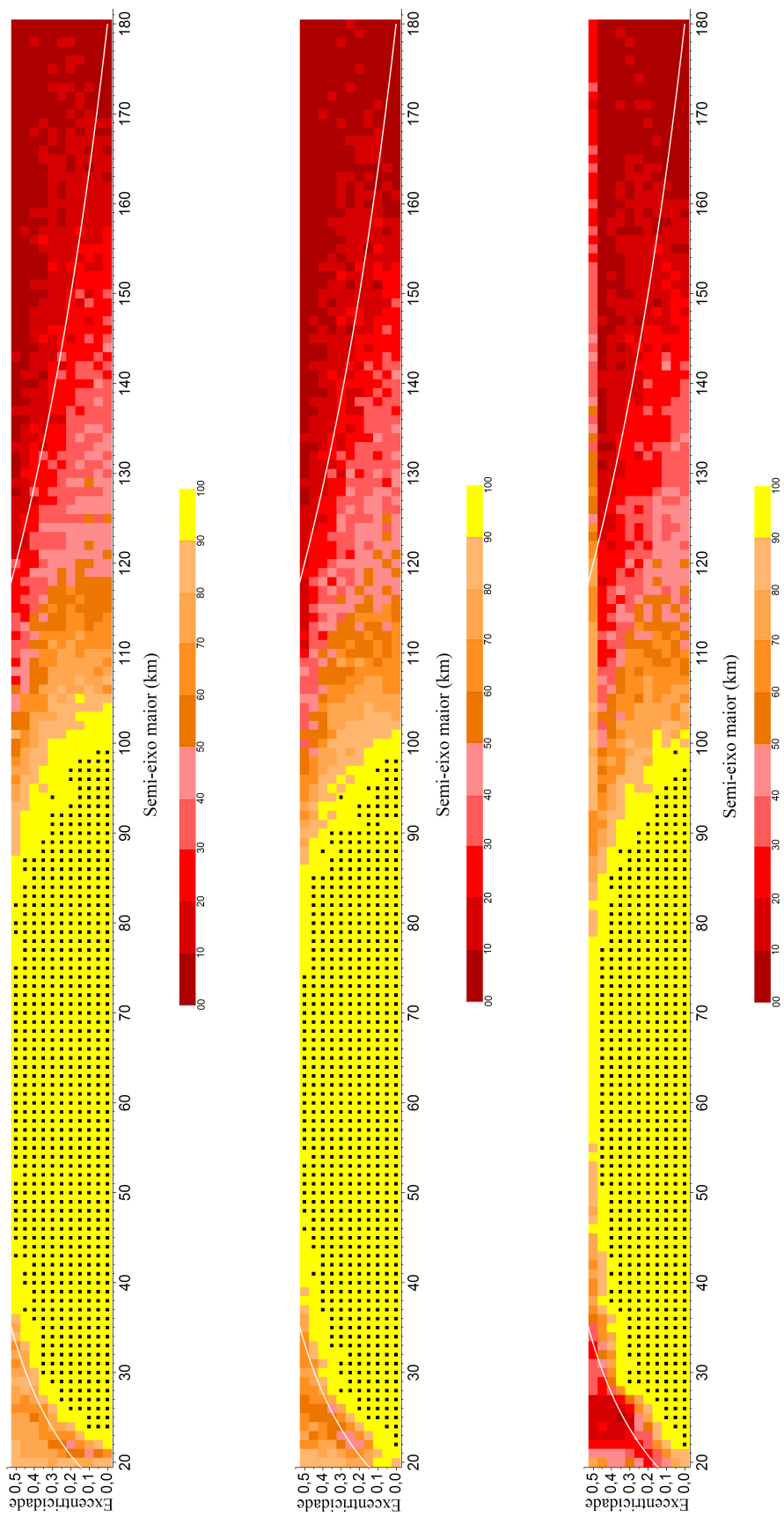


Figura 8.6 - Diagrama de estabilidade na região externa, por um período de 2 anos, para inclinações (de cima para baixo):  $150, 0^\circ$ ,  $165, 0^\circ$  e  $180, 0^\circ$ .

## 8.6 Comentários.

Foram determinadas regiões de estabilidade e instabilidade nas regiões externas ao sistema triplo de asteróides 2001 SN263 para os casos plano, prógrado e retrógrado. Mostrou-se que as regiões estáveis predominam em todos os casos e que a instabilidade é gerada em sua maioria apenas nas proximidades do asteróide Beta (devido às colisões das partículas com este corpo) e depois pelo próprio limite de escape que foi imposto.

Mostrou-se também que as regiões estáveis e instáveis não são afetadas pela inclinação da partícula, permanecendo praticamente constantes, mesmo quando a inclinação variou de  $0,0^\circ$  a  $180,0^\circ$ , apresentando um pequeno aumento da região estável para o caso retrógrado, mas que é consequência do aumento do limite de escape.

## 9 CASO PLANO E CIRCULAR: ESTABILIDADE EM LONGO PERÍODO NAS REGIÕES INTERNAS DO SISTEMA 2001 SN263

Neste capítulo é apresentada a análise da estabilidade em longo período nas regiões internas do sistema 2001 SN263 considerando o caso particular plano e circular. Para isso foram realizadas integrações numéricas pelo período de 2000 anos das partículas com  $e = 0,0$  e  $I = 0,0$  das regiões 1, 2 e 3, pertencentes ao conjunto de condições iniciais que resultaram em 100% de sobrevivência pelo período de 2 anos. O período de 2000 anos corresponde a aproximadamente 700 períodos orbitais de Alfa, 106.000 períodos orbitais de Beta e aproximadamente um milhão de períodos de Gama.

De acordo com o discutido no capítulo 4, é sabido que no período de 2000 anos não acontecem encontros próximos do sistema com os planetas Terra ou Marte (figura 4.10). No entanto, este período é suficiente para capturar os efeitos das perturbações seculares sofridas pelo sistema. Os resultados das simulações são apresentados e discutidos nas seções seguintes, separadamente para cada uma das regiões internas.

### 9.1 Região 1.

Nesta região, o conjunto de partículas com  $e = 0,0$  e  $I = 0,0$  estáveis por 2 anos, isto é, que apresentam 100% de sobrevivência neste período, são aquelas com semi-eixo maior indo de 1,4 km até 2,4 km (ver o diagrama de estabilidade nas figura 5.2). Este conjunto com 600 partículas foi integrado novamente pelo período de 2000 anos, considerando o Sol, os planetas Terra, Marte e Júpiter e os componentes do sistema de asteróides. O achatamento de Alfa também foi considerado. Novamente foi feito o monitoramento das colisões e dos escapes, de acordo com o descrito na seção 5.1.2.

O diagrama na figura 9.1 traz o resultado da simulação. Neste diagrama é feita uma comparação entre a porcentagem de sobreviventes em 2 e 2000 anos, para cada valor de semi-eixo maior inicial. Do próprio critério de escolha das partículas, sabe-se que 100% delas sobrevivem por 2 anos. Isto é representado no diagrama pela linha laranja tracejada. Em amarelo está a porcentagem de sobrevivência por 2000 anos.

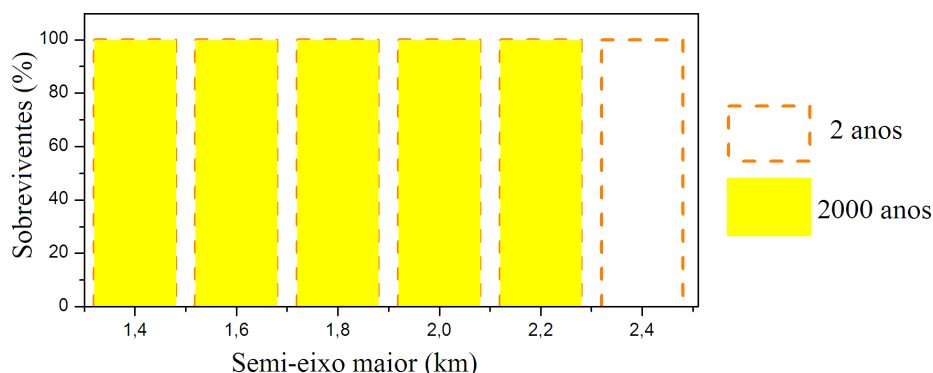


Figura 9.1 - Porcentagem de sobreviventes para cada semi-eixo maior “estável”na região 1 pelos períodos de 2 anos (linha laranja tracejada) e 2000 anos (preenchido em amarelo).

Nota-se que a região estável encontrada para 2 anos no intervalo de  $1,4 \leq a \leq 2,2$  km permanece pelo período de 2000 anos. Apenas as partículas mais externas, com  $a = 2,4$  km são removidas (100% de colisões em 592 anos).

## 9.2 Região 2.

Nesta região, o conjunto de partículas com  $e = 0,0$  e  $I = 0,0$  estáveis por 2 anos é formado pelas partículas com semi-seixo maior:  $a = 9,1$  km,  $a = 9,5$  km e  $a = 9,7$  km (ver o diagrama de estabilidade nas figura 5.7). Este conjunto com 300 partículas foi integrado e analisado pelo período de 2000 anos, conforme descrito na seção anterior. O diagrama na figura 9.2 traz o resultado da simulação.

Vê-se que a região de estabilidade encontrada nesta região para o período de 2 anos, não permanece pelo período de 2000 anos. Das 100 partículas com semi-eixo  $a = 9,1$  km apenas 52% permanecem, enquanto que 48% delas colidem dentro de 115 anos. Nenhuma das partículas com  $a = 9,5$  km e  $a = 9,7$  km sobreviveu por 2000 anos (86,5% colidem e 13,5% escapam).

Este era um resultado esperado, já que foi demonstrado que as partículas nesta região ficam na vizinhança das ressonâncias com Gama e Beta, e estas geram uma região de instabilidade na região 2, como foi discutido na seção 5.2.2.1

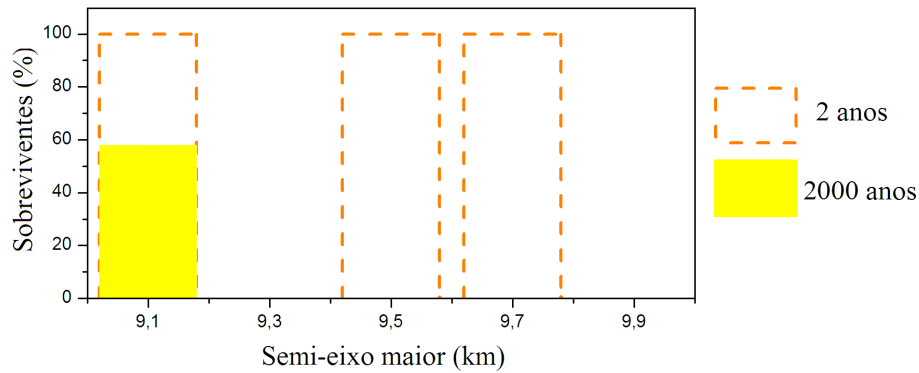


Figura 9.2 - Porcentagem de sobreviventes para cada semi-eixo maior “estável” na região 2 pelos períodos de 2 anos (linha laranja tracejada) e 2000 anos (preenchido em amarelo).

### 9.3 Região 3.

Nesta região, o conjunto de partículas com  $e = 0,0$  e  $I = 0,0$  estáveis por 2 anos é formado pelas partículas com semi-seixos maiores indo de 0,8 km até 1,2 km (ver o diagrama de estabilidade nas figura 5.13). Este conjunto com 300 partículas foi integrado e analisado pelo período de 2000 anos, conforme descrito na seções anteriores.

O resultado das simulações mostrou que a região de estabilidade encontrada na região 3, pelo período de 2 anos, permanece a mesma para 2000 anos (nenhuma colisão ou escape), como representado pelo diagrama da figura 9.3.

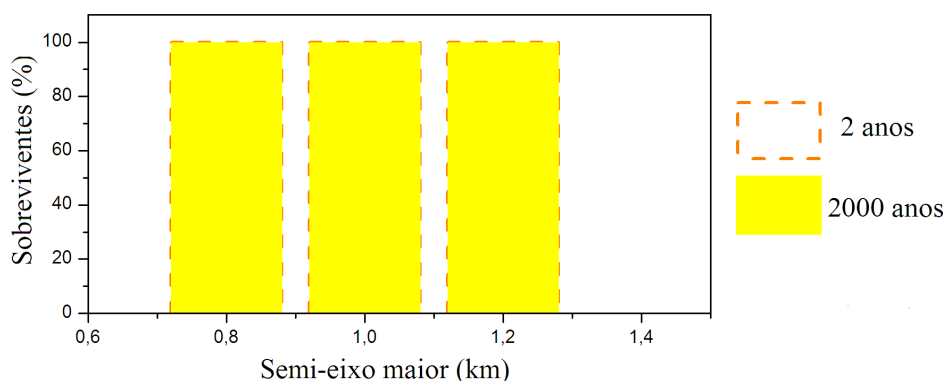


Figura 9.3 - Porcentagem de sobreviventes para cada semi-eixo maior “estável”na região 3 pelos períodos de 2 anos (linha laranja tracejada) e 2000 anos (preenchido em amarelo).

#### 9.4 Comentários.

Neste capítulo, foi apresentada a análise da estabilidade em longo período nas regiões internas do sistema 2001 SN263, considerando o caso particular plano e circular. Para isso, foram selecionados os casos estáveis das regiões internas 1,2 e 3, estudados nos capítulo 5, com excentricidade nula. De acordo com o método descrito em tal capítulo, mostrou-se que estas partículas são estáveis pelo período de 2 anos. Nesta etapa, este mesmo conjunto de partículas foi integrado novamente, para um período mil vezes maior (2000 anos), com o objetivo de permitir que os efeitos de perturbações seculares fossem observados.

Os resultados mostram que a região 1 é pouco afetada. Apenas as partículas mais externas ( $a \approx 2,4$  km) são perturbadas em longo período (100% de colisões em  $\approx 592$  anos). Fora este caso, a região estável ao redor de Alfa na região 1 permanece pelo período de 2000 anos.

O pequeno conjunto de condições iniciais que apresentaram estabilidade na região 2 para o período de 2 anos, não sobrevive em longo período, ou seja, no intervalo de 2000 anos a região 2 se torna completamente instável, o que é esperado devido à ação das ressonâncias que foram identificadas nesta região.

A região três não sofre qualquer alteração, permanecendo a mesma pelo período de 2000 anos.

O diagrama da figura 9.4 é uma representação das regiões estáveis internas do sistema, para os casos plano e circular, em longo período. Comparações entre este diagrama e o apresentado na figura 5.16 ajudam a visualizar as alterações citadas acima, resultantes da interação em longo período. Fica evidente o desaparecimento da região estável encontrada na região 2, e a permanência das regiões estáveis ao redor de Alfa e Beta, e conclui-se que o sistema tem uma rápida dispersão de partículas, isto é, as colisões e escapes acontecem logo nos primeiros anos.

As regiões em amarelo (estáveis) são um indicativo de onde se encontrariam satélites ou detritos no sistema, embora a escala de tempo adotada não seja suficiente para garantir isso. Mas os resultados aqui encontrados restringem a área a ser considerada em uma futura investigação neste sentido. Por outro lado, mostrou-se que as regiões instáveis ocorrem em sua grande maioria em curto período de tempo (2 anos), e portanto estas são regiões com menores probabilidades de se encontrar detritos. Pensando em termos de missão, esta seria uma região a ser investigada, com o intuito de se encontrar conjuntos de condições iniciais que são estáveis por um tempo menor que 2 anos, mas suficiente para cumprir a missão (6 meses, por exemplo).

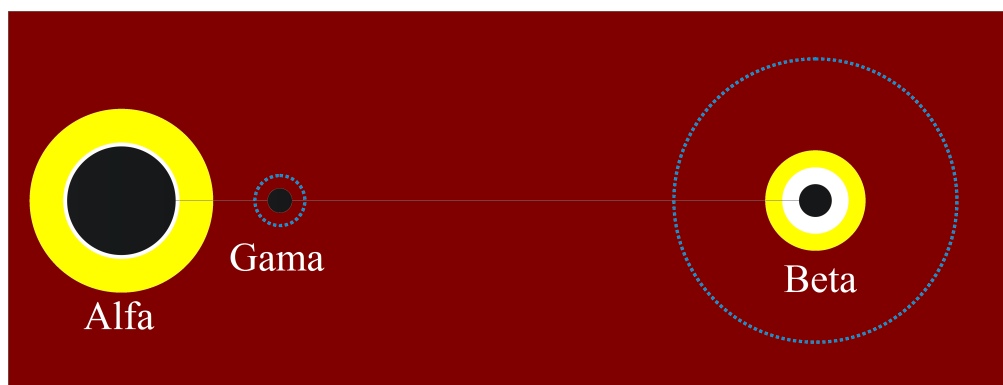


Figura 9.4 - Representação das regiões de estabilidade (em amarelo) e instabilidade (em vermelho) no sistema triplo de asteróides 2001 SN263, para partículas com excentricidade e inclinação nula, pelo período de 2000 anos.





## 10 CONCLUSÕES

Neste capítulo, é apresentada uma visão geral dos principais resultados obtidos com a realização do trabalho, bem como a sugestão de possíveis trabalhos futuros.

Neste trabalho foi estudada a dinâmica orbital e a estabilidade do sistema triplo de asteróides 2001 SN263. No estudo sobre a dinâmica orbital foram analisados dois casos, quando apenas a perturbação mútua (problema de 3 corpos) foi considerada e quando considerou-se perturbações externas no sistema (problema de 7 corpos), os principais resultados foram:

- A interação mútua leva a uma variação periódica de semi-eixo maior e excentricidade. Os argumentos do pericentro, bem como as longitudes do nodo ascendente dos satélites circulam. As inclinações sofrem pequenas variações, menores que  $1^\circ$  para ambos satélites.
- Em relação á órbita heliocêntrica do sistema, mostrou-se que ela tem uma evolução caótica em semi-eixo maior e excentricidade (típica dos NEAs). Tal comportamento é causado pelos encontros próximos do sistema com os planetas Terra e Marte, que acontecem quando o sistema 2001 SN263 transita do grupo Amor para o grupo Apolo.
- Ao longo de 100.000 anos foi registrada apenas uma passagem do sistema pelo raio de Hill da Terra. Por ser o corpo mais afastado do sistema, o asteróide Beta foi o mais afetado pelo encontro. Neste período não ocorreram encontros suficientes para comprometer a integridade dos sistema (colisões entre os corpos, ou escapes, por exemplo).

O estudo da estabilidade do sistema foi dividido em dois tópicos: o estudo da estabilidade para as regiões interna e externa do sistema. Para cada uma destas regiões foram analisados os casos plano, prógrado e retrógrado. Para o caso plano na região interna foi mostrado que:

- A região estável na região 1 é encontrada na vizinhança de Alfa, e a região instável fica na vizinhança de Gama (devido à colisões com este corpo). Para altas excentricidades as partículas passam a colidir com Alfa, causando instabilidade na região.

- Na região 1 as colisões prevalecem. Por estarem em uma região entre dois corpos, poucas são as partículas que conseguem escapar.
- Na região 2 a estabilidade aparece para valores específicos de semi-eixo maior. Mostrou-se que esta é uma região em que se localizam ressonâncias com as asteróides satélites. Duas dessas ressonâncias foram identificadas: ressonância 1:3 com Gama e 3:1 com Beta. Partículas nesta vizinhança sofrem os efeitos destas ressonâncias tornando a região instável.
- Similar ao que acontece na região 1, na região 3 a região estável se localiza em uma faixa específica na vizinhança de Beta. Nesta região prevalecem os escapes.

O estudo da estabilidade para os casos prógrados nas regiões internas do sistema, mostrou que:

- Para as três regiões, as regiões estáveis encontradas para o caso plano são significativamente diminuídas, ou completamente desaparecem, para inclinações  $I \geq 60,0^\circ$ , consequência do efeito do mecanismo de Kozai que passa a atuar quando as partículas atingem a inclinação relativa crítica.
- Na região 1, as partículas com  $a = 1,8$  km estão em uma ressonância com 3:1 com Gama. Os efeitos desta ressonância são observados para valores de inclinação de aproximadamente  $15^\circ$ . Com esta inclinação as partículas estão aproximadamente no mesmo plano de Gama, aumentando a probabilidade de colisões, dando origem à instabilidade observada.
- A região 2 apresenta pouca diferença com o aumento da inclinação das partículas. Os efeitos da ressonância identificada para o caso plano ainda são observados. Para inclinações acima de  $30,0^\circ$  não são mais encontradas regiões estáveis.
- A região estável na região 3 permanece praticamente a mesma conforme a inclinação aumenta, até o valor crítico  $I = 60,0^\circ$ , quando a região se torna completamente instável.

O estudo da estabilidade para os casos retrógrados nas regiões internas do sistema, mostrou que:

- Nas três regiões internas, os efeitos devido à ação do mecanismo de Kozai são observados até o valor crítico de inclinação  $I = 135,0^\circ$ , o que é um valor razoável, já que a teoria prevê um valor crítico de inclinação igual a  $I = 141,0^\circ$  para casos retrógrados.
- Nas três regiões internas, para inclinações além do valor crítico, as regiões estáveis encontradas para o caso retrógrados são significativamente maiores que as regiões encontradas para os casos prógrados. Para baixas excentricidades, a região 1 se mostrou estável praticamente em toda a região. A instabilidade aparece para condições iniciais bem próximas dos limites da região. O mesmo se observa para as regiões 2 e 3.
- Na região 1, foi verificado que as partículas com  $a \approx 2,4$  km estão em uma ressonância 2:1 com Gama, criando uma lacuna onde as partículas não sobrevivem (instabilidade).

Com a estabilidade na região interna do sistema 2001 SN263 devidamente caracterizada, deu-se início o estudo sobre a estabilidade da região externa ao sistema, para os casos plano, prógrado e retrógrado, a partir do qual se verificou que:

- A região externa é predominantemente estável. A instabilidade aparece apenas nas proximidades dos limites da região.
- A variação da inclinação não afeta as regiões estáveis, tanto para os casos plano, prógrados e retrógrados.
- Para os casos retrógrados, o limite de escape foi aumentado, mas mesmo assim, não foram encontradas regiões estáveis para distâncias maiores que 0,7 raios de Hill do sistema.

Para finalizar o trabalho, foi feita uma análise da estabilidade em longo período nas regiões internas do sistema 2001 SN263 considerando o caso circular e plano, de modo a capturar os efeitos das perturbações seculares sofridas pelo sistema. Com a realização deste estudo verificou-se que:

- A região estável encontrada na região 1 para o período de 2 anos foi ligeiramente diminuída em 2000 anos. As partículas mais externas da região

(mais próximas de Gama) são completamente removidas no intervalo de 592 anos.

- As regiões estáveis encontradas na região 2 para o período de dois anos desaparecem em longo período. Isto era esperado, já que esta era uma região tênue e sujeita aos efeitos das ressonâncias com os asteróides satélites.
- A região de estabilidade encontrada na região 3, pelo período de 2 anos, permanece a mesma para 2000 anos (nenhuma colisão ou escape).
- Mostra-se que o sistema tem uma rápida dispersão de partículas, isto é, as colisões e escapes acontecem logo nos primeiros anos.

Com estes resultados concluí-se o presente trabalho, com a sugestão de possíveis trabalhos futuros, como por exemplo:

- Com relação à dinâmica do sistema, estudar o efeito dos encontros próximos com a Terra e com Marte nas órbitas dos asteróides satélites, estimando o número de encontros para um intervalo longo de tempo, e depois reproduzir estes encontros para um conjunto de condições iniciais dos satélites (encontros em diferentes condições), e com isso estimar o tempo de vida do sistema.
- Estender o estudo da estabilidade em longo período para outros casos, além do plano e circular.
- Pensando na missão Aster, torna-se interessante analisar as “regiões intermediárias”, isto é, regiões que foram classificadas como não estáveis pelo período de 2 anos, mas que podem ser estáveis por um período menor, 6 meses por exemplo. O interesse neste tipo de análise está no fato de que têm-se a informação de que a sonda sobreviveria por este curto período nesta região, mas, por outro lado, é uma região com menos probabilidade de se encontrar detritos, já que se torna instável em aproximadamente 2 anos.

Estes são alguns exemplos do que pode ser feito para explorar ainda mais o tema a respeito do sistema triplo 2001 SN263, além do apresentado nesta tese.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGNOLON, D. **NEA SR TRS mission analysis annex**. Noordwijk, 2007. 28p. Technical report. Disponível em: <[sci.esa.int/science-e/www/object/doc.cfm?fobjectid=41066](http://sci.esa.int/science-e/www/object/doc.cfm?fobjectid=41066)>. Acesso em: 13 nov. 2010. 7
- ANDERS, E. ARNOLD, J.R. Age of craters on Mars. **Science**, v.149, p. 1494-1496, 1965. 5
- BECKER, T. M.; NOLAN, M.; HOWELL, E.; MAGRI, C. Physical modeling of triple Near-Earth Asteroid 153591 (2001 SN263). **Bulletin of the American Astronomical Society**, v. 41, p. 190, 2009. 10
- BOTTKE, W.F. Binary asteroids and the formation of doublet craters. **ICARUS**, v.124, p. 372–391, 1996. 5
- D'ARRIGO, P. **The ISHTAR mission executive summary for publication on ESA Web Pages**. Madrid, 2003. 8p. Technical report. Disponível em: <[http://www.esa.int/gsp/completed/neo/ishtar\\_execsum.pdf](http://www.esa.int/gsp/completed/neo/ishtar_execsum.pdf)>. Acesso em: 13 nov. 2010. 7
- DOMINGOS, R. C.; WINTER, O. C.; YOKOYAMA, T. Stable satellites around extrasolar giant planets. **MNRAS**, v.373, n.3, p.1227-1234, 2006. 77
- EVERHART, E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In dynamics of comets: their origin and evolution. **Proceedings of IAU Colloquium 83**, v.115, p.185, 1985. 13
- FANG, J., MARGOT, J.L, BROZOVIC, M., NOLAN, M.C., BENNER, L A. M., TAYLOR, P. A. Orbits of Near-Earth Asteroid Triples 2001 SN263 AND 1994 CC: properties, origin, and evolution. **The Astronomical Journal**, v.141, n. 5, p.141-154 , 2010. xxi, 6, 10, 13, 20
- GALVEZ, A; MILANI, A.; VALSECHI, G.; Paolo PAOLICCHI, P.; LOGNONNÉ, P.; BENZ, W; FOERSTNER, R.; BELLO, M.; GONZALEZ, J. A. **Near Earth Objects space mission preparation: Don Quijote mission executive summary**. Madrid, 2003. 9p. Technical report. Disponível em: <[www.esa.int/gsp/completed/neo/donquijote\\_execsum.pdf](http://www.esa.int/gsp/completed/neo/donquijote_execsum.pdf)>. Acesso em: 13 nov. 2010. 7

GLADMAN, B.; MICHEL, P.; FROESCHLÉ, C. The Near-Earth Object population. **ICARUS**, v.146, n.1, p.176-189, 2000. 4

KOZAI, Y. Secular perturbation of asteroids with high inclination and eccentricity. **The astronomical journal.**, v.67, n.9, p.591-598, 1962. 54, 59, 62

MARCHIS, F.; P. DESCAMPS, P.; D. HESTROFFER, D.; BERTHIER, J.; VACHIER, F.; BOCCALETTI, A.; PATER, I.; GAVEL. D. A three-dimensional solution for the orbit of the asteroidal satellite of 22 Kalliope. **ICARUS**, v.165, p. 112-120, 2003.

MARCHIS, F., LAINEY, V., DESCAMPS, P., BERTHIER, J., VAN DAM, M., PATER, I., MACOMBER, B., BAEK, M., LE MIGNANT, D., HAMMEL, H.B., SHOWALTER, M. **A dynamical solution of the triple asteroid system (45) Eugenia**, v.210, n.2, p.635-643, 2010. 101

MORBIDELLI, A.; BOTTKÉ, W. F. Jr.; FROESCHLÉ, Ch.; MICHEL, P. Origin and evolution of Near-Earth Objects. **Asteroids III**, p.409-422 , 2002. 5

MURRAY, D.C.; DERMOTT, S.F. **Solar system dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1999. 19, 26, 32, 43, 77, 103

Near-Earth asteroids - Binary. 2011. Disponível em:

<<http://echo.jpl.nasa.gov/~lance/binary.neas.html>>. Acesso em: 26 de setembro de 2011. 5

Near-Earth asteroids. 2010. Disponível em:

<[http://ase.tufts.edu/cosmos/view\\_picture.asp?id=742](http://ase.tufts.edu/cosmos/view_picture.asp?id=742)>. Acesso em: 01 novembro 2010.

Near-Earth Asteroid Discovery Statistics. Disponível em:

<<http://neo.jpl.nasa.gov/stats/>>. Acesso em: 26 setembro 2011. 3

JPL's HORIZONS system. Disponível em:

<<http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>>. Acesso em: 16 novembro 2011. 13

WELLS, N. **SIMONE NEO mission study executive summary**. Hampshire, 2003. 11p. Technical report. Disponível em:

<[http://www.esa.int/gsp/completed/neo/simone\\_execsum.pdf](http://www.esa.int/gsp/completed/neo/simone_execsum.pdf)>. Acesso em: 13 nov. 2010. 7

NOLAN, M. C.; HOWELL, E. S.; BENNER, L.A. M.; OSTRO, S. J; GIORGINI, J. D.; BUSCH, M. W; CARTER, L. M.; ANDERSON, R. F; MAGRI, C.; CAMPBELL, D. B.; MARGOT, J. L.; VERVACK, R. J.; SHEPARD, M. K. Arecibo radar imaging of 2001 SN263: a Near-Earth triple asteroid system. **Asteroids, Comets, Meteors**, n.8257,2008. 5, 9

OPIK,E.J. The survival of comets and comet material. **Astronomical Journal**, v.66, p.381-382 , 1961. 5

OPIK,E.J. The stray bodies in the solar system. Part I. Survival of comet nuclei and the asteroids. **Advan. Astron. Astrophys**, v.2, p.219-262, 1963.

ROY, A.E. **Orbital motion**. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1988. 101

SEARS, D.; ALLEN, C.; Dan BRITT, D.; Don BROWNLEE, D.; FRANZEN, M.; GEFERT, L.; GOROVAN, S.; PIETERS, C.; PREBLE,J.; SCHEERES, D.; SCOTT, E. The Hera mission: multiple near-earth asteroid sample return. **Advances in space research**, v. 34, p. 2270–2275, 2004. 8

SUKHANOV, A. A., The Aster project: flight to a Near-Earth Asteroid. **Cosmic Research**, v.48, n.5, p. 443-450 , 2010. 1

YOSHIKAWA, M.; YANO, H.; KAWAGUCHI, J.; FUJIWARA, A.; ABE, M.; IWATA, T.; KAWAKATSU, Y.; Tanaka, S.; MORI, O.; YOSHIMITSU, T.; TAKAGI, Y.; DERMURA, H.; NOGUCHI, T.; MIYAMOTO, H. Technologies for future asteroid exploration: What we learned from hayabusa mission. **Spacecraft Reconnaissance of Asteroid and Comet Interiors**, n.3038,2006. 7





## APÊNDICE A - O PROBLEMA DE N-CORPOS.

A descrição a seguir é baseada em (Roy, 1988)

Considerando um sistema formado por N-corpos com massas  $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$ , e um sistema de referência inercial XYZ com origem O. Seja  $\vec{r}_i$  o raio-vetor da i-ésima partícula em relação ao referencial OXYZ, e  $\vec{r}_j$  o raio-vetor da j-ésima partícula, então:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad (\text{A.1})$$

sendo  $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$ .

Das leis de movimento de Newton e da lei de gravitação, têm-se que:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.2})$$

Quando um dos corpos possui massa muito superior ao demais corpos, é conveniente introduzir a um sistema com origem neste corpo mais massivo. Seja  $M_0$  o corpo de maior massa, e seja  $r'_i$  e  $r'_j$  os vetores posição dos corpos  $M_i$  e  $M_j$  em relação a  $M_0$ . Sob estas condições demonstra-se que a equação do movimento tem a forma:

$$\ddot{r}'_i = -G(m_i + m_0) \frac{\vec{r}'_i}{r_i'^3} + G \sum_{j=1}^{N-1} m_j \left( \frac{\vec{r}'_j - \vec{r}'_i}{r_{ij}'^3} - \frac{\vec{r}'_j}{r_j'^3} \right) \quad (j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.3})$$

Numa forma mais geral, a equação do movimento é escrita como (MARCHIS et al., 2010)::

$$\ddot{\vec{r}}'_i = -G(m_i + m_0) \frac{\vec{r}'_i}{r_i'^3} + G \sum_{j=1}^{N-1} m_j \left( \frac{\vec{r}'_j - \vec{r}'_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}'_j}{r_j'^3} \right) + G(m_i + m_0) \nabla_i U_{i0} \quad (\text{A.4})$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} G m_j \nabla_j U_{j0} ; \quad (j \neq i)$$

em que  $U_{k0}$  introduz o componente devido ao achatamento do corpo central na posição  $r_k$ , sendo:

$$U_{k0} = -\frac{1}{r_k} \left( \frac{R_{eq}}{r_k} \right)^2 \frac{J_2}{2} (3 \sin^2 \theta_k - 1) \quad (\text{A.5})$$

onde  $r_k$ ,  $\theta_k$  e  $\lambda_k$  são as coordenadas esférica em um sistema de referência equatorial ( $\theta_k$  é a longitude),  $G$  é a constante gravitacional, e  $R_{eq}$  é o raio do corpo central.

## APÊNDICE B - PERTURBAÇÃO SECULAR: TAXAS DE PRECESSÃO DE $\Omega$ E $\omega$ .

Neste apêndice é apresentada, de forma sucinta, as variações seculares de  $\varpi$  e  $\Omega$  devido à perturbação devido ao terceiro corpo, a qual se baseia em [Murray e Dermott \(1999\)](#).

Considera-se um sistema composto pelo corpo central, de massa  $m_c$ , e por dois corpos de massa  $m_1 \ll m_c$ , e  $m_2 \ll m_c$ , orbitando o corpo central, que se perturbam mutuamente.

Na ausência de comensurabilidades de movimento médio, a perturbação secular devido à interação gravitacional entre os três corpos é determinada isolando os termos da função perturbadora  $R$ , que são independentes da longitude média, bem como os termos que dependem apenas dos semi-eixo maiores.

Demonstra-se ([Murray e Dermott, 1999](#)) que as funções perturbadores para o corpo 1 e 2 podem ser combinadas de modo que:

$$R_j = n_j a_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + B_{jk} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right] \quad (\text{B.1})$$

em que,  $j = 1, 2$ ;  $k = 2, 1$  com  $j \neq k$ . Nesta equação,  $A_{jj}$ ,  $A_{jk}$ ,  $B_{jj}$  e  $B_{jk}$  são coeficientes calculados em função do movimento médio do corpo  $j$ , das massas dos três corpos considerados, e do coeficiente de Laplace  $\alpha_{12}$ .

A partir das conhecidas equações de Lagrange, é possível derivar uma forma aproximada para a variação no tempo dos elementos orbitais, sendo, para a longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e para o argumento do pericentro ( $\omega$ ):

$$\dot{\varpi}_j = + \frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial R_j}{\partial e_j}, \quad \dot{\Omega}_j = + \frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \frac{\partial R_j}{\partial I_j} \quad (\text{B.2})$$

Torna-se conveniente introduzir um novo conjunto de variáveis, de modo a evitar a

singularidade nas equações B.2, para baixos valores de excentricidade e inclinação. Define-se então:

$$h_j = e_j \text{sen} \varpi_j \qquad k_j = e_j \text{cos} \varpi_j \qquad (\text{B.3})$$

$$p_j = I_j \text{sen} \Omega_j \qquad q_j = I_j \text{cos} \Omega_j \qquad (\text{B.4})$$

Nestas variáveis, a parte secular da função perturbadora, dada em B.1, é escrita como:

$$R_j = n_j a_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (h_j h_k + k_j k_k) + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right] \qquad (\text{B.5})$$