



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25-PUD

## SATÉLITES ARTIFICIAIS - MOVIMENTO ORBITAL

Hélio Koiti Kuga  
Valdemir Carrara  
Kondapalli Rama Rao

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3ARJ3NH>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr<sup>a</sup> Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Deicy Farabello - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25-PUD

## SATÉLITES ARTIFICIAIS - MOVIMENTO ORBITAL

Hélio Koiti Kuga  
Valdemir Carrara  
Kondapalli Rama Rao

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3ARJ3NH>>

INPE  
São José dos Campos  
2011



## **RESUMO**

Este trabalho foi preparado visando fornecer um suporte didático e acadêmico à disciplina de Satélites Artificiais – Movimento Orbital, do curso de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais, modalidade Mecânica Espacial e Controle. Ela foi escrita e atualizada diversas vezes por diferentes colaboradores. Na versão atual deu-se especial atenção aos efeitos perturbadores que agem nas órbitas baixas de satélites terrestres, como o arrasto atmosférico, pressão de radiação e distorções gravitacionais, entre outros. A modelagem apresentada aqui irá permitir ao estudante compreender o fenômeno físico, bem como implementar computacionalmente estes modelos para uma eventual simulação do movimento orbital. O assunto exposto neste documento é vasto, e de forma alguma a sua totalidade é abordada aqui. Espera-se, no futuro, incorporar outros efeitos perturbadores, e incluir modelos mais recentes e mais precisos daqueles já conhecidos.



## **ARTIFICIAL SATELLITES – ORBITAL MOTION**

### **ABSTRACT**

This work was written to support the academic activities of the Artificial Satellites – Orbital Motion class, for the MSc Space Engineering and Technology degree, Space Mechanics and Control option. It has been updated several times by different collaborators. This version received inclusions in the environmental orbital perturbations acting on low Earth orbits, as, for instance, the atmospheric drag, the solar radiation pressure and Earth's gravity field, among others. The mathematical model of perturbations was included in order to allow the student to understand the physical principle acting on the orbit, as well as to allow him to implement it on a computer to perform orbit simulation or propagation. The knowledge area of the orbital motion is large, so this document can't cover it totally. However, it is expected that, in future, several other orbital disturbances can be included here, together with updated and more precise models.





## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 FORÇAS DE ORIGEM GRAVITACIONAL .....	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Expressão para o Geopotencial .....	4
2.3 Representação dos Harmônicos Esféricos.....	6
2.4 Potencial Gravitacional Terrestre .....	16
2.5 Fórmulas Recursivas para Cálculo do Geopotencial.....	18
2.6 Normalização de Coeficientes e Polinômios .....	19
2.7 Representação Convencional.....	21
2.8 Representação Uniforme .....	23
2.9 Problemas .....	24
3 FORÇAS PERTURBADORAS .....	27
3.1 Introdução.....	27
3.2 Força Gravitacional Devida ao Potencial do Corpo .....	27
3.2.1 Efeito Devido à Não-Esfericidade da Terra .....	34
3.3 Atração gravitacional do Sol e da Lua .....	35
3.3.1 Efeito da Atração Gravitacional do Sol e Lua.....	36
3.4 Forças de Marés Devidas à Lua e ao Sol.....	36
3.5 Força de Arrasto .....	38
3.5.1 Relação área-sobre-massa.....	40
3.5.2 O coeficiente de arrasto .....	41
3.5.3 Densidade atmosférica.....	45
3.5.4 Modelos atmosféricos.....	51
3.6 Forças de Pressão de Radiação Solar .....	52
3.6.1 Coeficiente de pressão de radiação.....	54
3.7 Albedo e radiação terrestre .....	60
3.8 Equação Geral das Forças que Atuam no Satélite .....	61
3.9 Problemas .....	62
4 MÉTODOS ANALÍTICOS DE PERTURBAÇÃO .....	63
4.1 Introdução.....	63
4.2 Método de Brouwer .....	63
4.3 Método de Von Zeipel.....	67
5 MÉTODOS SEMI-ANALÍTICOS DE PERTURBAÇÃO .....	69
5.1 Introdução.....	69
5.2 Equações de Movimento .....	69
5.3 Forças Perturbadoras .....	71
5.3.1 A Função Potencial Gravitacional da Terra .....	71
5.3.2 O Arrasto Atmosférico .....	71
5.3.3 A Função Gravitacional de Outros Corpos .....	72

5.4	Métodos de Solução: Método de Médias .....	72
	APÊNDICE A – TABELAS DE POLINÔMIOS DE LEGENDRE .....	81
	APÊNDICE B –FLUXO SOLAR E ATIVIDADE GEOMAGNÉTICA.....	87
B.1	– Fluxo Solar.....	87
B.2	– Atividade geomagnética .....	87
B.3	– Número de manchas solares.....	87
B.4	– Arquivo de dados .....	88

## 1 INTRODUÇÃO

Os satélites artificiais terrestres são empregados em diversas atividades, entre elas a observação da Terra, o monitoramento do clima, o estudo da atmosfera e do campo magnético terrestre, e também como elo em telecomunicações. Todas estas atividades requerem que se tenha uma supervisão do satélite após ter sido lançado. É através desta comunicação estabelecida entre uma base de apoio e o satélite que se pode saber como está o funcionamento dos equipamentos de bordo. A forma de comunicação baseia-se na transmissão e recepção de códigos, chamado de telemetria e telecomando, que os equipamentos do satélite entendem e interpretam corretamente. Para que possam funcionar, contudo, necessitam de energia elétrica, suprida por baterias ou por geração em painéis fotovoltaicos. As baterias podem suprir uma grande quantidade limitada de energia, por isso somente são empregadas em conjunto com os painéis, para armazenar a energia excedente. Por sua vez, os painéis apresentam baixo rendimento de conversão, e para alimentar um simples ferro de passar roupa seria necessário um painel de 4 por 6 metros. Considerando ainda o custo elevado das células solares, resta a solução de transmitir sinais para o satélite com a máxima potência (para que não seja necessário amplificar muito o sinal) e transmitir do satélite com a mínima potência, o que obriga ao receptor em Terra a possuir um ganho elevado. Isto implica em utilizar antenas parabólicas de grande diâmetro e alta potência, que precisam ser apontadas com grande precisão para a posição do satélite e acompanhar seu movimento em órbita, já que um erro de apenas 0.5 grau no apontamento dessas antenas pode fazer com que o sinal já não seja recebido. Como consequência, a órbita deve ser conhecida com grande precisão, para que, a cada instante, a posição do satélite possa ser prevista e assim evitar perdas de comunicação. Conclui-se, portanto, que o conhecimento do comportamento da órbita é vital para o sucesso da missão.

O movimento em órbita dos satélites artificiais terrestres resulta numa elipse de tamanho e excentricidade constantes num plano fixo. Caso o movimento orbital não fosse perturbado, o satélite permaneceria nessa órbita indefinidamente. Entre os principais efeitos que fazem com que a órbita altere-se com o tempo estão a não homogeneidade da massa da Terra, além do seu achatamento, e também efeitos decorrentes do arrasto atmosférico e perturbações gravitacionais de outros corpos, notadamente da Lua e do Sol.

As perturbações decorrentes da não-esfericidade do campo gravitacional terrestre serão estudadas no próximo capítulo deste curso. Cabe salientar, entretanto, que o modelo do campo gravitacional terrestre não era bem conhecido na época do lançamento do primeiro satélite artificial, em 1957. Era razoavelmente conhecido somente o coeficiente do harmônico esférico de grau 2, que caracteriza o achatamento dos pólos da Terra. Os primeiros aprimoramentos no modelo do potencial consideravam uma distribuição de massa simétrica e uniforme em relação ao eixo de rotação da Terra, e com isso tornou-se possível calcular os coeficientes de grau 4 e 6. A este modelo foi adicionada uma força de arrasto com a densidade puramente dependente da altitude que provocava um decaimento exponencial na altitude da órbita. Modelos desse tipo conduziam a erros da

ordem de 5 a 10 km na determinação da posição do satélite, ou seja, um erro angular da ordem de  $0,05^\circ$ .

No decorrer de tempo, observações realizadas nas órbitas dos satélites artificiais possibilitaram o cálculo de novos coeficientes do campo gravitacional e o melhoramento do modelo de arrasto. Também foram introduzidas perturbações devidas à atração do Sol e da Lua, à pressão radiação solar, etc. Os modelos mais sofisticados existentes atualmente levam em conta forças de marés terrestres, atração do Sol e da Lua, utilizam um grande número de coeficientes para o campo gravitacional terrestre, e usam integradores de boa precisão numérica. Com estes efeitos incluídos, os erros ficam da ordem de apenas alguns centímetros. O 3º capítulo deste curso apresenta alguns modelos matemáticos para as forças perturbadoras que atuam nos satélites.

O 4º capítulo trata dos métodos analíticos clássicos de análise e propagação de órbita, e o 5º capítulo explica os métodos semi-analíticos de propagação orbital incluindo alguns efeitos de perturbação. Finalmente, no 6º capítulo são descritos os métodos numéricos existentes.

## 2 FORÇAS DE ORIGEM GRAVITACIONAL

Um satélite ao redor da Terra fica sujeito a diversas forças, das quais a força predominante é de origem gravitacional. Se a Terra fosse perfeitamente esférica e homogênea a órbita resultante seria uma elipse. Porém, devido a diferenças na homogeneidade de distribuição de massa e também à forma não esférica da Terra, a forma da órbita irá apresentar deformações com relação à elipse. Neste capítulo será apresentada a formulação que permite descrever o potencial gravitacional para um corpo não esférico ou não homogêneo.

### 2.1 Introdução

Pela lei gravitacional de Newton, um corpo pontual de massa  $m$  é atraído pela massa  $M$  por uma força dada por:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

onde  $G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$  é a constante gravitacional universal e  $r$  é a distância entre as duas massas. A força gravitacional é atrativa, e atua na direção do raio vetor unitário  $\hat{\mathbf{r}}$  entre as duas massas. O potencial correspondente criado pela massa  $M$  é dado por:

$$U = \frac{GM}{r}. \quad (2.2)$$

A força, agora, pode ser expressa na forma de um gradiente do potencial, ou seja:

$$\mathbf{F} = m \frac{\delta U}{\delta r} = m \nabla U. \quad (2.3)$$

Esta definição é mais antiga do que a da energia potencial e os astrônomos usaram esta definição sem conhecer o significado da energia potencial (Baker et al.). Posteriormente perceberam que  $U$  é proporcional ao negativo da energia potencial para uma massa unitária.  $U$  também é chamado potencial de força. Portanto, sendo  $V$  a energia potencial, na astronomia e na mecânica celeste é comum usar-se:

$$V = -U = -\frac{GM}{r} \quad (2.4)$$

Quando se trata de uma distribuição de massa atraindo uma partícula, deve-se considerar a atração que cada elemento de massa de distribuição  $dM$  ( $= \rho dV$ ) exerce

sobre a massa de prova, e assim o potencial total de atração da distribuição sobre a partícula pode ser dada por (veja-se a Figura 2.1):

$$U = G \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad (2.5)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $dV$  é um pequeno diferencial de volume. A integral deve ser realizada sobre todo o volume do corpo de massa  $M$ . A distância  $r$  que posiciona o ponto  $P$  onde o potencial é calculado é obtida de:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}. \quad (2.6)$$

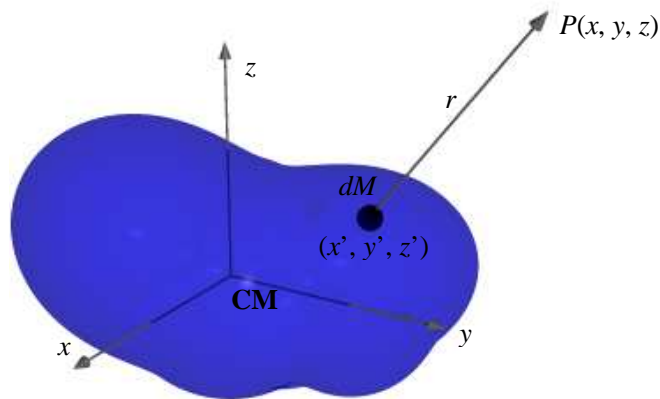


Figura 2.1 – Potencial gravitacional num ponto  $P$ , devido à ação da massa  $dM$ .

## 2.2 Expressão para o Geopotencial

Considere agora dois pontos  $P$  e  $P'$  dados pelas suas coordenadas esféricas  $P(r, \theta, \lambda)$  e  $P'(r', \theta', \lambda')$ , conforme mostrado na Figura 2.2, onde  $r$  é a distância à origem,  $\theta$  é a co-latitudo e  $\lambda$  é a longitude. O ângulo  $\psi$  entre os raios vetores de  $P$  e  $P'$  pode ser obtido diretamente do produto escalar entre os dois vetores, resultando:

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (2.7)$$

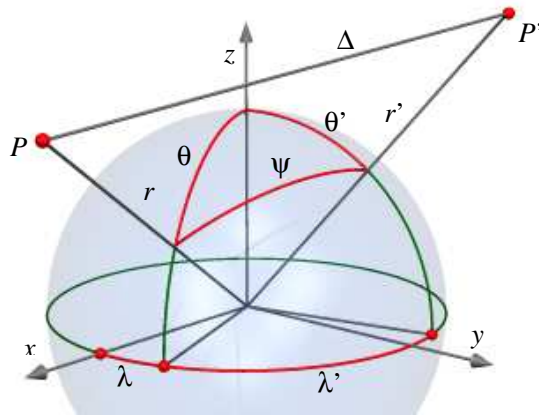


Figura 2.2 – Distância entre dois pontos  $P$  e  $P'$  em coordenadas esféricas.

A distância  $\Delta$  entre os dois pontos, por sua vez, é dada por:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi \quad (2.8)$$

onde  $\psi$  é o ângulo entre  $r$  e  $r'$ . Supondo-se  $r' < r$ , pode-se escrever:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \frac{r'^2}{r^2}}} \quad (2.9)$$

Desenvolvendo esta em série de potências em relação a  $\frac{r'}{r}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r} \left\{ P_0(\cos \psi) + \frac{r'}{r} P_1(\cos \psi) + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \psi) + \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \psi), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $P_n(\cos \psi)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$  são os polinômios de Legendre. Substituindo esta expressão no potencial de um elemento de massa  $dM$ , então  $U_{dM} = G/\Delta dM$ , obtém-se:

$$U_{dM} = \frac{G dM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \Psi) \quad (2.11)$$

O teorema da adição de Legendre diz que

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda') \quad (2.12)$$

onde  $\delta_{m0}$  é o delta de Kronecker e  $P_{nm}$  são polinômios associados de Legendre. Usando a Relação 2.10 com ângulos complementares  $\varphi$  e  $\varphi'$  de  $\theta$  e  $\theta'$ , a Equação 2.9 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} U_{dM} &= \frac{G dM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi') \cos m(\lambda - \lambda') = \\ &= f(r, \varphi, \lambda, r', \varphi', \lambda') \end{aligned} \quad (2.13)$$

Integrando a Expressão 2.11 em toda a distribuição de massa, obtém-se:

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (2.14)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{m0}) (n-m)!}{a_e^n M (n+m)!} \int_M r'^m P_{nm}(\sin \varphi') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dM \quad (2.15)$$

e com  $a_e$  sendo o semi-eixo equatorial do elipsóide da Terra,  $M$  a massa da Terra e  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  os coeficientes harmônicos esféricos. Note que uma série de Fourier apresenta uma representação de uma função num espaço retilíneo, enquanto que uma série de harmônicos esféricos representa uma distribuição sobre uma superfície esférica.

### 2.3 Representação dos Harmônicos Esféricos

O potencial gravitacional obedece à equação de Laplace, dada por  $\nabla^2 U = 0$  (Wertz, 1978) que pode ser expresso em termos de coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.16)$$



Se a solução desta equação for da forma  $U(r, \theta, \lambda) = R(r) Y(\theta, \lambda)$ , então a equação diferencial acima pode ser separada em duas:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1) R = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1) Y = 0 \quad (2.18)$$

onde  $n(n+1)$  é uma constante de separação. A solução da equação diferencial para  $R$  leva a:

$$R(r) = A r^n + B r^{-(n+1)}. \quad (2.19)$$

Os valores de  $A$  e  $B$  são determinados a partir da constatação de que  $A = 0$  representa a função do potencial fora do corpo, enquanto que  $B = 0$  representa o potencial no interior do corpo. Admitindo que o potencial na superfície (de raio  $a_e$ ) será dado pelo próprio valor de  $Y$ , então tem-se que  $A = 0$  e  $B = a_e^{n+1}$ . Logo a função  $R$  fica:

$$R(r) = \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1}. \quad (2.20)$$

Por sua vez, admite-se que  $Y(\theta, \lambda)$  também possa sofrer uma separação de variáveis, na forma:

$$Y(\theta, \lambda) = P(\cos \theta) \Lambda(\lambda) \quad (2.21)$$

Escolhendo uma constante de separação  $m^2$  e substituindo  $Y$  na equação diferencial, chega-se a duas novas equações:

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} + m^2 \Lambda = 0 \quad (2.23)$$

A solução desta última é encontrada facilmente resultando na série de funções:

$$\Lambda(\lambda) = C \cos m\lambda + S \sin m\lambda \quad (2.24)$$

A partir da análise desta solução, conclui-se que  $m$  deve necessariamente ser inteiro. Fazendo  $x = \cos\theta$ , a primeira equação fica:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (2.25)$$

cuja solução para  $m = 0$  resulta nos polinômios de Legendre, dados pela fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.26)$$

Quando  $m \neq 0$ , então a solução da equação diferencial resulta nas funções associadas de Legendre de ordem  $n$  e grau  $m$ , dados por:

$$P_{nm}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n \quad (2.27)$$

Pode-se também relacionar as funções associadas com os polinômios de Legendre, na forma:

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad (2.28)$$

A Tabela 2.1 fornece as expressões dos primeiros polinômios e funções associadas de Legendre

Tabela 2.1 - Polinômios e funções associadas de Legendre

$n$	0	1	2	3
$P_n(x)$	1	$x$	$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$
$P_{n1}(x)$	-	$-\sqrt{1-x^2}$	$-3x\sqrt{1-x^2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}(5x^2-1)$
$P_{n2}(x)$	-	-	$3(1-x^2)$	$15x(1-x^2)$
$P_{n3}(x)$	-	-	-	$-15(1-x^2)^{3/2}$

Os polinômios de Legendre e funções associadas até a ordem 10 podem ser vistos no Apêndice A.

A Figura 2.3 mostra os polinômios de Legendre de ordem ímpar (1, 3 e 5) e a Figura 2.4 mostra os polinômios de ordem par (2 e 4). Os ímpares satisfazem a condição  $P_{2k+1}(-1) = -1$ , enquanto que os pares obedecem a  $P_{2k}(-1) = 1$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Ambos assumem valores unitários em  $t = 1$  ( $P_n(1) = 1$ ). A Figura 2.5 ilustra as funções associadas de Legendre até a ordem 3.

Na expressão do potencial gravitacional o argumento dos polinômios e funções associadas é o seno da latitude  $\phi$ , mostrados na Tabela 2.2

Tabela 2.2 - Polinômios e funções associadas de Legendre em função da latitude  $\phi$

$n$	0	1	2	3
$P_n(\text{sen}\phi)$	1	$\text{sen } \phi$	$\frac{1}{4}(1 - 3\cos 2\phi)$	$\frac{1}{8}(3\text{sen } \phi - 5\text{sen } 3\phi)$
$P_{n1}(\text{sen}\phi)$	-	$\cos \phi$	$\frac{3}{2}\text{sen } 2\phi$	$\frac{3}{8}(\cos \phi - 5\cos 3\phi)$
$P_{n2}(\text{sen}\phi)$	-	-	$\frac{3}{2}(1 + \cos 2\phi)$	$\frac{15}{4}(\text{sen } \phi + \text{sen } 3\phi)$
$P_{n3}(\text{sen}\phi)$	-	-	-	$\frac{15}{4}(3\cos \phi + \cos 3\phi)$

Os harmônicos com  $m = 0$  são polinômios de grau  $n$  e assim possuem  $n$  zeros, que são reais e situados no intervalo  $-1 \leq t \leq 1$  ou  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Estes harmônicos mudam seu sinal  $n$  vezes neste intervalo e não dependem da longitude  $\lambda$ . Eles dividem a esfera em zonas e são chamados harmônicos zonais, como mostrado na Figura 2.6. As funções associadas mudam seu sinal  $n-m$  vezes no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . As funções  $\cos m\lambda$  têm  $2m$  zeros no intervalo  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ . Elas dividem a esfera em compartimentos nos quais o valor da função é alternadamente positivo e negativo, como mostrado na Figura 2.7, e são chamados como harmônicos tesserais (do latim 'tessera' que significa mosaico ou azulejo). Em particular, quando  $n = m$ , eles degeneram em funções que dividem a esfera em setores positivos e negativos, quando são chamados harmônicos setoriais, mostrados na Figura 2.8.

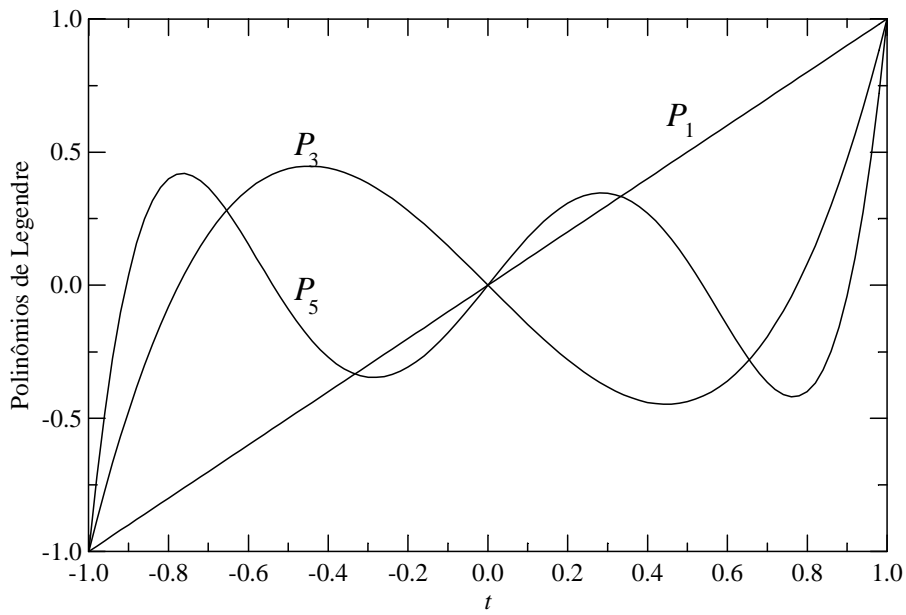


Figura 2.3 – Polinômios de Legendre de ordem ímpar.

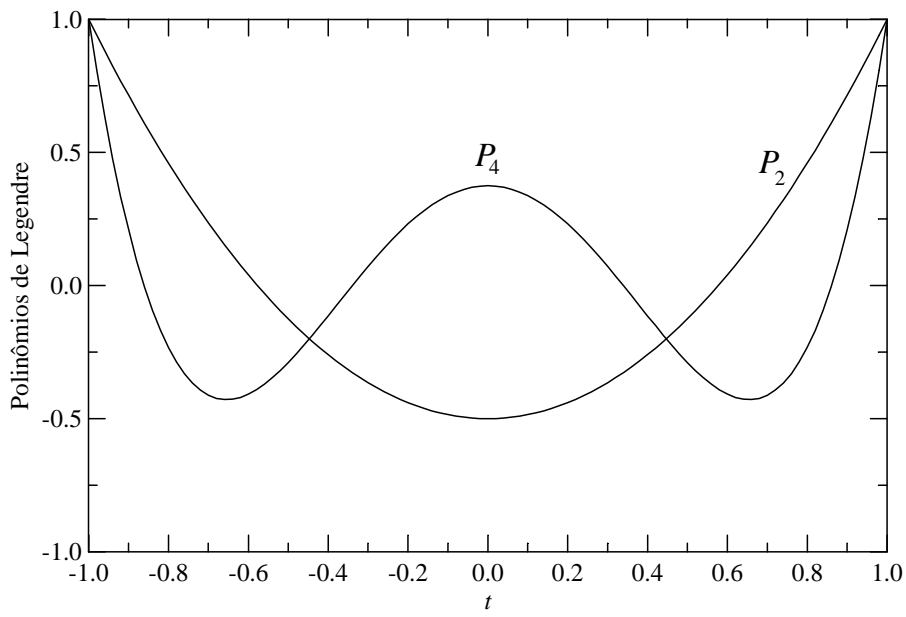


Figura 2.4 – Polinômios de Legendre de ordem par.

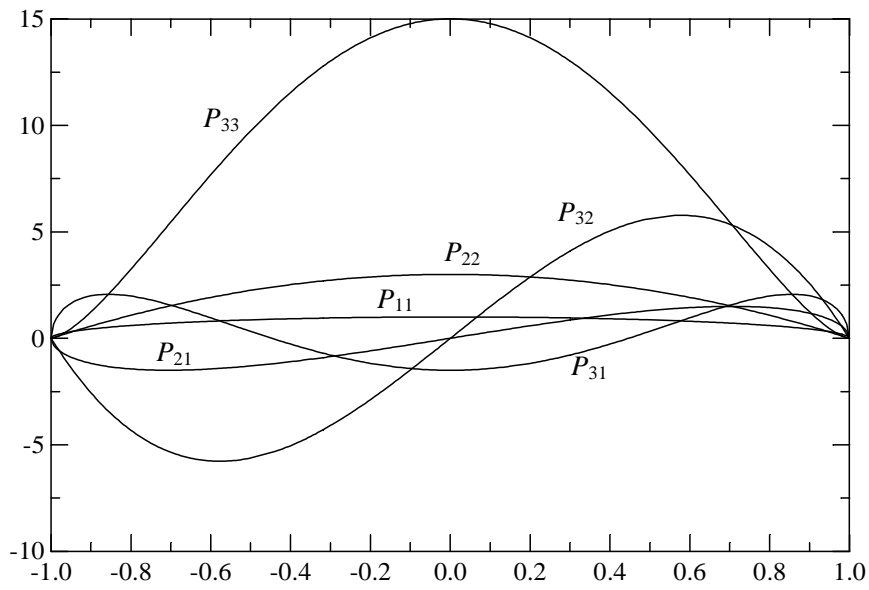


Figura 2.5 – Funções associadas de Legendre

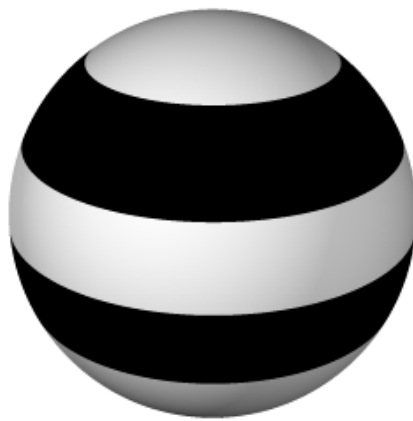


Figura 2.6 – Harmônicos zonais



Figura 2.7 – Harmônicos tesserais



Figura 2.8 – Harmônicos setoriais

As Tabelas 2.3 e 2.4 mostram figuras 3D em relevo dos polinômios e funções associadas de Legendre até a ordem 10. As figuras foram geradas com o aplicativo POV (The Persistence of Vision Raytracer, 2008), usando a forma normalizada dos polinômios (Seção 2.6), com coeficientes  $C_{nm} = 0.1$  e  $S_{nm} = 0$ .

Tabela 2.3 Polinômios e funções associadas de Legendre até a ordem 5

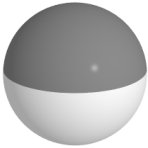
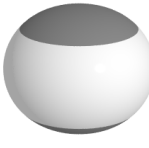
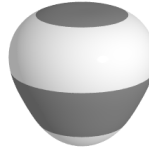

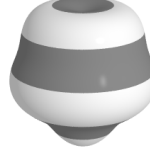

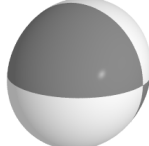

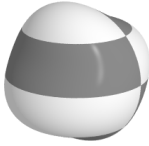













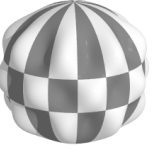



	$n = 1$	2	3	4	5
$m = 0$					
1					
2					
3					
4					
5					

Tabela 2.4 Polinômios e funções associadas de Legendre de ordem 5 até 10.

	$n = 6$	7	8	9	10
$m = 0$					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					



Tabela 2.3 Polinômios e funções associadas de Legendre de ordem 5 até 10 (cont.).

	$n = 6$	7	8	9	10
$m = 8$					
9					
10					

As Relações 2.29 e 2.30 fornecem o seno e o co-seno de um múltiplo do ângulo como um polinômio envolvendo o seno e co-seno deste ângulo, até a potência 10.

$$\begin{aligned}
 \sin 2a &= 2 \cos a \sin a \\
 \sin 3a &= (4 \cos^2 a - 1) \sin a \\
 \sin 4a &= (8 \cos^3 a - 4 \cos a) \sin a \\
 \sin 5a &= (16 \cos^4 a - 12 \cos^2 a + 1) \sin a \\
 \sin 6a &= (32 \cos^5 a - 32 \cos^3 a + 6 \cos a) \sin a \\
 \sin 7a &= (64 \cos^6 a - 80 \cos^4 a + 24 \cos^2 a - 1) \sin a \\
 \sin 8a &= (128 \cos^7 a - 192 \cos^5 a + 80 \cos^3 a - 8 \cos a) \sin a \\
 \sin 9a &= (256 \cos^8 a - 448 \cos^6 a + 240 \cos^4 a - 40 \cos^2 a + 1) \sin a \\
 \sin 10a &= (512 \cos^9 a - 1024 \cos^7 a + 672 \cos^5 a - 160 \cos^3 a + 10 \cos a) \sin a
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\
\cos 3a &= 4\cos^3 a - 3\cos a \\
\cos 4a &= 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 \\
\cos 5a &= 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a \\
\cos 6a &= 32\cos^6 a - 48\cos^4 a + 18\cos^2 a - 1 \\
\cos 7a &= 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a \\
\cos 8a &= 128\cos^8 a - 256\cos^6 a + 160\cos^4 a - 32\cos^2 a + 1 \\
\cos 9a &= 256\cos^9 a - 576\cos^7 a + 432\cos^5 a - 120\cos^3 a + 9\cos a \\
\cos 10a &= 512\cos^{10} a - 1280\cos^8 a + 1120\cos^6 a - 400\cos^4 a + 50\cos^2 a - 1
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Computacionalmente as relações em potências são mais eficientes do que o cálculo do múltiplo ângulo, em razão do fato de que o cálculo do seno ou co-seno é feito por meio de uma expansão em série de Taylor, o que envolve diversas somas e produtos para cada múltiplo do ângulo. Por sua vez, o cálculo em função de potências envolve apenas algumas somas e produtos, além de um único seno ou co-seno inicial. Sempre que possível deve-se, contudo, recorrer às relações de recorrência, que serão mostradas na Seção 2.5.

#### 2.4 Potencial Gravitacional Terrestre

A partir da análise dos resultados obtidos com a integração da Equação 2.13, em casos particulares, conclui-se que os coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  apresentam certas propriedades, apresentadas a seguir.

A primeira delas decorre do fato de que os termos de ordem  $n = m = 0$  descrevem o potencial gravitacional principal da Terra, pois  $C_{00} = 1$  e  $S_{00} = 0$ . Além disso, como a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa da Terra, então pode-se mostrar que  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = S_{00} = S_{no} = 0$ . Para provar esta afirmação, veja que os termos de ordem  $n = 1$  fazem com que a Terra possua uma elevação no pólo Norte e uma depressão no pólo Sul. Este efeito provoca um deslocamento do centro de massa da Terra, e, desde que o centro de massa é a própria origem do sistema, então os coeficientes  $C$  são nulos. Os coeficientes  $S$  devem também ser nulos, já que a função seno, por ser ímpar, provoca uma assimetria nos pólos nos termos zonais, isto é, sempre que em um deles for positivo o outro será negativo.

Pode-se mostrar também que se a matriz de inércia da Terra for dada por:

$$I_T = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

com relação ao sistema de eixos geocêntrico (eixo  $x$  passando pelo meridiano de Greenwich, no plano do equador, eixo  $z$  coincidente com o eixo de rotação, na direção do pólo norte) então os coeficientes  $C_{21}$  e  $S_{21}$  resultam:

$$C_{21} = \frac{E}{Ma_e^2} \quad (2.32)$$

$$S_{21} = \frac{F}{M a_e^2}. \quad (2.33)$$

Pelas propriedades da mecânica, sabe-se que um corpo girando no espaço tende a alinhar o eixo de rotação com o eixo de maior momento de inércia, desde que haja dissipação de energia das velocidades angulares transversais. Como a Terra não pode ser considerada totalmente sólida, então é natural supor que, neste caso, os produtos de inércia dados por  $D$ ,  $E$  e  $F$  sejam nulos. Pequenas perturbações introduzidas pela atração gravitacional do Sol e da Lua fazem, contudo, com que o eixo de rotação da Terra não esteja plenamente alinhado com os eixos principais de inércia, e assim os coeficientes  $C_{21}$  e  $S_{21}$  não resultam nulos, ainda que bastante pequenos. Além disso, o coeficiente setorial  $S_{22}$  é dado por:

$$S_{22} = \frac{D}{2a_e^2 M} \quad (2.34)$$

que resultaria nulo apenas se, por coincidência, o meridiano de Greenwich coincidissem com um dos eixos principais de inércia.

A Terra não é apenas achatada nos pólos: quando vista a partir do pólo norte a Terra apresenta também um pequeno achatamento no equador. Este achatamento reflete-se no coeficiente  $C_{22}$ , dado por:

$$C_{22} = \frac{1}{4a_e^2 M} (B - A), \quad (2.35)$$

cujo principal efeito é sentido nas órbitas dos satélites geoestacionários, que são continuamente levados para uma longitude sobre Sri Lanka (antigo Ceilão).

O efeito da distribuição não uniforme de massa devido ao achatamento dos pólos é refletido no coeficiente zonal  $C_{20}$ . Como, porém, este coeficiente zonal possui valores positivos nos pólos e negativo no equador (equivalente a um achatamento do equador), então seu valor numérico resulta negativo. De fato, assume-se que  $C_{20} = -J_2$ , onde  $J_2$  é

o coeficiente zonal devido ao achatamento ( $J_2 > 0$ ). Da mesma forma, o coeficiente zonal  $C_{30} = -J_3$  representa o efeito que atribui para a Terra uma forma de pera.

## 2.5 Fórmulas Recursivas para Cálculo do Geopotencial

Os polinômios e funções associadas de Legendre são definidos em termos de equações diferenciais cujas soluções são conhecidas. A integração destas equações, no entanto, dificulta a sua utilização em cálculos feitos com o computador. Porém são também bastante conhecidas fórmulas de recursão que permitem a obtenção dos polinômios e funções associadas de ordem  $n$  e grau  $m$  a partir dos polinômios (e funções) de ordem inferior. Pode-se mostrar que, no caso de polinômios zonais, as fórmulas de recursão são dadas por:

$$P_n = \frac{2n-1}{n} \operatorname{sen} \varphi P_{n-1} - \frac{n-1}{n} P_{n-2}. \quad (2.36)$$

que devem ser iniciados com  $P_0 = 1$  e  $P_1 = \operatorname{sen} \varphi$ .

No caso das funções associadas ( $m \neq 0$ ), e lembrando que  $m \leq n$ , tem-se os seguintes casos:

$$P_{n,n} = (2n-1) \cos \varphi P_{n-1,n-1}, \text{ se } m = n \text{ (setoriais)} \quad (2.37)$$

$$P_{n,m} = (2n-1) \operatorname{sen} \varphi P_{n-1,n-1}, \text{ se } m = n-1 \text{ (tesserais)} \quad (2.38)$$

e

$$P_{n,m} = \frac{2n-1}{n-m} \operatorname{sen} \varphi P_{n-1,m} - \frac{n+m-1}{n-m} P_{n-2,m}, \text{ se } m \leq n-2 \text{ (tesserais)} \quad (2.39)$$

Na aplicação das fórmulas de recursão, convém lembrar que, por definição,  $P_n = P_{n,0}$ , para  $m = 0$ .

Pode-se também aplicar fórmulas de recursão para funções trigonométricas, de forma a evitar a avaliação das séries  $\cos m\lambda$  e  $\operatorname{sen} m\lambda$ , na forma:

$$\cos m\lambda = \cos(m-1)\lambda \cos \lambda - \operatorname{sen}(m-1)\lambda \operatorname{sen} \lambda \quad (2.40)$$

$$\operatorname{sen} m\lambda = \operatorname{sen}(m-1)\lambda \cos \lambda + \cos(m-1)\lambda \operatorname{sen} \lambda \quad (2.41)$$

A fórmula de recursão para  $P_n(x)$  é

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad (2.42)$$

e para as funções associadas é

$$P_{n,m}(x) = \frac{2n-1}{n-m} x P_{n-1,m}(x) - \frac{n+m-1}{n-m} P_{n-2,m}(x) \quad (2.43)$$

## 2.6 Normalização de Coeficientes e Polinômios

O potencial gravitacional apresenta uma redução nos valores dos coeficientes  $C$  e  $S$  à medida que a ordem e o grau dos polinômios e funções associadas aumenta. Isto provoca erros de arredondamento quando calculados no computador, devido ao número de dígitos significativos ser limitado. Para minimizar esses efeitos, costuma-se utilizar os coeficientes na forma completamente normalizada  $\bar{C}$  e  $\bar{S}$ . A relação de normalização é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \left[ \frac{(n+m)!}{\epsilon_m (2n+1)(n-m)!} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

com

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 2 & \text{se } m \geq 1 \end{cases} \quad (2.45)$$

É comum distinguir-se os coeficientes  $C$  dos harmônicos esféricos de grau 0 e chamá-los de coeficientes zonais  $J_n$ . Lembrando que os coeficientes  $S_{n0}$  são todos nulos, então:

$$m = 0 \begin{cases} S_{n0} = \bar{S}_{n,0} = 0 \\ C_{n,0} = -\bar{J}_n \end{cases} \quad (2.46)$$

A presença do sinal negativo em  $J_n$  explica-se devido ao fato de que o coeficiente  $J_2$  resultaria negativo na expressão do potencial, devido ao formato da Terra. Decidiu-se, portanto, trocar o sinal de todos os coeficientes zonais  $J$ , para que o valor numérico de  $J_2$  resultasse positivo. Separando agora a normalização entre coeficientes zonais e tesserais, tem-se:

$$\bar{J}_n = \left( \frac{1}{2n+1} \right)^{1/2} J_n \quad (2.47)$$

e

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \left[ \frac{1}{4n+2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

A Tabela 2.5 apresenta alguns valores dos coeficientes zonais normalizados, do modelo do potencial terrestre GEM-09, e a Tabela 2.6 apresenta valores dos coeficientes tesserais.

Tabela 2.5 Coeficientes zonais normalizados (GEM-09)

$n$	$\bar{C}_{n0} = -\bar{J}_n$
1	0
2	$-484.16555 \cdot 10^{-6}$
3	$0.95848 \cdot 10^{-6}$

Tabela 2.6 Coeficientes tesserais normalizados (GEM-09)

$n$	$m$	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
1	1	0	0
2	1	-0,00021	-0,00406
2	2	2,4340	-1,39786
3	1	2,02826	0,25244
3	2	0,89198	-0,62241
3	3	0,70256	1,41140

A normalização dos polinômios é feita na forma inversa à dos coeficientes, e, portanto, os polinômios e as funções associadas normalizadas são dados por:

$$\bar{P}_n = (2n+1)^{1/2} P_n \quad (2.49)$$

$$\bar{P}_{nm} = \left[ (4n+2) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_{nm} \quad (2.50)$$

Os fatores de normalização até a ordem 6 são apresentados na Tabela 2.7

A Figura 2.9 mostra o geopotencial (superfície de mesmo potencial da Terra), subtraindo-se o segundo harmônico,  $J_2$ , pois este efeito é muito superior aos demais. Percebe-se que a Terra apresenta uma distribuição não totalmente uniforme de massa,

com predominância dos coeficientes associados ao terceiro harmônico. O potencial foi obtido a partir do modelo GEM10, com coeficientes zonais e tesserais até ordem 10.

Tabela 2.5 Fatores de normalização dos polinômios e funções associadas

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$m = 0$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	3	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$
$m = 1$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$	$3/\sqrt{10}$	$\sqrt{11/15}$	$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}$
$m = 2$		$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{105}}$	$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{210}}$
$m = 3$			$\frac{1}{6}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{70}$	$\frac{1}{12}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{70}}$	$\frac{1}{12}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{210}}$
$m = 4$				$\frac{1}{8}\sqrt{35}$	$\frac{1}{72}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{35}}$	$\frac{1}{360}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$
$m = 5$					$\frac{1}{360}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{14}}$	$\frac{1}{360}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{54}}$
$m = 6$						$\frac{1}{720}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{462}}$

## 2.7 Representação Convencional

O potencial na sua forma geral é expresso como:

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin\varphi) \quad (2.51)$$

onde:  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são coeficientes dos harmônicos esféricos,  $\mu$  ( $= GM$ ) é a constante geogravitacional ( $\cong 3,986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ ) e  $a_e$  é o raio equatorial da Terra. O potencial é avaliado no ponto localizado pelo módulo do raio vetor (distância)  $r$ , pela latitude geocêntrica  $\varphi$  e pela longitude geocêntrica  $\lambda$ , conforme mostrado na Figura 2.10.

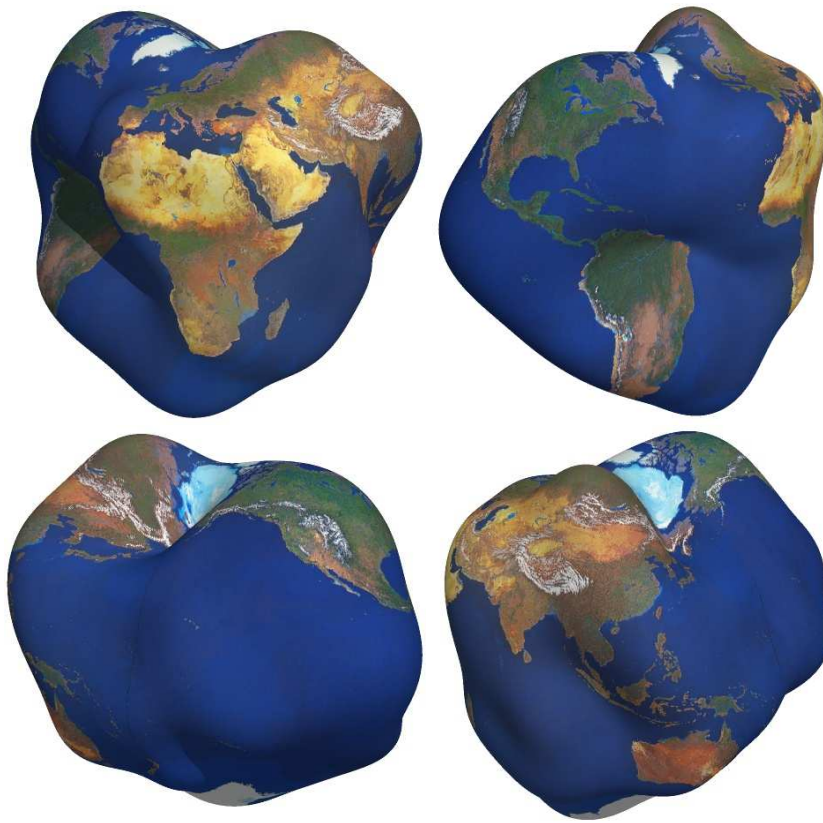


Figura 2.9 – Superfície equipotencial da Terra, subtraída do segundo harmônico e com efeito ampliado dos demais harmônicos.

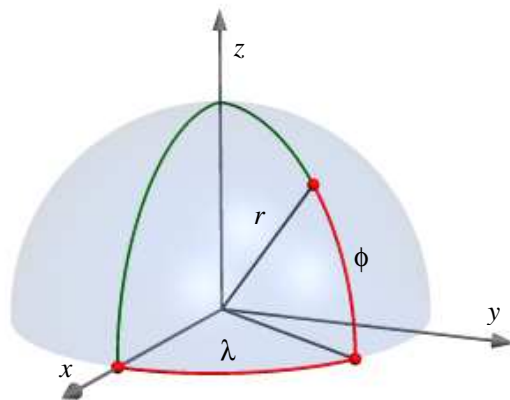


Figura 2.10 Sistema geocêntrico terrestre

Esta relação, contudo, não permite uma visualização dos efeitos dos harmônicos zonais, tesserais e o potencial do corpo central. Por isso é conveniente separar a somatória em



suas diversas componentes. Para isso, lembrando que  $C_{11} = S_{11} = 0$ , pode-se eliminar o termo  $n = 1$ . Além disso,  $n = 0$  representa o potencial do corpo central, dado por  $\mu/r$ , que gera o movimento kepleriano puro. Visto ainda que na prática há um limite  $N$  para o valor máximo da ordem do polinômio, o potencial pode ser reescrito, na forma normalizada, como:

$$U = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \bar{J}_n \bar{P}_n(\text{sen}\varphi) + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \text{sen } m\lambda) \bar{P}_{nm}(\text{sen}\varphi) \quad (2.52)$$

## 2.8 Representação Uniforme

A aceleração devido ao potencial gravitacional apresenta, na formulação convencional apresentada na seção anterior, uma singularidade nos pólos, ou seja, quando  $\phi = 90^\circ$  (ver Capítulo 3, Seção 3.2). O uso da representação uniforme evita o aparecimento desta singularidade no cálculo da aceleração (Pines 1973; Cunningham, 1969), pela modificação dos polinômios e funções associadas de Legendre. Recordando a equação diferencial que fornece os polinômios:

$$P_{nm}(\text{sen } \varphi) = \frac{(1 - \text{sen}^2 \varphi)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{(d \text{sen } \varphi)^{n+m}} (\text{sen}^2 \varphi - 1)^n, \quad (2.53)$$

define-se os polinômios derivados de Legendre como:

$$A_{nm}(\text{sen } \varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{(d \text{sen } \varphi)^{n+m}} (\text{sen}^2 \varphi - 1)^n, \quad (2.54)$$

de onde vem facilmente que:

$$P_{nm}(\text{sen } \varphi) = \cos^m \varphi A_{nm}(\text{sen } \varphi). \quad (2.55)$$

Como ambos devem ser equivalentes, então se arrumando os termos convenientemente pode-se escrever:

$$(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \text{sen } m\lambda) P_{nm}(\text{sen}\varphi) = (C_{nm} r_m + S_{nm} i_m) A_{nm}(\text{sen}\varphi) \quad (2.56)$$

onde  $r_m$  e  $i_m$  valem:

$$r_m = \cos m\lambda \cos^m \varphi \quad (2.57)$$

$$i_m = \text{sen } m\lambda \cos^m \varphi \quad (2.58)$$

Pode-se mostrar que  $r_m$  e  $i_m$  são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da série dada por:

$$r_m = \text{real} \left[ (\cos \lambda \cos \varphi + i \text{sen } \lambda \cos \varphi)^m \right] \quad (2.59)$$

$$i_m = \text{imag} \left[ (\cos \lambda \cos \varphi + i \text{sen } \lambda \cos \varphi)^m \right] \quad (2.60)$$

onde  $\text{real}(\cdot)$  e  $\text{imag}(\cdot)$  são funções que obtêm a parte real e a parte imaginária do argumento. Além disso, os valores de  $r_m$  e  $i_m$  podem ser obtidos por de recursão, na forma:

$$r_m = \cos \lambda \cos \varphi r_{m-1} - \text{sen } \lambda \text{sen } \varphi i_{m-1} \quad (2.61)$$

e

$$i_m = \cos \lambda \cos \varphi i_{m-1} + \text{sen } \lambda \text{sen } \varphi r_{m-1} \quad (2.62)$$

com condição inicial dada por  $r_0 = 1$  e  $i_0 = 0$ . Finalmente, a representação uniforme do potencial fica:

$$U = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \left( \frac{a_e}{r} \right)^n J_n A_n(\text{sen} \varphi) + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} r_m + S_{nm} i_m) A_{nm}(\text{sen} \varphi) \quad (2.63)$$

## 2.9 Problemas

- 1) Expandir explicitamente o geopotencial  $U$  até o termo  $n = 3$ , na forma uniforme e não uniforme. Separar os termos zonais dos termos tesserais e setoriais, ou seja:

$$U = U_{00} + U_{10} + U_{20} + U_{30} + \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{zonais}$$

$$\left. \begin{array}{l} +U_{11} + U_{21} + U_{31} + \\ +U_{22} + U_{32} + \\ +U_{33} \end{array} \right\} \text{tesserais}$$

Calcular o valor do potencial para  $x = y = z = a_e$  (raio equatorial da Terra). Note que tanto o raio  $r$  quanto o seno e o co-seno da latitude e longitude dependem das coordenadas cartesianas.

- 2) Provar que a representação convencional é equivalente à representação uniforme.
- 3) Provar que a solução da equação associada de Legendre é a função de Legendre  $P_{nm}(\text{sen}\phi)$ .
- 4) Se  $P_n(x)$  é o coeficiente de  $h^n$  na expansão de  $(1 - 2 x h + h^2)^{1/2}$  nas potências ascendentes de  $h$ , então provar que:

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

- 5) Provar as fórmulas de recorrência:

$$n P_n = (2n - 1) x P_{n-1} - (n - 1) P_{n-2}$$

$$n P_n = x P'_n - P'_{n-1}$$

$$(2n + 1) P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$$

$$(n + 1) P_n = P'_{n+1} - x P'_n$$

- 6) Mostrar uma representação gráfica para os seguintes harmônicos esféricos de superfície:

$$P_{33}(\text{sen}\phi)$$

$$P_{66}(\text{sen}\phi)$$

$$P_{84}(\text{sen}\phi)$$

- 7) Obter as fórmulas de recursão para os polinômios derivados de Legendre  $A_n$  e  $A_{nm}$  da representação uniforme.



### 3 FORÇAS PERTURBADORAS

#### 3.1 Introdução

O movimento orbital de satélites artificiais é constantemente influenciado por várias forças perturbadoras como:

- a) a força gravitacional devida ao potencial do corpo,
- b) a atração gravitacional do Sol e da Lua;
- c) a força de arrasto;
- d) a força das marés devidas à Lua e ao Sol;
- e) a força de pressão radiação e
- f) o albedo.

Devido a estas perturbações, a órbita do satélite se desvia da órbita elíptica de dois corpos e, conseqüentemente, a órbita contrai e o satélite se arrasta em direção da Terra.

#### 3.2 Força Gravitacional Devida ao Potencial do Corpo

A força de atração gravitacional específica em um ponto fora de uma distribuição do potencial  $U$  é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U \quad (3.1)$$

O potencial para um corpo de distribuição assimétrica de massa é mais facilmente escrito no sistema de coordenadas fixo no corpo enquanto o  $\vec{r}$  está de preferência no sistema inercial.

Como  $U$  é uma função de  $r, \phi, \lambda$  (coordenadas esféricas da partícula ou espaçonave) num sistema fixo no corpo (Terra, por exemplo), o procedimento mais simples é calcular o gradiente em  $(r, \phi, \lambda)$  e depois convertê-lo para coordenadas retangulares  $(x', y', z')$  fixo no corpo e finalmente para o sistema inercial  $(x, y, z)$ .

Considerando a Terra, seja  $(x', y', z')$  um sistema de coordenadas fixo na Terra com  $x'$  apontando para o meridiano de Greenwich,  $z'$  para o pólo norte e  $y'$  a  $90^\circ$  de  $x'$  completando  $x', y'$  e  $z'$ , um sistema dextrogiro. Seja  $(x_a, y_a, z_a)$  um sistema de coordenadas tal que  $x_a$  está apontado ao CM da partícula, tal que o ângulo entre o eixo  $x_a$  e o plano equatorial seja  $\phi$  e o ângulo entre a projeção do  $x_a$  no plano equatorial e o eixo  $x'$  seja  $\lambda$ . O eixo  $y_a$  está no plano equatorial para lado leste.

Então, efetuando uma rotação em torno do eixo  $z'$  de  $\lambda$ ,  $x'$  coincide com  $x_a$  e  $y'$  com  $y_a$ . Agora, fazendo uma rotação em torno de  $y'$  (ou  $y_a$ ) de  $-\phi$ ,  $z'$  coincidirá com o sistema  $x_a y_a z_a$ . Isto é, se  $\vec{r}_a$  for vetor coluna do sistema  $(x_a, y_a, z_a)$  e  $\vec{r}$  for vetor coluna do sistema  $(x', y', z')$ , então:

$$\vec{r}_a = R_y(-\phi) R_z(\lambda) \vec{r} \quad (3.2)$$

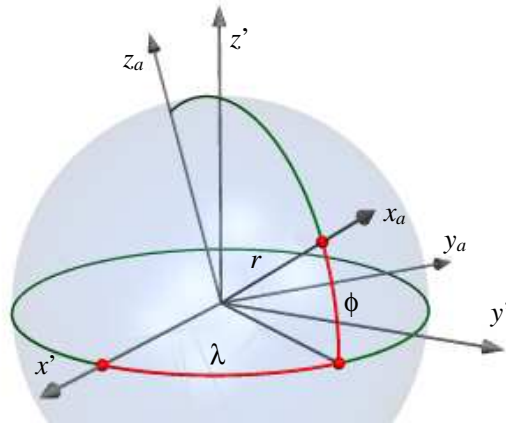


Figura 3.1 – Sistema geocêntrico terrestre

Chamando

$$T = R_y(-\phi) R_z(\lambda) \quad (3.3)$$

onde

$$R_y(-\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$R_z(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \text{sen} \lambda & 0 \\ -\text{sen} \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

a matriz de rotação fica:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Assim, pode-se escrever:

$$\vec{r}_a = T \vec{r}'$$

$$\dot{\vec{r}}_a = T \dot{\vec{r}}' \quad (3.7)$$

$$\ddot{\vec{r}}_a = T \ddot{\vec{r}}'$$

pois  $T$  é um operador de rotação que gira qualquer vetor, de um sistema de referências, para outro vetor. Como de fato, precisamos uma transformação inversa daquela dada na Equação 3.2, e como transformações são ortogonais, tem-se:

$$\vec{r}' = T^T \vec{r}_a \quad (3.8)$$

A transformação do sistema geocêntrico terrestre para o sistema de coordenadas inerciais é obtida de acordo com a Figura 3.2

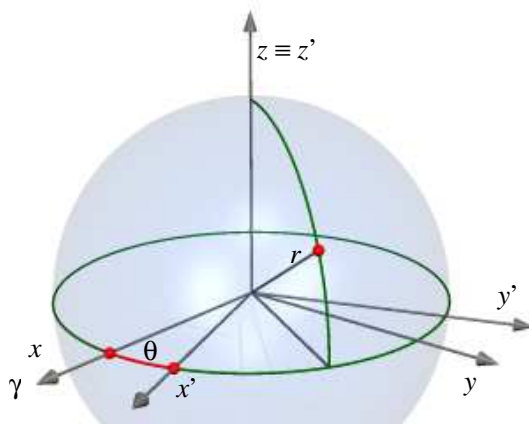


Figura 3.2 – Sistemas Inercial e Geocêntrico

Se  $\vec{r}$  for o vetor coluna do sistema  $(x, y, z)$ , então:

$$\vec{r} = R_z(-\theta) \vec{r}' = R_z^T(\theta) \vec{r}', \quad (3.9)$$

onde:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

e  $\theta$  é o tempo sideral aparente de Greenwich (TSAG).

Assim, para obter a transformação completa, tem-se:

$$\vec{r} = R^T(\theta) T^T \vec{r}_a = (T R)^T \vec{r}_a = G^T \vec{r}_a \quad (3.11)$$

Uma vez que a órbita do satélite é um plano "fixo" no espaço que, por hipótese, não depende da velocidade de rotação da Terra, a Equação 3.10 é válida para aceleração também, isto é,

$$\ddot{\vec{r}} = G^T \ddot{\vec{r}}_a \quad (3.12)$$

$\ddot{\vec{r}}_a$  representa as componentes da aceleração relativas ao sistema de coordenadas  $(x_a, y_a, z_a)$ .

Sabe-se que para uma função escalar  $U$  de coordenadas ortogonais gerais  $u_1, u_2, u_3$ , é válida:

$$\nabla U = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde  $h_1, h_2$  e  $h_3$  são chamados fatores de escala. No caso de coordenadas esféricas  $r, \lambda, \phi$ , isto é,  $u_1 = r, u_2 = \lambda, u_3 = \phi$ , as coordenadas retangulares são expressas como:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \text{sen } \lambda \end{aligned} \quad (3.14)$$



$$z = r \operatorname{sen} \phi ,$$

cujas diferenciais resultam:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \phi \cos \lambda dr - r \cos \phi \operatorname{sen} \lambda d\lambda - r \operatorname{sen} \phi \cos \lambda d\phi \\ dy &= \cos \phi \operatorname{sen} \lambda dr + r \cos \phi \cos \lambda d\lambda - r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda d\phi \\ dz &= \operatorname{sen} \phi dr + r \cos \phi d\phi . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Um elemento  $ds$  em coordenadas retangulares, quando expresso em coordenadas polares fica:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \lambda (d\lambda)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \lambda (d\phi)^2 + \\ &+ \cos^2 \phi \cos^2 \lambda (dr)^2 + 2r^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda (d\lambda d\phi) - \\ &- 2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \lambda (d\phi dr) - 2r \cos^2 \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda (dr d\lambda) + \\ &+ r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \lambda (d\lambda)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \lambda (d\phi)^2 + \\ &+ \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \lambda (dr)^2 - 2r^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda (d\lambda d\phi) - \\ &- 2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \lambda (d\phi dr) + 2r \cos^2 \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda (d\lambda dr) + \\ &+ r^2 \cos^2 \phi (d\phi)^2 + \operatorname{sen}^2 \phi (dr)^2 + 2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi (d\phi dr) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agrupando os termos comuns, os termos em  $(dr)^2$  resultam:

$$\cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \phi = \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1, \quad (3.17)$$

e os termos em  $(d\phi)^2$  ficam:

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \lambda + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \lambda + r^2 \cos^2 \phi = r^2 \operatorname{sen}^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi = r^2, \quad (3.18)$$

os termos em  $(d\lambda)^2$ :

$$r^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \lambda + r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \lambda = r^2 \cos^2 \phi \quad (3.19)$$

os termos de  $(d\lambda d\phi)$ :

$$2r^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \lambda - 2r^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda = 0 \quad (3.20)$$

os termos de  $(d\phi dr)$ :

$$\begin{aligned} & -2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \lambda - 2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \lambda + 2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi = \\ & = -2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi + 2r \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

os termos de  $(dr d\lambda)$ :

$$-2r \cos^2 \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda + 2r \cos^2 \phi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda = 0. \quad (3.22)$$

Portanto, o quadrado do elemento de arco  $(ds)^2$  é dado por:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 \cos^2 \phi (d\lambda)^2 + r^2 (d\phi)^2 \quad (3.23)$$

de onde conclui-se que  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r \cos \phi$  e  $h_3 = r$ . Assim, os componentes de  $\ddot{\vec{r}}_a$  são computados por (com  $u_1 = r$ ,  $u_2 = \lambda$  e  $u_3 = \phi$ ):

$$\ddot{\vec{r}}_a = \begin{bmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} = \nabla U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde  $\ddot{\vec{r}}_a$  representa as componentes da aceleração inercial (Equação 3.24)  $\ddot{\vec{r}}$  tomada ao longo dos eixos instantâneos  $x_a, y_a, z_a$ .

Considerando a expressão para a função potencial generalizada,  $U$ , dada por

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) P_{nm}(\operatorname{sen} \phi) \quad (3.25)$$

ou

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) P_{nm}(\operatorname{sen} \phi) \quad (3.26)$$

onde  $\mu = GM$ , então a aceleração que atua numa massa de prova externa à Terra, em relação ao sistema de coordenadas fixas na Terra fica:

$$\ddot{\vec{r}}_a = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \begin{bmatrix} -(n+1) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} \\ m \sec \phi (-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda) P_{nm} \\ \cos \phi (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P'_{nm} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

onde  $P'_{nm}$  é a derivada de  $P_{nm}$  em relação a  $\sin \phi$ . As expressões  $\cos \phi P'_{nm}$  e  $\sec \phi P_{nm}$  são calculadas usando-se as relações:

$$\begin{aligned} \sec \phi P_{11} &= 1 \\ \sec \phi P_{nm} &= (2n-1) \cos \phi (\sec \phi P_{n-1,n-1}) \\ \sec \phi P_{nm} &= \frac{2n-1}{n-m} \sec \phi (\sec \phi P_{n-1,m}) - \frac{n+m-1}{n-m} (\sec \phi P_{n-2,m}) \\ \cos \phi P'_{nm} &= -n \sec \phi (\sec \phi P_{nm}) + (n+m) (\sec \phi P_{n-1,m}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

As expressões  $\cos m\lambda$  e  $\sin m\lambda$  podem ser calculadas pelas fórmulas de recorrência apresentadas na Seção 2.5.

Assim a força devida ao campo gravitacional fica da forma  $\vec{a}_G = \ddot{\vec{r}} = G^T \ddot{\vec{r}}_a$ , onde  $\ddot{\vec{r}}_a$  é dada pela Equação 3.27. Escrevendo a Equação 3.26 em três termos correspondentes ao corpo central, harmônicos zonais, harmônicos tesserais e setoriais, na forma:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + U(J) + U(C, S) \\ &= \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_n + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} \end{aligned} \quad (3.29)$$

e considerando os coeficientes normalizados dos harmônicos do geopotencial, a Equação 3.27 é reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_a &= -\frac{\mu}{r^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \bar{C}_n \begin{bmatrix} (n+1) \bar{P}_n \\ 0 \\ -\cos \phi \bar{P}'_n \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \begin{bmatrix} -(n+1) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm} \\ m \sec \phi (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm} \\ \cos \phi (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}'_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde os  $\bar{P}_{nm}$  normalizados podem ser calculados diretamente pelas expressões de recorrência:

$$\sec \phi \bar{P}_{nm} = \left( \frac{2n+1}{n^2 - m^2} \right)^{1/2} \cdot \left[ (2n-1)^{1/2} \sec \phi \bar{P}_{n-1,m} - \left( \frac{n^2 - m^2 - 2n+1}{2n-3} \right)^{1/2} \sec \phi \bar{P}_{n-2,m} \right] \quad (3.31)$$

$$\cos \phi \bar{P}'_{nm} = -n \sec \phi \bar{P}_{nm} + \left[ \frac{2n+1}{2n-1} (n^2 - m^2) \right]^{1/2} \sec \phi \bar{P}_{n-1,m} \quad (3.32)$$

Na prática, a expansão em série é realizada até um limite  $N$  para  $n$ , que depende do modelo do geopotencial utilizado.

### 3.2.1 Efeito Devido à Não-Esfericidade da Terra

A não-esfericidade da Terra causa duas perturbações importantes. Primeiro, o plano orbital gira ao redor do eixo de rotação da Terra numa direção oposta ao movimento do satélite, tal que para  $i < 90^\circ$ , o ângulo  $\Omega$  diminui gradativamente enquanto  $i$  fica constante. A variação em  $\Omega$  é dada por:

$$\dot{\Omega} \cong -9,97 \left( \frac{a_e}{a} \right)^{7/2} (1-e^2)^{-2} \cos i \text{ (graus/dia)}, \quad (3.33)$$

onde  $a_e$  é o raio equatorial da Terra,  $a$  é o semi-eixo maior orbital e  $e$  é a excentricidade. A segunda perturbação é no semi-eixo maior da órbita que gira no plano orbital tal que o argumento do perigeu  $\omega$  aumenta por uma taxa dada por:

$$\dot{\omega} \cong 4,98 \left( \frac{a_e}{a} \right)^{7/2} (1-e^2)^{-2} (5 \cos^2 i - 1) \text{ (graus/dia)}. \quad (3.34)$$

Os dois efeitos causam uma variação de vários graus por dia para satélites de baixa altitude. Além destas variações seculares em  $\Omega$  e  $\omega$ , os harmônicos zonais  $J_n$  causam algumas perturbações periódicas nos elementos orbitais. Entre elas, a mais importante é a oscilação da distância do perigeu causada por  $J_3$ . Esta é dada por:

$$r_p - r_{pe} \cong -6,8 \sin i \sin \omega \text{ (km)} \quad (3.35)$$

onde  $r_{pe}$  é a distância do perigeu quando o argumento do perigeu for nulo ou  $180^\circ$  (perigeu no plano equatorial). Assim, quando  $\omega$  varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , a distância do perigeu diminui de  $6,8 \sin i$  km; e quando  $\omega$  varia de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , esta aumenta de  $6,8 \sin i$  km.

### 3.3 Atração gravitacional do Sol e da Lua

Considerando que a massa do satélite é desprezível em relação à massa da Terra, do Sol e da Lua, a perturbação gravitacional de um terceiro corpo (Sol ou Lua) pode ser estudada através do problema reduzido de 3 corpos, conforme mostra a Figura 3.3.

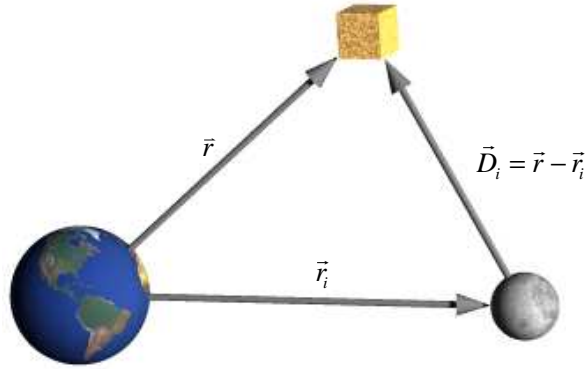


Figura 3.3 Atração gravitacional do terceiro corpo (Lua) no satélite

O potencial perturbador devido ao terceiro corpo é dado por (Kovalevsky, 1967):

$$R_i = G M_i \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (3.36)$$

onde  $M_i$  e  $r_i$  são respectivamente a massa e distância do corpo perturbador ao corpo principal. A aceleração sobre o satélite, causada por estes corpos, é dada pelo gradiente do  $R_i$  em relação a  $\vec{r}$ :

$$\vec{a}_i = \nabla R_i = -G M_i \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right] \quad (3.37)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -G M_i \begin{bmatrix} (x - x_i)/D_i^3 + x_i/r_i^3 \\ (y - y_i)/D_i^3 + y_i/r_i^3 \\ (z - z_i)/D_i^3 + z_i/r_i^3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde

$$D_i = |\vec{r} - \vec{r}_i| = \left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.39)$$

### 3.3.1 Efeito da Atração Gravitacional do Sol e Lua

Os efeitos das atrações gravitacionais do Sol e da Lua são em geral pequenos e periódicos. A variação na distância do perigeu em geral se acumula em menos de 2 km de amplitude para um satélite com excentricidade menor que 0,25. Todos os elementos orbitais exceto o semi-eixo maior  $a$  são afetados pela atração gravitacional do Sol e da Lua.

### 3.4 Forças de Marés Devidas à Lua e ao Sol

A atração gravitacional do Sol e da Lua cria um potencial na Terra que depende da geometria entre a Terra e o corpo perturbador. Como a Terra não é perfeitamente rígida, ela se deforma sob a ação deste potencial, e, com isso, a própria distribuição de massa da Terra é alterada. Como consequência, a nova distribuição de massa cria um potencial no espaço diferente do original, sem o corpo perturbador. Para modelar o efeito introduzido pela presença de um terceiro corpo (Sol ou Lua) no potencial da Terra, assume-se inicialmente que a massa do corpo perturbador esteja concentrada no seu centro de massa, ou melhor dizendo, despreza-se o tamanho do corpo perturbador em face da distância deste corpo até a Terra. Assim, o potencial gerado pelo corpo perturbador de massa concentrada  $M_i$ , num ponto  $P$ , localizado na longitude  $\lambda$ , latitude  $\phi$  e distância geocêntrica  $R$  da superfície terrestre, conforme a Figura 3.4, é dado por:

$$U_i = \frac{G M_i}{\Delta} = \frac{G M_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r_i} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (3.40)$$

onde  $r_i$  é a distância geocêntrica até a massa  $M_i$ ,  $\Delta$  é a distância de  $P$  até o corpo perturbador e  $\psi$  é o ângulo geocêntrico entre  $P$  e  $M_i$ . Devido ao potencial  $U_i$ , a Terra se deforma suavemente e assim é criada uma nova distribuição de massa. Esta nova distribuição gera um potencial adicional conhecido como potencial de maré. Como a Terra não é perfeitamente rígida nem tampouco completamente elástica, pode-se sugerir que o acréscimo no potencial causado pelo potencial perturbador consiste apenas de uma fração  $k_n$  deste último, na forma:

$$R_i = k_n U_i, \quad (3.41)$$

onde  $k_n$  é um coeficiente de elasticidade de grau  $n$ . Considerando apenas o termo principal de grau 2 no potencial  $U_i$  (mesmo porque este potencial é de magnitude muito menor do que o potencial do corpo principal), tem-se:

$$U_i = \frac{GM_i}{r_i} \left( \frac{R}{r_i} \right)^2 P_2(\cos \psi) \quad (3.42)$$

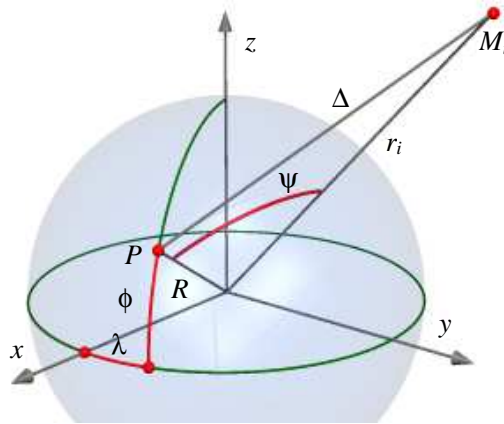


Figura 3.4 Forças de marés num ponto da superfície terrestre

O potencial  $R_i$  num ponto externo à Terra, e situado a uma distância geocêntrica  $r$ , é proporcional à razão  $(R/r)^{n+1}$  tal que na superfície essa razão é 1. Assim,  $R_i$ , num ponto externo à Terra, pode ser escrito como:

$$R_i = k_2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 U_i = k_2 \frac{R^5}{r^3} \frac{GM_i}{r_i^3} P_2(\cos \psi) \quad (3.43)$$

Usando esta função potencial, a aceleração causada pela força de marés sobre um ponto do espaço é escrita como:

$$\vec{a}_{Mi} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} k_2 \frac{GM_i}{r_i^3} \frac{R^5}{r^5} \begin{bmatrix} (1-5D^2)x + 2Dr x_i / r_i \\ (1-5D^2)y + 2Dr y_i / r_i \\ (1-5D^2)z + 2Dr z_i / r_i \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

onde

$$D = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r \cdot r_i} = \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r \cdot r_i}, \quad (3.45)$$

e

$$r_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2} \quad (3.46)$$

com  $(x_i, y_i, z_i)$  sendo as coordenadas do corpo perturbador.

Os coeficientes de maré  $k_n$  (elasticidade) são denominados números de Love. As deformações da Terra causadas por marés devido à atração do Sol e da Lua podem produzir perturbações observáveis na órbita do satélite. A magnitude destas perturbações depende de propriedades elásticas da Terra, representadas pelos números de Love, que não são constantes para toda a Terra mas dependem do ponto. Observações mostram que (NASA, 1977, Kuga e Silva, 1984):

$$0,245 \pm 0,005 \leq k_2 \leq 0,31 \pm 0,01 \quad (3.47)$$

### 3.5 Força de Arrasto

Um satélite que se move na atmosfera é influenciado por um atrito, que é denominado força de arrasto, que atua no sentido contrário ao movimento de satélite. A expressão da força de arrasto é dada por:

$$\vec{D} = -\frac{1}{2} \rho C_D S v_R \vec{v}_R \quad (3.48)$$

onde  $\rho$  é a densidade local do ar,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto,  $S$  é a área efetiva e  $v_R$  é a velocidade do satélite em relação a atmosfera da Terra.

No caso de uma órbita elíptica, o satélite é afetado pelo arrasto numa pequena faixa da órbita, perto do perigeu (Figura 3.5).

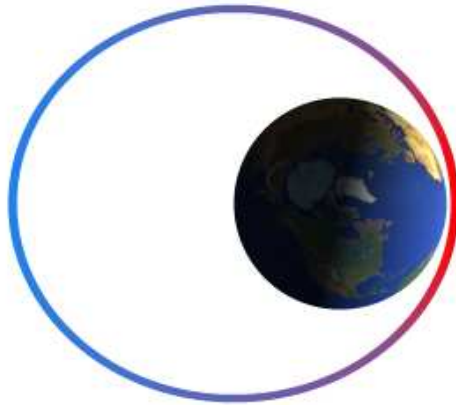


Figura 3.5 – Força de arrasto numa órbita excêntrica



Assim, o satélite, sendo retardado pelo arrasto perto do perigeu, não vai ter a mesma energia para ir tão longe no apogeu subsequente, como tinha no apogeu anterior. Conseqüentemente a altitude do apogeu diminui, enquanto a altitude do perigeu mantém um valor quase constante, e a órbita elíptica contrai-se para uma órbita circular (Figura 3.6 e 3.7).

A densidade  $\rho$  da atmosfera depende de vários fatores, entre eles as variações de temperatura nas camadas atmosféricas de acordo com o ciclo solar de onze anos, as variações com a mudança diária na atividade na superfície solar, a variação diurna, as variações com atividade geomagnética, as variações semi-anuais, e as variações latitudinais e sazonais na termosfera baixa.

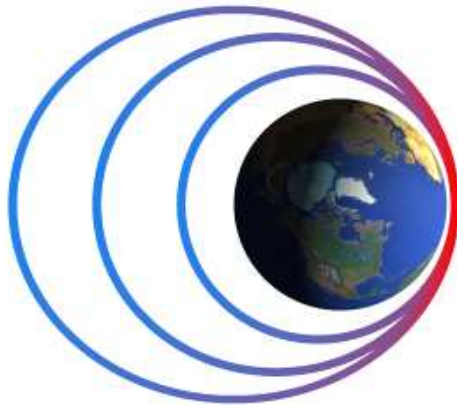


Figura 3.6 – Decaimento orbital devido ao arrasto atmosférico

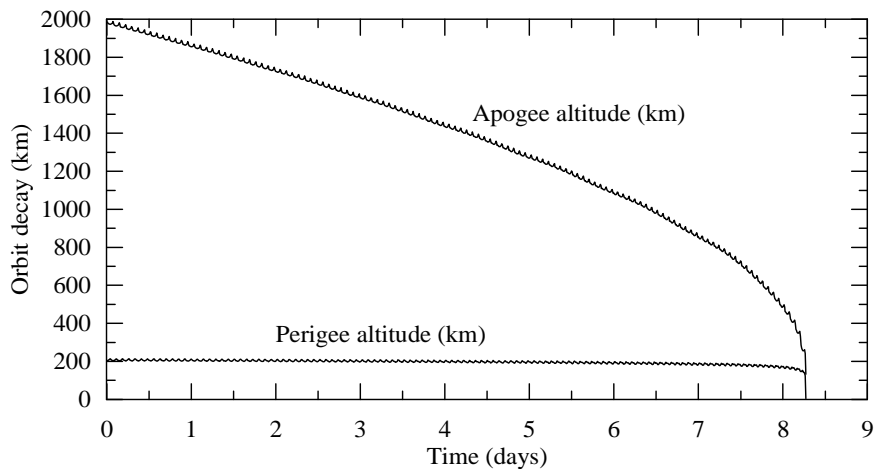


Figura 3.7 - Variação da altitude do perigeu e apogeu devido ao arrasto.

O coeficiente de arrasto  $C_D$  é função de parâmetros que dependem de propriedades da superfície do satélite (material, acabamento e temperatura), do ângulo de incidência, temperatura e velocidade das moléculas, etc.

A área efetiva  $S$  é determinada pela configuração e o tamanho do veículo, juntamente com o ângulo de ataque em relação ao fluxo atmosférico. Esta superfície é conhecida como *área projetada* pois está associada com a área externa do satélite projetada na direção da velocidade relativa com a atmosfera.

A velocidade relativa  $\vec{v}_R$  é calculada admitindo-se que a atmosfera tem a mesma velocidade de rotação da Terra, e é dada por:

$$\vec{v}_R = \dot{\vec{r}} - \vec{\omega}_T \wedge \vec{r} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \omega_T y \\ \dot{y} - \omega_T x \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

onde  $\omega_T = |\vec{\omega}_T|$  é a velocidade angular de rotação da Terra ( $\omega_T = 360,9856473^\circ/\text{dia}$ ) e  $\dot{\vec{r}}$  é a velocidade do satélite relativa ao sistema inercial. Assim, a expressão final para a aceleração devido ao arrasto fica na forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho C_D \frac{S}{m} v_R \begin{bmatrix} \dot{x} + \omega_T y \\ \dot{y} - \omega_T x \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Na verdade, foi comprovada a existência de ventos nas altitudes orbitais. Porém, a inexistência de modelos matemáticos que levem em conta este efeito no cálculo da velocidade relativa faz com que a melhor aproximação seja ainda considerar a atmosférica como estática com relação à Terra.

A força de arrasto afeta principalmente o semi-eixo maior e a excentricidade orbital. Como a densidade atmosférica cai exponencialmente com a altitude, também a força de arrasto diminui exponencialmente. No entanto, tanto a densidade quanto o coeficiente balístico (o produto de  $C_D$  pela relação área-sobre-massa,  $S/m$ ), dependem de vários fatores, como será visto a seguir.

### 3.5.1 Relação área-sobre-massa

Satélites com relação área-sobre-massa maior do que  $0,1 \text{ m}^2/\text{kg}$  são pouco densos, e apresentam um decaimento elevado. Cita-se como exemplo os satélites ECHO I, de relação igual a  $37,2$  (30 m de diâmetro, 52 kg) e ECHO II, com  $20,7$  (41 m de diâmetro, 256 kg), mostrado na Figura 3.8a. Satélites com relação entre  $0,001$  e  $0,1$  são os mais comuns, como o SCD-2 ( $0,005$ ), visto na Figura 3.8b e ROSAT ( $0,006$ ). Satélites com relação menor do que  $0,001$  são altamente densos, utilizados em estudos do campo geogravitacional, como o LAGEOS-3 (relação igual a  $0,0007$  - esfera de 30 cm de raio e 407 kg), mostrado na Figura 3.8c.

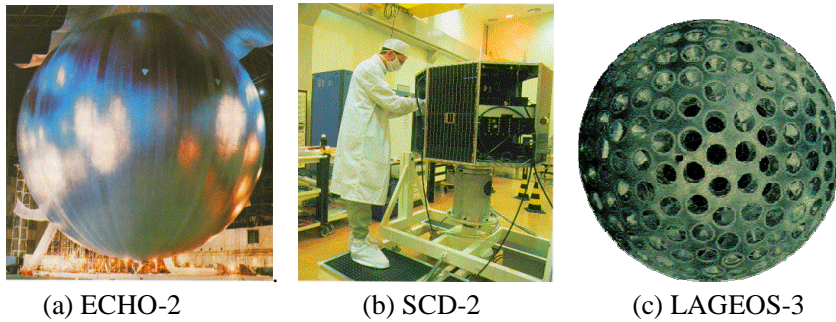


Figura 3.8 - Satélites ECHO-2, SCD-2 e LAGEOS-3

### 3.5.2 O coeficiente de arrasto

O coeficiente de arrasto  $C_D$  pode ser medido experimentalmente ou avaliado por meio de modelos matemáticos. O valor do coeficiente de arrasto fica normalmente compreendido entre 1,2 e 3,8, e depende de vários fatores. Nas altitudes orbitais, a mecânica dos fluidos não pode ser aplicada ao problema, pois é válida apenas em meios contínuos. A rarefação da atmosfera faz com que as moléculas possam ser tratadas individualmente (estatisticamente) e não mais como um fluido. Desta forma, pode-se aplicar a teoria cinética dos gases, desenvolvida no século XIX por Maxwell. Pela teoria cinética dos gases, a velocidade média das moléculas num gás está diretamente relacionada com a temperatura deste gás: quanto maior a temperatura, maior a velocidade das moléculas. Num meio contínuo, as colisões das moléculas do gás com uma superfície são rapidamente transmitidas às outras moléculas, ou seja, ao emergir de uma colisão, a molécula transmite seu movimento às outras moléculas que estão ao seu redor. Para que a teoria cinética dos gases possa ser aplicada, contudo, exige-se que o caminho livre médio, isto é, a distância percorrida pela molécula entre duas colisões sucessivas seja maior do que as dimensões típicas do experimento. Em outras palavras, admite-se que as colisões entre moléculas sejam raras. Isto realmente acontece nas altitudes orbitais, onde o caminho livre médio ultrapassa as dezenas de metros. Esta hipótese é necessária para que a distribuição de velocidades (e temperatura) das moléculas incidentes no satélite não seja afetada pela distribuição de velocidades das moléculas emergentes após a colisão.

No choque das moléculas da atmosfera com a superfície do satélite ocorre uma troca de energia e uma troca de quantidade de movimento, de tal forma que a distribuição de velocidades das moléculas emergentes resulta diferente daquela das moléculas incidentes. Em geral, a temperatura do fluxo incidente varia desde 400 até 2500°K, e, portanto, as moléculas provocam um pequeno aquecimento na superfície do satélite que fica em torno de 300°K. Este aquecimento só não é maior porque a densidade da atmosfera é muito baixa. Ao colidirem com a superfície do satélite, as moléculas são capturadas, re-emitidas e capturadas novamente, colidindo várias vezes com a superfície (Figura 3.9). Neste processo a molécula vai gradativamente perdendo energia, de tal forma que sua temperatura aproxima-se da temperatura da superfície.

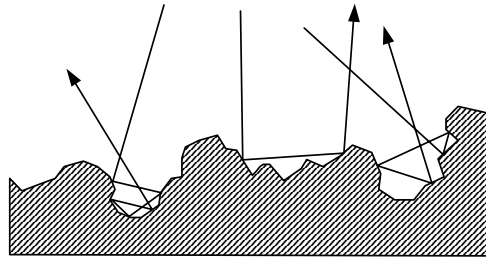


Figura 3.9 - Múltiplas colisões das moléculas da atmosfera com a superfície

A interação entre o gás e a superfície é um fenômeno ainda pouco conhecido. Schaaf e Cambré (1961) apresentaram um modelo matemático que utiliza a teoria cinética dos gases de Maxwell, em conjunto com 2 coeficientes,  $\sigma$  e  $\tau$ , que representam, respectivamente, a quantidade de movimento trocada durante a colisão nas direções normal e tangencial, dados por:

$$\sigma = \frac{P_i - P_r}{P_i - P_w}, \text{ e} \quad (3.51)$$

$$\tau = \frac{Q_i - Q_r}{Q_i} \quad (3.52)$$

onde  $P$  e  $Q$  são as componentes da quantidade de movimento do fluxo na direção normal e tangencial, respectivamente. Os índices  $i$  e  $r$  representam o fluxo incidente e refletido, enquanto que  $P_w$  é a quantidade de movimento na direção normal carregada pelo fluxo refletido caso este fluxo tivesse temperatura igual à temperatura da superfície.

O coeficiente de acomodação térmica,  $\alpha$ , traduz a troca de energia durante a colisão e permite modelar a transferência de calor entre o fluxo de moléculas e o satélite. Experimentalmente sabe-se que tanto  $\alpha$  quanto  $\sigma$  e  $\tau$  dependem do material da superfície, do acabamento superficial e também da temperatura, além da velocidade, temperatura e ângulo de incidência do fluxo. Contudo, as poucas medições efetuadas na área indicam que estes coeficientes são próximos a 1, o que equivale a dizer que a troca de calor e quantidade de movimento é quase total (Schaaf e Cambré, 1961, Dought e Schaetzle, 1969 e Knechtel e Pitts, 1969 e 1973). Numa reflexão especular, na qual as moléculas refletidas possuem ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência, deve-se esperar que não haja tempo para troca de calor entre a molécula e a superfície, e, portanto, a distribuição de velocidades do fluxo emergente é igual ao fluxo incidente. Neste caso, os coeficientes  $\sigma$ ,  $\tau$  e  $\alpha$  são todos nulos. Na outra extremidade, quando a reflexão é totalmente difusa, a temperatura das moléculas emergentes é igual à temperatura da superfície, e, neste caso,  $\sigma$ ,  $\tau$  e  $\alpha$  são unitários.

O coeficiente de arrasto depende da razão entre a velocidade do satélite com relação à atmosfera e a velocidade mais provável das moléculas. Esta relação, conhecida como razão de velocidades  $s$ , assume valores entre 2 e 20, nas altitudes orbitais. Em outras palavras, a velocidade do satélite é bem maior do que a velocidade das moléculas. A razão de velocidades é dada por:

$$s = v_R \sqrt{\frac{m}{2 k T_i}} \quad (3.53)$$

onde  $m$  é a massa média das moléculas,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T_i$  é a temperatura local da atmosfera (obtida de modelos da atmosfera). A massa média das moléculas é dada por:

$$m = \frac{\bar{M}}{N_{av}}, \quad (3.54)$$

onde  $\bar{M}$  é a massa molecular média local (também obtida de modelos atmosféricos) e  $N_{av}$  é o número de Avogrado.

A dependência do coeficiente de arrasto com relação à velocidade ou temperatura das moléculas emergentes é traduzida pela relação entre a temperatura da superfície  $T_w$  e a temperatura local da atmosfera  $T_i$ . Contudo, a influência desta relação não ultrapassa a 10% do valor do coeficiente de arrasto na maioria dos satélites.

O modelo obtido por Schaaf e Cambré aplica-se exclusivamente a uma placa plana, numa orientação qualquer com relação ao fluxo incidente. Pode-se, contudo, admitir que esta placa plana tenha uma área infinitesimal, e assim o modelo matemático pode ser integrado em toda a superfície do satélite exposta à atmosfera. De fato, como as moléculas possuem velocidades em todas as direções, mesmo as superfícies encobertas do satélite em relação ao fluxo incidente sofrem colisão com moléculas da atmosfera, embora em menor quantidade.

Este modelo baseia-se na hipótese de duas distribuições de velocidade da atmosfera: o fluxo incidente e o emergente. Portanto, quando ocorre dupla reflexão do fluxo, devido, por exemplo, a um satélite com geometria côncava, como mostrado na Figura 3.9, o modelo não pode mais ser aplicado. As dificuldades teóricas introduzidas pela dupla (ou tripla) reflexão, são, entretanto, tão grandes que geralmente despreza-se seu efeito, passando a considerar-se apenas uma reflexão mesmo em satélites com geometria côncava. Um outro problema surge quando superfícies do satélite são encobertas por outras, na direção do fluxo incidente, como mostrado na Figura 3.10. Neste caso, a área encoberta não sofre a incidência direta das moléculas, embora ainda persista uma contribuição de moléculas vindas de outras direções. Logo, a simples eliminação destas superfícies do cálculo não corrige o problema, embora leve a um resultado mais próximo do real. Modelos matemáticos que levem em conta satélites com geometria côncava ainda são escassos, principalmente em virtude das complexidades teórica e

computacional (Evans, 1964, Chahine, 1961). Comparações entre teoria e experimento são também raras (Fredo e Kaplan, 1981, e Boettcher e Legge, 1980)

A distribuição de velocidades é uma relação escalar que dá a probabilidade de uma molécula possuir velocidade entre  $v$  e  $v + dv$ . Esta distribuição é uma gaussiana, que depende da velocidade, da temperatura, da densidade e da massa das moléculas do gás. A função distribuição de velocidades pode ser integrada de forma a obter-se a quantidade de movimento do fluxo incidente num elemento de área plano, resultando:

$$P_n = \frac{\rho_i u^2}{2 s^2} \left\{ e^{-s^2 \cos^2 \theta} \left[ \frac{2-\sigma}{\sqrt{\pi}} s \cos \theta + \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \right] + [1 + \operatorname{erf}(s \cos \theta)] \left[ (2-\sigma) \left( \frac{1}{2} + s^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{\sigma}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} s \cos \theta \right] \right\}, \quad (3.55)$$

onde  $u$  é a velocidade da atmosfera com relação ao satélite,  $\theta$  é o ângulo de incidência (ângulo entre a direção do fluxo e a normal ao elemento de área),  $\rho_i$  é a densidade do fluxo incidente e  $\operatorname{erf}(s)$  é a função erro, definida como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-y^2} dy, \quad (3.56)$$

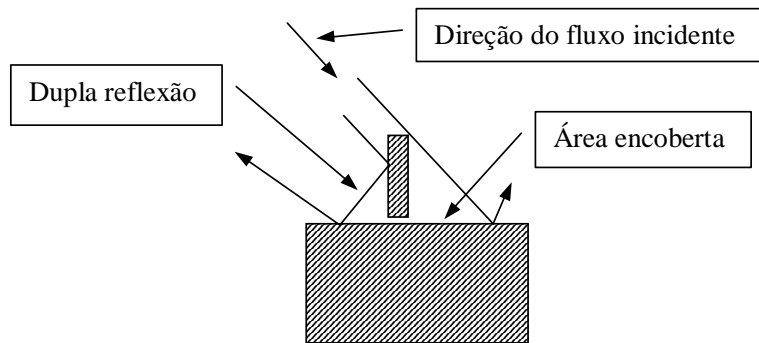


Figura 3.10 - Dupla reflexão e encobrimento de superfícies em geometria côncava.

Na direção tangencial ao elemento de área, a quantidade de movimento é dada por:

$$P_t = \frac{\rho_i u^2}{2} \frac{\tau \operatorname{sen} \theta}{s \sqrt{\pi}} \left\{ e^{-s^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{\pi} s \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(s \cos \theta)] \right\}. \quad (3.57)$$

A força aerodinâmica resultante neste elemento de área  $dA$  será então dada por:

$$\vec{F}_e = (P_t \cotg \theta - P_n) \hat{n} + P_t \operatorname{cosec} \theta \hat{u} \quad (3.58)$$

onde  $\hat{n}$  e  $\hat{u}$  são os vetores unitários nas direções normal e do fluxo incidente, respectivamente.

Portanto, a força de arrasto agindo em um satélite pode ser dada como:

$$\vec{F}_{aer} = \int_A \vec{F}_e(\sigma, \tau, s, T_w / T_i) dA \quad (3.59)$$

onde  $F_e$  é a força elementar agindo num elemento de área plano de área  $dA$ . Por definição, o coeficiente de arrasto é definido como:

$$C_D = \frac{\vec{F}_{aer} \cdot \vec{v}_R}{\frac{1}{2} \rho S v_R^2} \quad (3.60)$$

Pode-se mostrar que quando a área  $S$  adotada for igual à área projetada na direção da velocidade, e quando a razão de velocidades  $s$  for grande, o coeficiente de arrasto  $C_D$  tende ao valor 2.

A integração da equação que fornece a força aerodinâmica pode ser efetuada analiticamente em corpos simples, como esfera, paralelepípedo, cone e cilindro. O coeficiente de arrasto numa esfera resulta:

$$C_{Desf} = \frac{2 - \sigma + \tau}{2 s^3} \left[ \frac{\operatorname{erf}(s)}{2s} (4s^4 + 4s^2 - 1) + \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}} (2s^2 + 1) \right] + \frac{2\sigma}{3s} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \quad (3.61)$$

Quando se deseja uma grande precisão no cálculo da força aerodinâmica, ou no caso de não haver integral analítica para a geometria do satélite, recorre-se ao uso de modelos computacionais, que levam em conta a geometria, as propriedades de cada superfície (coeficientes de acomodação e temperatura), e modelos realistas da atmosfera (Carrara, 1982 e 1988, Boettcher, 1979). Tais programas permitem também avaliar torques aerodinâmicos que auxiliam o projeto de sistemas de controle de atitude.

### 3.5.3 Densidade atmosférica

A densidade atmosférica varia exponencialmente com a altitude, mas mudanças no perfil de temperaturas com a altitude provocam igualmente variações na densidade e na fração individual de cada componente dos gases que formam a atmosfera. Nos primórdios da era espacial, foram desenvolvidos alguns modelos matemáticos e empíricos para a densidade da alta atmosfera, como o MSIS, o J70 (Jacchia, 1972), U.S. Standard Atmosphere (United States Air Force, 1976) e o CIRA70. Estes modelos

foram posteriormente melhorados pela inclusão de dados obtidos de novos satélites, como o modelo J77 (Jacchia, 1977) e MSIS 86.

A atmosfera é dividida em camadas, para fins de estudo, conforme mostra a Figura 3.11. Os modelos matemáticos da alta atmosfera abrangem as camadas da Termosfera e Exosfera. Na Magnetosfera o número de moléculas e átomos é muito reduzido, e pode ser desprezado no cálculo da força aerodinâmica. A partir da Termosfera, o número de moléculas ionizadas cresce gradativamente, em virtude da radiação solar, formando assim um plasma condutor de eletricidade.

A Tabela 3.1 apresenta algumas propriedades da alta atmosfera, como o número de densidade das partículas neutras,  $n_{neutro}$  (número de moléculas por unidade de volume), o número de densidade das partículas ionizadas  $n_{ion}$ , o percentual de partículas ionizadas  $r_{ion}$ , o constituinte principal da atmosfera, a velocidade média das moléculas e íons  $v_{mol}$ , e a velocidade média dos elétrons  $v_{elec}$ .

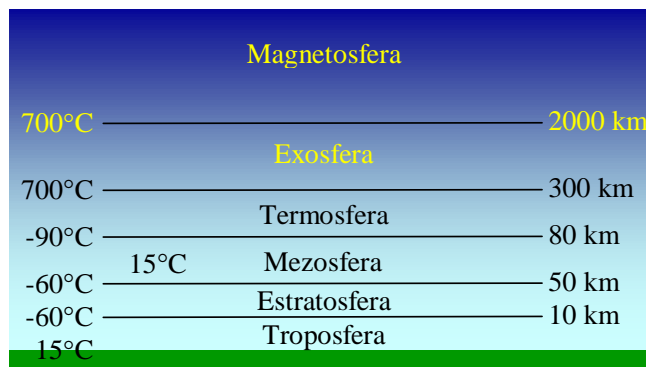


Figura 3.11. A alta atmosfera terrestre.

Tabela 3.1 – Propriedades da alta atmosfera

$h$ (km)	$n_{neutro}$ ( $m^{-3}$ )	$n_{ion}$ ( $m^{-3}$ )	$r_{ion}$ (%)	Const. principal	$v_{mol}$ (m/s)	$v_{elec}$ (m/s)
300	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{12}$	0.1	O	$1.6 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^5$
500	$2 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{11}$	0.1	O	$1.7 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^5$
1000	$5 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{10}$	0.2	O	$1.7 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^5$
2000	$1 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^9$	5	He	$3.4 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^5$
3000	$2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^9$	10	He	$3.4 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^5$
4000	$1 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$	70	H	$6.8 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^5$

As características da atmosfera sofrem influência de vários fatores. A densidade depende, basicamente, do constituinte principal naquela altitude. A relação entre os constituintes, por sua vez, depende da temperatura local. A temperatura varia pouco na região ao redor dos 100 km de altitude, porém aumenta assintoticamente até a denominada temperatura exosférica, por volta dos 2000 km. Verificou-se, com dados



obtidos dos primeiros satélites, que a temperatura exosférica variava com o tempo, numa taxa diária. Comprovou-se que esta variação era causada pelo Sol e que estava relacionada com o número de manchas na superfície do Sol. Por sua vez, o número de manchas depende do ciclo solar, que apresenta períodos de máxima e mínima atividades do Sol num período de 10,6 anos. Com base na análise dos dados obtidos dos satélites, Jacchia sugeriu que fosse utilizado, ao contrário do número de manchas, o fluxo solar ou intensidade espectral do Sol na faixa de 10.7 cm de comprimento de onda (2800 MHz). Já se sabia, anteriormente, que este fluxo, denotado por  $F_{10.7}$ , relacionava-se com os períodos de atividade solar, e eram medidos diariamente pelo Herzberg Institute of Astrophysics, do Canadá, desde 1937, pois influencia as radiocomunicações. O fluxo solar apresenta uma variação entre 10 (em períodos de fraca atividade) até 400 (durante explosões solares), em unidades de  $10^{-22}$  W/m<sup>2</sup>Hz. No modelo J77 (Jacchia, 1977), a temperatura exosférica média é dada por:

$$T_{1/2} = 5.48 \bar{F}_{10.7}^{0.8} + 101.8 F_{10.7}^{0.4}, \quad (3.62)$$

onde  $\bar{F}_{10.7}$  é o fluxo solar médio (num intervalo de 2 meses, aproximadamente) e  $F_{10.7}$  é o fluxo diário observado. Com base na temperatura exosférica, Jacchia propôs um perfil de temperatura em função da altitude baseado num arco tangente, conforme mostra a Figura 3.12. Este perfil parte de condições fixas a 90 km de altitude, com um gradiente de temperatura nulo, atinge um ponto de inflexão a 125 km e caminha-se assintoticamente até a temperatura exosférica. Este perfil de temperatura é então utilizado na equação barométrica, que obtém valores de densidade e composição a 100 km. Estes valores serão utilizados como ponto inicial na integração da equação de difusão, que calcula a densidade e composição numa dada altitude. Os valores da massa molecular média e da densidade atmosférica podem ser vistos nas Figuras 3.13 e 3.14.

A densidade calculada pela equação da difusão constitui o denominado perfil estático da atmosfera. Sobre este perfil são acrescentados diversos efeitos que causam variações significativas na densidade média. Todos estes efeitos possuem modelagem empírica, realizada através do ajuste de curvas que dependem de diversos fatores. O principal efeito é a atividade geomagnética, causada pela interação do vento solar com o campo magnético terrestre, e que provoca um aquecimento da atmosfera principalmente durante as explosões solares que ocorrem com maior frequência nos períodos de grande atividade solar. O vento solar, composto basicamente por núcleos de He, distorce o campo magnético da Terra, fazendo com que o campo assuma a forma de uma gota cuja cauda aponta na direção contrária à do Sol (Figura 3.15). As distorções introduzidas pelo vento solar no campo geomagnético são sentidas na superfície e medidas em intervalos de 3 horas por 12 em observatórios magnéticos espalhados em vários continentes. Estas informações são então repassadas ao Institute für Geophysik, na Alemanha, que divulga então o índice planetário da atividade geomagnética  $K_p$ , em tabelas com intervalos de 3 horas entre dois valores. O índice planetário possui uma escala quase logarítmica, e assume apenas valores discretos entre 0 e 10, com incrementos de 1/3: 0o, 1-, 1o, 1+, 2-, 2o, 2+, etc. Em virtude da escala ser quase logarítmica, e também em parte por adotar valores discretos, os modelos atmosféricos

raramente usam o índice planetário, preferindo a amplitude planetária da atividade geomagnética,  $A_p$ , que possui escala linear entre 0 e 400. Como a amplitude tem seus valores definidos em função do índice planetário, ela também assume apenas 28 valores discretos neste intervalo: 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, etc. No modelo J77 o índice planetário deve ser fornecido com uma defasagem no tempo que depende da latitude magnética do local, podendo atingir até 7 horas de diferença. A atividade geomagnética provoca um incremento na temperatura exosférica, principalmente nas regiões polares, pois nestas regiões as partículas do Sol aprisionadas pelo campo geomagnético atingem baixas altitudes.

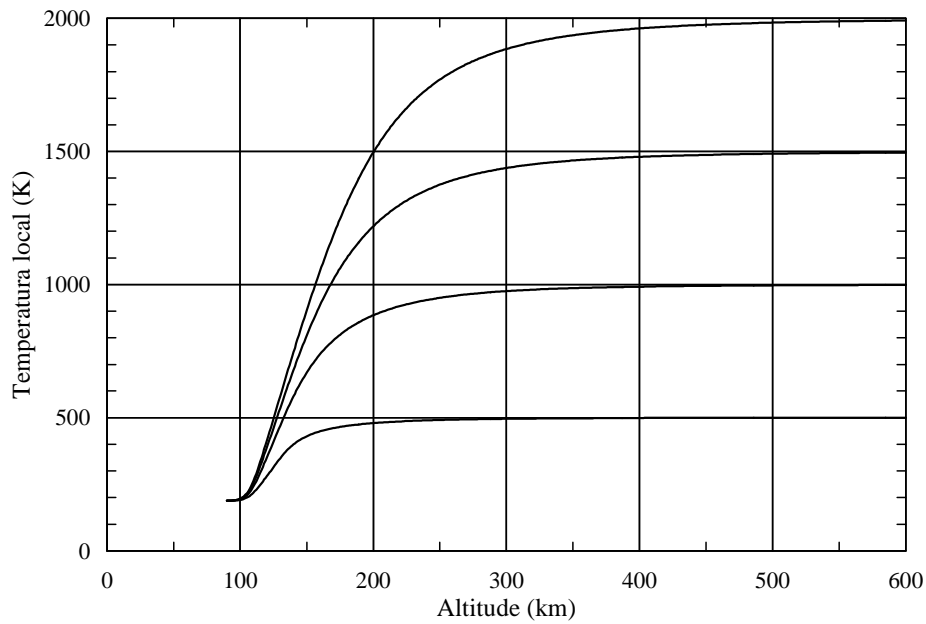


Figura 3.12 - Perfil da temperatura local para 4 temperaturas exosféricas distintas.

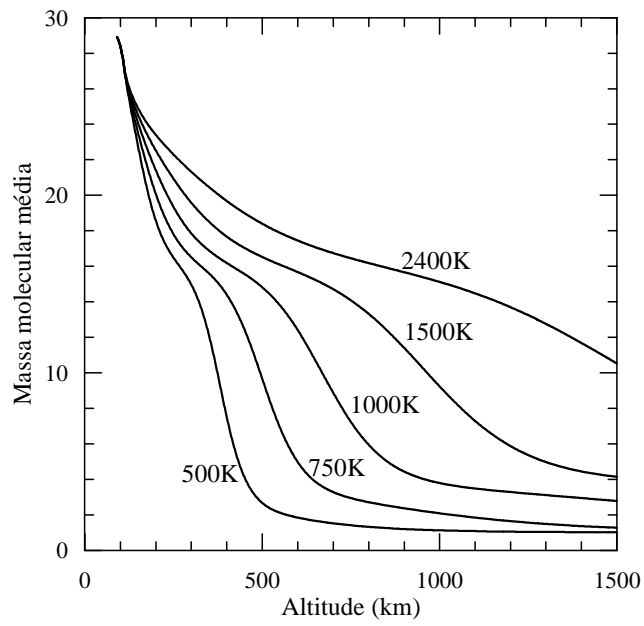


Figura 3.13 - Massa molecular média da atmosfera em função da temperatura exosférica.

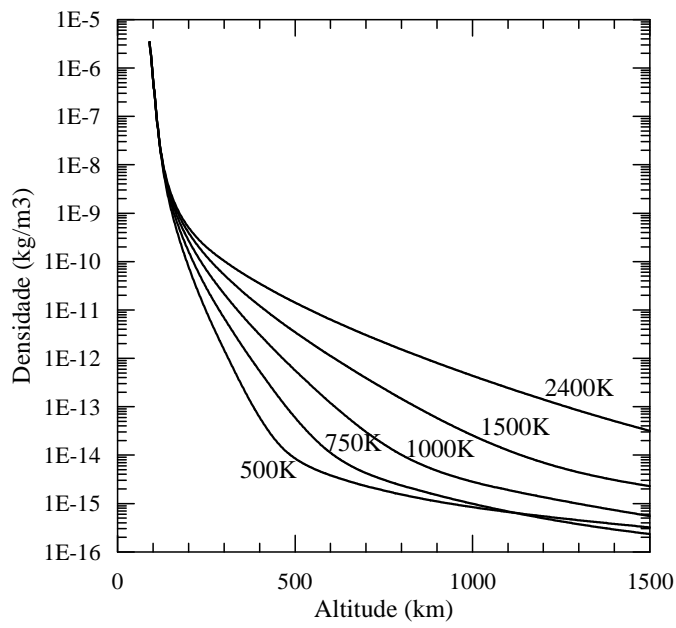


Figura 3.14 - Densidade atmosférica em função da altitude e da temperatura exosférica.

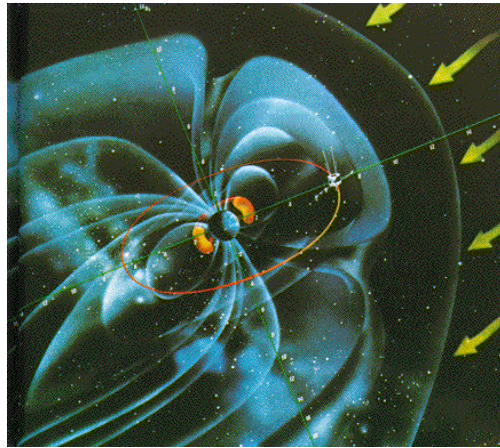


Figura 3.15 - Interação do vento solar com o campo geomagnético.

A densidade atmosférica também depende do ângulo formado entre a direção do Sol e o local onde se encontra o satélite, medido a partir do centro da Terra. Este efeito, conhecido com variação diária ou diurna, provoca um valor máximo da temperatura exosférica ao redor das 17 horas, com um mínimo às 5 horas local. No modelo J77 este efeito depende também da declinação solar (época do ano).

Outro efeito decorre de variações sazonais-latitudeis, que dependem, como o nome indica, da época do ano e da latitude (e também da altitude). Da mesma forma com que foi feito na atividade geomagnética, o modelo J77 introduz um incremento na temperatura exosférica devido aos efeitos da variação sazonal-latitudeis.

Como a Terra passa por dois equinócios durante um ano, nesta época (em abril e outubro) ocorrem dois períodos de máxima variação semi-anual. Este efeito depende, portanto, da época do ano e da altitude.

### 3.5.3.1 Atividade solar

Como foi dito, a atividade solar provoca um aquecimento na atmosfera, alterando a densidade e composição. A atividade, representada pelo fluxo solar  $F_{10.7}$ , possui valores entre 10 (baixa atividade) e 400 (alta atividade), medidos pelo Herzberg Institute of Astrophysics, do Canadá. O valor observado é então corrigido para uma unidade astronômica, isto é, corrige-se o efeito da excentricidade da órbita da Terra. Embora o valor diário medido seja altamente imprevisível, seu valor médio apresenta um comportamento que permite, até certo ponto, fazer previsões (Lopes e Carrara, 1984). A previsão do valor médio é mais confiável quanto menor for o intervalo de previsão. A precisão obtida nesta previsão depende também se o Sol encontra-se num período de mínima ou máxima atividade. Os períodos de mínima atividade são bastante regulares, o que aumenta a confiabilidade da previsão. Nos períodos de máxima atividade o fluxo apresenta valores diários erráticos de maior amplitude, e cuja média pode atingir maior ou menor intensidade de ciclo para ciclo, como mostrado na Figura 3.16, cujos valores

foram obtidos no Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO, 2008). Um exemplo dos valores divulgados pelo DRAO é mostrado no Apêndice B.

O fluxo solar diário é mostrado na Figura 3.17. Nota-se que em 2 de abril de 2001 houve uma tempestade solar registrada pelo índice, que atingiu um valor de 560. Estas explosões duram apenas poucas horas, nem sempre são registradas, e ocorrem principalmente em períodos de alta atividade, como na época mostrada na figura.

Valores medidos do fluxo solar e da atividade geomagnética foram agrupados num único arquivo (Carrara, 1989), com a intenção de aumentar a confiabilidade dos modelos numéricos. Com base neste banco de dados, foram desenvolvidas interfaces que interpolam e ajustam os valores medidos de acordo com as especificações dos modelos atmosféricos.

### 3.5.4 Modelos atmosféricos

Os modelos matemáticos da densidade atmosférica baseiam-se na integração da equação de difusão, que é uma equação diferencial que envolve a temperatura, o número de densidade e deve ser integrado numericamente na altitude. Em vista da necessidade da integração numérica para avaliar a densidade numa dada altitude, procurou-se desenvolver modelos analíticos aproximados com a intenção de melhorar o desempenho computacional. Tanto os modelos analíticos quanto os numéricos foram implementados em computador no INPE (Carrara, 1990).

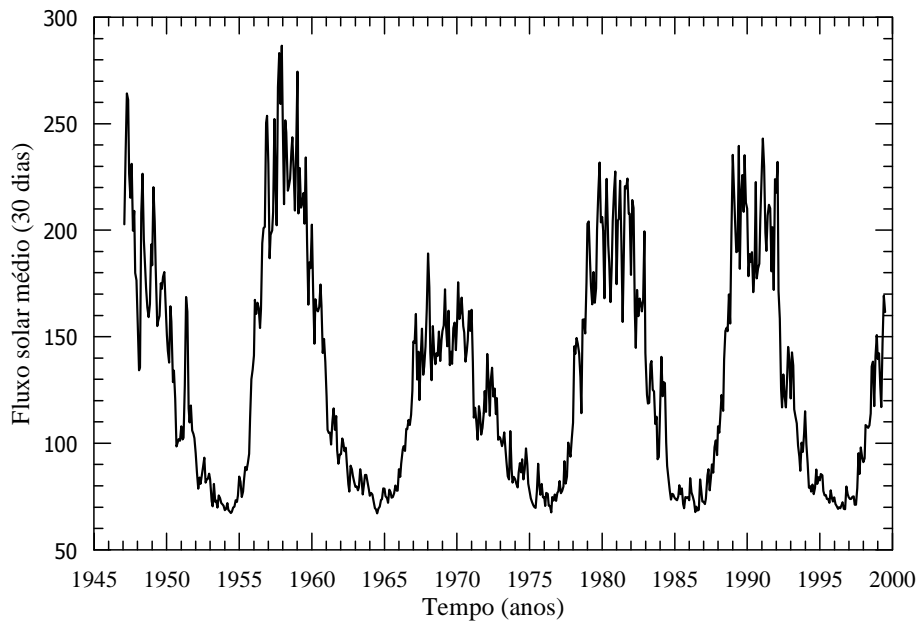


Figura 3.16 - Fluxo solar médio  $\bar{F}_{10.7}$ .

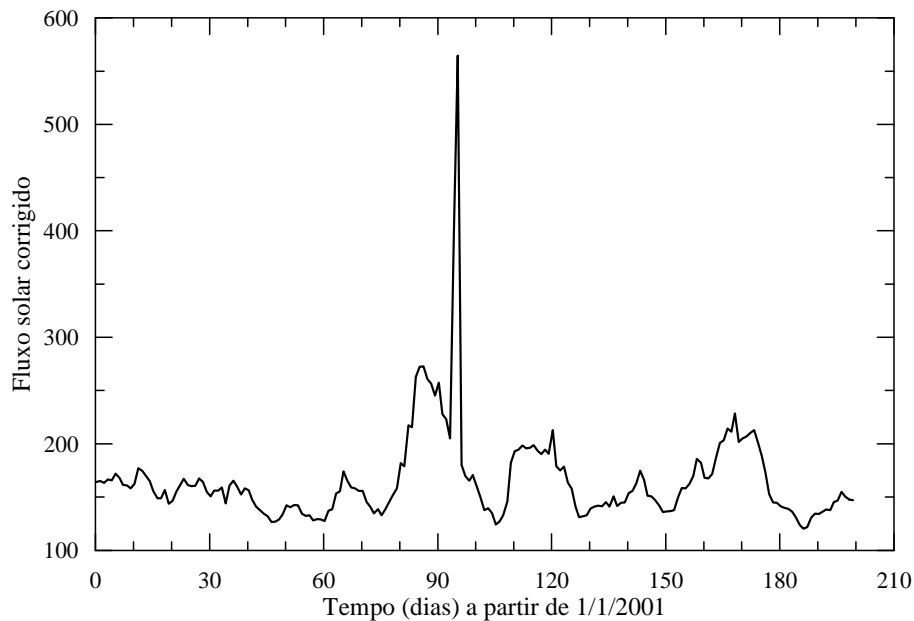


Figura 3.17 - Fluxo solar diário  $F_{10.7}$ .

Conta-se, presentemente, com o modelo J70 (Jacchia, 1972), baseado no modelo J64 (Jacchia, 1964) do mesmo autor. Este modelo originou a versão analítica de Jacchia-Roberts (Roberts Jr., 1971), também implementada no INPE, e posteriormente revisada para incluir melhorias (Kuga, 1985). A versão de 1977 do modelo de Jacchia foi implementada por Matos (1984), que também implementou duas versões analíticas do mesmo modelo: a versão De Lafontaine e Hughes (1983) e uma adaptação do modelo Jacchia-Lineberry (que originalmente havia sido desenvolvido para o J70) para o modelo J77 (Mueller, 1982).

Também bastante utilizados são os modelos analíticos MSIS-83 e MSIS-86 (Hedin, 1987), dos quais foi implementado este último.

### 3.6 Forças de Pressão de Radiação Solar

As órbitas de satélites cuja razão entre a área e sua massa é muito grande podem sofrer efeitos significativos devido à força de pressão de radiação solar. A pressão de radiação é causada pela troca de quantidade de movimento dos fótons solares com a superfície externa do satélite. A quantidade de movimento associada a cada fóton depende da energia do próprio fóton e, portanto, a força aplicada ao satélite depende da energia irradiada pelo Sol. Na órbita da Terra, esta energia é constante (não varia com a atividade solar) e vale aproximadamente  $1350 \text{ W/m}^2$ .

A aceleração causada pela pressão de radiação atua na direção Sol-satélite, no sentido oposto ao versor Terra-Sol,  $\hat{r}_S$ , e é dada por:

$$\vec{A}_{PR} = -v C_R \frac{S}{m} P_S \hat{r}_S, \quad (3.63)$$

onde  $v$  é o fator de eclipse, que vale 0 quando o satélite se encontra na sombra da Terra e 1 quando o satélite está iluminado,  $C_R$  é um fator que depende da refletividade do satélite, denominado de coeficiente de pressão de radiação,  $S$  é a secção transversal quando observada na direção de incidência dos raios solares e  $m$  é a massa do satélite.  $P_S$  é a pressão de radiação na órbita terrestre, e vale aproximadamente  $4.55 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ .  $\vec{r}_S$  é o raio vetor do Sol relativo à Terra.

O fator de eclipse pode ser calculado conforme a posição do satélite em relação à Terra e ao plano terminador, que separa as regiões da luz e sombra da Terra. Da fig. 3.18, se

$$h = \vec{r} \cdot \vec{r}_s \geq 0, \quad (3.64)$$

então o satélite está antes do terminador e portanto  $v = 1$ . Quando  $h < 0$ , então se  $d \geq R_t$ ,  $v = 1$  (iluminado). Se  $d < R_t$ , então  $v = 0$  (sombra), onde  $R_t$  é o raio terrestre (médio) e  $d$  é o módulo do produto vetorial:

$$d = |\vec{r} \wedge \hat{r}_s|. \quad (3.65)$$

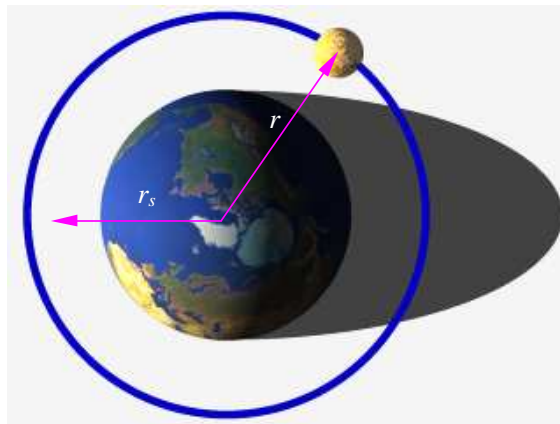


Figura 3.18 – Geometria entre a órbita e a sombra da Terra

Como foi dito, a constante  $P_S$  está diretamente relacionada à intensidade de radiação média nas proximidades da órbita da Terra e é definida por:

$$P_S = \frac{W}{c} \quad (3.66)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz (300000 km/s) e  $W$  é a intensidade de radiação, definida como a energia incidente por unidade de área, por unidade de tempo emitida pelo Sol. Esta intensidade oscila com variação de cerca de 7% num ano em função da excentricidade da órbita terrestre, e vale:

$$W = W_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2, \quad (3.67)$$

onde  $I_0$  é a intensidade de radiação à uma unidade astronômica, igual a  $1350 \text{ W/m}^2$ ,  $R$  é a distância da Terra ao Sol e  $R_0$  é a distância média da Terra ao Sol (uma unidade astronômica). A pressão de radiação fica então:

$$P_s = \frac{W_0}{c} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 = 4.5 \cdot 10^{-6} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \text{ N/m}^2. \quad (3.68)$$

As perturbações devido à pressão de radiação solar são pequenas para satélites de construção normal mas são grandes quando a razão entre a área e a massa for alta. Os efeitos são periódicos e todos os elementos orbitais são afetados.

A expressão resultante para a pressão de radiação solar fica então:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = v C_R \frac{S}{m} P_s \begin{bmatrix} -x_s / r_s \\ -y_s / r_s \\ -z_s / r_s \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

### 3.6.1 Coeficiente de pressão de radiação

O coeficiente de pressão de radiação  $C_R$  é em geral admitido nas aplicações que envolvem propagação de órbita com valores compreendidos entre 1 e 3. Embora este procedimento gere precisão suficiente na maioria das aplicações, pode-se contudo recorrer a modelos mais sofisticados quando a precisão requerida for mais acentuada, ou então em órbitas onde a pressão de radiação solar é dominante (como nas órbitas geoestacionárias, por exemplo). O coeficiente pode igualmente ser obtido a partir da aplicação de teorias que modelam a interação da luz com superfícies sólidas. Os modelos existentes foram formulados nas décadas de 60 e 70, e aplicados nas missões interplanetárias para Marte, nas quais a pressão de radiação era o efeito predominante (Evans, 1964 e Georgevic, 1973a e 1973b).

O valor de  $C_R$  é maior em satélites que possuem superfícies altamente refletoras, e depende tanto da geometria quanto das propriedades das superfícies externas. A modelagem matemática da força de radiação é semelhante àquela empregada na força aerodinâmica, e muitas vezes são calculadas juntas nos programas computacionais. Para o seu cálculo, define-se inicialmente a intensidade de radiação, que representa a energia

**[V1] Comentário:** Página: 84  
Incluir mais informações a respeito do efeito da pressão de radiação nos elementos orbitais.



por unidade de área e unidade de tempo que deixa um elemento de área  $dA$  numa direção  $\theta$  (com relação à normal) e subtendida num ângulo sólido  $d\Omega$  (Figura 3.19):

$$I = \lim_{\substack{dA \rightarrow 0 \\ dt \rightarrow 0 \\ d\Omega \rightarrow 0}} \frac{d^5 E}{dA dt d\Omega \cos \theta} \quad (3.70)$$

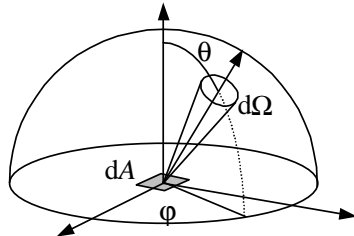


Figura 3.19 - Intensidade de radiação emitida por um elemento de área.

A energia irradiada pelo elemento é dada pela integral da intensidade de radiação em todo o hemisfério visível:

$$W_i = \int_H I \cos \theta d\Omega = \pi I, \quad (3.71)$$

desde que seja assumido que a intensidade de radiação seja isotrópica, isto é, não dependa da direção de emissão  $\theta$  e nem do ângulo  $\phi$ . Considere agora um elemento de área  $dA$  do satélite e um sistema de coordenadas fixo a este elemento, com o eixo  $z_e$  coincidente com a normal e com os eixos  $x_e$  e  $y_e$  contidos no plano do elemento, tal que  $y_e$  esteja também contido no plano formado por  $z_e$  e pela direção de incidência dos raios solares  $\hat{s}$  (com  $\hat{s} = -\hat{r}_s$ ), como mostrado na Figura 3.20.

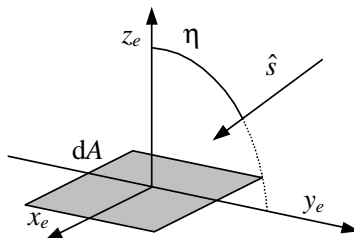


Figura 3.20 - Sistema de coordenadas do elemento de área do satélite

Nesta situação, a força aplicada neste elemento devido à radiação incidente vale:

$$d\vec{F}_i = -P_s dA \cos \eta \hat{r}_s \quad (3.72)$$

Decompondo agora esta força nas direções normal e tangencial (nas direções de  $z_e$  e  $y_e$ , respectivamente), tem-se:

$$dP_i = -P_s dA \cos^2 \eta, e \quad (3.73)$$

$$dT_i = -P_s dA \cos \eta \sin \eta \quad (3.74)$$

A radiação incidente interage com a superfície, podendo deixá-la após refletir, ser absorvida ou ser transmitida. A radiação absorvida eleva a temperatura do elemento de superfície, que passa a irradiar no espectro do infravermelho, e também a conduzir calor para os elementos de área vizinhos. A convecção é desprezada pelo fato de haver quase vácuo nas altitudes orbitais. A contribuição da irradiação pode ser levada em conta, desde que se disponha da temperatura absoluta de cada elemento de superfície. Entretanto, a parcela de radiação irradiada é geralmente pequena, e quase sempre simétrica com relação ao satélite, de tal forma que sua resultante, quando integrada em toda a superfície externa é praticamente nula. Desta forma, justifica-se a sua exclusão da formulação apresentada aqui.

A radiação transmitida só é efetiva em superfícies transparentes, que são relativamente raras nos satélites. A inclusão deste efeito na modelagem não é complicada, porém torna a descrição das áreas transparentes bastante complexa na integração. Em vista disso, a transmissão será igualmente excluída.

A parcela refletida da radiação incidente pode se dar da forma especular ou na forma difusa. Na forma especular, a radiação deixa a superfície num ângulo igual ao ângulo de incidência, e contida no plano formado pela normal e a direção de incidência dos raios solares. Já na radiação difusa não existe direção preferencial para a reflexão, que se dá em todas as direções, como mostra esquematicamente a Figura 3.21.

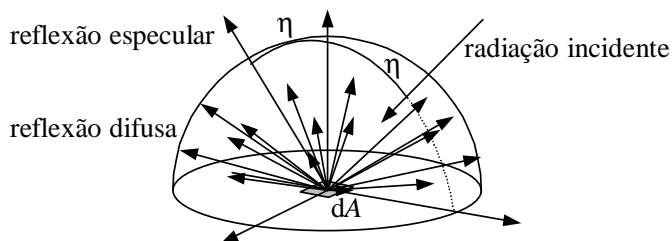


Figura 3.21 - Reflexão especular e difusa.

Este modelo que separa a reflexão em especular e difusa não é exato. Há materiais que não se comportam desta forma. Contudo este modelo é bastante preciso para as aplicações espaciais. Considerando que  $\gamma$  representa a parcela da radiação incidente que é refletida ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), então  $1 - \gamma$  constitui a parcela absorvida. Por sua vez, se  $\rho$  for a parcela especular da radiação refletida ( $0 \leq \rho \leq 1$ ), então a força no elemento devido à

radiação especular que deixa a superfície, nas direções normal e tangencial será dada por:

$$dP_e = -\gamma\rho P_s dA \cos^2 \eta, e \quad (3.75)$$

$$dT_e = \gamma\rho P_s dA \cos \eta \sin \eta \quad (3.76)$$

Para obter a força devido à radiação difusa, será necessário levar em conta que esta radiação espalha-se em todas as direções. Neste caso, a intensidade de radiação será dada por:

$$I = \frac{\gamma}{\pi} (1-\rho) W \cos \eta \quad (3.77)$$

A força agindo na superfície devido à radiação difusa que deixa a superfície num ângulo  $\theta$  com relação à normal e subtendida num ângulo sólido dado por  $dA'/r^2$  fica:

$$dF_d = \frac{I}{c} dA \cos \theta \frac{dA'}{r^2} \quad (3.78)$$

Lembrando que o ângulo sólido pode ser expresso por  $\sin\theta d\theta d\varphi$ , então esta força pode ser decomposta nas direções de  $x_e$ ,  $y_e$  e  $z_e$ , respectivamente, resultando:

$$dF_{dx} = -\frac{\gamma}{\pi} (1-\rho) P_s dA \cos \eta \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \quad (3.79)$$

$$dF_{dy} = -\frac{\gamma}{\pi} (1-\rho) P_s dA \cos \eta \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi \quad (3.80)$$

$$dF_{dz} = -\frac{\gamma}{\pi} (1-\rho) P_s dA \cos \eta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.81)$$

Efetuada a integral destas componentes, com  $\theta$  variando de 0 a  $\pi/2$  e com  $\varphi$  variando de 0 a  $2\pi$ , as componentes em  $x_e$  e  $y_e$  resultam nulas, devido à simetria. A componente da força na direção normal fica:

$$dP_d = -\frac{2}{3} \gamma (1-\rho) P_s dA \cos \eta \quad (3.82)$$

A resultante da força de pressão de radiação nas direções normal e tangencial num elemento de área fica, respectivamente:

$$dP_R = -P_S \cos \eta \left[ (1 + \gamma \rho) \cos \eta + \frac{2}{3} \gamma (1 - \rho) \right] dA \quad (3.83)$$

$$dT_R = -P_S \cos \eta (1 - \gamma \rho) \sin \eta dA \quad (3.84)$$

Lembrando agora que

$$\cos \eta = \hat{n} \cdot \hat{r}_S \quad (3.85)$$

e que a direção de  $y_e$  pode ser colocada em função das direções da normal  $\hat{n}$  e do Sol  $\hat{r}_S$ :

$$\hat{j}_e = -\cotg \eta \hat{n} + \operatorname{cosec} \eta \hat{r}_S \quad (3.86)$$

a força resultante no elemento fica:

$$d\vec{F}_R = (dP_R - dT_R \cotg \eta) \hat{n} + dT_R \operatorname{cosec} \eta \hat{r}_S \quad (3.87)$$

Esta força deverá ser integrada em toda a superfície do satélite exposta à incidência direta da luz solar, isto é, as superfícies encobertas por outras ou na sombra não devem ser consideradas. As superfícies expostas à luz obedecem à desigualdade:

$$\cos \eta \geq 0 \quad (3.88)$$

Deve-se tomar cuidado com as superfícies que mesmo satisfazendo a relação acima podem ainda assim estar encobertas por outras partes do próprio satélite. Isto acontece quando o satélite tiver uma geometria com concavidades, ou tal que uma parte externa qualquer do satélite consiga ver uma outra parte também qualquer. Neste caso, as partes sombreadas também devem ser retiradas da integração.

O efeito da radiação absorvida poderá ser levado em conta desde que se conheça, a princípio, a temperatura do elemento de área e sua emissividade no espectro do infravermelho. Definindo, neste caso, o coeficiente  $\upsilon$  como:

$$\upsilon = \frac{\sigma T_w^4 dA}{c P_S \cos \eta} \quad (3.89)$$

onde  $\sigma$  é a emissividade e  $T_w$  a temperatura absoluta do elemento, pode-se modificar a pressão de radiação na direção normal,  $dP_R$  para:

$$dP_R = -P_S \cos \eta \left\{ (1 + \gamma \rho) \cos \eta + \frac{2}{3} [\gamma (1 - \rho) + \nu (1 - \gamma)] \right\} dA \quad (3.90)$$

O coeficiente  $\nu$  está geralmente próximo de 1. Se a superfície recebe mais calor do Sol do que irradia para o ambiente, então  $\nu$  é menor do que 1. Radiadores de calor emitem mais energia do que recebem, e, portanto,  $\nu$  é maior do que 1. Superfícies adiabáticas, isto é, que irradiam a mesma quantidade de calor que recebem tem o coeficiente igual a 1, que é ainda a melhor opção caso não se conheça a temperatura do elemento.

Note que a inclusão da irradiação faz com que as superfícies contribuam para a força resultante mesmo que não estejam recebendo luz solar direta. O limite de integração dado pela desigualdade 3.88 deve portanto ser modificado para levar em conta este efeito.

O coeficiente de radiação fica então definido pela adimensional da componente da força de radiação na direção de incidência da radiação:

$$C_R = -\frac{\vec{F}_R \cdot \hat{r}_S}{P_S S} \quad (3.91)$$

O coeficiente de pressão de radiação pode ser obtido analiticamente para corpos de geometria simples, como esferas, cones, cilindros, cubos, etc. Numa esfera, este coeficiente resulta:

$$C_R = 1 + \frac{4}{9} \gamma (1 - \rho) \quad (3.92)$$

no caso de  $\nu$  ser nulo. Se, contudo, for considerado que  $\nu$  é unitário, então o coeficiente resulta:

$$C_R = \frac{1}{9} (13 - 4\gamma\rho) \quad (3.93)$$

A Figura 3.22 mostra o coeficiente de radiação  $C_R$  numa esfera, em função da refletividade da superfície  $\gamma$ , para 3 valores distintos do coeficiente de reflexão especular  $\rho$  (0, 0.5 e 1) e para duas situações: com irradiação térmica adiabática ( $\nu = 1$ ) e sem irradiação térmica ( $\nu = 0$ ). Nota-se que em qualquer situação o coeficiente  $C_R$  está sempre compreendido entre 1 e 1.44.

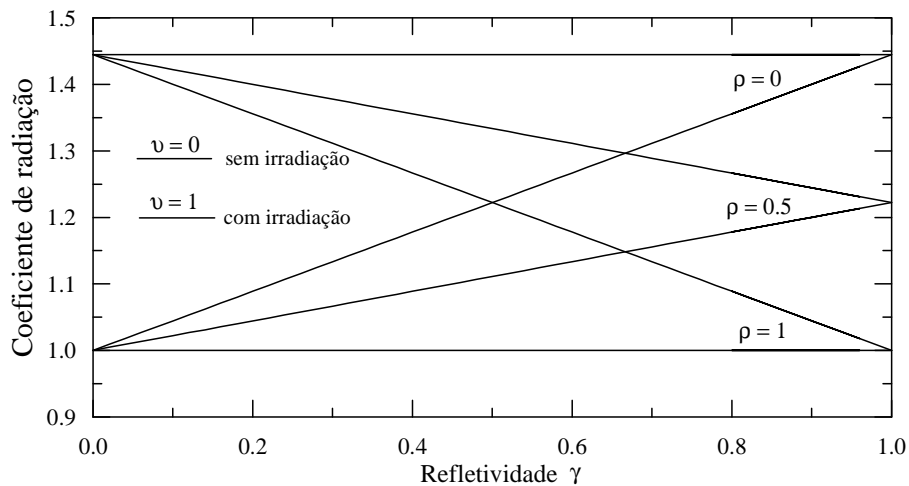


Figura 3.22 - Coeficiente de pressão de radiação numa esfera

### 3.7 Albedo e radiação terrestre

O albedo é a radiação solar refletida pela Terra de volta ao espaço, e depende das propriedades refletoras da superfície terrestre. A parcela de radiação devolvida é portanto maior nos pólos (onde a presença de grandes massas de gelo aumenta a refletividade) e menor no equador. Depende assim da latitude  $\phi$ . O coeficiente de albedo, isto é, a proporção da radiação solar que é refletida difusamente pela Terra, é definido por:

$$a(\phi) = a_0 + a_2 \text{sen}^2(\phi + c_2) + \dots \quad (3.94)$$

onde  $a_0 = 0,219$ ,  $a_2 = 0,410$  e  $c_2 \cong 0$ . Estes valores indicam que a reflexão média da Terra vale aproximadamente 0,34.

A força de pressão de radiação age sobre o satélite na direção Sol-satélite enquanto a de albedo age na direção Terra-satélite. O efeito do albedo não é uniforme ao longo da órbita, já que o satélite passa por regiões nas quais a parcela da Terra visível encontra-se totalmente iluminada pelo Sol, parcialmente iluminada ou ainda completamente na sombra. Além disso, a quantidade de radiação solar que atinge uma dada região da Terra (e, portanto, também a energia refletida) depende do ângulo solar, de tal forma que é máxima quando o ponto estiver na linha Terra-Sol e mínima quando estiver a  $90^\circ$  desta direção. Isto significa que o albedo deve ser integrado sobre toda a parcela visível da superfície terrestre que estiver sendo iluminada pelo Sol. Ademais, pode, em certas circunstâncias, resultar numa força com componente horizontal, além da componente vertical (quando, por exemplo, apenas metade da área visível estiver sendo iluminada pelo Sol). Infelizmente a integral não admite solução analítica, e, sendo a integral numérica bastante custosa para a maioria dos propagadores de órbita, resta fazer algumas hipóteses simplificadoras. Admite-se, a princípio, que toda a radiação refletida

deve-se exclusivamente a um elemento de área diretamente abaixo do satélite. Para compensar este efeito, introduz-se um fator  $\eta$  no coeficiente de albedo, na forma (Lautman, 1977):

$$a = \eta (a_0 + a_2 \text{sen}^2 \phi) \quad (3.95)$$

onde  $\eta = 1$  para a região I e  $\eta = 0$  para as regiões II e III, conforme a Figura 3.8, isto é: se  $h \geq 0$ , então  $\eta = 1$  e se  $h < 0$ , então  $\eta = 0$ .

A força de albedo é na direção radial e é dada por:

$$\vec{F}_A = a(\phi) A_{PR} \hat{r}. \quad (3.96)$$

Logo, a expressão geral para o albedo fica na forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = v C_R \frac{S}{m} P_S \eta \left[ a_0 + a_2 \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

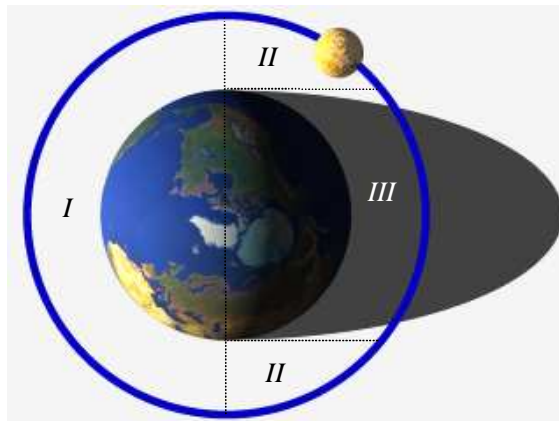


Figura 3.8 – Regiões de separação do albedo terrestre.

### 3.8 Equação Geral das Forças que Atuam no Satélite

A equação do movimento do satélite, incluindo as principais forças que atuam nele, é:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_G + \vec{a}_A + \vec{a}_L + \vec{a}_S + \vec{a}_{PR} + \vec{a}_{ML} + \vec{a}_{MS}, \quad (3.98)$$

onde  $\vec{a}_G$  é aceleração do campo gravitacional da Terra,  $\vec{a}_A$  é a aceleração devido ao arrasto,  $\vec{a}_L$  é aceleração devido à atuação da Lua,  $\vec{a}_S$  devido à atração do Sol,  $\vec{a}_{PR}$  deve-se à pressão de radiação solar,  $\vec{a}_{ML}$  é a aceleração devida às marés provocadas pela Lua e  $\vec{a}_{MS}$  deve-se às marés provocadas pelo Sol.

### 3.9 Problemas

- 1) Elaborar um gráfico de  $\ddot{r}_{ar}(r, \lambda, \phi)$  e  $|\ddot{r}_a|$ , onde  $\ddot{r}_{ar}$  é a componente da aceleração devido ao geopotencial na direção radial  $r$ , para  $r = a_e$ ,  $\lambda = 0$ , e  $-90^\circ < \phi < 90^\circ$ , utilizando para isso o modelo GEM10.
- 2) Utilizar um integrador numérico numa órbita cujo vetor de estado no instante inicial é dado por:

$$X = (-3850, 3072, 4925) \text{ km e } \dot{X} = (-4.838, -5.839, -0.047) \text{ km/s,}$$

em duas situações:

- a) Movimento kepleriano puro (somente corpo central)
- b) Geopotencial considerando apenas os coeficientes zonais até ordem 6

Apresentar os resultados na forma gráfica:  $M(t)$ ,  $\omega(t)$  e  $\Omega(t)$ .

- 3) Traçar o gráfico do logaritmo da densidade atmosférica em função da altitude ( $\log p \times h$ ), para a faixa  $90 \leq h \leq 1200$  km, e também em função do ângulo horário com o Sol,  $H$  ( $0 \leq H \leq 24$ h). Considere  $H = 0, 6, 12$  e  $18$ h no primeiro gráfico e  $h = 200, 400, 700$  e  $1200$  km no segundo. Considere também os seguintes valores em ambos: latitude  $\phi = 0$ , fluxo solar  $F_{10.7} = \bar{F}_{10.7} = 200$  e atividade geomagnética  $A_p = 0$ .
- 4) Integrar uma órbita numericamente até que a altura do apogeu atinja 95 km. Considere os seguintes valores: altura do perigeu inicial de 200 km, altura do apogeu inicial de 2000 km, inclinação de 30 graus, elementos angulares nulos, relação área-sobre-massa de  $30 \text{ m}^2/\text{kg}$  (balão), fluxo solar médio e fluxo solar diário de 200 Jansen, atividade geomagnética de 5. Deve-se adotar todos os demais valores necessários, e apresentar os resultados na forma gráfica com a altura do apogeu e a altura do perigeu em função do tempo.



## 4 MÉTODOS ANALÍTICOS DE PERTURBAÇÃO

### 4.1 Introdução

Em geral, a integração do sistema dinâmico, que é não-linear, não conservativo e complexo na forma, é intratável e a única esperança é deduzir uma solução aproximada com precisão razoável. Estas técnicas de obtenção de uma solução aproximada são denominadas, na literatura, métodos de perturbação.

Diversas teorias de órbitas de satélites são classificadas em três métodos fundamentais. O primeiro é o método analítico, ou seja, o método geral da perturbação. Neste método, a derivação da teoria envolve o uso de aproximações, expansões em séries e integração analítica. O estado do satélite é dado em função do tempo a partir das soluções fechadas. Embora as soluções que ficam, às vezes, na forma paramétrica necessitam de computador, não envolvem nenhuma integração numérica em computador. As características principais dos métodos analíticos são:

- i) Manipulações matemáticas laboriosas na formulação.
- ii) Modelos simples de forças perturbadoras, com aplicação restrita, a fim de obter soluções fechadas.
- iii) Melhor visualização dos efeitos de várias perturbações, mesmo na derivação da teoria, assim facilitando a compreensão do comportamento físico de um satélite em geral, mesmo antes de ser aplicada a um satélite específico.
- iv) Computacionalmente rápido.
- v) Muito geral, por natureza.
- vi) Precisão razoável.
- vii) Cálculos feitos num só passo, independentemente do intervalo de tempo.

Os métodos analíticos tendem a ser complexos quando se quer alta precisão, mas, em geral, são econômicos. A estimação da trajetória pode ser precisa em intervalos de tempo curtos, mas se torna menos precisa com o tempo.

Nos métodos analíticos, a função densidade atmosférica é sempre expressa por uma função simples para garantir integrabilidade analítica do sistema dinâmico. Além disso, as funções gravitacionais da Terra e de outros corpos celestes são truncadas substancialmente para evitar longas expressões analíticas. Em vários métodos, de fato, somente alguns harmônicos zonais da função gravitacional da Terra são incluídos e as perturbações devidas a outros corpos celestes são geralmente ignoradas.

### 4.2 Método de Brouwer

O método clássico de Brouwer (Brouwer, 1961) foi um dos primeiros métodos analíticos e serviu de modelo básico para vários outros métodos. Ignorando o arrasto atmosférico, Brouwer estudou os efeitos de perturbação considerando somente o potencial gravitacional da Terra até o quinto harmônico. O segundo harmônico foi considerado

como uma quantidade pequena de primeira ordem e os harmônicos restantes como termos de segunda ordem. A expressão do potencial até o quinto harmônico é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{U} = \frac{\mu}{r} & \left[ 1 + J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \phi \right) - \right. \\ & - J_3 \left( \frac{R_e}{r} \right)^3 \left( \frac{5}{2} \text{sen}^3 \phi - \frac{3}{2} \text{sen} \phi \right) - \\ & - J_4 \left( \frac{R_e}{r} \right)^4 \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \text{sen}^2 \phi + \frac{35}{8} \text{sen}^4 \phi \right) - \\ & \left. - J_5 \left( \frac{R_e}{r} \right)^5 \left( \frac{15}{8} \text{sen} \phi - \frac{35}{4} \text{sen}^3 \phi + \frac{63}{8} \text{sen}^5 \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

As formas do segundo ao quinto harmônicos zonais são mostradas na Figura 4.1

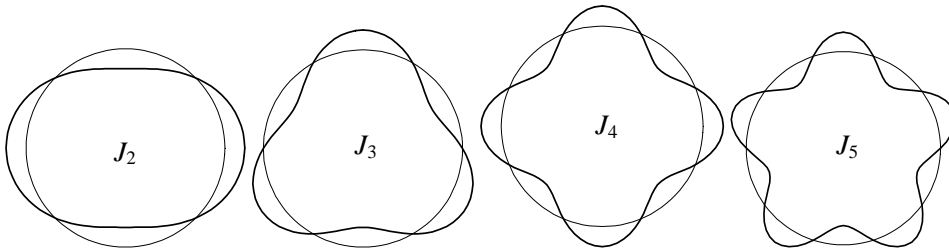


Figura 4.1 – Influência dos harmônicos zonais no perfil aparente da Terra

Conforme mostra a Figura 4.2, pode-se obter o termo  $\text{sen} \phi$  em função dos elementos como na relação:

$$\text{sen} \phi = \text{sen} i \text{sen}(\omega + f) \quad (4.2)$$

$$\text{sen}^2 \phi = \text{sen}^2 i \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega + 2f) \right] \quad (4.3)$$

$$\text{sen}^3 \phi = \text{sen}^3 i \left[ \frac{3}{4} \text{sen}(\omega + f) - \frac{1}{4} \text{sen}(3\omega + 3f) \right] \quad (4.4)$$

$$\text{sen}^4 \phi = \text{sen}^4 i \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\omega + 2f) + \frac{1}{8} \cos(4\omega + 4f) \right] \quad (4.5)$$

$$\sin^5 \phi = \sin^5 i \left[ \frac{5}{8} \sin(\omega + f) - \frac{5}{16} \sin(3\omega + 3f) + \frac{1}{16} \sin(5\omega + 5f) \right] \quad (4.6)$$

A hamiltoniana define a energia específica total do sistema na forma:

$$F = \bar{U} - \frac{1}{2} V^2 \quad (4.7)$$

Substituindo as Expressões 4.1 a 4.6 na hamiltoniana, e usando as variáveis de Delaunay, definidas por:

$$\begin{aligned} L_1 &= L = \sqrt{\mu a}, & l_1 &= l = M, \\ L_2 &= G = L\sqrt{1-e^2}, & l_2 &= g = \omega, \\ L_3 &= H = G \cos i, & l_3 &= h = \Omega, \end{aligned} \quad (4.8)$$

a hamiltoniana expandida até  $J_2$  fica na forma:

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} \left\{ 1 + J_2 \frac{\mu^2 R_e^2}{2L^2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \left( 3 \frac{H^2}{G^2} - 1 \right) + \left( 3 - \frac{3H^2}{G^2} \right) \cos(2g + 2f) \right] \right\} \quad (4.9)$$

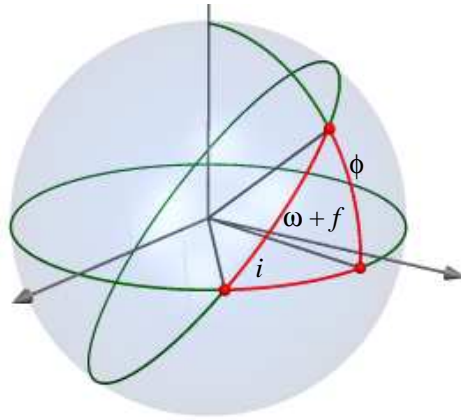


Figura 4.2 – Ângulos orbitais

Aqui  $F = F_0 + F_1$ , onde  $F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2}$  é a parcela não perturbadora e  $F_1$  é a parcela perturbadora. Se  $F_1 = 0$  então a órbita é kepleriana e tem-se o problema de dois corpos. As equações de movimento são escritas na forma canônica hamiltoniana como:

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_i} \quad \text{e} \quad \frac{dl_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

onde  $F$  é a hamiltoniana e  $L_1, L_2 \dots l_3$  são os elementos de Delaunay. Usando o método de Von Zeipel, Brouwer conseguiu achar uma transformação canônica do conjunto de variáveis  $(L_i, l_i)$ , as quais são denominadas elementos osciladores, para um novo conjunto de variáveis  $(L_i'', l_i'')$ , que são denominados elementos médios, tal que as novas equações tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{dL_i''}{dt} &= 0, \text{ com } L_i'' \text{ constante e} \\ \frac{dl_i''}{dt} &= -\frac{\partial F^{**}}{\partial L_i''}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $F^{**}$  é a hamiltoniana expressa em termos de novas variáveis que estão relacionadas com elementos orbitais como:

$$\begin{aligned} L_1'' &= \sqrt{\mu a''} & l_1'' &= M'' \\ L_2'' &= L_1'' \sqrt{1 - e''^2} & l_2'' &= \omega'' \\ L_3'' &= L_2'' \cos i'' & l_3'' &= \Omega'' \end{aligned} \quad (4.12)$$

Este novo conjunto de elementos orbitais está relacionado com elementos orbitais clássicos por:

$$\begin{aligned} a &= a'' + \delta a \\ e &= e'' + \delta e \\ \Omega &= \Omega'' + \delta \Omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde  $\delta a, \delta e, \delta \Omega$  são funções periódicas de elementos orbitais médios  $a'', e'', \Omega''$ . O conjunto de equações (4.11) é resolvido para obter as variáveis  $(L_i'', l_i'')$  e, a seguir, o conjunto de variáveis  $(L_i, l_i)$  é expresso em termos destas variáveis  $(L_i'', l_i'')$  usando as transformações de Von Zeipel.

A solução de Brouwer inclui todos os efeitos periódicos curtos (que dependem da anomalia média) e longos (que dependem do argumento do perigeu) até a primeira ordem, e os efeitos seculares até a segunda ordem.

### 4.3 Método de Von Zeipel

Considerando a hamiltoniana dada na equação (4.9), que despreza os termos de segunda ordem, o método de Von Zeipel inicia-se com uma transformação canônica de variáveis:

$$(L, G, H, l, g, h) \rightarrow (L', G', H', l', g', h') \quad (4.14)$$

onde as novas variáveis  $(L', G', \dots, h')$  são relacionadas com as antigas a partir de uma função geratriz  $S(L', G', H', l, g, h)$  tal que:

$$(L, G, H) = \frac{\partial S}{\partial(l, g, h)} \quad (4.15)$$

$$(l', g', h') = \frac{\partial S}{\partial(L', G', H')} \quad (4.16)$$

e construída de tal forma que elimine a variável do curto período da nova hamiltoniana  $F^*$ :

$$F^*(L', G', H', -, g', -) = F(L, G, H, l, g, -) \quad (4.17)$$

As novas variáveis  $(L', G', H', l', g', h')$  podem ser obtidas das equações:

$$\frac{d}{dt}(L', G', H') = \frac{\partial F^*}{\partial(l', g', h')} \quad (4.18)$$

e

$$\frac{d}{dt}(l', g', h') = -\frac{\partial F^*}{\partial(L', G', H')} \quad (4.19)$$

O procedimento pode ser repetido, eliminando-se a variável de longo período  $g'$  da nova hamiltoniana através de uma nova transformação:

$$(L', G', H', l', g', h') \rightarrow (L'', G'', H'', l'', g'', h'') \quad (4.20)$$

com a nova função geratriz  $S^*(L'', G'', H'', l', g', h')$  tal que:

$$(L', G', H') = \frac{\partial S^*}{\partial (l', g', h')} \quad (4.21)$$

$$(l'', g'', h'') = \frac{\partial S^*}{\partial (L'', G'', H'')}, \quad (4.22)$$

construída de tal forma que a variável de longo período ( $g''$ ) da nova hamiltoniana desapareça ficando apenas:

$$F^{**}(L'', G'', H'', -, -, -) = F^*(L', G', H', -, g', -) \quad (4.23)$$

Então o problema reduz-se à solução do sistema canônico com a “nova hamiltoniana”  $F^{**}$  obedecendo as relações:

$$\frac{d}{dt}(L'', G'', H'') = \frac{\partial F^{**}}{\partial (l'', g'', h'')} \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt}(l'', g'', h'') = -\frac{\partial F^{**}}{\partial (L'', G'', H'')} \quad (4.25)$$

Estas relações são equivalentes a 4.11, porque  $l''$ ,  $g''$  e  $h''$  são todos nulos. Então,  $(L'', G'', \dots, h'')$  formam um conjunto de elementos médios,  $(L', G', \dots, h')$  um conjunto de elementos de longo período e  $(L, G, \dots, h)$  um conjunto de elementos osciladores.

## 5 MÉTODOS SEMI-ANALÍTICOS DE PERTURBAÇÃO

### 5.1 Introdução

Em geral, a integração do sistema dinâmico do movimento orbital, que é não-linear, não-conservativo e complexo na forma, é intratável analiticamente e a única esperança é deduzir uma solução aproximada com precisão razoável. Estas técnicas de obtenção de uma solução aproximada são denominadas, na literatura, métodos de perturbação (Liu, 1983).

### 5.2 Equações de Movimento

As equações variacionais que descrevem o movimento de satélites artificiais ao redor do centro da Terra são usualmente expressas em termos de elementos orbitais clássicos, isto é, semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$ , inclinação  $i$ , longitude de nodo ascendente  $\Omega$ , argumento de perigeu  $\omega$  e anomalia média  $M$ , como (Kolvalevsky, 1967):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \quad (5.1)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (5.2)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad (5.3)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (5.5)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (5.6)$$

onde  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  é o movimento médio, sendo  $\mu$  o produto entre a constante gravitacional e a massa terrestre e  $R$  é a função perturbadora. As Equações 5.1 a 5.6 são denominadas equações de Lagrange.

Muitos trabalhos referem-se às equações de movimento expressas em termos de variáveis de Delaunay, que são definidas a seguir:

$$L_1 = L = \sqrt{\mu a}, \quad (5.7)$$

$$L_2 = G = L\sqrt{1-e^2}, \quad (5.8)$$

$$L_3 = H = G \cos i, \quad (5.9)$$

$$\ell_1 = \ell = M, \quad (5.10)$$

$$\ell_2 = g = \omega, \quad (5.11)$$

$$\ell_3 = h = \Omega \quad (5.12)$$

Na forma hamiltoniana, as equações de movimento associadas às variáveis de Delaunay tomam a forma (Liu, 1983):

$$\dot{L}_i = \frac{\partial F_1}{\partial \ell_i} + Q_{\ell_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.13)$$

$$\dot{\ell}_i = \delta_{i1} n - \frac{\partial F_1}{\partial L_i} - Q_{L_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.14)$$

onde  $F_1$  é a hamiltoniana perturbada associada com forças conservativas, os  $Q_{\ell_i}$  representam forças perturbadoras generalizadas de origem não-conservativa,  $\delta_i$  é o delta de Kronecker e  $n$  é o movimento médio de satélites com condições iniciais ( $L_{i0}, \ell_{i0}$ ).

Estas forças generalizadas são definidas como:

$$Q_{L_i} = \bar{D} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \ell_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.15)$$

$$Q_{\ell_i} = \bar{D} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial L_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.16)$$

onde  $\bar{D}$  é a força perturbadora não-conservativa e  $\bar{r}$  é o vetor posição do satélite.



A partir das Equações 5.7 a 5.14, o sistema dinâmico pode ser expresso em termos de elementos orbitais clássicos como:

$$\dot{a} = \frac{2L\dot{L}}{\mu}, \quad (5.17)$$

$$\dot{e} = \frac{1}{eL} \left[ (1-e^2)\dot{L} - \sqrt{1-e^2}\dot{G} \right], \quad (5.18)$$

$$\dot{i} = \frac{1}{G \operatorname{sen} i} (\cos i \dot{G} - \dot{H}), \quad (5.19)$$

$$\dot{\Omega} = \dot{h}, \quad (5.20)$$

$$\dot{\omega} = \dot{g}, \quad (5.21)$$

$$\dot{M} = \dot{\ell}, \quad (5.22)$$

As Equações 5.17 a 5.22 podem ser deduzidas também diretamente das equações de Lagrange (Equações 5.1 a 5.6).

### 5.3 Forças Perturbadoras

As principais forças perturbadoras que afetam as órbitas de satélites artificiais e que contribuem na resultante das forças perturbadoras não-conservativas  $\vec{D}$  são descritas a seguir.

#### 5.3.1 A Função Potencial Gravitacional da Terra

Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas esféricas, sua solução real completa é obtida como (Kaula, 1966):

$$V = F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[ \sum_{m=0}^n P_{nm}(\operatorname{sen} \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) \right], \quad (5.23)$$

#### 5.3.2 O Arrasto Atmosférico

A força de arrasto  $\vec{D}$  que age sobre um satélite de massa  $m$  que se move na atmosfera terrestre é aproximada por (Kondapalli, 1982):

$$\vec{D} = -\frac{1}{2} \rho C_D A F_R v \vec{v}, \quad (5.24)$$

onde  $\rho$  é a densidade local do ar,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto adimensional,  $A$  é a área afetiva do satélite,  $F_R$  é o termo que representa a rotação atmosférica e  $\vec{v}$  é a velocidade do satélite em relação ao centro da Terra.

### 5.3.3 A Função Gravitacional de Outros Corpos

A função que fornece o potencial gravitacional associada ao sistema, com presença de um terceiro corpo celeste é dada por (Kaula, 1966):

$$F' = \left( \frac{\mu'}{r'} \right) \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos \psi) \right], \quad (5.25)$$

### 5.4 Métodos de Solução: Método de Médias

Usando as expressões para funções potenciais gravitacionais dadas na Seção 5.3, a hamiltoniana perturbada pode ser expressa pela equação:

$$F_1 = F - \frac{\mu}{r} + F'. \quad (5.26)$$

Substituindo nas Equações 5.13 e 5.14 as expressões para  $F_1$ ,  $\vec{D}$  e incluindo as perturbações devidas à pressão de radiação solar, estas equações fornecem equações explícitas de movimento de satélites artificiais. Como já foi explicado, o sistema não é analiticamente integrável e, portanto, deve-se escolher algum método para deduzir uma solução aproximada.

Quatro métodos de solução muito freqüentemente usados são:

- i) Método de Von Zeipel.
- ii) Expansão assintótica com duas variáveis.
- iii) Séries de Lie.
- iv) Teoria geral do método das médias.

De acordo com Liu (1983), foi provado que os primeiros três métodos são incorporados, de alguma forma, na teoria geral do método de médias. Além de ser muito geral, o método de médias, que será explicado a seguir, é base para vários dos métodos semi-analíticos mais utilizados.

No método das médias, primeiramente escrevem-se as Equações 5.13 e 5.14 na forma:

$$\dot{x}_i = \varepsilon X_{1i}(x_m, y) + \varepsilon^2 X_{2i}(x_m, y), \quad (5.27)$$

$$\dot{y} = z(x_1) + \varepsilon Y_1(x_m, y) + \varepsilon^2 Y_2(x_m, y) \quad (5.28)$$

onde os  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ ,  $1 \leq m \leq 5$  são usados para indicar as variáveis ( $L, G, H, g, h$ ) ou ( $a, e, i, \Omega, \omega$ ) enquanto  $y$  indica  $M$  (ou  $\ell$ ). Aqui  $\varepsilon$  é um parâmetro pequeno escolhido para representar o tamanho de  $C_{20}$  ou  $J_2$ , que é de ordem de  $10^{-3}$ . Os parâmetros restantes do geopotencial,  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$ , são considerados como quantidades de ordem de  $\varepsilon^2$ . Considera-se que as perturbações gravitacionais do Sol e da Lua e o arrasto atmosférico têm efeitos de segunda ordem. Considera-se que alguns efeitos acoplados de arrasto em conjunto com o achatamento terrestre ( $J_2$ ) são, em geral, de ordens maiores do que a terceira. As variáveis  $x_i$  são geralmente denominadas variáveis lentas devido à dependência das suas derivadas em tempo no pequeno parâmetro  $\varepsilon$ , e a variável  $y$  é denominada variável rápida porque a parte dominante da sua derivada em tempo é proporcional ao movimento médio  $n$ . Supõe-se que as funções perturbadoras  $X_{1i}$ ,  $X_{2i}$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  são contínuas em  $x_m$  e  $y$  e periódicas em  $y$  com período  $2\pi$ .

Para obter uma solução aproximada, em primeiro lugar é introduzido um conjunto de transformações:

$$x_i = \bar{x}_i + \varepsilon P_{1i}(\bar{x}_m, \bar{y}) + \varepsilon^2 P_{2i}(\bar{x}_m, \bar{y}), \quad (5.29)$$

$$y = \bar{y} + \varepsilon Q_1(\bar{x}_m, \bar{y}) + \varepsilon^2 Q_2(\bar{x}_m, \bar{y}), \quad (5.30)$$

de modo que o sistema transformado pode ser expresso pelas equações:

$$\dot{\bar{x}}_i = \varepsilon U_{1i}(\bar{x}_m) + \varepsilon^2 U_{2i}(\bar{x}_m) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (5.31)$$

$$\dot{\bar{y}} = z(\bar{x}_1) + \varepsilon V_1(\bar{x}_m) + \varepsilon^2 V_2(\bar{x}_m) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (5.32)$$

Novamente, entre as funções a serem determinadas é necessário que as  $P$ 's e  $Q$ 's sejam funções contínuas de  $\bar{x}_i$  e  $\bar{y}$  e periódicas em  $\bar{y}$ . As condições iniciais  $(\bar{x}_{i0}, \bar{y}_0)$  para o Sistema 5.31 e 5.32 são obtidas de  $(x_{i0}, y_0)$  usando as Relações 5.29 e 5.30.

Pode-se verificar que no Sistema 5.31 e 5.32 a variável rápida  $\bar{y}$  está eliminada nos termos do lado direito até a segunda ordem em  $\varepsilon$ . Assim, o sistema dinâmico transformado se torna mais simples e pode ser integrado analiticamente ou numericamente com passos maiores em relação aos necessários à integração do Sistema 5.27 e 5.28. Integrando o Sistema 5.31 e 5.32, a solução aproximada de segunda ordem para  $(x_i, y)$  pode ser obtida por uma simples substituição nas Equações 5.29 e 5.30.

As expressões explícitas para as funções  $U_{1i}$ ,  $U_{2i}$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $P_{1i}$ ,  $P_{2i}$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  são dadas a seguir sem demonstração.

Primeiramente são escritas algumas relações necessárias com base nas suposições feitas no começo desta seção. Para começar, a expressão em séries de Fourier para função perturbadora  $X_{1i}$  tem a forma (Liu, 1974):

$$X_{1i}(\bar{x}_m, \bar{y}) = X_{1i0}(\bar{x}_m) + X_{1i1}(\bar{x}_m, \bar{y}), \quad (5.33)$$

onde

$$X_{1i0}(\bar{x}_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_{1i}(\bar{x}_m, \bar{y}) d\bar{y} \quad (5.34)$$

e  $X_{1i1}(\bar{x}_m; \bar{y})$  é a função puramente periódica de  $X_{1i}$ . Existem expressões similares para  $X_{2i}$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$ .

A teoria geral de métodos das médias mostra que as funções da primeira ordem podem ser determinadas por (Liu, 1983)

$$U_{1i} = X_{1i0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_{1i} dy, \quad (5.35)$$

$$V_1 = Y_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1 dy, \quad (5.36)$$

$$P_{1i} = \frac{1}{z} \int X_{1i1} dy, \quad (5.37)$$

e

$$Q_1 = \frac{1}{z} \int \left[ P_{11} \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) + Y_{11} \right] dy \quad (5.38)$$

e as funções da segunda ordem têm a forma:

$$U_{2i} = R_{1i0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{1i} dy, \quad (5.39)$$

$$V_2 = R_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_2 dy, \quad (5.40)$$

$$P_{2i} = \frac{1}{z} \int R_{1i1} dy, \quad (5.41)$$

e

$$Q_2 = \frac{1}{z} \int \left[ P_{21} \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) + R_2 \right] dy, \quad (5.42)$$

onde:

$$R_{1i} = X_{21} + \sum_{r=1}^5 \left[ P_{1r} \left( \frac{\partial X_{1i}}{\partial \bar{x}_r} \right) - U_{1r} \left( \frac{\partial P_{1i}}{\partial \bar{x}_r} \right) \right] + Q_1 \left( \frac{\partial X_{1i}}{\partial \bar{y}} \right) - V_1 \left( \frac{\partial P_{1i}}{\partial \bar{y}} \right), \quad (5.43)$$

$$R_2 = Y_2 + \frac{1}{2} P_{11}^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}_1^2} \right) + \sum_{r=1}^5 \left[ P_{1r} \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{x}_r} \right) - U_{1r} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial \bar{x}_r} \right) \right] + Q_1 \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{y}} \right) - V_1 \left( \frac{\partial Q_1}{\partial \bar{y}} \right) \quad (5.44)$$

Para satélites artificiais terrestres, a solução aproximada descrita nesta seção pode ser utilizada para estudar as previsões de longos períodos e para gerar efemérides em curtos períodos contanto que uma transformação e um procedimento de iniciação apropriada sejam usados. Dadas as condições iniciais para elementos orbitais osculadores  $(x_{0i}, y_0)$ , os elementos médios associados  $(\bar{x}_{0i}, \bar{y}_0)$  podem ser determinados a partir das Relações 5.29 e 5.30, por interação. A maioria das teorias existentes inclui somente a transformação completa até a primeira ordem em  $J_2$  e, em consequência, as condições iniciais para elementos orbitais médios e o movimento médio teriam precisão da mesma ordem de magnitude.

No caso de previsões de longo período, de acordo com Liu (1983), a transformação de primeira ordem pode ser usada no processo de iniciação com precisão razoável. Por outro lado, no caso de geração de efemérides em curto período, a recomendação é que a teoria orbital deve ser ajustada aos dados orbitais em várias revoluções para determinar as condições iniciais e um coeficiente de arrasto apropriado. Contudo, Liu (1983) sugere que se tome muito cuidado no processo de iniciação, levando em conta vários efeitos não-modelados e incertezas existentes.

Na teoria orbital de satélites artificiais, o método das médias em geral é usado duas vezes: a primeira vez para eliminar o elemento orbital rápido,  $M$ , e a segunda para eliminar o elemento relativamente lento,  $\omega$ . Assim, a solução final para o conjunto de Equações 5.13 e 5.14 pode ser obtida usando dois conjuntos de equações de transformação e dois conjuntos de equações transformadas.

A diferença principal entre o método de von Zeipel e o método das médias é que o primeiro mantém a forma canônica das equações médias, e o segundo não. Todavia, o

método das médias não impõe nenhuma condição sobre a força perturbadora e, portanto, qualquer sistema dinâmico perturbado por forças conservativas e não-conservativas, que satisfazem as condições dos métodos das médias, (as perturbações devem ser contínuas e periódicas na variável rápida) pode ser estudado usando este método sistemático. Além disso, este método aceita mais de uma variável rápida e, assim, pode ser usado na dinâmica de atitude de satélites que contêm três variáveis rápidas (Liu, 1974).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOETTCHER, R. -D. *The calculation of convex body aerodynamics in free molecular flow using a plane element surface approximation - Survey on theory and methods - Description of a FORTRAN program package*. Final Report, Part 1. Göttingen, Germany, DFVLR, 1979. (DFVLR-IB-251-79 A 13).
- BOETTCHER, R. -D.; LEGGE, H. Determination of aerodynamic forces on satellites by theory and wind tunnel experiments. *Acta Astronautica*. v. 7, n. 3, p. 255-267. Mar. 1980.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of celestial mechanics*. New York, NY: Academic, 1961.
- CARRARA, V. *Modelagem das forças e torques atuantes em satélites*. São José dos Campos: INPE, junho 1982. (INPE-2454-TDL/094).
- Carrara, V. *A program to compute the aerodynamic or solar radiation forces and torques on satellites*. Ste. Anne du Bellevue: SPAR, Mar. 1988 (SPAR-RML-009-87-11).
- CARRARA, V. *Um banco de dados contendo valores de fluxo solar e atividade geomagnética para cômputo da densidade da alta atmosfera*. São José dos Campos: INPE, 1989. (INPE-A-ETD-0053)
- CARRARA, V. *Implementações de modelos atmosféricos para uso em propagadores de órbita e atitude*. São José dos Campos: INPE, maio 1990. (INPE-5094-RPI/231)
- CHAHINE, M. T. Free molecular flow over nonconvex surfaces. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 2., 1960, Berkely, CA. *Proceedings...* New York: Academic, 1961. Section 2, p. 209-230. (Advanced in Applied Mechanics).
- CUNNINGHAM, L. E. On the computation of the spherical harmonic terms needed during numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite, *Celestial Mechanics*, v.2, p. 207-216, 1970.
- DOUGHT, R. O.; SCHAETZLE, W. J. Experimental determination of momentum accomodation coefficients at velocities up to and exceeding Earth escape velocity. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 6., 1968, Cambridge, MA. *Proceedings...* New York: Academic, 1969. v. 2, p. 1035-1054. (Advanced in Applied Mechanics, Supplement 5).
- DOMINION RADIO ASTROPHYSICAL OBSERVATORY – Herzberg Institute of Astrophysics (DRAO). *Solar radio monitoring programme*. Acesso em: <http://www.drao-ofr.hia-ihh.nrc-cnrc.gc.ca> Acesso: jul. 2008.

EVANS, W. J. Aerodynamic and radiation disturbance torques on satellites having complex geometry. In: SINGER, S. F. (ed.). *Torques and attitude sensing in Earth satellites*. New York: Academic, 1964. Cap. 5, p. 83-98. (Applied Mathematics and Mechanics, 7).

FREDO, R. M.; KAPLAN, M. H. Procedure for obtaining aerodynamic properties of spacecraft. *Journal of Spacecraft*, v. 18, n. 4, p. 367-373, July 1981.

Georgevic, R. M. The solar radiation pressures force and torque model. *The Journal of the Astronautical Sciences*. V. 20, n. 5, p. 257-274, March/April 1973a.

Georgevic, R. M. The solar radiation pressure in the Mariner 9 Mars Orbiter. *Astronautica Acta*. v. 18, n. 2, p. 109-115, Apr. 1973b.

GFZ - German Research Centre for Geosciences - Adolf-Schmidt-Observatorium für Geomagnetismus - Potsdam Helmholtz Centre. *Indices of Global Geomagnetic Activity*. Disponível em: [http://www-app3.gfz-potsdam.de/kp\\_index/](http://www-app3.gfz-potsdam.de/kp_index/) Acesso em: jul. 2008.

HEDIN, A. E. MSIS-86 thermospheric model. *Journal of Geophysical Research*. v. 82, n. A5, p. 4649-4662, May 1987.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman, 1967.

HOBSON, E. W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New York: Chelsea, 1965.

IAGA - International Association of Geomagnetism and Aeronomy - <http://www.iugg.org/IAGA/> Acesso em; jul. 2008.

ISGI – International Service of Geomagnetic Indices. *Indices: Data* <http://isgi.cetp.ipsl.fr/>. Acesso em julho de 2008.

IUGG - International Union of Geodesy and Geophysics. <http://www.iugg.org/> Acesso em julho de 2008.

JACCHIA, L. G. *Static diffusion models of the upper atmosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA: SAO, 1964. (SAO Special Report 170).

JACCHIA, L. G. Atmospheric models in the region from 110 to 2000 km. In: Committee on Space Research (Cospar). *Cira 1972*. Berlim, Akademik-Verlag, 1972. Part 3, p. 227-338.

JACCHIA, L. G. *Thermospheric temperature, density and composition: new models*. Cambridge, MA: SAO, 1971. (SAO Special Report n. 332)



KAULA, W. M. *Theory of satellite geodesy*. Waltham, MA: Blaisdell, 1966.

KNECHTEL, E. D.; PITTS, W. C. Experimental momentum accommodation on metal surfaces of ions near and above Earth-satellite speeds. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RAREFIED GAS DYNAMICS, 6., Cambridge, MA, 1968. *Proceedings...* New York: Academic, 1969, v. 2, p. 1035-1054. (Advanced in Applied Mechanics, Supplement 5).

KNECHTEL, E. D.; PITTS, W. C. Normal and tangential momentum accommodation for Earth satellite conditions. *Astronautica Acta*. v. 18, n. 3, p. 171-184, June 1973.

KONDAPALLI, R. R. *Um estudo dos métodos de perturbação na determinação de órbita de satélites artificiais de baixa altitude*. São José dos Campos, INPE. (INPE-3781-RPI/151).

KOVALEVSKI, J. *Introduction to celestial mechanics*. New York, NY: Springer Verlag, 1967.

KUGA, H. K.; MEDEIROS, V. M.; CARRARA, V. *Cálculo recursivo da aceleração do geopotencial*. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2735-RPE/433).

KUGA, H. K.; SILVA, W. C. C. *Gerador numérico de órbitas de satélites artificiais terrestres*. São José dos Campos: INPE, 1984 (INPE-3050-RPE/445).

KUGA, H. K. *Reformulação computacional do modelo de Jacchia-Roberts para a densidade atmosférica*. São José dos Campos: INPE, 1985. (INPE--3691-RPE/493).

LAUTMAN, D. A. Perturbations of a close-Earth satellite due to sunlight diffusely reflected from the Earth. *Celestial Mechanics*. v. 16, n. 1, p. 3-25, 1977.

LIU, J. J. F. Satellite motion about an oblate Earth. *AIAA Journal*. v. 12, no. 11, Nov. 1974.

LIU, J. J. F. Advances in orbit theory for an artificial satellite with drag. *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. XXXI, no. 2, p. 165-188, Apr.-Jun. 1983.

LOPES, R. V. F.; CARRARA, V.; *Estudo preliminar sobre modelos de previsão de fluxo solar*. Apresentado no 2o. Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, Atibaia, SP, p. 23, novembro 1984.

MACROBERT, T. M. *Spherical harmonics - an elementary treatise on harmonic functions with applications*. 3. Ed. Oxford: Pergamon Press, 1967.

MATOS, B. S.; CARRARA, V.; VILHENA DE MORAIS, R. *Implementação do modelo Jacchia-77 da atmosfera superior da Terra*. Apresentado no 2o. Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, Atibaia, SP, novembro 1984.

MUELLER, A. C. *Jacchia-Lineberry upper atmosphere density model*. Houston: NASA, 1982. (NASA-CR-167824).

MUSEN, P. The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. *Journal of Geophysical Research*. v. 65, n. 5, p. 1391-1396, May 1960.

NASA. *International geodetic satellite program*. Washington, 1977 (NASA SP-365).

PINES, S. Uniform representation of the gravitational potential and its derivatives. *AIAA Journal*. v. 11, n. 11, p. 1508-1511, Nov. 1973.

ROBERTS JR, C. E. An analytical model for upper atmospheric densities based upon Jacchia's 1970 models. *Celestial Mechanics*, v. 4, n. 3/4, p. 368-377, Dec. 1971.

SCHAAF, S. A.; CHAMBRÉ, P. L. *Flow of rarefied gases*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1961. (Princeton Aeronautical Paperbacks, 8).

SIDC – Solar Influences Data Analysis Center – Royal Observatory of Belgium. *Daily Sunspot Number*. <http://www.sidc.be> Acesso em: jul. 2008.

SILVA, W. C. C.; FERREIRA, L. D. D. *Satélite artificial – movimento orbital*. São José dos Campos: INPE.(INPE-3163-RPE/458)

SPDIR - Space Physics Interactive Data Resources - National Geophysical Data Center. *Geomagnetic Indices Data Set*. <http://spidr.ngdc.noaa.gov/spidr/> Acesso em: jul. 2008.

THE Persistence of Vision Raytracer. Web page: <http://www.povray.org>. Acesso em julho de 2008.

UNITED STATES AIR FORCE (USAF). *U. S. Standard Atmosfere 1976*. Washington, DC, 1976.

WYLIE, C. R. *Advanced engineering mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1975.

## APÊNDICE A – TABELAS DE POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Os polinômios de Legendre até a ordem 10 são apresentados a seguir.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_{1,1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_{2,1}(x) = -3x\sqrt{1-x^2}$$

$$P_{2,2}(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_{3,1}(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}(5x^2-1)$$

$$P_{3,2}(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_{3,3}(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_{4,1}(x) = -\frac{5}{2}x\sqrt{1-x^2}(7x^2-3)$$

$$P_{4,2}(x) = \frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)$$

$$P_{4,3}(x) = -105x\sqrt{1-x^2}(1-x^2)$$

$$P_{4,4}(x) = 105(1-x^2)^2$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}x(63x^4 - 70x^2 + 15)$$

$$P_{5,1}(x) = -\frac{15}{8}\sqrt{1-x^2}(21x^4 - 14x^2 + 1)$$

$$P_{5,2}(x) = \frac{105}{2}x(1-x^2)(3x^2 - 1)$$

$$P_{5,3}(x) = -\frac{105}{2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)(9x^2 - 1)$$

$$P_{5,4}(x) = 945x(1-x^2)^2$$

$$P_{5,5}(x) = -945\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^2$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$P_{6,1}(x) = -\frac{21}{8}x\sqrt{1-x^2}(33x^4 - 30x^2 + 5)$$

$$P_{6,2}(x) = \frac{105}{8}(1-x^2)(33x^4 - 18x^2 + 1)$$

$$P_{6,3}(x) = -\frac{315}{2}x\sqrt{1-x^2}(1-x^2)(11x^2 - 3)$$

$$P_{6,4}(x) = \frac{945}{2}(1-x^2)^2(11x^2 - 1)$$

$$P_{6,5}(x) = -10395x\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^2$$

$$P_{6,6}(x) = 10395(1-x^2)^3$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}x(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35)$$

$$P_{7,1}(x) = -\frac{7}{16}\sqrt{1-x^2}(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5)$$

$$P_{7,2}(x) = \frac{63}{8}x(1-x^2)(143x^4 - 110x^2 + 15)$$

$$P_{7,3}(x) = -\frac{315}{8}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)(143x^4 - 66x^2 + 3)$$

$$P_{7,4}(x) = \frac{3465}{2} x(1-x^2)^2 (13x^2 - 3)$$

$$P_{7,5}(x) = -\frac{10395}{2} \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^2 (13x^2 - 1)$$

$$P_{7,6}(x) = 135135 x(1-x^2)^3$$

$$P_{7,7}(x) = -135135 \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^3$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128} (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$$

$$P_{8,1}(x) = -\frac{9}{16} x \sqrt{1-x^2} (715x^6 - 1001x^4 + 385x^2 - 35)$$

$$P_{8,2}(x) = \frac{315}{16} (1-x^2)(143x^6 - 143x^4 + 33x^2 - 1)$$

$$P_{8,3}(x) = -\frac{3465}{8} x \sqrt{1-x^2} (1-x^2)(39x^4 - 26x^2 + 3)$$

$$P_{8,4}(x) = \frac{10395}{8} (1-x^2)^2 (65x^4 - 26x^2 + 1)$$

$$P_{8,5}(x) = -\frac{135135}{2} x \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^2 (5x^2 - 1)$$

$$P_{8,6}(x) = \frac{135135}{2} (1-x^2)^3 (15x^2 - 1)$$

$$P_{8,7}(x) = -2027025 x \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^3$$

$$P_{8,8}(x) = 2027025 (1-x^2)^4$$

$$P_9(x) = \frac{1}{128} x(12155x^8 - 25740x^6 + 18018x^4 - 4620x^2 + 315)$$

$$P_{9,1}(x) = -\frac{45}{128} \sqrt{1-x^2} (2431x^8 - 4004x^6 + 2002x^4 - 308x^2 + 7)$$

$$P_{9,2}(x) = \frac{495}{16} x(1-x^2)(221x^6 - 273x^4 + 91x^2 - 7)$$

$$P_{9,3}(x) = -\frac{3465}{16}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)(221x^6 - 195x^4 + 39x^2 - 1)$$

$$P_{9,4}(x) = \frac{135135}{8}x(1-x^2)^2(17x^4 - 10x^2 + 1)$$

$$P_{9,5}(x) = -\frac{135135}{8}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^2(85x^4 - 30x^2 + 1)$$

$$P_{9,6}(x) = \frac{675675}{2}x(1-x^2)^3(17x^2 - 3)$$

$$P_{9,7}(x) = -\frac{2027025}{2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^3(17x^2 - 1)$$

$$P_{9,8}(x) = 34459425x(1-x^2)^4$$

$$P_{9,9}(x) = -34459425\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^4$$

$$P_{10}(x) = \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$$

$$P_{10,1}(x) = -\frac{55}{128}x\sqrt{1-x^2}(4199x^8 - 7956x^6 + 4914x^4 - 1092x^2 + 63)$$

$$P_{10,2}(x) = \frac{495}{128}(1-x^2)(4199x^8 - 6188x^6 + 2730x^4 - 364x^2 + 7)$$

$$P_{10,3}(x) = -\frac{6435}{16}x\sqrt{1-x^2}(1-x^2)(323x^6 - 357x^4 + 105x^2 - 7)$$

$$P_{10,4}(x) = \frac{45045}{16}(1-x^2)^2(323x^6 - 255x^4 + 45x^2 - 1)$$

$$P_{10,5}(x) = -\frac{135135}{8}x\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^2(323x^4 - 170x^2 + 15)$$

$$P_{10,6}(x) = \frac{675675}{8}(1-x^2)^3(323x^4 - 102x^2 + 3)$$

$$P_{10,7}(x) = -\frac{11486475}{2}x\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^3(19x^2 - 3)$$

$$P_{10,8}(x) = \frac{34459425}{2}(1-x^2)^4(19x^2 - 1)$$

$$P_{10,9}(x) = -654729075 x \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^4$$

$$P_{10,10}(x) = 654729075 (1-x^2)^5$$





## APÊNDICE B – FLUXO SOLAR E ATIVIDADE GEOMAGNÉTICA

São descritos, a seguir, os principais efeitos que afetam a densidade da alta atmosfera: o fluxo solar e a atividade geomagnética.

### B.1 – Fluxo Solar

Os valores medidos do fluxo solar em 10.7 cm de comprimento de onda são catalogados pelo DRAO (Dominion Radio Astrophysical Observatory), do Herzberg Institute of Astrophysics, do Canadá. Outrora impressos e enviados aos pesquisadores por correio, hoje os dados são disponibilizados na página do observatório: <http://www.drao-ofr.hia-ih.nrc-cnrc.gc.ca>. A tabela B.1 apresenta um destes catálogos. São feitas 3 observações por dia, separadas de 2 a 3 horas entre elas. O fluxo é inicialmente classificado como provisório, até que correções feitas posteriormente à medida a tornem definitiva. A tabela indica também o número da rotação solar (Carrington Rotation), cujo período é de cerca de 27 dias.

### B.2 – Atividade geomagnética

A atividade geomagnética mede desvios no vetor do campo magnético em diversos observatórios magnéticos espalhados pelo globo. Estas medidas são compiladas pelo International Service of Geomagnetic Indices, e disponibilizadas sob formas distintas. A atividade geomagnética é fortemente influenciada pelas explosões que ocorrem na coroa solar, que, por sua vez, disparam núcleos de hélio, prótons e elétrons no espaço – o denominado vento solar. Ao atingir a Terra este vento provoca uma forte distorção do campo magnético, que pode ser sentido mesmo na superfície do planeta. Como as explosões seguem o padrão do ciclo solar, com duração de 10.6 anos, a atividade geomagnética também exibe este comportamento. As medidas apresentam o índice Kp (Planetary Magnetic Three-Hour-Range Indices) na forma de tabela (Tabela B.2) ou na forma de “diagrama musical” (Figura B.1), em intervalos de 3 horas. O índice planetário Kp possui uma escala quase logarítmica, e é medido em frações decimais próprias. Por exemplo, “3<sup>0</sup>” indica 3.0; “5+” indica 5.33, “2–” indica 1.66. Alguns modelos atmosféricos usam também os índices Cp e C9, (Daily Geomagnetic Character Figure – Figura B.2) que é uma derivação do Kp. Em geral, o índice diário Ap é mais utilizado nestes modelos, uma vez que possui escala linear contra a escala quase logarítmica do Kp. Contudo, o Ap não é medido, e assim necessita uma tabela de conversão (Tabela B.3) em função de Kp. Os dados são colhidos pelo Adolf-Schmidt-Observatorium für Geomagnetismus no Potsdam Helmholtz Centre (GFZ, 2008), que integra o International Service of Geomagnetic Índices (ISGI, 2008). Este é associado ao International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA, 2008) que é membro da International Union of Geodesy and Geophysics – (IUGG, 2008). O ISGI também publica e disponibiliza os dados em sua página.

### B.3 – Número de manchas solares

Tanto o fluxo solar quanto a atividade geomagnética dependem da atividade solar, que segue um ciclo de 10.6 anos de duração. Este também é o caso do número de manchas

solares observados na superfície do Sol. Embora distintos, todos eles exibem certa correlação entre si, apresentando valores máximos em certas épocas e mínimos em outras. O número de manchas é medido continuamente e diariamente desde 1818, bem antes, portanto, do início das medições do fluxo solar e atividade geomagnética. Embora o número de manchas não seja utilizado por modelos atmosféricos, ele comparece como integrante de um arquivo de propósito geral disponibilizado pelo National Geophysical Data Center, do World Data Center, visto na próxima seção. As manchas são observadas pelo departamento de física solar SIDC – Solar Influences Data Analysis Center, do Observatório Real da Bélgica (SIDC, 2008). Ele publica o Daily International Sunspot Number,  $R_i$ , mostrado na Tabela B.4.

#### **B.4 – Arquivo de dados**

As informações de atividade geomagnética, fluxo solar e número de manchas são agrupadas num arquivo e disponibilizadas pelo SPDIR (Space Physics Interactive Data Resources) do NGDC - National Geophysical Data Center, que faz parte do World Data Center. Os arquivos são individualizados por ano, ou então podem ser completos, a partir de 1932. O formato deste arquivo pode ser encontrado na página do SPDIR, que também disponibiliza valores médios mensais (alguns modelos preferem valores médios). Um exemplo de arquivo do SPDIR pode ser visto na Tabela B.5, enquanto que o formato deste arquivo é explicado na Tabela B.6. Os modelos de densidade atmosférica utilizados no INPE fazem uso deste arquivo caso seja necessário (Carrara, 1989; Carrara, 1990). Os arquivos podem ser obtidos por meio de:

[ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/GEOMAGNETIC\\_DATA/INDICES/KP\\_AP/](ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/GEOMAGNETIC_DATA/INDICES/KP_AP/)

Tabela B.1 – Valores observados do Fluxo Solar F10.7

Julian Day Number	Carrington Rotation	<---Date--->			U.T.	Flux Density Values in s.f.u.					
		Year	Mo	Dy		Observed	Adjusted	Series D			
02450128.250	01906.052	1996	02	14	1800	000068.6	000066.9	000060.2			
02450128.333	01906.055	1996	02	14	2000	000068.9	000067.2	000060.5			
02450128.417	01906.058	1996	02	14	2200	000069.4	000067.7	000060.9			
02450129.250	01906.089	1996	02	15	1800	000069.1	000067.4	000060.7			
02450129.333	01906.092	1996	02	15	2000	000069.0	000067.4	000060.6			
...											
02452001.208	001974.722	2001	04	01	1700	000244.0	000243.8	000219.4	2	0	OK
02452001.333	001974.727	2001	04	01	2000	000257.5	000257.2	000231.5	2	0	OK
02452001.458	001974.731	2001	04	01	2300	000245.2	000245.0	000220.5	2	0	OK
02452002.208	001974.759	2001	04	02	1700	000236.8	000236.7	000213.0	2	0	OK
02452002.333	001974.763	2001	04	02	2000	000228.0	000227.9	000205.1	2	0	OK
02452002.458	001974.768	2001	04	02	2300	000563.1	000562.9	000506.6	2	0	OK
02452003.208	001974.795	2001	04	03	1700	000217.7	000217.7	000195.9	2	0	OK
02452003.333	001974.800	2001	04	03	2000	000223.1	000223.1	000200.8	2	0	OK
02452003.458	001974.805	2001	04	03	2300	000214.4	000214.5	000193.0	2	0	OK
02452004.208	001974.832	2001	04	04	1700	000212.0	000212.2	000191.0	2	0	OK
02452004.333	001974.837	2001	04	04	2000	000204.8	000205.0	000184.5	2	0	OK
02452004.458	001974.841	2001	04	04	2300	000199.4	000199.6	000179.6	2	0	OK
02452005.208	001974.869	2001	04	05	1700	000582.5	000583.2	000524.9	2	0	OK
02452005.333	001974.873	2001	04	05	2000	000398.7	000399.2	000359.3	2	0	OK
02452005.458	001974.878	2001	04	05	2300	000207.5	000207.8	000187.0	2	0	OK
02452006.208	001974.905	2001	04	06	1700	000191.7	000192.0	000172.8	2	0	OK
02452006.333	001974.910	2001	04	06	2000	000563.5	000564.5	000508.0	2	0	OK
02452006.458	001974.915	2001	04	06	2300	000197.6	000198.0	000178.2	2	0	OK
02452007.208	001974.942	2001	04	07	1700	000180.8	000181.2	000163.1	2	0	OK
02452007.333	001974.947	2001	04	07	2000	000179.5	000180.0	000162.0	2	0	OK
02452007.458	001974.951	2001	04	07	2300	000177.2	000177.6	000159.8	2	0	OK
02452008.208	001974.979	2001	04	08	1700	000173.8	000174.3	000156.9	2	0	OK
02452008.333	001974.983	2001	04	08	2000	000169.2	000169.7	000152.7	2	0	OK
02452008.458	001974.988	2001	04	08	2300	000173.7	000174.3	000156.8	2	0	OK
02452009.208	001975.015	2001	04	09	1700	000182.2	000182.8	000164.5	2	0	OK
02452009.333	001975.020	2001	04	09	2000	000164.8	000165.4	000148.8	2	0	OK
02452009.458	001975.025	2001	04	09	2300	000164.3	000164.9	000148.4	2	0	OK
02452010.208	001975.052	2001	04	10	1700	000162.9	000163.5	000147.2	2	0	OK
02452010.333	001975.057	2001	04	10	2000	000169.7	000170.4	000153.4	2	0	OK
02452010.458	001975.061	2001	04	10	2300	000167.4	000168.1	000151.3	2	0	OK
...											
02454253.208	002057.288	2007	06	01	1700	000079.0	000081.3	000073.2	1	0	SEC
02454253.333	002057.292	2007	06	01	2000	000079.4	000081.6	000073.5	1	0	SEC
02454253.458	002057.297	2007	06	01	2300	000080.8	000083.1	000074.8	1	0	SEC
02454254.208	002057.325	2007	06	02	1700	000084.2	000086.7	000078.0	1	0	SEC
02454254.333	002057.329	2007	06	02	2000	000083.2	000085.6	000077.1	1	0	SEC
02454254.458	002057.334	2007	06	02	2300	000085.4	000087.8	000079.1	1	0	SEC
02454255.208	002057.361	2007	06	03	1700	000087.0	000089.5	000080.5	1	0	SEC
02454255.333	002057.366	2007	06	03	2000	000087.0	000089.5	000080.6	1	0	SEC
02454255.458	002057.370	2007	06	03	2300	000087.3	000089.8	000080.8	1	0	SEC
02454256.208	002057.398	2007	06	04	1700	000088.4	000091.0	000081.9	1	0	SEC
02454256.333	002057.402	2007	06	04	2000	000085.7	000088.2	000079.4	1	0	SEC
02454256.458	002057.407	2007	06	04	2300	000087.5	000090.1	000081.1	1	0	SEC
02454257.208	002057.434	2007	06	05	1700	000090.7	000093.4	000084.0	1	0	SEC
02454257.458	002057.444	2007	06	05	2300	000086.9	000089.5	000080.5	1	0	SEC
02454258.333	002057.476	2007	06	06	2000	000087.1	000089.7	000080.8	1	0	SEC
02454270.208	002057.911	2007	06	18	1700	000066.7	000068.8	000061.9	1	0	SEC
02454270.333	002057.916	2007	06	18	2000	000066.6	000068.7	000061.8	1	0	SEC

Fonte: DRAO, 2008

Tabela B.2 – Atividade Geomagnética Kp

Fonte: GFZ, 2008

IUGG: Association of Geomagnetism and Aeronomy (International Service of Geomagnetic Indices) May 2008											
International quiet and disturbed days											
Quietest days	1 - 5:	17	14	15	18	9					
	6 - 10:	12	26	27	11	13					
Most disturbed days	1 - 5:	5*	3*	21*	28*	30*					
Geomagnetic Planetary Indices											
Kp three-hourly											
	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum	daily Ap	Cp
1	1-	1+	1+	1-	0+	2o	3-	4o	13o	8	0.4
2	5-	3o	2+	1o	3-	1-	0+	1o	16-	11	0.6
3	3-	2+	2+	3o	3o	2o	3o	2o	20+	11	0.6
4	1-	2-	2+	2+	1+	3-	2+	2+	16-	8	0.4
5	2+	2+	3+	1-	3-	3+	3+	2+	20+	12	0.7
6	4°	2+	2+	2o	1+	1-	1o	1+	15o	9	0.5
7	2°	1-	0+	0+	1o	1o	2-	2o	9o	4	0.2
8	2-	1o	1+	1+	1o	1o	1o	1-	9o	4	0.2
9	1+	1-	1-	1-	1-	0+	0+	1-	5+	3	0.1
10	1°	2-	1o	1o	0+	0+	1+	2o	9-	4	0.1
11	1°	1o	1-	1-	1-	1-	2-	0+	7-	4	0.1
12	0+	0+	1-	1-	0+	1o	1o	1+	6-	3	0.1
13	2-	2-	0o	0+	1-	1o	1o	0+	7-	3	0.1
14	0+	1-	0+	1-	1o	0+	1-	0+	4+	3	0.0
15	0°	1o	0+	0+	0+	0+	1-	1+	4+	2	0.0
16	1+	1o	0+	1+	2-	1+	1+	1-	9o	4	0.2
17	1-	0o	0o	0+	0o	0+	0o	0o	1+	1	0.0
18	0°	1-	0+	1-	2-	0+	0+	0+	4+	2	0.0
19	2°	2-	1+	2o	2o	2o	2-	1-	13+	6	0.3
20	2-	1+	2+	1o	2o	2o	2+	3o	16-	8	0.4
21	3°	4-	2o	2+	2+	2+	2-	2-	19o	10	0.6
22	3-	2o	2-	1o	2-	3+	3o	2o	17+	9	0.5
23	2°	2-	0o	1+	2+	2-	3+	3-	15o	8	0.4
24	3+	1-	2o	2o	2o	2o	1-	2-	14+	7	0.4
25	2+	2o	1+	1o	2-	1o	1-	1+	11+	5	0.2
26	1-	1+	1-	1+	0+	0+	0+	1o	6o	3	0.1
27	0+	0o	1-	0+	1-	1o	1-	2o	6-	3	0.1
28	3-	2o	3o	2-	3+	3o	1+	2o	19o	11	0.6
29	3°	2+	2-	1o	2+	3-	3-	2-	17+	9	0.5
30	3+	1o	1-	1o	2+	4-	3+	2-	17o	10	0.6
31	1-	2-	2+	2+	3o	2+	3-	2-	17-	9	0.5
									<b>Mean</b>	<b>6</b>	<b>0.31</b>
Preliminary sudden commencements:						28d	02h	24m			
<b>Editor: GeoForschungsZentrum Potsdam</b>											
<b>Adolf-Schmidt-Observatorium für Geomagnetismus</b>											
<b>F.R. Germany</b>											

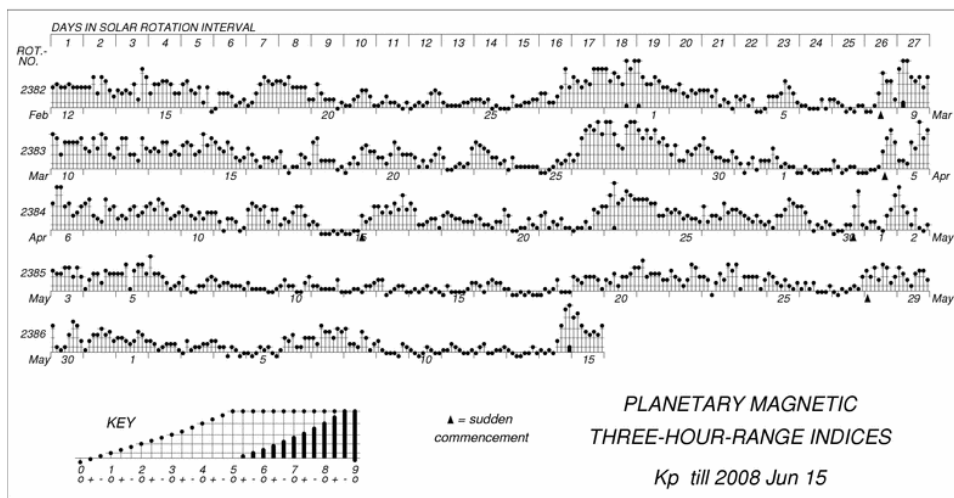


Figura B.1 – Diagrama musical do índice planetário  
Fonte: GFZ, 2008.

R9	Rot. No.	1st day	C9
222 110 011	<b>2006</b>	J17	232 201 422 631 000 001 104 000 011 003 210
111 010 110		F13	003 210 554 110 10 120 000 331 043 000 220
122 211 134	M12	000 220 665 420 011 211 010 026 20 74 103	
332 112 313	2357 A08	074 103 3763 120 125 210 003 000 004 255 100	
321 012 233	2358 M05	255 100 442 100 141 112 100 001 021 210 006	
113 211 101	2359 J01	210 000 655 2210 015 221 000 100 001 432 000	
222 211 111	2360 J28	432 000 352 100 313 130 000 000 001 112 600	
111 112 221	2361 J25	112 600 432 100 62 201 100 001 365 351 100	
112 112 221	2362 A21	351 100 432 124 115 212 001 111 000 453 000	
111 112 210	2363 S17	453 000 362 100 45 110 003 110 006 512 000	
011 211 332	2364 C14	512 000 354 010 000 453 122 210 003 651 012	
122 210 232	2365 N10	651 012 210 000 144 442 126 100 006 652 446	
221 101 112	2366 D07	652 446 278 313 365 543 210 000 26 542 100	
222 111 111	<b>2007</b>	J03	542 100 011 000 446 532 200 000 006 552 000
122 101 111		J30	552 000 113 210 25 532 210 000 000 135 300
111 011 001	F26	135 300 354 10 123 623 320 000 025 333 101	
111 100 011	2370 M25	333 101 65 320 000 310 200 022 210 024 011	
011 111 112	2371 A21	024 011 465 410 000 44 100 000 001 431 146	
211 112 321	2372 M18	431 146 644 300 001 132 000 211 001 511 111	
000 111 111	2373 J14	511 111 43 210 000 200 024 111 001 510 530	
221 001 111	2374 J11	510 530 000 430 000 220 421 410 004 510 421	
111 011 111	2375 A07	510 421 002 100 000 000 234 210 135 213 331	
100 000 001	2376 S03	213 331 000 001 000 000 3 234 320 566 321 431	
001 000 000	2377 S30	321 431 000 000 001 000 343 112 44 323 211	
000 100 110	2378 O27	323 211 000 000 000 000 3 312 200 643 444 211	
111 112 221	2379 N23	444 211 000 000 000 002 431 000 553 442 200	
000 011 110	2380 D20	442 200 011 001 000 005 442 002 353 433 311	
000 011 100	<b>2008</b>	J16	433 311 011 320 000 554 200 011 54 344 321
000 011 110		F12	344 321 341 101 000 356 521 020 26 544 343
111 011 311	M10	544 343 112 221 120 66 622 010 35 542 321	
001 011 100	2384 A06	542 321 320 142 110 116 423 131 223 323 211	
100 111 000	2385 M03	323 211 000 000 010 012 322 210 032 32	
	2386 M30	32	

Symbol	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{R}$	0	1-15	16-30	31-45	46-60	61-80	81-100	101-130	131-170	171...
R9, C9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_0$	0.0-0.1	0.2-0.3	0.4-0.5	0.6-0.7	0.8-0.9	1.0-1.1	1.2-1.4	1.5-1.8	1.9	2.0-2.55

**DAILY GEOMAGNETIC  
CHARACTER FIGURES C9 AND  
3-DAY MEAN SUNSPOT NUMBERS R9  
(after Bartels)**

Editor: GeoForschungsZentrum Potsdam,  
Adolf-Schmidt-Observatorium fuer Geomagnetismus,  
Lindenstr. 7, D-14823 Niemegk, F. R. Germany

Figura B.2 – Daily Geomagnetic Character Figures C9  
Fonte: GFZ, 2008.

Tabela B.3 – Conversão de valores de Kp para Ap

Fonte: ISGI 2008.

Kp	0o	0+	1-	1o	1+	2-	2o	2+	3-	3o	3+	4-	4o	4+
Ap	0	2	3	4	5	6	7	9	12	15	18	22	27	32

Kp	5-	5o	5+	6-	6o	6+	7-	7o	7+	8-	8o	8+	9-	9o
Ap	39	48	56	67	80	94	111	132	154	179	207	236	300	400

Tabela B.4 – Número de manchas solares

Fonte: SIDC, 2008.

MONTHLY REPORT ON THE INTERNATIONAL SUNSPOT NUMBER				
from the SIDC (RWC-Belgium)				
JUNE 2008				
PROVISIONAL INTERNATIONAL NORMALIZED HEMISPHERIC SUNSPOT NUMBERS				
Date	Ri	Rn	Rs	
1	0	0	0	
2	0	0	0	
3	0	0	0	
4	0	0	0	
5	9	0	9	
6	0	0	0	
7	0	0	0	
8	0	0	0	
9	0	0	0	
10	9	0	9	
11	8	0	8	
12	0	0	0	
13	8	0	8	
14	0	0	0	
15	7	4	3	
16	7	0	7	
17	7	0	7	
18	8	0	8	
19	7	0	7	
20	8	0	8	
21	8	0	8	
22	8	0	8	
23	0	0	0	
24	0	0	0	
25	0	0	0	
26	0	0	0	
27	0	0	0	
28	0	0	0	
29	0	0	0	
30	0	0	0	
MONTHLY MEAN:	3.1	0.1	3.0	
COOPERATING STATIONS :	62	52	52	
PILOT STATION :	Specola Solare Ticinese, Locarno			
Reproduction permitted if source mentioned				
R. Van der Linden				
avenue Circulaire, 3 B-1180 BRUXELLES - BELGIUM				



Tabela B.5 – Valores diários de atividade geomagnética, fluxo solar e número de manchas, compilados pelo SPDIR relativos a janeiro de 2008.

Fonte: SPDIR, 2008.

0801012380131717	710	7	7	710	80	6	6	3	4	3	3	3	4	40.10	7	76.70				
080102238014	3	0	3	3	710	3	33	2	0	2	2	2	3	4	2	20.00	7	77.00		
080103238015	0	7	3	3	3	0	3	7	27	0	3	2	2	2	0	2	3	20.00	7	76.70
080104238016	0	0	0	7	710	317	43	0	0	0	3	3	4	2	6	20.00	12	76.40		
0801052380172030373737303740267	7	15	22	22	22	15	22	27	191.05	10	77.10									
0801062380182737302330373733253	12	22	15	9	15	22	22	18	170.94	11	76.60									
0801072380194037233030131327213	27	22	9	15	15	5	5	12	140.84	11	75.20									
0801082380202330273023373330233	9	15	12	15	9	22	18	15	140.84	9	73.00									
0801092380213323231710101017143	18	9	9	6	4	4	4	6	80.42	0	74.00									
08011023802220	710101310	710	87	7	3	4	4	5	4	3	4	40.10	8	73.20						
08011123802317	7	710	0	310	3	57	6	3	3	4	0	2	4	2	30.10	8	73.50			
080112238024	3	0101320403020137	2	0	4	5	7	27	15	7	80.52	0	73.20							
0801132380252723171030303320190	12	9	6	4	15	15	18	7	110.63	0	72.90									
0801142380263330274330334033270	18	15	12	32	15	18	27	18	191.05	0	73.10									
0801152380273027232030231320187	15	12	9	7	15	9	5	7	100.63	0	71.30									
0801162381	12727332723302730223	12	12	18	12	9	15	12	15	130.84	0	70.60								
0801172381	23020172030202737200	15	7	6	7	15	7	12	22	110.73	0	71.30								
0801182381	33330301723302720210	18	15	15	6	9	15	12	7	120.73	0	68.80								
0801192381	41720233030371717190	6	7	9	15	15	22	6	6	110.63	0	68.60								
0801202381	5	730201317	71720130	3	15	7	5	6	3	6	7	60.31	0	68.00						
0801212381	6	713131317172317120	3	5	5	5	6	6	9	6	60.31	0	69.30							
0801222381	7	713	3	0	3	7	7	3	43	3	5	2	0	2	3	3	2	20.00	0	68.10
0801232381	8	0	3101010132023	90	0	2	4	4	4	5	7	9	40.21	0	68.40					
0801242381	913	710	720172317113	5	3	4	3	7	6	9	6	50.21	0	69.10						
08012523811027372720	7133020180	12	22	12	7	3	5	15	7	100.63	0	68.90								
080126238111302317171317	717140	15	9	6	6	5	6	3	6	70.42	0	70.30								
08012723811213	7	0	3	3132017	77	5	3	0	2	2	5	7	6	40.10	0	69.80				
0801282381131017	310	7	31320	83	4	6	2	4	3	2	5	7	40.10	0	69.20					
08012923811413271717	7	0	0	0	80	5	12	6	6	3	0	0	0	40.10	0	69.50				
0801302381151017	0	3	0	0	0	30	4	6	0	2	0	0	0	20.00	8	70.60				
080131238116	0	0	0	7	7233027	93	0	0	0	3	3	9	15	12	50.21	8	69.90			

Tabela B.6 – Formato dos registros de fluxo solar e atividade geomagnética apresentados na Tabela A.5.

Fonte: SPDIR, 2008.

COLUMNS	FMT	DESCRIPTION
1-2	I2	YEAR
3-4	I2	MONTH
5-6	I2	DAY
7-10	I4	BARTELS SOLAR ROTATION NUMBER - a sequence of 27-day intervals counted continuously from February 8, 1832.
11-12	I2	NUMBER OF DAY within the Bartels 27-day cycle.
13-14	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 0000 - 0300 UT. *
15-16	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 0300 - 0600 UT. *
17-18	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 0600 - 0900 UT. *
19-20	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 0900 - 1200 UT. *
21-22	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 1200 - 1500 UT. *
23-24	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 1500 - 1800 UT. *
25-26	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 1800 - 2100 UT. *
27-28	I2	Kp or PLANETARY 3-HOUR RANGE INDEX for 2100 - 2400 UT. *
29-31	I3	SUM of the eight Kp indices for the day expressed to the nearest third of a unit.
32-34	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 0000 - 0300 UT. **
35-37	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 0300 - 0600 UT. **
38-40	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 0600 - 0900 UT. **
41-43	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 0900 - 1200 UT. **
44-46	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 1200 - 1500 UT. **
47-49	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 1500 - 1800 UT. **
50-52	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 1800 - 2100 UT. **
53-55	I3	ap or PLANETARY EQUIVALENT AMPLITUDE for 2100 - 2400 UT. **
56-58	I3	Ap or PLANETARY EQUIVALENT DAILY AMPLITUDE - the arithmetic mean of the day's eight ap values.
59-61	F3.1	Cp or PLANETARY DAILY CHARACTER FIGURE - a qualitative estimate of overall level of magnetic activity for the day determined from the sum of the eight ap amplitudes. Cp ranges, in steps of one-tenth, from 0 (quiet) to 2.5 (highly disturbed).
62-62	I1	C9 - a conversion of the 0-to-2.5 range of the Cp index to one digit between 0 and 9.
63-65	I3	INTERNATIONAL SUNSPOT NUMBER. Records contain the Zurich number through December 31, 1980, and the International Brussels number thereafter.
66-70	F5.1	OTTAWA 10.7-CM SOLAR RADIO FLUX ADJUSTED TO 1 AU - measured at 1700 UT daily and expressed in units of 10 to the -22 Watts/meter sq/hertz. Observations began on February 14, 1947. From that date through December 31, 1973, the fluxes given here don't reflect the revisions Ottawa made in 1966.
71-71	I1	FLUX QUALIFIER. "0" indicates flux required no adjustment; "1" indicates flux required adjustment for burst in progress at time of measurement; "2" indicates a flux approximated by either interpolation or extrapolation; and "3" indicates no observation.

\* K indices range in 28 steps from 0 (quiet) to 9 (greatly disturbed) with fractional parts expressed in thirds of a unit. A K-value equal to 27, for example, means 2 and 2/3 or 3-; a K-value equal to 30 means 3 and 0/3 or 3 exactly; and a K-value equal to 33 means 3 and 1/3 or 3+.

\*\* The a-index ranges from 0 to 400 and represents a K-value converted to a linear scale in gammas (nanoTeslas)--a scale that measures equivalent disturbance amplitude of a station at which K=9 has a lower limit of 400 gammas.

Example:

080101238013171771077710806634333440.10776.70  
 YYMDD Srn D Kp ΣKp ap Ap CpC9 Ri Fx Q