sid.inpe.br/mtc-m19/2013/01.23.13.32-PUD

MODELOS DE PERTURBAÇÕES EM SATÉLITES

Valdemir Carrara

Publicação Didática

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3DE5SHE>

INPE
São José dos Campos
2013

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GB)
Serviço de Informação e Documentação (SID)
Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/6921
Fax: (012) 3208-6919
E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):
Presidente:
Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Membros:
Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)
Drª Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)
Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)
Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)
Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)
Drª Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação
Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)
BIBLIOTECA DIGITAL:
Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:
Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)
EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:
Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Luciana Manacero - Serviço de Informação e Documentação (SID)

sid.inpe.br/mtc-m19/2013/01.23.13.32-PUD

MODELOS DE PERTURBAÇÕES EM SATÉLITES

Valdemir Carrara

Publicação Didática

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3DE5SHE>

INPE
São José dos Campos
2013

Resumo

Este documento apresenta uma compilação de notas de aula de um curso de Aerodinâmica de Satélites Artificiais ministrado em 1980 pelo professor Nellore Srinivasan Venkataraman. A estas notas foram adicionados modelos de forças e torques em satélites derivados de efeitos ambientais que inicialmente constaram da dissertação de mestrado deste autor. Embora o conteúdo ainda não possa ser considerado completo, já que no ambiente espacial podem ser contabilizadas várias dezenas de efeitos perturbadores na órbita e atitude de satélites, acredita-se que os principais estejam descritos com pormenores suficientes que permitam ao leitor a compreensão do fenômeno e sua eventual implementação computacional. O documento traz ainda alguns resultados analíticos da integração de forças e torques aerodinâmicos e de pressão de radiação em corpos simples, como placas planas, esferas, cilindros e caixas.

Satellite Disturbance Models

Abstract

This document presents the lecture notes of Aerodynamics of Artificial Satellites course, taught in 1980 by Professor Nellore Srinivasan Venkataraman at INPE. At these notes the author added some models of space environmental perturbations on satellite attitude and orbit, originally presented in his MSc work, back in 1982. While the content of this document still can't be considered exhaustive, since dozens of environmental effects can affect the satellite orbit and attitude, the main disturbances are described in such a detail to enable the readers to understand the phenomenon and to implement a computational model. The document also presents some results from the analytical integration of aerodynamic and solar pressure radiation forces and torques simple bodies, such as flat plates, spheres, cylinders and boxes.

Sumário

Pág.

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Classificação das forças e torques 1
1.2 Transformações entre sistemas de coordenadas 9
1.2.1 Propriedades das matrizes de rotação 10
1.3 Sistemas de coordenadas 11
1.3.1 Sistema geocêntrico inercial 11
1.3.2 Sistema geocêntrico orbital 12
1.3.3 Sistema geométrico do satélite 12
1.3.4 Sistema do elemento de superfície ou sistema descritivo da geometria do satélite. 13

2 TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE 15
2.1 Estabilização por gradiente de gravidade. 18

3 FORÇA E TORQUE AERODINÂMICO 21
3.1 Teoria dos meios contínuos e teoria molecular dos gases 21
3.2 Conceituação da função distribuição 22
3.3 Equação da função de distribuição de Boltzmann 25
3.4 Função de distribuição de rapidez e razão de velocidades 30
3.5 Transferência de quantidade de movimento na colisão 33
3.6 A interação entre o gás e a superfície 41
3.6.1 Reflexão especular 41
3.6.2 Reflexão difusa 42
3.6.3 Coeficientes de troca de quantidade de movimento 43
3.6.4 Função de distribuição de velocidades das moléculas refletidas 44
3.6.5 Expressões para a força aerodinâmica atuante num elemento de área 47
3.6.6 Coeficiente de arrasto numa esfera 52
3.6.7 Coeficiente de arrasto num cilindro 57
3.6.8 Força aerodinâmica em um cilindro 64
3.6.9 Força e momento em um cilindro transverso 70
3.6.10 Força aerodinâmica em placas planas paralelas 71
3.6.11 Força aerodinâmica em paralelepípedos 75

4 FORÇAS E TORQUES DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO 77
4.1 Radiação solar direta 77
4.2 Força numa esfera 85
4.3 Coeficiente de radiação de um cilindro 86
4.4 Força e torque num cilindro 89

5 RADIAÇÃO TERRESTRE 99
5.1 Radiação refletida pela Terra (albedo) 99
5.2 Radiação emitida pela Terra 102

BIBLIOGRAFIA: 105

APÊNDICE A 107

APÊNDICE B 111

1 INTRODUÇÃO

1.1 Classificação das forças e torques

O movimento dos satélites artificiais no espaço é afetado por forças e torques que estejam atuando num dado momento. Embora sejam pequenas em módulo, com exceção da força gravitacional, a sua ação continuada afeta significativamente a posição e a orientação dos satélites, modificando, respectivamente, a órbita e a atitude.

O perfeito conhecimento do fenômeno responsável pelo aparecimento de uma determinada perturbação é essencial quando se deseja analisar, propagar, gerar ou simular uma órbita ou a atitude. Outras aplicações para a modelagem desses esforços são o projeto de controladores de atitude e projeto (dimensionamento) de certos componentes do satélite. A precisão e o realismo de uma simulação são fortemente influenciados pelo nível de detalhamento e de modelagem das perturbações. O conhecimento destes fenômenos é importante em todas as fases do desenvolvimento de um satélite, desde a concepção, análise da missão, projeto preliminar, projeto detalhado, lançamento e operação em órbita. A seleção da órbita, a estabilização e controle da atitude, o dimensionamento de sistemas propulsivos e da carga de combustível dependem dos efeitos que as perturbações causam no satélite. No caso da força aerodinâmica, pode-se citar ainda mais uma aplicação, que é o estudo da alta atmosfera. Todos os modelos atuais da atmosfera utilizaram, na determinação de seus parâmetros, dados obtidos pelo rastreamento de vários satélites. Como exemplo, até 1940 acreditava-se que a temperatura da atmosfera entre 300 e 1000 km era por volta de -50°C. Dados transmitidos por foguetes mostraram que a temperatura era da ordem de 400°C.

Os esforços a que estão submetidos os satélites podem ser classificados quanto à sua origem em (WERTZ, 1978; SINGER, 1964):

a) Forças e torques de origem interna ao satélite.
b) Forças e torques externos ou ambientais.

Devido à natureza das forças e torques internos, isto é, devido ao fato de serem extremamente dependentes dos equipamentos a bordo do satélite, estes torques serão analisados, sem muitos detalhes, somente neste capítulo. Isto se justifica, pois uma modelagem precisa de cada um deles requer, em princípio, a completa especificação do equipamento que o origina, isto é, das características dos motores propulsivos, rotores, tanques, painéis, etc., além do modelo matemático que represente o efeito, e esta descrição foge ao escopo deste trabalho.

As forças e torques internos podem ainda ser subdivididos em subgrupos, como se segue:

1- Forças e torques internos

1.1- Devido à ejeção de massa

1.1.1- Intencionais. São provocados pelo sistema de controle de atitude e órbita

- Atuadores de controle de atitude (jatos de gás quente ou frio) ou de órbita
- Separação da carga útil ou separação entre estágios.
- Sublimação de materiais destinados a retardar um evento.
- Desprendimento de massa para amortecer rotações elevadas (iô-iô).

1.1.2- Não intencionais, resultantes de um erro no projeto ou falha no equipamento.

- Escapamento de combustível ou gases em câmaras pressurizadas.
- Desalinhamento do motor de empuxo ou imprecisão no tempo de queima (Figura 1.1).
- Colisão dos gases de combustão (ou jatos de gás frio) com partes do veículo (Figura 1.2).
- Duração do tempo de queima impreciso.

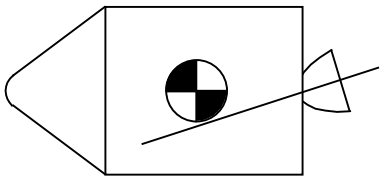

Fig. 1.1 – Desalinhamento de empuxo de motor propulsivo.

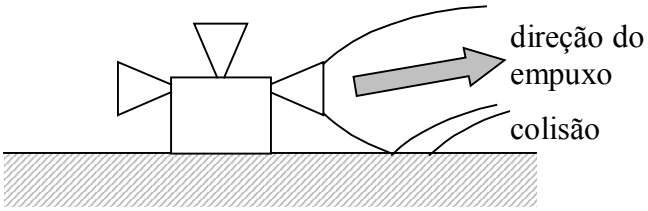

Figura 1.2 – Pluma de jato em colisão com a estrutura do veículo.

1.2- Agitação de combustíveis líquidos nos tanques. A agitação de combustíveis em tanques se deve a um movimento translacional ou uma aceleração angular causada, por sua vez, pelo disparo efetuado pelo sistema de controle de órbita ou atitude, deformação elástica da nave, ou uma perturbação ambiental. A perturbação persiste até que se dissipe a energia armazenada pelo líquido em movimento. Para se reduzir a agitação e aumentar a capacidade de dissipação, utiliza-se tanques com defletores internos (Figura 1.3).

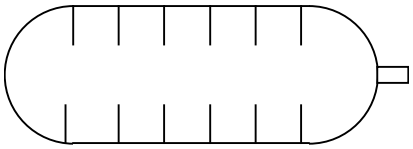

Figura 1.3 – Reservatório de combustível com defletores internos para reduzir a movimentação do líquido.

1.3- Movimentos de pessoas a bordo. Os movimentos da tripulação a bordo de um veículo são difíceis de serem previstos. A perturbação depende da amplitude dos movimentos e da relação entre as massas da tripulação e da nave.

1.4- Movimentos de equipamentos a bordo. Os movimentos de equipamentos a bordo normalmente são compensados pela inclusão de dispositivos que anulam ou amenizam as perturbações introduzidas pelo movimento. Entre os equipamentos que podem ter alguns de seus componentes em movimento estão: gravadores de fita, radiômetros de varredura, câmeras de varredura, telescópios, antenas

direcionais, mastros flexíveis, painéis flexíveis, etc. Rodas de reação e volantes de inércia são equipamentos de controle e, portanto, geram efeitos intencionais.

2- Forças e torques externos ou ambientais. As forças e torques ambientais não dependem dos equipamentos que compõem o satélite em si, mas da simples presença de um corpo no espaço. Dentre as mais importantes forças ambientais estão gravitacionais, aerodinâmica, pressão de radiação e eletromagnéticas.

2.1- Gravitacionais. As forças e torques de origem gravitacional podem ser subdivididas quanto à fonte em gravitacional terrestre ou luni-solar. Seus efeitos na órbita do satélite também são diferentes.

2.1.1- Gravitacional terrestre. A Terra não é perfeitamente esférica, e, portanto, a órbita de um satélite não é uma elipse (ou circunferência) perfeita. Os modelos atuais fornecem o potencial terrestre em termos de coeficientes, aplicados normalmente em polinômios de Legendre. Esta série, teoricamente infinita, na prática é truncada a partir de uma determinada ordem. A determinação dos coeficientes envolve cálculos extensos e a análise de inúmeras órbitas. A ordem de truncagem vem crescendo nos últimos anos, sendo que atualmente conta-se com o modelo GEM 10B, até a ordem 30. O primeiro termo desta série é o termo principal e corresponde a uma Terra esférica, resultando a órbita, portanto, uma elipse (corresponde à ordem 0). A ordem 1 é nula, resultante da adoção da origem do sistema de coordenadas coincidente com o centro de massa da Terra. A ordem 2 corresponde ao achatamento terrestre e assim por diante. Na série existem coeficientes zonais (modificam o potencial em latitude) e o tesserais (modificam em longitude). De uma maneira esquemática, os harmônicos zonais podem ser visualizados como se a Terra tivesse um perfil como o mostrado na Figura 1.4. O perfil completo da Terra denomina-se geóide e assemelha-se à figura seguinte (considerando-se apenas os harmônicos zonais). O segundo harmônico é cerca de 1000 vezes menor que o termo principal, ao passo que os demais são menores um milhão de vezes que o primeiro termo. O efeito gravitacional da Terra produz também um torque no satélite, conhecido como torque de gradiente de gravidade. Devido à importância deste torque ele será visto com mais detalhes no segundo capítulo.

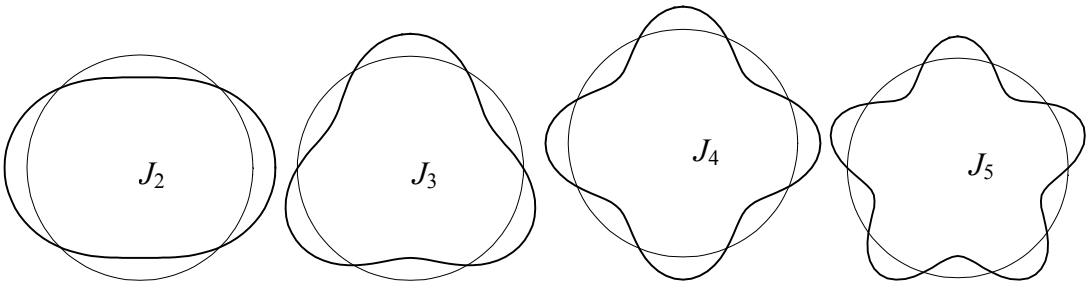

Figura 1.4 – Influência dos harmônicos zonais no perfil aparente da Terra

2.1.2- Luni-solar. A gravidade tanto do Sol quanto da Lua gera um torque na órbita, cuja influência maior é alterar a inclinação desta com relação ao equador. Isto se deve ao fato de que o eixo de rotação da Terra é inclinado com relação ao eixo da eclíptica, e também com relação ao plano da órbita lunar. Diferenças na magnitude da força de atração entre a Lua ou Sol e o satélite, provocadas

pela variação na distância entre eles, acarreta um torque que tende a precessar a órbita em torno do pólo da eclíptica, o que provoca uma mudança na inclinação orbital.

2.1.3- Marés terrestres. O efeito das marés terrestres só pode ser sentido e mesmo assim numa escala muito reduzida em satélites de baixa relação área-sobre-massa (satélites densos) e esféricos. Desta forma, os efeitos gravitacionais não ficam mascarados pelos demais (aerodinâmico, pressão de radiação, etc.) e se tornam dominantes.

2.2- Aerodinâmica. A força e torque aerodinâmicos surgem em decorrência do choque das moléculas da atmosfera rarefeita com o satélite em movimento. Uma comparação qualitativa entre as forças, tomadas em relação à força gravitacional, é mostrada na Tabela 1.1. Nota-se que a força aerodinâmica decresce rapidamente com a altitude, devido ao comportamento exponencial da densidade atmosférica com a altura. Devido ao fato da força aerodinâmica (arrasto atmosférico) não ser conservativa, ela é predominante em satélites com perigeu menor que 1000 km. Sua influência é maior no semi-eixo orbital, que decresce com o tempo, e na excentricidade, que tende a se anular (circularizar a órbita), como pode ser visto nas Figuras 1.5 e 1.6. Na verdade, a força aerodinâmica é a maior responsável pelo decaimento da órbita, caracterizando, com isso, o tempo de vida do satélite (intervalo de tempo entre a injeção em órbita e o instante quando a altitude média é menor do que 100 km). Atingida a altura do apogeu de 150 km, o satélite cai em poucos dias.

Tabela 1.1 – Comparação relativa entre as magnitudes das principais perturbações.

Tipo	250 km	700 km	2000 km
kepleriana (Terra esférica)	1	1	1
achatamento	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
demais harmônicos	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
aerodinâmico	10^{-4}	10^{-6}	-
pressão de radiação	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
luni-solar	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}

Figura 1.5 – Decaimento orbital devido ao arrasto atmosférico

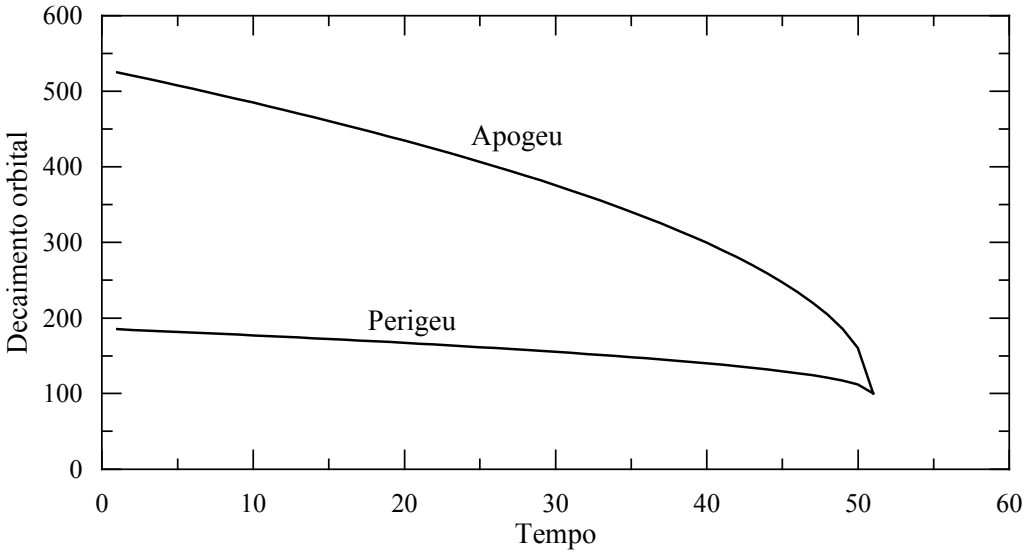

Figura 1.6 – Variação da altitude do perigeu e apogeu devido ao arrasto.

2.3- Forças e torques de pressão de radiação. Tais forças originam-se devido à troca de quantidade de movimento dos fótons ao chocarem-se com a superfície do satélite. São considerados fontes importantes de radiação no espaço apenas o Sol e a Terra. A radiação provinda da Terra possui duas parcelas significativas: o albedo (radiação solar refletida difusamente pela superfície da Terra) e a radiação terrestre (emissão espontânea na faixa do infravermelho e proporcional à quarta potência da temperatura absoluta da superfície terrestre).A radiação solar direta afeta principalmente a excentricidade orbital, mas pode afetar o semi-eixo. Praticamente independente da altitude do satélite, a pressão de radiação começa a predominar a força aerodinâmica a partir dos 700 km. É grande sua influência nos satélites geoestacionários (altitude de 36000 km). Tanto o albedo quanto a radiação terrestre atuam quase que exclusivamente na vertical, procurando aumentar o semi-eixo orbital. A radiação terrestre é extremamente simétrica com relação à vertical local, tornando a detecção dos seus efeitos bastante difícil e complexa. O albedo é cerca de 90% menor que a radiação solar direta a 700 km de altitude; a radiação terrestre é aproximadamente 93% menor. Ambos decrescem com a altitude.

2.4- Forças e torque eletromagnéticos. São vários os tipos de forças e torques atuantes em satélites de origem eletromagnética. Todos derivam do fato de o satélite mover-se numa atmosfera parcialmente ionizada (um gás condutor) surgindo com isso correntes elétricas que interagem por sua vez com o campo magnético terrestre. Os satélites tendem a ter em sua superfície um potencial elétrico negativo, pois na ionosfera o número de colisões por unidade de tempo dos elétrons livres do plasma com o satélite é muito maior do que o de íons positivos. Muitas das forças e torques de origem eletromagnética são oriundos deste potencial negativo, e só surgem caso a superfície do satélite seja metálica, e, portanto, condutora. De uma maneira global, estas forças são, em geral, pequenas quando comparadas com aquelas mencionadas anteriormente. Sua influência é maior em satélites altamente simétricos (esferas, cilindros, etc.) pois nestes satélites os demais torques são nulos. Dentre as forças e torques de origem eletromagnética podem ser citados:

2.4.1- Torque de indução. Ocorre devido à interação de correntes elétricas que surgem na superfície do satélite com o campo magnético terrestre. Estas

correntes aparecem graças ao acréscimo desigual de íons e elétrons da atmosfera na superfície do satélite. Como a velocidade dos elétrons livres da ionosfera é muito maior do que a velocidade do satélite, e esta, por sua vez, é muito maior do que a velocidade média dos íons, tem-se uma configuração na qual os elétrons colidem com o satélite vindos de todas as direções, porém os íons (e também moléculas neutras), colidem preferencialmente na face frontal em relação à velocidade. O acréscimo de carga no satélite é portanto desigual, havendo uma tendência da carga ser menos negativa na face frontal. Surge assim uma corrente elétrica que vai da face frontal para a face posterior (Figura 1.7). Esta corrente, ao interagir com o campo geomagnético irá gerar o torque de indução.

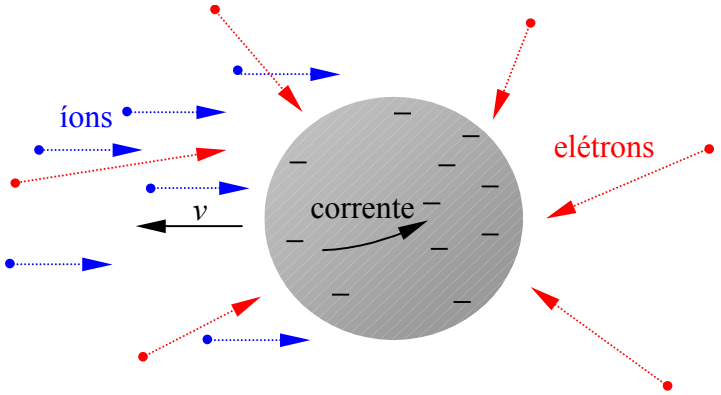

Figura 1.7 – Torque de assimetria de carga elétrica.

2.4.2- Arrasto de Coulomb. Origina-se devido ao choque e deflexão dos íons da atmosfera com o satélite eletricamente carregado com potencial negativo. Os íons são defletidos da sua trajetória e eventualmente colidem com o satélite, causando um arrasto (Figura 1.8).

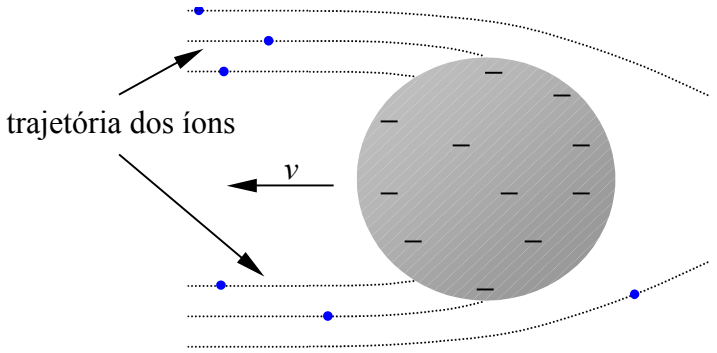

Figura 1.8 – Arrasto de Coulomb.

2.4.3- Torque de correntes de Foucault. A interação dos elétrons livres na superfície condutora com o campo magnético terrestre em virtude da rotação do satélite provoca o aparecimento de circuitos fechados de corrente elétrica na superfície e no interior de um satélite condutor. Essas correntes dissipam energia por efeito Joule, introduzindo, desta forma, um torque que tende a imobilizar o satelite com respeito ao campo magnetico. O movimento de rotação do satélite é o principal causador desse torque, que, além de reduzir exponencialmente a velocidade angular, também precessa seu eixo. (Figura 1.9).

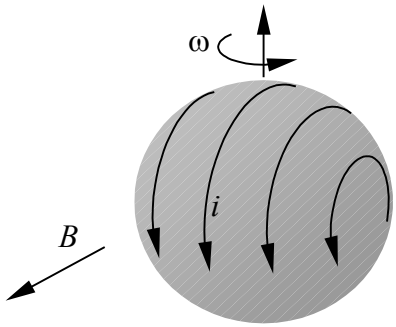

Figura 1.9 – Correntes geradas no satélite pelo campo *B* e a velocidade angular ω

2.5- Outros tipos de forças e torques. Dentre os outros tipos destacam-se aqueles estritamente ambientais e aqueles que deveriam ser classificados como intermediários ou mistos.

2.5.1- Outras perturbações ambientais:

- Ondas Alfvén. Surgem no plasma ondas que se deslocam perpendicularmente ao movimento do satélite. Sua energia deriva da energia cinética do satélite e, portanto, seu efeito é semelhante a um arrasto.
- Força de Lorentz. Um satélite carregado eletricamente movendo-se através de um campo magnético sofre uma aceleração perpendicular à direção do movimento.
- Torque de rotação de carga elétrica. Um satélite polarizado eletricamente e girando num campo magnético tem sua energia rotacional reduzida devido à dissipação por efeito Joule das cargas elétricas movendo-se com relação ao satélite, porém estacionadas com respeito ao campo (Figura 1.10)
- Gradiente de densidade. A variação da densidade atmosférica com a altitude causa um torque aerodinâmico quando as moléculas da atmosfera se chocam com o satélite (Figura 1.11)
- Aerodinâmico rotacional. Surge em decorrência do movimento rotacional do satélite com relação à atmosfera. A força aerodinâmica é maior no lado mais veloz, originando um torque que tende a anular a rotação do satélite (Figura 1.12).

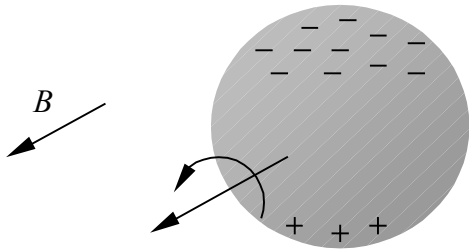

Figura 1.10 – Torque de rotação de carga elétrica.

2.5.2- No segundo grupo, de forças e torques mistos, citam-se:

- Interação das correntes elétricas dos painéis solares e equipamentos a bordo como campo magnético terrestre. Estas perturbações são não-

intencionais, e seus efeitos podem ser minimizados introduzindo-se pequenos ímãs permanentes em locais pré-determinados, procurando-se anular o momento magnético resultante das correntes.

- Bobinas eletromagnéticas. O mesmo efeito anterior pode ser utilizado de forma intencional, a fim de corrigir-se a atitude do satélite grosseiramente (de 2 a 5 graus de precisão). Origina-se de correntes elétricas controladas em bobinas instaladas na estrutura do satélite.
- Histerese magnética. Satélites que são inicialmente providos de rotação angular, mas que necessitam, devido a requisitos, serem estabilizados por outros meios, podem ser utilizadas barras ferromagnéticas na estrutura do satélite que dissipam energia rotacional por meio de histerese magnética. Elas são passivas, leves e baratas.

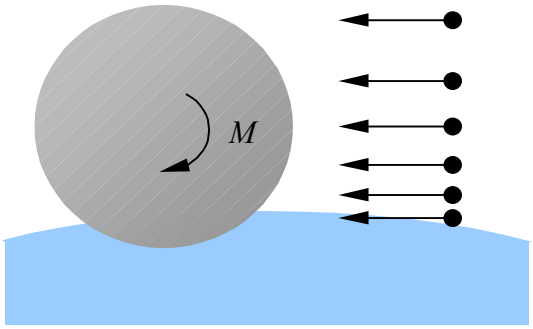

Figura 1.11 – Variação da altitude do perigeu e apogeu devido ao arrasto.

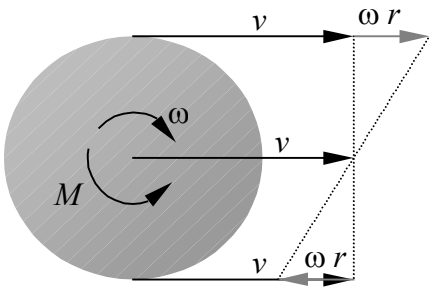

Figura 1.12 – Variação da altitude do perigeu e apogeu devido ao arrasto.

O satélite Echo II possuía a forma esférica feito de um balão de Mylar inflado, com 40 m de diâmetro e órbita a 1200 km de altitude, circular. Foi lançado em 25 de janeiro de 1964 para testar comunicação passiva. Os seguintes valores de torque foram estimados para o Echo II, ao redor do eixo de rotação:

- Torque aerodinâmico (gradiente de densidade e rotacional): 8.2 10^{-8} Nm
- Torque de corrente de Foucault: 6.5 10^{-5} Nm
- Torque de indução: 3.7 10^{-5} Nm
- Torque de Coulomb: 7 10^{-7} Nm

Como dito anteriormente, a magnitude das forças e torques ambientais é dependente da geometria do satélite. Satélites altamente simétricos são mais afetados por efeitos de origem eletromagnética, enquanto que satélites com assimetria de forma ou de massa sofrem influência de perturbações de origem gravitacional e atmosférica (no caso de órbitas baixas, até 1000 km de altitude).

Uma parcela significativa dos satélites em órbita terrestre baixa não possui geometria simétrica, pois requisitos construtivos em geral emcaminham os projetos para geometrias cúbicas, prismáticas ou compostas. Para tais satélites, os principais efeitos perturbadores na órbita são os de origem gravitacional terrestre, seguido do arrasto atmosférico, da pressão de radiação solar e atração do Sol e da Lua. A atitude é afetada pela colisão das moléculas da atmosfera com o corpo do satélite, pela pressão de radiação solar, por torques magnéticos, pelo gradiente de gravidade (no caso de satélite com assimetria de massa), além de vários outros com magnitude reduzida. Uma vez que nem todas as perturbações são significativas na análise do movimento de órbita e atitude dos satélites, é melhor que os principais efeitos sejam modelados com maior precisão, e aqueles menos influentes sejam descartados ou que sejam modelados com grandes simplificações. Dependendo do estudo em questão uma análise da ordem de grandeza do efeito já produz o resultado desejado.

Este documento irá então apresentar modelos matemáticos dos principais efeitos perturbadores da órbita e atitude, com ênfase naqueles dependentes da geometria. A seção seguinte irá apresentar os sistemas de coordenados utilizados ao longo do documento, enquanto que o Capítulo 2 irá desenvolver o modelo de torque de gradiente de gravidade. O Capítulo 3, mais extenso, descorrerá sobre a força e torque aerodinâmicos, seguidos pelo modelo matemático da pressão de radiação solar no Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 5, serão apresentados modelos referentes à radiação terrestre: albedo e re-emissão terrestre.

1.2 Transformações entre sistemas de coordenadas

Dados dois sistemas de coordenadas retangulares $x^b\, y^b\, z^b$ e $x^c\, y^c\, z^c$ existe uma única matriz **A** quadrada de ordem 3 que relaciona os dois sistemas. Seja um vetor $\mathbf{r}^b$ com componentes fornecidos em relação ao sistema $x^b\, y^b\, z^b$ e seja **A** a matriz de rotação que leva este sistema ao sistema e $x^c\, y^c\, z^c$. Então os componentes de **r** neste último sistema serão obtidos por:

$$\mathbf{r}^c = \mathbf{A}\,\mathbf{r}^b \tag{1.1}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Uma matriz de rotação pode ser composta pelo produto de matrizes de rotações elementares. Em coordenadas retangulares, associa-se uma matriz elementar de rotação a cada um dos três eixos. A matriz de rotação que resulta da rotação de um ângulo θ sobre o eixo x^b fica então:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Matrizes de rotação elementares são indicadas por $\mathbf{R}^w(\theta)$, onde w indica o eixo de rotação e θ o ângulo de rotação, como mostra a Figura 1.13.

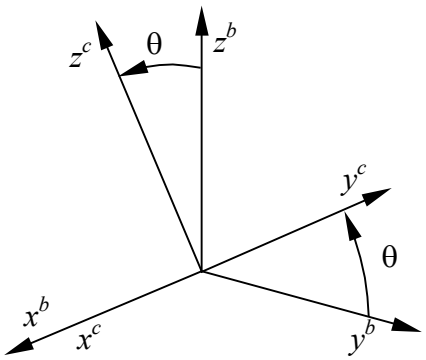

Figura 1.13 – Rotação entre sistemas de coordenadas ao redor do eixo x de um ângulo θ.

Se a rotação de um ângulo θ for realizada sobre o eixo y^b ou z^b, obtém-se, respectivamente:

$$\mathbf{R}^y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{R}^z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Uma matriz formada a partir destas rotações elementares é denominada matriz de rotação de Euler e os ângulos envolvidos em cada rotação são denominados ângulos de Euler. Em mecânica celeste e no estudo da atitude, é freqüente encontrar-se rotações na seqüência *z-x-z*, significando uma rotação no eixo *z*, seguida de uma rotação sobre *x* e novamente em *z*.

1.2.1 Propriedades das matrizes de rotação

As seguintes propriedades das matrizes de transformação podem ser comprovadas sem dificuldade (WERTZ, 1978):

- A soma dos quadrados dos elementos de uma linha ou coluna é sempre igual a 1. Além disso, a soma dos produtos dos elementos de duas linhas ou duas colunas é sempre nula:

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ &a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \\ &a_{11}\, a_{21} + a_{12}\, a_{22} + a_{13}\, a_{23} = 0 \\ &a_{11}\, a_{31} + a_{12}\, a_{32} + a_{13}\, a_{33} = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

  Obtém-se com isso 12 equações, das quais apenas seis são linearmente independentes. Dos 9 elementos da matriz **A**, apenas 3 são independentes.

- A inversa de uma matriz de rotação é igual à sua transposta

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \tag{1.7}$$

  ou, de outra forma:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = I\,, \tag{1.8}$$

onde I é ma matriz identidade de ordem 3.Se uma matriz de rotação leva um sistema $x^b\,y^b\,z^b$ para o sistema $x^c\,y^c\,z^c$, então sua inversa (ou sua transposta) leva o sistema $x^c\,y^c\,z^c$ para o sistema $x^b\,y^b\,z^b$.

- O determinante de uma matriz de rotação é sempre unitário:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}^T) = 1 \tag{1.9}$$

- Qualquer elemento a_{ij} de uma matriz de rotação é igual ao seu cofator. Por exemplo:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32} \\ a_{12} &= -(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.3 Sistemas de coordenadas

Será necessário definir alguns sistemas de coordenadas, usados comumente na representação do movimento de atitude.

1.3.1 Sistema geocêntrico inercial

O sistema geocêntrico inercial $x^i\,y^i\,z^i$, onde x^i e y^i estão contidos no plano do equador terrestre, com x^i apontando para o ponto vernal (coincidente com a interseção do plano do equador com o plano da eclítica). z^i aponta para o pólo norte (Figura 1.14).

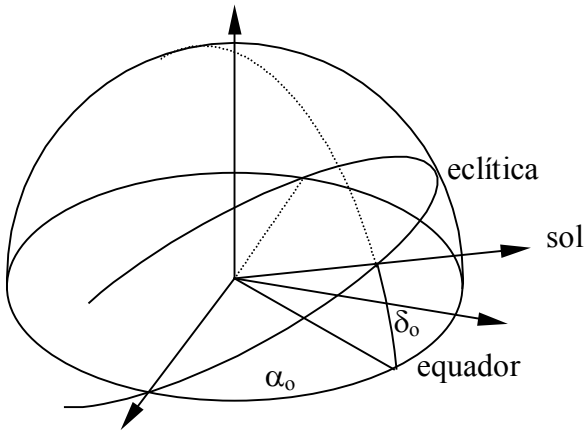

Figura 1.14 – Sistema geocêntrico inercial.

Neste sistema de coordenadas, numa dada data, o raio vetor do Sol é dado por:

$$\mathbf{r}_o^i = d_o \begin{bmatrix} \cos\delta_o\,\cos\alpha_o \\ \cos\delta_o\,\operatorname{sen}\alpha_o \\ \operatorname{sen}\delta_o \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

onde d_o é a distância entre os centros da Terra e do Sol.

1.3.2 Sistema geocêntrico orbital

O sistema geocêntrico orbital $x^o\ y^o\ z^o$, com origem no centro da Terra, eixo x^o passando pelo centro de massa do satélite, e eixo y^o coincidente com a normal ao plano orbital, na direção do momento angular orbital (Figura 1.15).

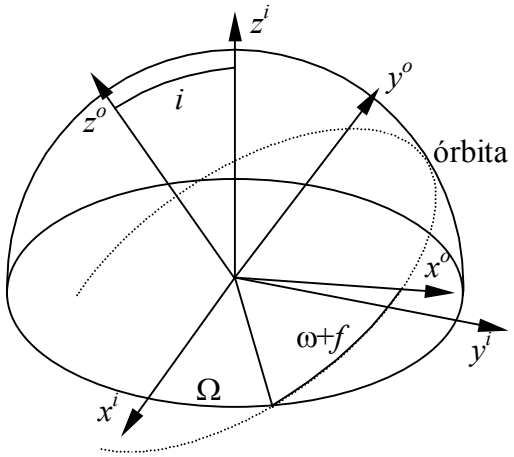

Figura 1.15 – Sistema geocêntrico orbital.

A relação que une o sistema inercial ao sistema orbital é dada por:

$$\mathbf{r}^o = \mathbf{R}^z(\omega + f)\,\mathbf{R}^x(i)\,\mathbf{R}^z(\Omega)\,\mathbf{r}^i\,, \tag{1.12}$$

sendo que $\mathbf{r}^i$ é um vetor com componentes no sistema inercial e $\mathbf{r}^o$ é o mesmo vetor com componentes no sistema orbital. Os ângulos i, Ω, ω e f representam, respectivamente, a inclinação orbital, a ascenção reta do nodo ascendente, o argumento do perigeu e a anomalia verdadeira.

1.3.3 Sistema geométrico do satélite

O sistema geométrico do satélite $x^s\ y^s\ z^s$ é fixo na estrutura do satélite e é através dele que se descreve a geometria do corpo do satélite. Este sistema é normalmente adotado durante o projeto do satélite, e tenta seguir, quando possível, os eixos de simetria do corpo. Estando o satélite livre no espaço, a orientação do sistema geométrico relativo a um outro sistema (inercial ou orbital) é encontrada através do processo de determinação de atitude.

De uma maneira genérica, o sistema geométrico relaciona-se com um outro sistema - que tanto pode ser o inercial ou o orbital através dos ângulos de Euler $\varphi_s\ \theta_s\ \psi_s$, como mostrado na Figura 1.16.

O motivo pelo qual estes ângulos relacionam-se tanto com o sistema orbital quanto com o inercial é que existem satélites estabilizados tanto inercialmente quanto geocentricamente. Fornecendo estes ângulos com relação a um destes sistemas, sua variação fica restrita a pequenos valores, associados ao erro no controle da atitude. A visualização destes ângulos fica mais clara e também sua compreensão. Nota-se que o sistema orbital varia com o tempo com relação ao sistema inercial.

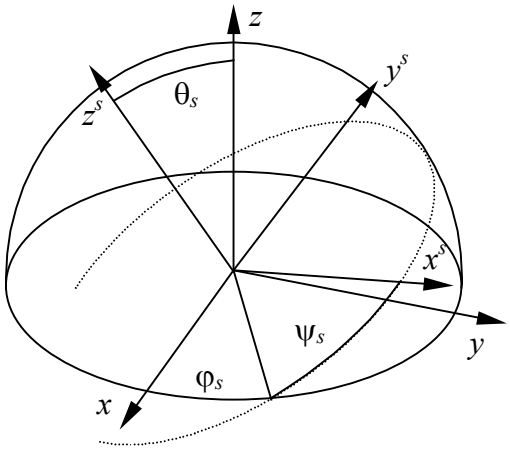

Figura 1.16 – Sistema geométrico do satélite

1.3.4 Sistema do elemento de superfície ou sistema descritivo da geometria do satélite.

Este sistema é, na verdade, um sistema auxiliar. O satélite pode ser descrito por elementos de superfície planos, que serão utilizados no cálculo das forças de perturbação. Estes elementos são infinitesimais, de forma que mesmo superfícies curvas possam ser aproximadas por elementos planos. Neste sistema o eixo z^e é coincidente com a normal externa do elemento. O eixo y^e é orientado de tal forma que um vetor inicialmente conhecido no sistema do satélite, $\mathbf{u}^s$, está contido no plano z^e-y^e e sua projeção no eixo y^e é negativa, conforme mostra a Figura 1.17. O plano x^e-y^e coincide com o plano da superfície. Conhecendo-se a normal $\mathbf{n}^s$ no sistema geométrico do satélite, então as direções do sistema fixo ao elemento serão dadas por:

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{n}^s \tag{1.13}$$

$$\mathbf{i}^e = \frac{\mathbf{u}^s \times \mathbf{n}^s}{\left|\mathbf{u}^s \times \mathbf{n}^s\right|} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{n}^s \times \mathbf{i}^e \tag{1.15}$$

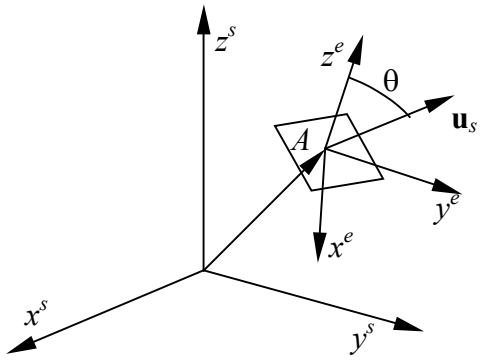

Figura 1.17 – Sisema do elemento de superfície do satélite.

Nota-se que tanto a normal quanto o vetor u^s possuem módulo unitário. A direção y^e pode também ser posta em função do ângulo θ, compreendido entre as direções de n^s e u^s

$$\mathbf{j}^e = \cot\theta\, \mathbf{n}^s - \operatorname{cossec}\theta\, \mathbf{u}^s \tag{1.16}$$

Estes sistemas de coordenadas e as transformações entre eles permitem que vetores possam ser facilmente representados em qualquer um deles. Isto será útil nos próximos capítulos, onde forças e torques elementares terão que ser obtidos em diferentes sistemas de coordenadas.

2 TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE

O torque de gradiente de gravidade é causado por diferenças na força gravitacional que atua no satélite. Uma vez que a força gravitacional da Terra é inversamente proporcional ao quadrado da distância que a separa do satélite, então ocorrem pequenas diferenças tanto na intensidade quanto na direção da força gravitacional em cada elemento de massa pertencente ao satélite, em virtude desses elementos estarem mais próximos ou mais distantes do centro da Terra. É claro que este torque aparece somente quando o satélite não tiver simetria de massa, ou seja, quando o satélite possuir diferenças entre seus momentos principais de inércia.

O torque de gradiente de gravidade num elemento de massa *dm* do satélite é dado, no sistema orbital (com origem no centro de massa do corpo), por:

$$d\mathbf{g}_g^o = \mathbf{r}^o \times d\mathbf{f}^o \,, \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{r}^o$ é o vetor posição do elemento de massa *dm* relativo ao centro de massa do satélite, como indicado na Figura 2.1. No sistema orbital, a expansão da força gravitacional em série de Taylor (CARRARA, 1982), resulta para $d\mathbf{f}^o$, desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2:

$$d\mathbf{f}^o = -\frac{\mu}{R^2}\begin{bmatrix} x/R \\ y/R \\ 1-2z/R \end{bmatrix} + \vartheta\left(\left(\mathbf{r}^o/R\right)^2\right) \cong -\frac{\mu}{R^3}\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R-3z \end{bmatrix}\right\} \tag{2.2}$$

onde μ é a constante geogravitacional e R é a distância do centro da Terra ao centro de massa do satélite.

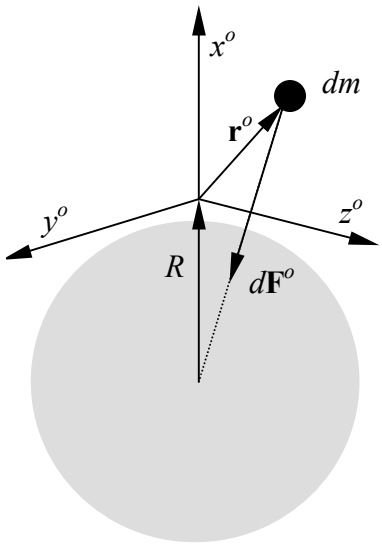

Figura 2.1 – Força agindo num elemento de massa *dm* do satélite

Substituindo esta força na expressão do torque de gradiente de gravidade, e lembrando que o produto vetorial pode ser colocado na forma de um produto matricial através do operador $\mathbf{\Omega}(\cdot)$, segue que:

$$d\mathbf{g}_g^o = -\frac{\mu}{R^3}\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\left\{\mathbf{r}^o + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R-3z \end{bmatrix}\right\} = -\frac{\mu}{R^3}\Omega(\mathbf{r}^o)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R-3z \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

pois $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\,\mathbf{r}^o = 0$ (propriedade de produto vetorial), onde $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ é a matriz anti-simétrica dada por:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Efetuando a integral sobre todo o volume do corpo, obtém-se:

$$\mathbf{g}_g^o = \int_V d\mathbf{g}_g^o = -\frac{\mu}{R^3}\int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} dm + \frac{\mu}{R^3}\int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3z \end{bmatrix} dm \tag{2.5}$$

Mas como R é constante, pode ser posto para fora da integral, e lembrando que:

$$\int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\, dm = 0\,, \tag{2.6}$$

já que o sistema orbital tem origem no centro de massa, tem-se que:

$$\mathbf{g}_g^o = \frac{3\mu}{R^3}\int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\left(\mathbf{v}^o \cdot \mathbf{r}^o\right)\mathbf{v}^o\, dm \tag{2.7}$$

onde $\mathbf{v}^o$ é a direção da vertical local (sentido zênite) no referencial orbital. Nota-se que:

$$\left(\mathbf{v}^o \cdot \mathbf{r}^o\right)\mathbf{v}^o = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Como $\mathbf{v}^o \cdot \mathbf{r}^o$ é um escalar, tem-se:

$$\mathbf{g}_g^o = \frac{3\mu}{R^3}\int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}^o)\left(\mathbf{v}^o \cdot \mathbf{r}^o\right)\mathbf{v}^o\, dm = -\frac{3\mu}{R^3}\int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{v}^o)\left(\mathbf{v}^o \cdot \mathbf{r}^o\right)\mathbf{r}^o\, dm \tag{2.9}$$

Sabendo que $\mathbf{v}^o$ não depende da posição do elemento de massa, e que o produto escalar pode ser posto em termos de produto de matrizes, decorre então que:

$$\mathbf{g}_g^o = -\frac{3\mu}{R^3}\Omega(\mathbf{v}^o)\int_V \mathbf{r}^o\left(\mathbf{r}^{oT}\,\mathbf{v}^o\right) dm = -\frac{3\mu}{R^3}\Omega(\mathbf{v}^o)\int_V \mathbf{r}^o\,\mathbf{r}^{oT}\, dm\,\mathbf{v}^o \tag{2.10}$$

A matriz de inércia de um corpo é dada, por definição, por:

$$\mathbf{J} = \int_V \mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\,\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\, dm = \int_V \left[\mathbf{r}^T\mathbf{r}\,\mathbf{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}^T\right] dm\,, \tag{2.11}$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem 3. Desta expressão pode ser obtido que:

$$\int_V \mathbf{r}\,\mathbf{r}^T\ dm = \int_V \mathbf{r}^T\mathbf{r}\,\mathbf{I}\ dm - \mathbf{J} \tag{2.12}$$

Substituindo este valor na expressão do torque de gradiente de gravidade, tem-se que:

$$\mathbf{g}_g^o = -\frac{3\mu}{R^3}\mathbf{\Omega}(\mathbf{v}^o)\int_V \mathbf{r}^{oT}\ \mathbf{r}^o\ \mathbf{I}\ dm\ \mathbf{v}^o + \frac{3\mu}{R^3}\mathbf{\Omega}(\mathbf{v}^o)\ \mathbf{J}^o\ \mathbf{v}^o \tag{2.13}$$

Mas como $\mathbf{r}^{oT}\ \mathbf{r}^o$ é um escalar, a integral pode ser colocada na forma:

$$\mathbf{g}_g^o = -\frac{3\mu}{R^3}\int_V \mathbf{r}^{oT}\ \mathbf{r}^o\ dm\ \mathbf{\Omega}(\mathbf{v}^o)\ \mathbf{I}\ \mathbf{v}^o + \frac{3\mu}{R^3}\mathbf{\Omega}(v^o)\ \mathbf{J}^o\ \mathbf{v}^o \tag{2.14}$$

que resulta, pela propriedade de produto vetorial, em:

$$\mathbf{g}_g^o = \frac{3\mu}{R^3}\mathbf{\Omega}(v^o)\ \mathbf{J}^o\ \mathbf{v}^o \tag{2.15}$$

Resta agora levar esta expressão para o sistema de referência do corpo do satélite, já que, devido ao movimento em atitude, a matriz de inércia $\mathbf{J}^o$ varia com o tempo. Sabendo que as seguintes transformações são válidas:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_g^s &= \mathbf{A}\ \mathbf{g}_g^o \\ \mathbf{r}^s &= \mathbf{A}\ \mathbf{r}^o \\ \mathbf{J}^s &= \mathbf{A}\ \mathbf{J}^o\ \mathbf{A}^T \\ \mathbf{\Omega}(\mathbf{A}\ \mathbf{r}) &= \mathbf{A}\ \mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\ \mathbf{A}^T \end{aligned}\ , \tag{2.16}$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz de atitude que relaciona o sistema orbital com o sistema do satélite, o torque resulta:

$$\mathbf{g}_g^s = \frac{3\mu}{R^3}\mathbf{A}\ \mathbf{A}^T\ \mathbf{\Omega}(\mathbf{v}^s)\ \mathbf{A}\ \mathbf{A}^T\ \mathbf{J}^s\ \mathbf{A}\ \mathbf{A}^T\ \mathbf{v}^s, \tag{2.17}$$

ou seja:

$$\mathbf{g}_g^s = \frac{3\mu}{R^3}\mathbf{\Omega}(\mathbf{v}^s)\ \mathbf{J}^s\ \mathbf{v}^s\ , \tag{2.18}$$

de onde se conclui, por similaridade, que esta expressão independe do sistema de referência.

Analisando a expressão acima, nota-se que o torque de gradiente de gravidade depende da direção da vertical local, dada por $\mathbf{v}^s$. É fácil mostrar, também, que este torque é sempre perpendicular à esta direção, ou seja, está contido no plano x^o-y^o. Caso o sistema do satélite coincida com o sistema dos eixos principais de inércia, então os momentos cruzados são nulos, e o torque simplifica-se na forma:

$$\mathbf{g}_g^s = \frac{3\mu}{R^3}\begin{bmatrix} v_y^s\ v_z^s\ (J_z^s - J_y^s) \\ v_x^s\ v_z^s\ (J_x^s - J_z^s) \\ v_x^s\ v_y^s\ (J_y^s - J_x^s) \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

onde v_x^s, v_y^s e v_z^s são as componentes do vetor $\mathbf{v}^s$, e I_x^s, I_y^s e I_z^s são os momentos principais de inércia.

Em geral procura-se manter o sistema geométrico do satélite próximo ao sistema dos eixos principais, para evitar o movimento em nutação do satélite. Além disso, procura-se também manter a magnitude dos momentos principais próximos entre si, para minimizar os efeitos indesejáveis do torque de gradiente de gravidade. Estes procedimentos são adotados durante o projeto do satélite, distribuindo adequadamente os equipamentos a bordo.

Por outro lado, dependendo das características de apontamento desejadas para o satélite, este torque pode ser aproveitado para, de uma forma passiva, isto é, sem a intervenção de um sistema de controle, permitir que o satélite aponte uma face para a Terra. Esta estabilização é conhecida como estabilização por gradiente de gravidade e permite uma precisão de apontamento ao redor de 5°.

2.1 Estabilização por gradiente de gravidade.

Considera-se um satélite cilíndrico, como mostrado na Figura 2.2, e com distribuição uniforme de massa tal que $I_x^s < I_y^s = I_z^s$.

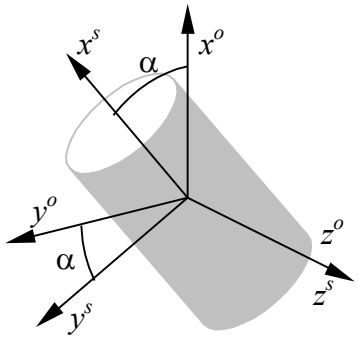

Figura 2.2 – Satélite cilíndrico, inclinado de um ângulo α em relação à vertical local.

O satélite encontra-se numa atitude tal que seu eixo de simetria forma com a vertical local (x^o) um ângulo α. No sistema geométrico do satélite, a direção vertical local é dada por:

$$\mathbf{v}^s = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

o que resulta, para o torque:

$$\mathbf{g}_g^s = -\frac{3\mu}{R^3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\,(I_y^s - I_x^s) \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Os pontos de equilíbrio podem ser encontrados igualando-se o torque a zero, que resulta $\alpha = k\,\pi$ (k = 0, 1, 2, ...). Pode-se mostrar, no entanto, que os pontos onde k é par são pontos de equilíbrio estável, enquanto que os pontos de k ímpar são instáveis.

Como o torque é negativo, ele tenta alinhar o eixo x^s do satélite com a vertical local x^o. Se α for negativo, então o torque será positivo e tentará novamente alinhar os dois eixos. O mesmo resultado é encontrado quando o eixo de simetria do satélite está contido no plano x^o-z^o. Resumindo, tem-se que o torque de gradiente de gravidade procura sempre alinhar o eixo de menor momento de inércia do satélite na direção da vertical local. Uma vez que o sistema orbital gira em torno do eixo z^o uma vez a cada órbita, este torque pode ser usado para controlar e manter um determinado eixo do satélite permanentemente apontado para a Terra. Esta forma de estabilização é conhecida como estabilização por gradiente de gravidade.

Contudo, a distribuição de massa do satélite deve ser tal que este faça este torque suplantar todos os demais torques perturbadores. Isto é conseguido instalando-se um mastro no satélite, que é esticado após a injeção em órbita. Na ponta do mastro há uma pequena massa, que faz com que o momento de inércia na direção do mastro seja muito menor do que nas outras direções. O torque gerado fará então com que o satélite aponte o mastro na direção do centro da Terra (ou na direção oposta). Os satélites equipados com mastro geralmente necessitam de um sistema passivo para dissipar as oscilações causadas pelo gradiente de gravidade quando o satélite estiver alinhando-se com a Terra.

A magnitude do torque é máxima quando o produto $v_i^s\ v_j^s$ (i, j quaisquer) também for máximo. Isto ocorre para $\alpha = 45^o + k\ 90^o$ ($k = 0, 1, 2, ...$), e resulta em

$$g_{\max}^s = \frac{3\mu}{2R^3}(I_i^s - I_j^s) \tag{2.22}$$

Um satélite com simetria esférica de massa, isto é, com momentos principais de inércia tais que $I_x^s = I_y^s = I_z^s$ fará com que o torque de gradiente de gravidade seja nulo.

Embora a força gravitacional decresça com o quadrado da distância ao centro da Terra, o torque de gradiente de gravidade decresce com o cubo desta distância. Isto torna praticamente inviável este tipo de estabilização para satélites em grandes altitudes, como os geoestacionários, por exemplo.

3 FORÇA E TORQUE AERODINÂMICO

A força aerodinâmica surge em decorrência dos choques entre as moléculas da alta atmosfera com a super'ficie do satélite. Ela é predominante em satélites de baixa altitude, com perigeu menor que 1000 km. Devido à atmosfera ser muito rafereita nestas altitudes, a mecânica dos meios contínuos não pode ser usada na modelagem desta força, mas sim a teoria molecular dos gases. Desta forma, tratar-se-á a força aerodinâmica como decorrente da troca de quantidade de movimento das moléculas que colidem com o satélite. Para tanto, precisa-se conhecer como se movimentam as moléculas livres da atmosfera, através da função distribuição de velocidades. Durante este capítulo serão vistos os limites de validade da teoria molecular dos gases, o formalismo da função de distribuição, o comportamento da colisão entre moléculas e o satélite, a formulação das expressões para a força e o torque e, finalmente, alguns aspectos da modelagem da alta atmosfera.

3.1 Teoria dos meios contínuos e teoria molecular dos gases

Considera-se um volume infinitesimal ΔV que contenha moléculas suficientes de um fluido tal que propriedades como massa, temperatura, pressão, etc, variam continuamente com o tempo, com o tamanho do elemento e com a posição. Esta é a teoria dos meios contínuos, empregada nas baixas altitudes, onde é grande o número de moléculas por unidade de volume (existem 2.7 10^{25} moléculas por metro cúbico ao nível do mar).

Nas altas altitudes o número de moléculas por unidade de volume é tão pequeno que propriedades como densidade, temperatura, pressão, etc., variam descontinuamente e rapidamente com o tempo, com o tamanho do elemento e com a sua posição. Não podendo empregar a teoria dos meios contínuos nestas circunstâncias, deve-se empregar a teoria cinética dos gases. O parâmetro que indica se um meio é contínuo ou não é o número de Knudsen, dado pela razão entre o caminho livre médio (a distância média percorrida por uma molécula entre duas colisões moleculares sucessivas) e o comprimento característico do corpo.

Um modelo simplificado para se obter o caminho livre médio considera um gás onde todas as moléculas têm o mesmo diâmetro d e se encontram em repouso, com exceção de uma que possui velocidade v. Num intervalo de tempo δt esta molécula percorre a distância $v\ \delta t$, e se chocará com todas as outras que estiverem dentro do volume dado por $v\ \delta t\ \pi\ d^2$, conforme ilustra a Figura 3.1.

O número de colisões por segundo, ou freqüência de colisões ν, é dado por:

$$\nu = n\, v\, \pi\, d^2 , \tag{3.1}$$

onde n é o número de moléculas por unidade de volume do gás. O caminho livre médio, λ, será igual à razão entre a velocidade média v das moléculas e a freqüência de colisão:

$$\lambda = \frac{v}{n\, v\, \pi\, d^2} = \frac{1}{n\, \pi\, d^2} . \tag{3.2}$$

Cálculos mais precisos resultam para λ o valor:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\, \pi\, d^2} . \tag{3.3}$$

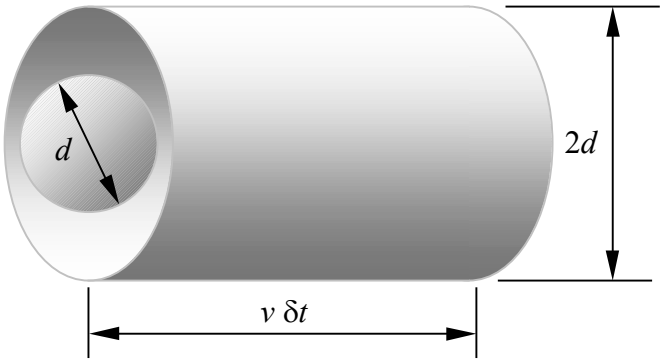

Figura 3.1 – Seção de choque entre moléculas esféricas.

Ao nível do mar, com $d = 10^{-18}$ cm e com o número de densidade n ao redor de 10^{19} mol/cm^3, tem-se que λ resulta próximo de 10^{-3} cm (ou 10 μm). Já a 70 km de altitude, com $n = 10^{13}$ mol/cm^3, tem-se $\lambda = 10^3$ cm (10 m). Baseando-se em evidências experimentais e na teoria, os regimes de escoamento são classificados de acordo com a Tabela 3.1, em função do número de Knudsen, dado por:

$$K_n = \frac{\lambda}{L}, \tag{3.4}$$

onde L é um comprimento característico de um satélite (dimensão média).

Tabela 3.1 – Regimes de escoamento em função do número de Knudsen

Tipo de fluxo	Característica	Número de Knudsen
Fluxo contínuo	sem escorregamento	$K_n < 0{,}01$
	com escorregamento	$0{,}01 < K_n < 0{,}1$
Fluxo molecular	transição	$0{,}1 < K_n < 10$
	livre	$K_n > 10$

Considerando que um satélite típico possui um comprimento característico de 1 m, aproximadamente, deve-se, nas altitudes orbitais, usar a teoria molecular dos gases ($K_n > 10$).

3.2 Conceituação da função distribuição

Um sistema composto por N moléculas monoatômicas será completamente especificado em qualquer instante de tempo pela posição de cada molécula (x_i, y_i, z_i) e pela sua velocidade (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}). Portanto, este sistema precisa de $6N$ coordenadas para ser completamente especificado.

Considere-se então um espaço hexadimensional, com eixos x_i, y_i, z_i, v_{xi}, v_{yi} e v_{zi}, tal que o sistema de N partículas é representado por N pontos neste espaço a cada instante. Conforme a partícula muda sua posição e velocidade, seu movimento é representado por uma trajetória neste espaço. Tal espaço é chamado espaço de fase molecular, ilustrado na Figura 3.2.

Para ficar mais claro, vai-se usar dois espaços tridimensionais:

1. Espaço físico x_i, y_i, z_i, onde é conhecida a posição das moléculas mas não a sua velocidade.

2. Espaço de velocidades, v_{xi}, v_{yi} e v_{zi}, onde são conhecidas as velocidades mas não a posição das moléculas.

Considere-se agora um pequeno elemento de volume no espaço físico *dx dy dz* denotado por *dr*:

$$dr = dx\, dy\, dz \tag{3.5}$$

Fazendo uma analogia com o espaço de velocidades, um volume neste espaço é definido por:

$$dv = dv_x\, dv_y\, dv_z \tag{3.6}$$

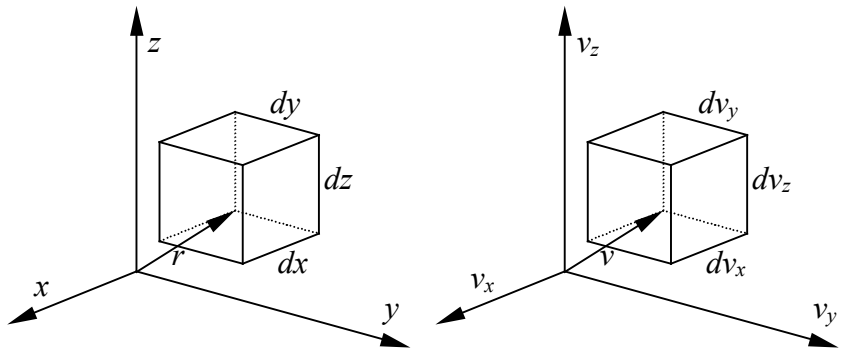

Figura 3.2 – Espaço de estados de uma molécula.

Devido ao pequeno número de moléculas por unidade de volume, as propriedades do gás, como densidade, temperatura, etc., flutuam com o tempo, com a posição e com o tamanho do elemento. Para definir uma quantidade física qualquer, portanto, é necessário efetuar uma média ao longo do tempo. A densidade, por exemplo, será dada por:

$$\rho = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta r \to 0}} \frac{1}{\Delta t\, \Delta r} \int_t^{t+\Delta t} M\, dt \tag{3.7}$$

onde *M* é o somatório das massas das moléculas contidas em *dr*. Analogamente, o número de densidade, isto é, o número de moléculas por unidade de volume, *n*, vale:

$$n = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta r \to 0}} \frac{1}{\Delta t\, \Delta r} \int_t^{t+\Delta t} N\, dt \tag{3.8}$$

na qual *N* é a quantidade total de moléculas presentes em *dr*. O número médio de moléculas em *dr* a cada instante vale portanto *n dr*. Se *m* for a massa de cada molécula, então a densidade pode ser expressa por:

$$\rho = n\, m \tag{3.9}$$

Cosidere-se agora um gás num volume finito *dr*. A probabilidade de que uma molécula esteja exatamente numa dada posição *r*, num determinado instante, é nula. Analogamente, também é nula a probabilidade da molécula possuir, num dado instante, uma exata velocidade *v*. No entanto existe, e é finito, um número de moléculas que, num dado instante, ocupam o volume *dr* e tenham velocidade compreendida entre *v* e *v* + *dv*. É claro que esta probabilidade é proporcional aos tamanhos de *dr* e *dv*. Portanto, o número de moléculas dentro do volume

dr, na posição *r*, e com velocidades entre *v* e *v* + *dv* será definido como sendo dado por *f dr dv*. *f* é chamado de função de distribuição e depende de *r*, *v* e *t*.

Logicamente, o número de moléculas em *dr* é igual a *n dr* e vale:

$$N = \int_v f(r, v, t)\, dv\, dr\,, \tag{3.10}$$

ou

$$n(r, t) = \int_v f(r, v, t)\, dv = \int_{v_x} \int_{v_y} \int_{v_z} f(r, v, t)\, dv_x\, dv_y\, dv_z \tag{3.11}$$

Da mesma forma,

$$\rho(r, t) = m\, n = m \int_{v_x} \int_{v_y} \int_{v_z} f(r, v, t)\, dv_x\, dv_y\, dv_z\,. \tag{3.12}$$

Os limites de integração nas componentes de velocidade são de -∞ a +∞, já que não existe limite físico para a velocidade de uma partícula na mecânica clássica, ou seja:

$$n(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, v, t)\, dv_x\, dv_y\, dv_z \tag{3.13}$$

Seja agora ψ uma propriedade das moléculas que depende da velocidade (ψ = ψ(*v*)). ψ pode ser, por exemplo, a própria velocidade *v*, a quantidade de movimento *m v*, a energia cinética ½ *m* v^2, etc. O valor médio de ψ é denotado por $\tilde{\psi}$ e, para as *n dr* moléculas contidas no volume *dr* vale:

$$\tilde{\psi}(r, t) = \frac{\int_v f(r, v, t)\, \psi(v)\, dv}{\int_v f(r, v, t)\, dv} \tag{3.14}$$

e, portanto,

$$\tilde{\psi}(r, t) = \frac{1}{n} \int_v f(r, v, t)\, \psi(v)\, dv \tag{3.15}$$

Seja agora ψ = *v*. O valor médio de ψ será igual à velocidade média das moléculas do gás, v_o, isto é:

$$v_o = \tilde{v}(r, t) = \frac{1}{n} \int_v f(r, v, t)\, v\, dv \tag{3.16}$$

A quantidade de movimento média fica:

$$\tilde{q} = \frac{1}{n} \int_v f\; m\, v\, dv = \frac{m}{n} \int_v f\; v\, dv = m\, v_o \tag{3.17}$$

Portanto, a quantidade de movimento média do gás é equivalente àquela onde todas as moléculas se movem com a mesma velocidade v_o. A velocidade v_o é também chamada de velocidade de corrente ou velocidade do fluxo.

A velocidade térmica ou velocidade peculiar *u* de uma molécula é definida como sendo sua velocidade relativa à velocidade média:

$$u(r,t) = v - v_o(r,t) \tag{3.18}$$

Será visto, oportunamente, que a velocidade peculiar relaciona-se com a temperatura do gás, de onde vem o nome de velocidade térmica. A média da velocidade térmica é dada por:

$$\tilde{u} = \tilde{v} - \tilde{v}_o = v_o - v_o = 0 \tag{3.19}$$

que vale sempre que as moléculas do gás forem do mesmo tipo. Numa mistura de gases, geralmente a média da velocidade térmica não é nula.

A função de distribuição, *f*, pode ser expressa em termos da velocidade peculiar, ou seja: $f = f(r, u, t)$. Como o número de moléculas por unidade de volume não depende da origem do sistema de coordenadas, então:

$$\int_v f(r,v,t)\, dv = \int_u f(r,u,t)\, du \tag{3.20}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r,v,t)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r,u,t)\, du_x\, du_y\, du_z \tag{3.21}$$

Da mesma forma, o valor médio de uma propriedade ψ qualquer que dependa da velocidade pode também ser colocado em função da velocidade térmica:

$$\tilde{\psi}(r,t) = \frac{\int_u f(r,u,t)\, \psi(u)\, du}{\int_u f(r,u,t)\, du} = \frac{1}{n}\int_u f(r,u,t)\, \psi(u)\, du \tag{3.22}$$

A função de distribuição possui as seguintes propriedades:

1. *f* é sempre positiva, uma vez que uma probabilidade não pode ser negativa.

2. *f* tende a zero quando a velocidade, em módulo, tende a infinito, pois a probabilidade de haver uma molécula com velocidade infinita é nula.

3. admite-se que *f* seja finita e contínua no tempo e no espaço.

3.3 Equação da função de distribuição de Boltzmann

O número de moléculas na posição entre **r** e **r** + *d* **r** e com velocidade compreendida entre **v** e **v** + *d***v** é dado por $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$. Este estado é denominado de *estado* 1.

Seja agora **f** a força agindo sobre todas as moléculas. Se não houver colisão entre elas, após certo intervalo de tempo *dt* os valores de **r**, **v** e *t* serão dados por:

$$\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\, dt,\ \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\, dt,\ t + dt \tag{3.23}$$

ou ainda:

$$\mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt,\ \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{m}\, dt,\ t + dt\ . \tag{3.24}$$

Analogamente, o número de moléculas nesse estado definido como *estado* 2 será dado por $f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt, \mathbf{v} + \mathbf{f}/m\, dt, t + dt)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}$. No entanto, algumas moléculas que estavam inicialmente no *estado* 1 não atingem o *estado* 2 pois colidiram com algumas outras moléculas. Do mesmo modo, moléculas que não estavam no *estado* 2, atingiram este estado após terem colidido com outras moléculas, conforme indica a Figura 3.3.

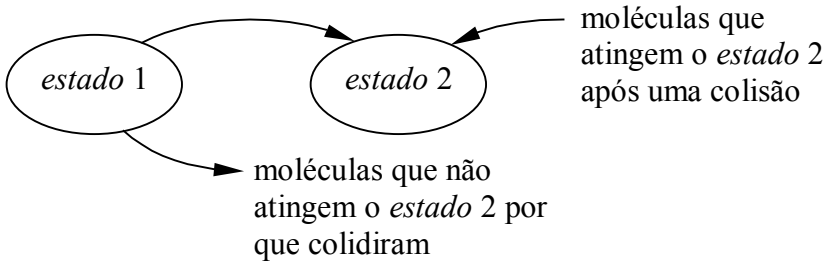

Figura 3.3 – Mudanças de estado de uma molécula sujeita a forças derivadas de potencial.

Seja $\Gamma^-\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}\, dt$ o número de moléculas perdidas pelo estado 1 e seja $\Gamma^+\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}\, dt$ o número de moléculas ganhas pelo estado 2. O ganho de moléculas no intervalo será então dado por:

$$\left(\Gamma^+ - \Gamma^-\right) d\mathbf{v}\, d\mathbf{r}\, dt = \left(f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt, \mathbf{v} + \mathbf{f}/m\, dt, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\right) d\mathbf{v}\, dr\,. \tag{3.25}$$

Dividindo ambos os membros por $d\mathbf{v}$, $d\mathbf{r}$, e dt, e fazendo o limite para o incremento no tempo tendendo a zero, chega-se a:

$$\frac{df}{dt} = \Gamma^+ - \Gamma^-\,. \tag{3.26}$$

Mas a derivada de f vale:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{f}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\,, \tag{3.27}$$

ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{f}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \Gamma^+ - \Gamma^-\,. \tag{3.28}$$

Esta equação permitirá obter a função de distribuição f, desde que seja encontrada uma expressão para o termo de colisão, $\Gamma^+ - \Gamma^-$.

A dinâmica dos encontros binários fornece para o termo de colisão o valor:

$$\Gamma^+ - \Gamma^- = 2\pi \int_b \int_{v_1} (f'\, f_1' - f\, f_1)\, b\, db\, g\, d\mathbf{v}_1\,, \tag{3.29}$$

onde b é o parâmetro de impacto, g é a velocidade relativa entre as moléculas e o apóstrofo indica valores após a colisão, como ilustrado na Figura 3.4. O índice 1 indica a molécula que se move relativamente à molécula campo. Das expressões obtidas chega-se à equação diferencial integral de Boltzmann, para a função de distribuição f:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{f}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 2\pi \int_b \int_{\mathbf{v}_1} (f'\, f_1' - f\, f_1)\, b\, db\, g\, d\mathbf{v}_1\,. \tag{3.30}$$

O termo de colisão é altamente não-linear pois a solução depende do campo de força entre as moléculas. Como a solução envolve 4 integrações, ainda não se encontrou solução analítica desta equação mesmo em campos de força simplificados.

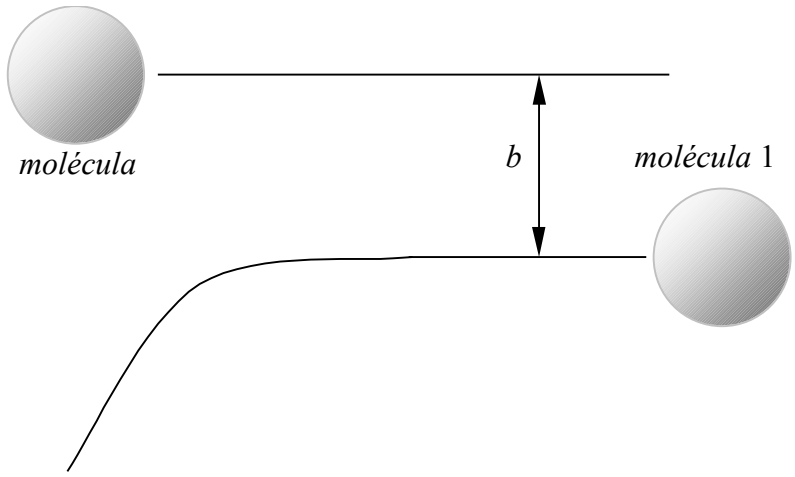

Figura 3.4 – Colisão entre moléculas.

Para um sistema em regime permanente e estável, o princípio do balanceamento detalhado, que não será demonstrado aqui (para maiores detalhes, recomendam-se as referências CHAPMAN e COWLING, 1970, e PRESENT, 1958), relacionado com a entropia, que fornece:

$$f'\, f_1' = f\, f_1 , \tag{3.31}$$

ou ainda:

$$\ln f' + \ln f_1' = \ln f + \ln f_1 , \tag{3.32}$$

que indica que f se conserva após a colisão. Grandezas conservativas numa colisão são a quantidade de movimento linear e a energia cinética, no caso de colisão elástica. Assim, o logarítmo da função de distribuição deve possuir a forma:

$$\ln f = a\left[(v_x - \alpha_x)^2 + (v_y - \alpha_y)^2 + (v_z - \alpha_z)^2\right] + \ln b \tag{3.33}$$

onde α_x, α_y, α_z, e b são constantes (nota-se que existem termos quadráticos na velocidade relacionados à energia cinética e termos lineares relacionados à quantidade de movimento). De outro modo,

$$f = \beta\, \mathrm{e}^{-m\,h(\mathbf{v}-\boldsymbol{\alpha})^2} , \tag{3.34}$$

com β, $\boldsymbol{\alpha}$ e h constantes, e m é a massa de uma molécula. Nesta expressão $\boldsymbol{\alpha}$ passa a representarum vetor de componentes α_x, α_y, e α_z.

A velocidade média pode agora ser obtida de:

$$\mathbf{v}_o = \frac{1}{n}\int_v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, v\, dv = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\, \mathrm{e}^{-m\,h\,[(v_x-\alpha_x)^2+(v_y-\alpha_y)^2+(v_z-\alpha_z)^2]}\, dv_x\, dv_y\, dv_z}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-m\,h\,[(v_x-\alpha_x)^2+(v_y-\alpha_y)^2+(v_z-\alpha_z)^2]}\, dv_x\, dv_y\, dv_z} , \tag{3.35}$$

que pode ser separada em cada uma de suas componentes, v_{ox}, v_{oy} e v_{oz}. A primeira delas fica:

$$v_{ox} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_x \, \mathrm{e}^{-mh[(v_x-\alpha_x)^2+(v_y-\alpha_y)^2+(v_z-\alpha_z)^2]} \, dv_x \, dv_y \, dv_z}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mh[(v_x-\alpha_x)^2+(v_y-\alpha_y)^2+(v_z-\alpha_z)^2]} \, dv_x \, dv_y \, dv_z} \tag{3.36}$$

O numerador irá cancelar-se com o denominador nas integrais realizadas em v_y e v_z, restando apenas a integral em v_x:

$$v_{ox} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_x \, \mathrm{e}^{-mh(v_x-\alpha_x)^2} \, dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mh(v_x-\alpha_x)^2} \, dv_x} . \tag{3.37}$$

Fazendo agora uma mudança de variáveis tal que $\lambda = v_x - \alpha_x$, tem-se que:

$$v_{ox} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_x + \lambda) \, \mathrm{e}^{-mh\lambda^2} \, d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mh\lambda^2} \, d\lambda} . \tag{3.38}$$

Mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{e}^{-mh\lambda^2} \, d\lambda = 0 , \tag{3.39}$$

pois trata-se de uma função ímpar. Conclui-se então que $v_{ox} = \alpha_x$, e, da mesma forma, $v_{oy} = \alpha_y$, e $v_{oz} = \alpha_z$. Logo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}_o$, ou seja, o vetor $\boldsymbol{\alpha}$ é a própria velocidade média ou velocidade do fluxo. Pode-se portanto dizer que:

$$f = \beta \, \mathrm{e}^{-mh(\mathbf{v}-\mathbf{v}_o)^2} , \tag{3.40}$$

ou ainda

$$f = \beta \, \mathrm{e}^{-mh\mathbf{u}^2} , \tag{3.41}$$

com $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_o$. β pode ser determinado a partir da expressão para o número de densidade:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\mathbf{u} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \beta \, \mathrm{e}^{-mh\{u_x^2+u_y^2+u_z^2)} \, du_x \, du_y \, du_z , \tag{3.42}$$

ou ainda:

$$n = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mh u_x^2} \, du_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mh u_y^2} \, du_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mh u_z^2} \, du_z . \tag{3.43}$$

Porém, sabendo-se que:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} , \tag{3.44}$$

encontra-se então que:

$$n = \beta \left(\frac{\pi}{m\,h} \right)^{3/2}, \tag{3.45}$$

de onde:

$$\beta = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m\,h}{\pi} \right)^{3/2}, \tag{3.46}$$

que resulta:

$$f = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m\,h}{\pi} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{-m h \mathbf{u}^2} \tag{3.47}$$

Para a determinação de h, parte-se da definição de temperatura cinética dos gases:

$$\frac{1}{2}\, m\, \tilde{u}^2 = \frac{3}{2}\, k\, T\,, \tag{3.48}$$

onde k é a constante de Boltzmann (k = 1,38054 10^{-23} J/K) e T é a temperatura das moléculas em graus Kelvin. A dedução desta expressão pode ser encontrada nas referências 6 e 3. Nota-se, contudo, que embora a média da velocidade relativa u seja nula, a média do seu quadrado não é. A relação acima leva a:

$$\frac{3}{2}\, k\, T = \frac{1}{2}\, m\, \frac{1}{n} \int_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^2\, f\, d\mathbf{u}\,, \tag{3.49}$$

ou ainda:

$$\frac{3}{2}\, k\, T = \frac{\rho}{2\,n} \left(\frac{m\,h}{\pi} \right)^{3/2} \int_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^2\, \mathrm{e}^{-m h \mathbf{u}^2}\, d\mathbf{u}\,, \tag{3.50}$$

que pode ser posto na forma:

$$\frac{3}{2}\, k\, T = \frac{\rho}{2\,n} \left(\frac{m\,h}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, \mathrm{e}^{-m h (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}\, du_x\, du_y\, du_z \tag{3.51}$$

e que resulta:

$$\frac{3}{2}\, k\, T = \frac{\rho}{2\,n} \left(\frac{m\,h}{\pi} \right)^{3/2} \frac{3}{2\,\pi} \left(\frac{\pi}{m\,h} \right)^{5/2}. \tag{3.52}$$

A constante h fica portanto dada por:

$$h = \frac{1}{2\,k\,T}\,, \tag{3.53}$$

e a função de distribuição de velocidades resulta:

$$f = \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi\, k\, T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_o)^2} \tag{3.54}$$

A função de distribuição de velocidades é também conhecida como função de distribuição maxwelliana para um gás uniforme em equilíbrio.

Pode-se mostrar que, se o gás estiver submetido a um campo de força externa derivada de um potencial (gravitacional, por exemplo), ou seja

$$\mathbf{f} = -\nabla\Phi \tag{3.55}$$

onde ∇ é o gradiente do potencial Φ, então a densidade do gás irá variar de acordo com a expressão:

$$\rho = \rho_o\, e^{-\Phi/kT}, \tag{3.56}$$

onde ρ_o é a densidade quando o campo pontencial for nulo. A função de distribuição de velocidades fica então:

$$f = \frac{\rho_o}{m}\left(\frac{m}{2\pi\, k\, T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_o)^2 - \frac{\Phi}{kT}}. \tag{3.57}$$

Se Φ for derivado de um campo gravitacional, então $\Phi = m\, g\, z$, sendo g a aceleração gravitacional e z a altura ou altitude. Neste caso, então

$$\rho = \rho_o\, e^{-\frac{m g z}{kT}}, \tag{3.58}$$

cujo gráfico esquematizado é mostrado na Figura 3.5.

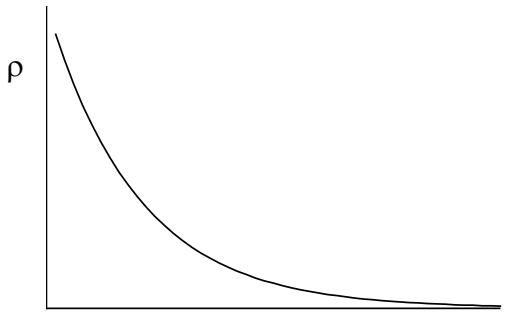

Figura 3.5 – Comportamento aproximado da densidade em função da altitude z.

3.4 Função de distribuição de rapidez e razão de velocidades

O número provável de moléculas no volume compreendido por **r** e **r** + d**r**, e com módulo de velocidade no intervalo entre c e $c + dc$ é dado por $f_s\, d\mathbf{r}\, dc$, onde c é o módulo da velocidade ($c = |\,\mathbf{v}\,|$). A função f_s é denominada função de distribuição de rapidez.

Por sua vez, o número provável de moléculas compreendidas entre **r** e **r** + d**r**, e com velocidade entre **v** e **v** + d**v** depende da função de distribuição de velocidades e é dado por f

$d\mathbf{r}\ d\mathbf{v}$. Passando agora para coordenadas esféricas na velocidade, cujos ângulos θ e φ são mostrados na Figura 3.6, tem-se

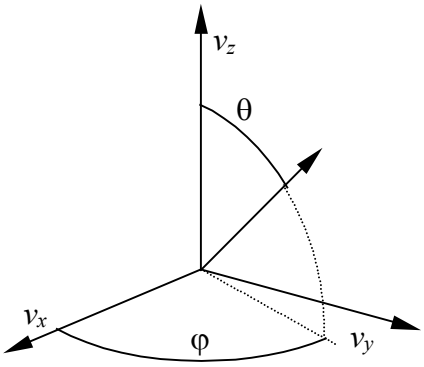

Figura 3.6 – Vetor da velocidade das moléculas em coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} v_x &= c \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ v_y &= c \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,, \\ v_z &= c \cos\theta \end{aligned} \tag{3.59}$$

com os limites $0 \le c < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \varphi < 2\pi$. Derivando as expressões de v_x, v_y e v_z com relação a c, θ e φ, e multiplicando em seguida os resultados e agrupando os termos resulta que:

$$d\mathbf{v} = dv_x\ dv_y\ dv_z = c^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dc\,. \tag{3.60}$$

Portanto, o número de moléculas entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, e velocidade entre c e $c + dc$ é dado por:

$$N = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, c, \theta, \phi, t)\, c^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dr\, dc\,, \tag{3.61}$$

de onde se obtém

$$N = 4\pi\, f\, c^2\, dr\, dc \tag{3.62}$$

Igualando este resultado com a definição da função de distribuição de rapidez, chega-se a

$$f_s\, dr\, dc = 4\pi\, f\, c^2\, dr\, dc\,, \tag{3.63}$$

ou ainda

$$f_s = 4\pi\, f\, c^2\,. \tag{3.64}$$

O número total de partículas no volume $d\mathbf{r}$ é, por definição, dado por:

$$N = n\, d\mathbf{r} = \int_{\mathrm{v}} f\, d\mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_0^{\infty} f_s\, d\mathbf{r}\, dc\,. \tag{3.65}$$

Para um gás em repouso e em equilíbrio, a função de distribuição de rapidez resulta:

$$f_s = 4\pi \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi\, k\, T}\right)^{3/2} c^2\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}c^2} \tag{3.66}$$

A rapidez média das moléculas do gás é definida por:

$$\tilde{c} = \frac{\int_0^\infty c\, f_s\, dc}{\int_0^\infty f_s\, dc} = \frac{1}{n}\int_0^\infty c\, f_s\, dc\,, \tag{3.67}$$

que resulta:

$$\tilde{c} = 4\pi \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi\, k\, T}\right)^{3/2} \int_0^\infty c^3\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}c^2}\, dc\,. \tag{3.68}$$

O Apêndice A apresenta uma relação da solução desta e de outras integrais que comumente surgem nos problemas envolvendo a função de distribuição de velocidades. Efetuando-se a integral tem-se:

$$\tilde{c} = \sqrt{\frac{8\, k\, T}{\pi\, m}}\,. \tag{3.69}$$

A velocidade mais provável das moléculas, c_{mp} é a velocidade na qual a distribuição f_s é máxima. Em outras palavras, c_{mp} é a velocidade da maioria das partículas. Mas f_s é máximo quando sua derivada se anula, ou seja

$$4\pi \frac{\rho}{m}\left(\frac{m}{2\pi\, k\, T}\right)^{3/2}\left[c^2\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}c^2}\left(-\frac{m}{2k\,T}c\right) + 2c\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}c^2}\right] = 0\,, \tag{3.70}$$

que resulta:

$$c_{mp} = \sqrt{\frac{2\, k\, T}{m}}\,. \tag{3.71}$$

A rapidez média quadrática, ou simplesmente velocidade média quadrática c_{rms} é definida como a média da rapidez quadrática, ou seja:

$$c_{rms} = \sqrt{\tilde{c}^2}\,. \tag{3.72}$$

Mas

$$\tilde{c}^2 = \frac{1}{n}\int_0^\infty c^2\, f_s\, dc\,, \tag{3.73}$$

que resulta:

$$c_{rms} = \sqrt{\frac{3\, k\, T}{m}} \tag{3.74}$$

Nota-se que este resultado coincide com a definição da temperatura cinética dos gases em função da velocidade quadrática média, apresentado anteriormente. Tem-se com isso que:

$$\tilde{c} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\, c_{mp} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\, c_{rms}\,, \tag{3.75}$$

ou seja, $c_{mp} < \tilde{c} < c_{rms}$, como ilustrado na Figura 3.7.

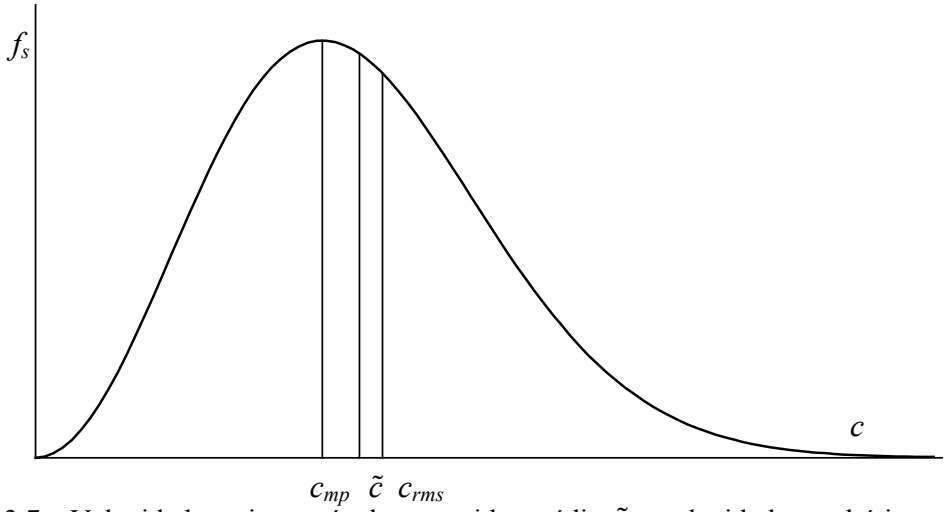

Figura 3.7 – Velocidade mais provável c_{mp}, rapidez média $\tilde{c}$ e velocidade quadrática média c_{rms}.

A relação entre a magnitude da velocidade de corrente ou velocidade de fluxo e a velocidade mais provável das moléculas, c_{mp}, é conhecida como razão de velocidades s e vale:

$$s = \frac{|\mathbf{v}_o|}{c_{mp}} = |\mathbf{v}_o| \sqrt{\frac{m}{2k\,T_i}}\,. \tag{3.76}$$

A razão de velocidades em escoamento rarefeito é análoga ao número de Mach em escoamento contínuo.

3.5 Transferência de quantidade de movimento na colisão

Considera-se agora o sistema de coordenadas relativo ao elemento de superfície, como definido no Capítulo 2. Neste sistema, mostrado na Figura 3.8, a velocidade do fluxo, $\mathbf{v}_o$, será dada por:

$$\mathbf{v}_o = |\mathbf{v}_o|\,(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}^e - \cos\theta\,\mathbf{k}^e)\,, \tag{3.77}$$

cujas componentes são:

$$\begin{aligned} v_{ox} &= 0 \\ v_{oy} &= -|\mathbf{v}_o|\operatorname{sen}\theta \\ v_{oz} &= -|\mathbf{v}_o|\cos\theta \end{aligned} \tag{3.78}$$

A função de distribuição de velocidades do gás incidente nesse elemento, em equilíbrio à temperatura T_i, e com densidade ρ_i vale:

$$f_i = \frac{\rho_i}{m}\left(\frac{m}{2\pi\,k\,T_i}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\left[(v_x-v_{ox})^2+(v_y+v_{oy})^2+(v_z-v_{oz})^2\right]} \tag{3.79}$$

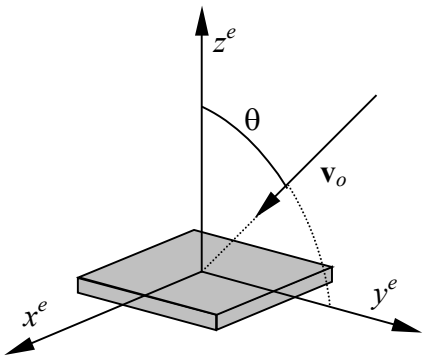

Figura 3.8 – Sistema de coordenadas fixado a um elemento plano de superfície.

O número de moléculas por unidade de área e por unidade de tempo com velocidade entre **v** e **v** + *d***v** que atingem o elemento plano vale:

$$dN_i = -f_i \; \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}^e \; d\mathbf{v} \tag{3.80}$$

ou ainda:

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f_i \; v_z \; dv_x \; dv_y \; dv_z \; , \tag{3.81}$$

pois a coordenada z da integral deve considerar apenas as moléculas que têm velocidade negativa em z^e, ou seja, considera-se somente as moléculas que realmente se direcionam para colidir com o plano. Substituindo a expressão de f_i na integral, tem-se:

$$N_i = \frac{\rho_i}{m} \left(\frac{m}{2\pi \, k \, T_i} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} v_z \; \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\left[(v_x - v_{ox})^2 + (v_y + v_{oy})^2 + (v_z - v_{oz})^2\right]} \; dv_x \; dv_y \; dv_z \tag{3.82}$$

que pode ser integrado separadamente:

$$N_i = \frac{\rho_i}{m} \left(\frac{m}{2\pi \, k \, T_i} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x - v_{ox})^2} \; dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y + v_{oy})^2} \; dv_y \int_{0}^{\infty} v_z \; \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \; dv_z \; . \tag{3.83}$$

A integral na componente x da velocidade irá resultar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x - v_{ox})^2} \; dv_x = \sqrt{\frac{2\pi \, k \, T_i}{m}} \tag{3.84}$$

analogamente, a componente na direção y fica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} \; dv_y = \sqrt{\frac{2\pi \, k \, T_i}{m}} \tag{3.85}$$

Para integrar a terceira componente, faz-se inicialmente uma mudança de variáveis: $\lambda = v_{ox} - v_z$, com $d\lambda = -dv_z$. Os limites de integração em λ alteram-se para v_{oz} e ∞, e portanto:

$$\int_{0}^{\infty} v_z \; \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \; dv_z = \int_{v_{oz}}^{\infty} (\lambda - v_{oz}) \; \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \; d\lambda \; , \tag{3.86}$$

que resulta em:

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \left[-\frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \right]_{v_{oz}}^{\infty} - v_{oz} \int_{v_{oz}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \tag{3.87}$$

Da definição de razão de velocidades s tira-se que

$$\frac{k\,T_i}{m} = \frac{\mathbf{v}_o^2}{2\,s^2} \,. \tag{3.88}$$

Multiplicando ambos os termos por cosθ, resulta:

$$v_{oz} = -\sqrt{\frac{2k\,T_i}{m}}\; s \cos\theta \,, \tag{3.89}$$

ou ainda multiplicando por senθ:

$$v_{oy} = -\sqrt{\frac{2k\,T_i}{m}}\; s \operatorname{sen}\theta \,. \tag{3.90}$$

A integral fica então:

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_{oz}^2} - v_{oz} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda + v_{oz} \int_0^{v_{oz}} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \tag{3.91}$$

ou ainda:

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_{oz}^2} - v_{oz} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi k\,T_i}{m}} + v_{oz} \int_0^{v_{oz}} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \,. \tag{3.92}$$

Fazendo agora outra mudança de variáveis, com $t^2 = m/(2k\,T_i)\,\lambda^2$, tem-se:

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_{oz}^2} - v_{oz} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi k\,T_i}{m}} + v_{oz} \int_0^{v_{oz}\sqrt{\frac{m}{2kT_i}}} \sqrt{\frac{2k\,T_i}{m}} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \,, \tag{3.93}$$

e finalmente, lembrando que o último termo é a função erro (Apêndice B):

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_{oz}^2} - v_{oz} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi k\,T_i}{m}} + v_{oz} \sqrt{\frac{2k\,T_i}{m}} \, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(v_{oz} \sqrt{\frac{m}{2k\,T_i}} \right) \tag{3.94}$$

Esta expressão pode ser posta em função da razão de velocidades, resultando:

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \frac{k\,T_i}{m} \sqrt{\pi}\; s\cos\theta + \frac{k\,T_i}{m} \sqrt{\pi}\; s\cos\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) \tag{3.95}$$

ou

$$\int_0^\infty v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \frac{k\,T_i}{m} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\; s\cos\theta \left[1 + \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) \right] \right\} . \tag{3.96}$$

Logo, o número de partículas por unidade de área e unidade de tempo que colide com o elemento plano fica:

$$N_i = \frac{\rho_i}{2m}\sqrt{\frac{2kT_i}{\pi m}}\left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\} \tag{3.97}$$

Será suposto agora que a velocidade de corrente, $\mathbf{v}_o$, atue em sentido contrário ao mostrado na Figura 3.8. Este procedimento é o mesmo que considerar que o elemento de área se encontra de costas para o fluxo, como mostrado na Figura 3.9.

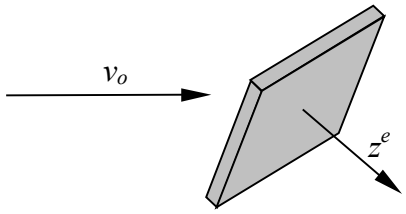

Figura 3.9 – Elemento de superfície na direção contrária ao fluxo.

Nesta situação um grande número de moléculas ainda possui velocidade contrária à do fluxo, e chegam a efetivamente colidir com o elemento. O ângulo θ, neste caso, fica compreendido entre π/2 e π, e assim o co-seno deste ângulo é negativo. Assim, o número de moléculas com velocidades contrárias ao fluxo que colidem com a superfície será dado por:

$$N_i = \frac{\rho_i}{2m}\sqrt{\frac{2kT_i}{\pi m}}\left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} - \sqrt{\pi}\, s\cos\theta\left[1-\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\} \tag{3.98}$$

Consideram-se agora as funções:

$$\begin{aligned} X_i &= \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right] \\ X_b &= \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} - \sqrt{\pi}\, s\cos\theta\left[1-\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right] \end{aligned}, \tag{3.99}$$

que representam as proporções das moléculas incidentes que possuem velocidade no sentido do fluxo e no sentido contrário, respectivamente. Como pode ser visto na Figura 3.10, conforme o valor de s cosθ aumenta (pelo aumento da velocidade de corrente ou pela diminuição do ângulo θ), o número de moléculas que colidem com a frente do elemento aumenta, ao passo que o número de moléculas que colidem por trás cai rapidamente para zero. Portanto, para um dado ângulo de incidência e para um valor de s suficientemente grande, pode-se ignorar a colisão das moléculas vindas na direção contrária à do fluxo. Esta simplificação é conhecida como aproximação newtoniana para um alto valor da razão de velocidades. Nota-se também que s cosθ = 0 ocorre quando s = 0 ou ainda quando θ = π/2, ou seja, quando a direção do fluxo é tangente ao elemento de superfície.

Para calcular a troca de quantidade de movimento entre o fluxo de moléculas e o elemento de área, parte-se novamente do número de moléculas por unidade de tempo e com velocidade compreendida entre **v** e **v** + d**v** que colidem com o elemento:

$$dN_i = -f_i\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}^e\ d\mathbf{v}\,. \tag{3.100}$$

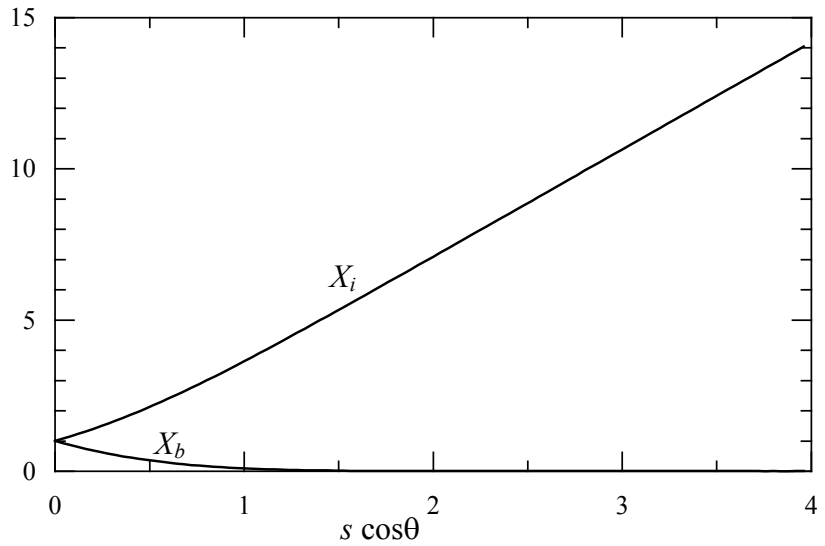

Figura 3.10 – Funções do número de impacto de moléculas X_i e X_b.

A quantidade de movimento transferida pelas moléculas incidentes depende, é claro, da forma com que estas mesmas moléculas deixam a superfície após a colisão. Em outras palavras, a força exercida pelas moléculas depende da forma de colisão, se elástica ou inelástica. O fenômeno da colisão, denominado de interação entre o gás e a superfície, será tratado mais adiante. Observa-se, porém, que se pode separar o fenômeno em duas partes - fluxo incidente e fluxo refletido, e analisá-los separadamente. Será admitido, então, que todas as moléculas que colidem são capturadas pela superfície após a colisão. Esta hipótese é equivalente a admitir um choque perfeitamente inelástico, e a quantidade de movimento transferida pelas partículas corresponde à quantidade de movimento total das partículas incidentes, ou seja:

$$d\mathbf{p}_i = -m\,\mathbf{v}\,f_i\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}^e)\,d\mathbf{v} \tag{3.101}$$

sendo $d\mathbf{p}_i$ o vetor quantidade de movimento das moléculas incidentes com velocidade compreendida entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, por unidade de tempo e por unidade de área. Com isso, tem-se que

$$\mathbf{p}_i = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} m\,\mathbf{v}\,f_i\,v_z\,dv_x\,dv_y\,dv_z\ , \tag{3.102}$$

As componentes da quantidade de movimento serão integradas separadamente, conforme apresentam as relações a seguir:

$$p_{xi} = -\rho_i\left(\frac{m}{2\pi\,k\,T_i}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} v_x\,v_z\,\mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\left[(v_x-v_{ox})^2+(v_y-v_{oy})^2+(v_z-v_{oz})^2\right]}\,dv_x\,dv_y\,dv_z\ , \tag{3.103}$$

ou ainda:

$$p_{xi} = -\rho_i\left(\frac{m}{2\pi\,k\,T_i}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x\,\mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x-v_{ox})^2}\,dv_x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y-v_{oy})^2}\,dv_y\int_{-\infty}^{0} v_z\,\mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z-v_{oz})^2}\,dv_z \tag{3.104}$$

Cuja integral é nula, uma vez que o integrando em x é uma função ímpar (sabendo-se também que v_{ox} é nulo). Este resultado é esperado, pois o fluxo é simétrico com relação ao plano y-z. Portanto,

$$p_{xi} = 0 \,. \tag{3.105}$$

A próxima componente vale:

$$p_{yi} = -\rho_i \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_i} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x - v_{ox})^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} v_y \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} dv_y \int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} dv_z \tag{3.106}$$

cujas integrais podem ser integradas separadamente. A integral em x resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x - v_{ox})^2} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi\, k\, T_i}{m}} \,. \tag{3.107}$$

Por sua vez, faz-se uma mudança de variáveis na forma $\lambda = v_y - v_{oy}$ na integral em y, resultando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_y \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} dv_y = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + v_{oy}) \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} d\lambda \,, \tag{3.108}$$

que pode ser separado novamente em duas integrais:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_y \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} dv_y = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} d\lambda + v_{oy} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} d\lambda \,. \tag{3.109}$$

A primeira parcela constitui uma integral de uma função ímpar que resulta nula. Assim, tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_y \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} dv_y = v_{oy} \sqrt{\frac{2\pi\, k\, T_i}{m}} \,. \tag{3.110}$$

Finalmente, na terceira integral, troca-se o sinal de v_z para que os limites de integração fiquem dentro dos valores cujas integrais são conhecidas:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} dv_z = -\int_{0}^{\infty} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z + v_{oz})^2} dv_z \,, \tag{3.111}$$

e, a seguir, faz-se novamente uma mudança de variáveis:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} dv_z = -\int_{v_{oz}}^{\infty} (\lambda - v_{oz}) \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} d\lambda \,, \tag{3.112}$$

que resulta:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} dv_z = -\int_{v_{oz}}^{\infty} \lambda \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} d\lambda + v_{oz} \int_{v_{oz}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} d\lambda \,, \tag{3.113}$$

ou ainda:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = -\left[-\frac{k\,T_i}{m} \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \right]_{v_{oz}}^{\infty} + v_{oz} \int_{v_{oz}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \,. \tag{3.114}$$

A segunda parcela já foi avaliada anteriormente, e aplicando as relações entre a razão de velocidades e as componentes da velocidade, tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = -\frac{k\,T_i}{m} \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} - \frac{k\,T_i}{m}\sqrt{\pi}\, s\cos\theta - \frac{k\,T_i}{m}\sqrt{\pi}\, s\cos\theta \,\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right) \tag{3.115}$$

que resulta

$$\int_{-\infty}^{0} v_z \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = -\frac{k\,T_i}{m} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right) \right] \right\}. \tag{3.116}$$

Pode-se agora substituir as integrais na expressão da troca de quantidade de movimento na direção y, resultando:

$$p_{yi} = -\frac{\rho_i \, \mathbf{v}_o^2}{2} \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{s\sqrt{\pi}} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right) \right] \right\} \tag{3.117}$$

A última componente da quantidade de movimento trocada na colisão é obtida de:

$$p_{zi} = -\rho_i \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_i} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x - v_{ox})^2} \, dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} \, dv_y \int_{-\infty}^{0} v_z^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z \tag{3.118}$$

As duas primeiras integrais já foram avaliadas anteriormente e valem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x - v_{ox})^2} \, dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_y - v_{oy})^2} \, dv_y = \sqrt{\frac{2\pi\, k\, T_i}{m}} \tag{3.119}$$

Como realizado anteriormente, no cálculo da terceira integral faz-se inicialmente uma troca de sinal em v_z e uma inversão nos limites de integração, que resulta:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \int_{0}^{\infty} v_z^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z + v_{oz})^2} \, dv_z \,. \tag{3.120}$$

Agora se aplica uma mudança de variáveis na forma $\lambda = v_z + v_{oz}$ que resultará em 3 novas integrais:

$$\int_{-\infty}^{0} v_z^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = \int_{v_{oz}}^{\infty} (\lambda^2 - 2\lambda\, v_{oz} + v_{oz}^2) \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \,. \tag{3.121}$$

A primeira delas pode ser integrada por separação de variáveis:

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = \left[-\lambda \frac{k\,T_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \right]_{v_{oz}}^{\infty} + \int_{v_{oz}}^{\infty} \frac{k\,T_i}{m} \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \,. \tag{3.122}$$

Fazendo agora outra mudança de variáveis na segunda parcela tal que $t^2 = m/(2k\, T_i)\, \lambda^2$, tem-se que:

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = v_{oz} \frac{kT_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_{oz}^2} + \frac{kT_i}{m}\sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \int_{v_{oz}\sqrt{\frac{m}{2kT_i}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \,. \tag{3.123}$$

A integral restante é igual à função erro complementar (Apêndice B), e portanto

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = v_{oz} \frac{kT_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_{oz}^2} + \frac{kT_i}{m}\sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \mathrm{erf}\left(v_{oz}\sqrt{\frac{m}{2kT_i}} \right) \right] \tag{3.124}$$

Substitui-se agora a expressão de v_{oz} em função da razão de velocidades s, que resulta em:

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = \frac{kT_i}{m}\sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \left\{ -s \cos\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta \right) \right] \right\} \tag{3.125}$$

Por sua vez, a segunda integral resulta:

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} (-2\,\lambda\, v_{oz}) \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = -2\, v_{oz} \int_{v_{oz}}^{\infty} \lambda \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda \,, \tag{3.126}$$

que fornece

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} (-2\,\lambda\, v_{oz}) \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = -2\, v_{oz} \left[-\frac{kT_i}{m} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \right]_{v_{oz}}^{\infty} . \tag{3.127}$$

Aplicando os limites de integração e fazendo a substituição de v_{oz} em função da razão de velocidades, chega-se a

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} (-2\,\lambda\, v_{oz}) \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = \frac{kT_i}{m}\sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \, 2\, s \cos\theta \;\; \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} . \tag{3.128}$$

Resta agora a terceira parcela, que é semelhante a uma das integrais obtidas anteriormente

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} v_{oz}^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = v_{oz}^2 \sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \mathrm{erf}\left(v_{oz}\sqrt{\frac{m}{2kT_i}} \right) \right] . \tag{3.129}$$

Fazendo a substituição da relação de v_{oz} com a razão de velocidades, tem-se que

$$\int_{v_{oz}}^{\infty} v_{oz}^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}\lambda^2} \, d\lambda = \frac{kT_i}{m}\sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \, s^2 \cos^2\theta \sqrt{\pi} \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta \right) \right] . \tag{3.130}$$

Pode-se agora substituir os três últimos resultados na terceira integral, que resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} v_z^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_z - v_{oz})^2} \, dv_z = {} & \frac{v_o^2}{2s^2}\sqrt{\frac{2kT_i}{m}} \\ & \left\{ s\cos\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \left(\frac{1}{2} + s^2 \cos^2\theta \right) \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.131}$$

e finalmente a quantidade de movimento na direção normal trocada pelas moléculas incidentes no elemento de superfície resulta em:

$$p_{zi} = -\frac{\rho_i \, \mathbf{v}_o^2}{2} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{s \cos\theta}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2\theta} + \left(\frac{1}{2} + s^2 \cos^2\theta \right) \left[1 + \mathrm{erf}\left(s \cos\theta \right) \right] \right\}. \qquad (3.132)$$

Nota-se que tanto p_{yi} quanto p_{zi} são negativos. Isto se deve ao sistema de referência adotado, que faz com que as componentes da velocidade de corrente sejam negativas neste sistema.

3.6 A interação entre o gás e a superfície

Para determinar-se a expressão da quantidade de movimento das moléculas que deixam a superfície após a colisão, precisa-se primeiro entender o processo de colisão. De outra forma, precisa-se saber qual a função de distribuição de velocidades das moléculas refletidas ou do fluxo emergente. No entanto, embora vários trabalhos tratem desse assunto, o fenômeno de interação entre o gás e a superfície não se encontra totalmente compreendido.

Deve-se mencionar, também, que uma vez que o caminho livre das moléculas da alta atmosfera é maior que a dimensão característica dos satélites em órbita, pode-se tratar separadamente os fluxos incidente e refletido pelas superfícies.

Dentre os vários modelos existentes para se compreender e explicar a interação entre o gás e a superfície, é de especial interesse aquele que adota apenas duas formas distintas para a colisão: a reflexão especular e a reflexão difusa (em analogia ao fenômeno ótico). Embora ainda não consiga explicar completamente o fenômeno de interação, este modelo fornece uma boa aproximação e permite uma fácil compreensão da colisão molecular.

3.6.1 Reflexão especular

A reflexão especular é a forma mais elementar de colisão entre as moléculas e uma superfície sólida, pois permite efetuar uma analogia entre um fenômeno que acontece numa escala microscópica, envolvendo aspectos quânticos, com um sistema macroscópio. Na reflexão especular a molécula incidente (supostamente esférica), deixa a superfície sob um ângulo igual ao ângulo de incidência, ilustrado na Figura 3.11.

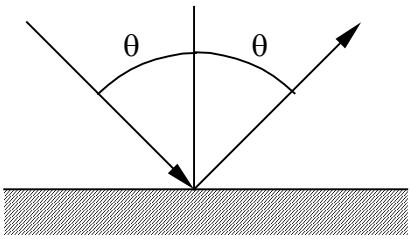

Fig. 3.11 – Colisão especular de moléculas com uma superfície

Teoricamente, porém, o módulo da velocidade não precisa permanecer constante. Se houvesse um aumento ou uma redução no módulo da velocidade das moléculas emergentes, isto significaria que a temperatura do fluxo refletido seria diferente daquela do fluxo incidente. Em outras palavras, haveria uma troca de energia entre a superfície e as moléculas incidentes, e as temperaturas de ambos seriam alteradas pela colisão. No modelo de reflexão especular, contudo, admite-se que não haja tempo suficiente durante a colisão para que esta troca de energia realmente aconteça, de forma que se considera que o choque é elástico e,

consequentemente, o módulo da velocidade das moléculas permanece inalterado durante a colisão.

A mudança na quantidade de movimento sofrida por uma molécula numa colisão, na direção normal à superfície vale:

$$\Delta q_k = 2\,m\,v\cos\theta\,. \tag{3.133}$$

onde $v = |\mathbf{v}|$ é o módulo da velocidade da molécula. Na direção tangencial, a troca de quantidade de movimento é nula, pois:

$$\Delta q_j = m\,v\,\mathrm{sen}\,\theta - m\,v\,\mathrm{sen}\,\theta = 0\,. \tag{3.134}$$

A força resultante do choque é, portanto, uma força puramente de pressão, normal à superfície. A colisão especular, embora bastante familiar, não é comum na maioria das superfícies. O fenômeno real é mais próximo da reflexão difusa.

3.6.2 Reflexão difusa

Na reflexão difusa as moléculas do gás interagem com as moléculas da superfície por um breve intervalo de tempo, sendo então reemitidas para o meio, numa direção aleatória, como apresentado na Figura 3.12. As moléculas emergentes têm uma distribuição uniforme e, portanto, podem ser tratadas como tendo uma distribuição de velocidades análoga à das moléculas incidentes, porém com temperatura T_r. Esta temperatura é geralmente diferente da temperatura do fluxo incidente, T_i, e também é diferente da temperatura da superfície, T_w, uma vez que ocorre troca de energia no processo de reflexão. A energia trocada na colisão faz com que a temperatura das moléculas refletidas aproxime-se da temperatura da superfície, isto é: $T_i < T_r < T_w$, ou então $T_w < T_r < T_i$.

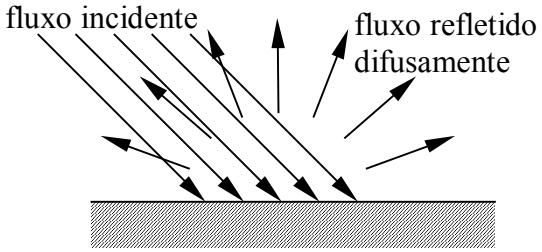

Fig. 3.12 – Colisão difusa entre um fluxo molecular e uma superfície sólida

Na reflexão difusa ocorrem:

- transferência de quantidade de movimento na direção normal
- transferência de quantidade de movimento na direção tangencial
- transferência de energia

A troca de energia pode ser posta em termos do coeficiente de acomodação térmica, α, definido como:

$$\alpha = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_w}\,, \tag{3.135}$$

onde E_i é o fluxo de energia por unidade de área e por unidade de tempo transferido pelo gás incidente para a superfície e E_r é o fluxo de energia transferido pela superfície para o fluxo emergente. Por sua vez, E_w é o fluxo de energia que seria cedido pela superfície para o fluxo refletido, caso a temperatura deste fluxo fosse a mesma da superfície, isto é, T_w, o que significa que o gás entrou em equilíbrio térmico com a superfície.

A acomodação térmica completa significa que as moléculas do gás deixarão a superfície com distribuição de velocidades maxwelliana, correspondente à temperatura da parede, T_w. Tem-se com isso os limites:

$\alpha = 1$, com acomodação térmica completa
$\alpha = 0$, sem nenhuma acomodação.

Conclui-se com isso que, embora nem sempre seja verdade que a acomodação completa esteja relacionada com a reflexão difusa, em geral altos valores de acomodação indicam forte presença da reflexão difusa, enquanto que baixos valores indicam que a reflexão é preferencialmente especular. Nota-se que a temperatura de um sólido está relacionada com a amplitude de vibração dos seus átomos constituintes. Alguns valores do coeficiente de acomodação são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Coeficientes de acomodação para alguns materiais

Coeficiente de acomodação α	Material
0,91 a 0,94	bronze polido
0,87 a 0,95	alumínio polido
0,95 a 0,97	alumínio usinado

Fonte: SCHAAF e CHAMBRÉ, 1961.

3.6.3 Coeficientes de troca de quantidade de movimento

Maxwell havia sugerido, no século XIX, que a interação entre o gás e a superfície poderia ser representada, em analogia à reflexão de ondas eletromagnéticas, como uma combinação da reflexão especular e difusa. Propôs, então, que uma fração ϕ das moléculas incidentes seria refletida especularmente, ao passo que uma fração $1-\phi$ seria refletida na forma difusa. Evidências experimentais mostraram, no entanto, que o fenômeno da interação não era tão simples como sugerira Maxwell. Smoluchowski e Knudsen introduziram, então, dois coeficientes σ_n e σ_t, que traduzem, numa escala macroscópica, a transferência de quantidade de movimento na direção normal (σ_n) e na direção tangencial (σ_t). Ainda hoje, devido à natureza complexa do fenômeno, a interação entre o gás e a superfície está longe de ser perfeitamente compreendida e de ter resultados conclusivos. Boettcher, num artigo de 1979, (BOETTCHER, 1979) inspecionando trabalhos referentes ao fenômeno, verificou que poucos deles relacionam a interação ao problema das forças aerodinâmicas em satélites. Além disso, modelos teóricos mais precisos são confrontados apenas com resultados experimentais obtidos em laboratórios, deixando sem solução o fenômeno real de interação entre a atmosfera e a superfície do satélite. Por isso, continuam sendo amplamente utilizados os coeficientes σ_n e σ_t, que são definidos por:

$$\sigma_n = \frac{p_i - p_r}{p_i - p_w}, \tag{3.136}$$

e

$$\sigma_t = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i}, \tag{3.137}$$

onde p e τ são as componentes da quantidade de movimento trocada na direção normal e tangencial, respectivamente. Os índices i e r indicam, respectivamente, o fluxo incidente e o fluxo refletido, ao passo que o índice w refere-se ao fluxo emergente, se sua temperatura fosse igual à temperatura da superfície T_w (acomodação completa). Nota-se que, devido à simetria da colisão, não há troca de quantidade de movimento na direção tangencial quando a reflexão for difusa (com acomodação completa), e portanto $\tau_w = 0$. Tem-se assim os limites possíveis para a reflexão:

- $\sigma_n = \sigma_t = \alpha = 0$ - reflexão especular sem acomodação
- $\sigma_n = \sigma_t = \alpha = 1$ - reflexão difusa, com acomodação térmica completa

A Tabela 3.3 apresenta alguns valores de σ_t obtidos experimentalmente.

Tabela 3.3 – Transferência de quantidade de movimento tangencial para alguns materiais

Gás	Material	σ_t
ar	bronze usinado	1,0
ar	vidro	0,89
ar	verniz	0,79

Fonte: GOODMAN e WACHMAN, 1976.

3.6.4 Função de distribuição de velocidades das moléculas refletidas

Para se determinar a função de distribuição de velocidades das moléculas emergentes será necessário antes estabelecer algumas hipóteses. A primeira delas afirma que o caminho livre médio das moléculas incidente é muitas vezes superior às dimensões características do corpo. Com isso pode-se desprezar as colisões intermoleculares. Admite-se também que o caminho livre médio das moléculas emergentes é também superior às dimensões do corpo. Desta forma o fluxo incidente não é perturbado pelo fluxo emergente, e, com isso, podem ser tratados separadamente. Assume-se ainda que a atmosfera possa ser tratada como um gás composto por um único elemento, cuja massa molecular seja igual à massa molecular média da atmosfera, $\tilde{M}$, ou seja:

$$\tilde{M} = \frac{\sum M_i \, n_i}{\sum n_i}, \tag{3.138}$$

onde n_i é o número de densidade do i-ésimo componente da atmosfera e M_i é sua massa molecular. É necessário ainda assumir que o fluxo de gás incidente está em equilíbrio, com distribuição maxwelliana de velocidades, e que serão desprezadas as duplas ou triplas colisões, no caso de superfícies côncavas, como ilustrado na Figura 3.13.

A função de distribuição de velocidades das moléculas refletidas especularmente é idêntica à das moléculas incidentes, já que foi suposto que o choque é perfeitamente elástico na reflexão especular e, portanto, não há troca de energia. Resta então determinar a função de distribuição para o caso de colisão difusa. Admite-se, neste caso, que a superfície se comporta como um reservatório de moléculas com distribuição uniforme de velocidades, com densidade ρ_r e com temperatura T_r, como pode ser visto na Figura 3.14.

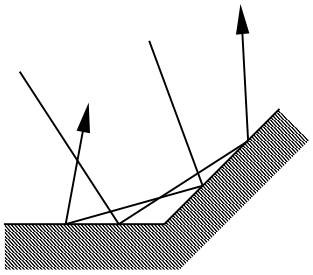

Fig. 3.13 – Dupla reflexão molecular em superfícies côncavas.

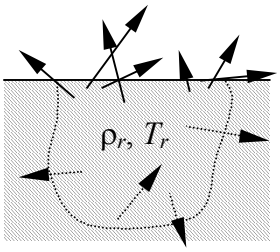

Fig. 3.14 – Distribuição das moléculas refletidas difusamente, em analogia com um reservatório de moléculas emitidas pela superfície.

As moléculas deixam então a superfície numa direção aleatória, e com velocidade média nula com relação à superfície. Na verdade, a velocidade média das moléculas refletidas não é nula, uma vez que não há moléculas com velocidade $v_z < 0$. Contudo, a velocidade do fluxo é nula, pois no reservatório há moléculas que se movimentam em todas as direções. A função de distribuição de velocidades fica portanto:

$$f_r = \frac{\rho_r}{m}\left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_r}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_r}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} \tag{3.139}$$

Nota-se que a densidade das moléculas refletidas é diferente da densidade das moléculas incidentes. Esta densidade pode ser obtida a partir da constatação de que o úmero de moléculas por unidade de área e por unidade de tempo que incide na superfície é o mesmo que o número de moléculas que deixa a superfície, o que significa que não há acúmulo de massa sobre o elemento de área. O número N_i de moléculas por unidade de área e por unidade de tempo que colide com a superfície já foi determinado e vale:

$$N_i = \frac{\rho_i}{2m}\sqrt{\frac{2k\,T_i}{\pi\, m}}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\; s\cos\theta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\} \tag{3.140}$$

O número N_r de moléculas refletidas difusamente pode ser calculado de maneira análoga ao cálculo de N_i, ou então pode-se obtê-lo substituindo-se as características do fluxo emergente na expressão de N_i, isto é, fazendo-se $s = 0$ (velocidade de fluxo nula), densidade $\rho_i = \rho_r$ e temperatura $T_i = T_r$, que resulta:

$$N_r = \frac{\rho_r}{2m}\sqrt{\frac{2k\,T_r}{\pi\, m}} \tag{3.141}$$

Como $N_i = N_r$, então tem-se que:

$$\rho_r = \rho_i \sqrt{\frac{T_i}{T_r}} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta \right) \right] \right\}. \tag{3.142}$$

Assim, a função de distribuição de velocidades das moléculas refletidas difusamente será dada por:

$$f_r = \frac{\rho_i}{m} \sqrt{\frac{T_i}{T_r}} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\theta \right) \right] \right\} \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_r} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_r}\mathbf{v}_o^2} \tag{3.143}$$

O próximo passo consiste em determinar a expressão para a troca de quantidade de movimento das moléculas que emergem da superfície, na colisão difusa. A quantidade de movimento das partículas que deixam a superfície, analogamente às moléculas incidentes, será dada por:

$$d\mathbf{p}_r = -m\, \mathbf{v}\, f_r\, (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}^e)\, d\mathbf{v} \tag{3.144}$$

onde $d\mathbf{p}_r$ é o vetor quantidade de movimento das moléculas refletidas difusamente com velocidade compreendida entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, por unidade de tempo e por unidade de área. A integral desta expressão leva a

$$\mathbf{p}_r = -\rho_r \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_r} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} v_z\, \mathbf{v}\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}(v_x^2+v_y^2+v_z^e)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z \;, \tag{3.145}$$

que pode ser separada nas componentes das direções normal, p_{zr}, tangencial, p_{yr}, e lateral, p_{xr}. Nota-se que o limite de integração na direção z^e é estritamente positivo, isto é, devem ser considerados na integral apenas as moléculas com velocidade v_z positiva. A quantidade de movimento na direção lateral resulta

$$p_{xr} = -\rho_r \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_r} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_x^2}\, dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_y^2}\, dv_y \int_{0}^{\infty} v_z\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_z^e}\, dv_z \;, \tag{3.146}$$

e como o integrando em x consiste de uma função ímpar com extremos de integração simétricos, então esta integral irá anular-se, e, portanto $p_{xr} = 0$. A integral na direção y fica:

$$p_{yr} = -\rho_r \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_r} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_x^2}\, dv_x \int_{-\infty}^{\infty} v_y\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_y^2}\, dv_y \int_{0}^{\infty} v_z\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_z^e}\, dv_z \;, \tag{3.147}$$

e também neste caso o integrando em y é uma função ímpar, de onde $p_{yr} = 0$. A componente na direção normal é dada por

$$p_{zr} = -\rho_r \left(\frac{m}{2\pi\, k\, T_r} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_x^2}\, dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_y^2}\, dv_y \int_{0}^{\infty} v_z^2\, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_z^e}\, dv_z \;, \tag{3.148}$$

cujas integrais resultam:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_x^2}\, dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_y^2}\, dv_y = \sqrt{\frac{2\pi\, k\, T_r}{m}} \;, \tag{3.149}$$

e

$$\int_0^\infty v_z^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT_i}v_z^2} \, dv_z = \frac{k\,T_r}{2\,m}\sqrt{\frac{2\pi\,k\,T_r}{m}} \,. \tag{3.150}$$

Desta forma, a troca de quantidade de movimento na direção normal resulta

$$p_{zr} = -\rho_r \frac{k\,T_r}{2\,m} \,. \tag{3.151}$$

ou ainda, substituindo o valor de ρ_r,

$$p_{zr} = -\frac{\rho_i\,v_o^2}{4\,s^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\,s\cos\theta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\} . \tag{3.152}$$

Nota-se que as componentes de p_r nas direções contidas no plano do elemento são nulas, devido à simetria das moléculas refletidas difusamente com relação ao eixo z^e. Nota-se ainda que p_{zr} é negativo, o que significa que há uma força do tipo pressão atuando no elemento.

3.6.5 Expressões para a força aerodinâmica atuante num elemento de área

As quantidades de movimento, por unidade de área e por unidade de tempo, trocadas pelas moléculas na colisão com uma superfície - tanto as moléculas incidentes como as refletidas - serão dadas por:

$$\begin{aligned} p_n &= p_i + p_r \\ p_t &= \tau_i - \tau_r \\ p_l &= 0 \end{aligned} \tag{3.153}$$

nas direções normal, tangencial, e lateral, respectivamente. Observa-se, porém, que p_r e também τ_r são desconhecidos, uma vez que não se conhece a temperatura das moléculas emergentes, T_r. Pode-se, contudo, colocar ambos em função dos coeficientes de acomodação previamente definidos, ou seja:

$$\begin{aligned} p_r &= (1-\sigma_n)\,p_i + \sigma_n\,p_w \\ \tau_r &= (1-\sigma_t)\,\tau_i \end{aligned} , \tag{3.154}$$

Substituindo estes valores nas expressões da troca de quantidade de movimento, tem-se que

$$\begin{aligned} p_n &= (2-\sigma_n)\,p_i + \sigma_n\,p_w \\ p_t &= \sigma_t\,\tau_i \end{aligned} , \tag{3.155}$$

Resta agora mencionar que $p_i = p_{zi}$, $\tau_i = p_{yi}$, e que p_w é idêntico a p_{zr} desde que T_r seja feito igual a T_w, ou seja:

$$p_w = p_{zr}\big|_{T_r = T_w} \tag{3.156}$$

Substituindo agora as expressões de p_{zi}, p_{yi} e p_{zw} ($p_{zw} = p_{zr}$ para $T_r = T_w$) nas relações acima, tem-se

$$p_n = -\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\frac{1}{s^2}\left\{\left[\frac{2-\sigma_n}{\sqrt{\pi}}\, s\cos\theta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\right]\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \right.$$
$$\left. + \left[(2-\sigma_n)\left(\frac{1}{2}+s^2\cos^2\theta\right) + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\theta\right]\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\} \tag{3.157}$$

e

$$p_t = -\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\frac{\sigma_t\,\mathrm{sen}\,\theta}{s\sqrt{\pi}}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\}, \tag{3.158}$$

que fornecem a troca de quantidade de movimento durante a colisão das moléculas, por unidade de área e por unidade de tempo. Esta troca é equivalente a uma pressão, pois suas unidades são idênticas, isto é, uma força por unidade de área. A força neste elemento será então dada por:

$$d\mathbf{f}_{aer} = (p_t\, \mathbf{j}^e + p_n\, \mathbf{k}^e)\, dA, \tag{3.159}$$

onde $\mathbf{j}^e$ e $\mathbf{k}^e$ são os versores das direções dos eixos fixados ao elemento de área dA. Substituindo então $\mathbf{j}^e$ como função das direções da normal ao elemento $\mathbf{n}^s$ e da direção do fluxo $\mathbf{u}^s$, obtida de:

$$\mathbf{u}^s = \frac{\mathbf{v}_o}{|\mathbf{v}_o|}, \tag{3.160}$$

tem-se então que:

$$d\mathbf{f}_{aer} = \left[p_t\,(-\cot\theta\,\mathbf{n}^s - \cos\sec\theta\,\mathbf{u}^s) + p_n\,\mathbf{n}^s\right] dA, \tag{3.161}$$

ou seja:

$$d\mathbf{f}_{aer} = \left[\left(p_n - \cot\theta\, p_t\right)\mathbf{n}^s - \cos\sec\theta\, p_t\,\mathbf{u}^s) + \right] dA. \tag{3.162}$$

Embora esta expressão possa ocasionar pontos singulares quando θ estiver próximo de 0º, nota-se contudo que p_t também se anula nesta condição. Deve-se então reescrever a força no elemento em função apenas dos vetores conhecidos no sistema fixado ao satélite, na forma:

$$d\mathbf{f}_{aer} = \left(p_k\,\mathbf{n}^s + p_u\,\mathbf{u}^s\right) dA, \tag{3.163}$$

onde as quantidades de movimento resultante nas direções normal, p_k, e do fluxo, p_u, resultam

$$p_k = -\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\frac{1}{s^2}\left\{\left[\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\cos\theta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\right]\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \right.$$
$$\left. + \left[(2-\sigma_n-\sigma_t)\, s^2\cos^2\theta + 1 - \frac{\sigma_n}{2} + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\theta\right]\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\} \tag{3.164}$$

e

$$p_u = \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\left\{ e^{-s^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\theta\left[1+\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]\right\}. \tag{3.165}$$

A Figura 3.15 mostra o coeficiente de força num elemento plano, isto é, a força adimensional nas direções x (vermelho), y (verde) e z (azul) do elemento, sendo que a direção de incidência é dada pelo ângulo entre o eixo x e o vetor velocidade, contida no plano xz. Foram adotados na figura $\sigma_n = 0.6$, $\sigma_t = 0.8$, $s = 4$ e $\sqrt{T_w / T_i} = 0.2$.

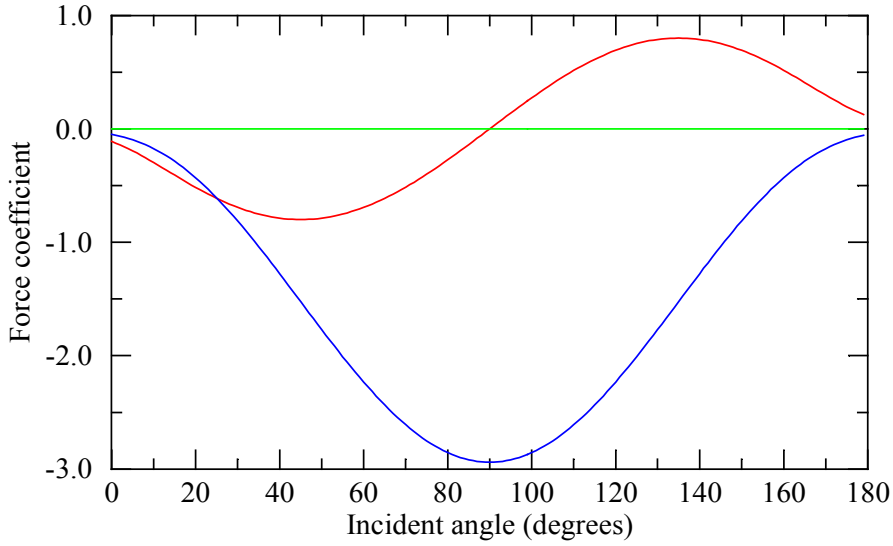

Fig. 3.15 – Coeficiente de força aerodinâmica num elemento de superfície plano, em função do ângulo de incidência do fluxo.

O coeficiente de arrasto numa placa plana é mostrado na Figura 3.16, para um ângulo variando de 0 a 90 graus. As curvas mostram o coeficiente de arrasto para razões de velocidade iguais a 2 (vermelho), 4 (laranja), 6 (verde) e 8 (azul), e tal que os coeficientes de acomodação adotados foram: $\sigma_n = 0.5$, $\sigma_t = 0.5$ e $\sqrt{T_w / T_i} = 0.5$.

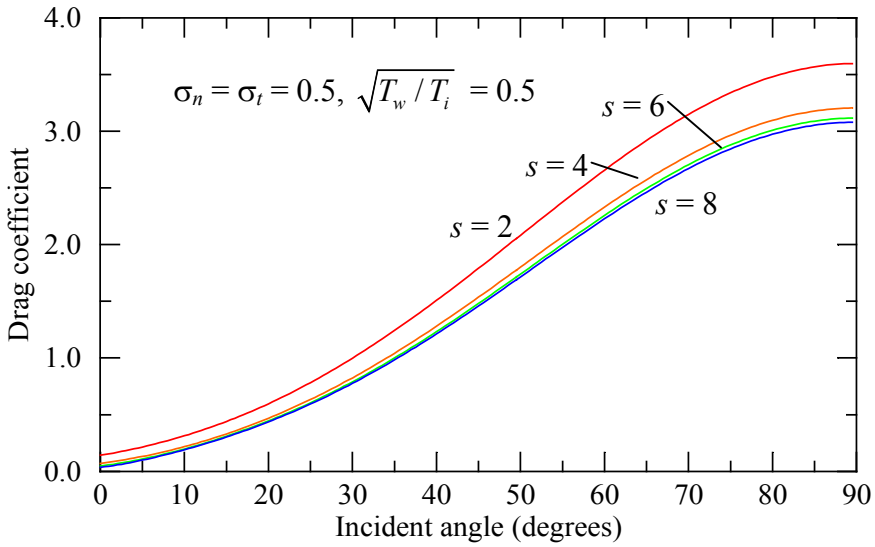

Fig. 3.16 – Coeficiente de arrasto numa placa plana, em função do ângulo de incidência.

A influência da razão de velocidades no coeficiente de arrasto numa placa plana é mostrada na Figura 3.17, com incidência normal das moléculas, isto é, tal que $\theta = 0$. Percebe-se que a força na reflexão especular ($\sigma_n = \sigma_t = 0$) tende a ser duas vezes maior do que aquela na reflexão difusa das moléculas ($\sigma_n = 1$, $\sigma_t = 1$). Além disso, quando a reflexão é difusa a redução de temperatura da superfície tende a aumentar a força de arrasto.

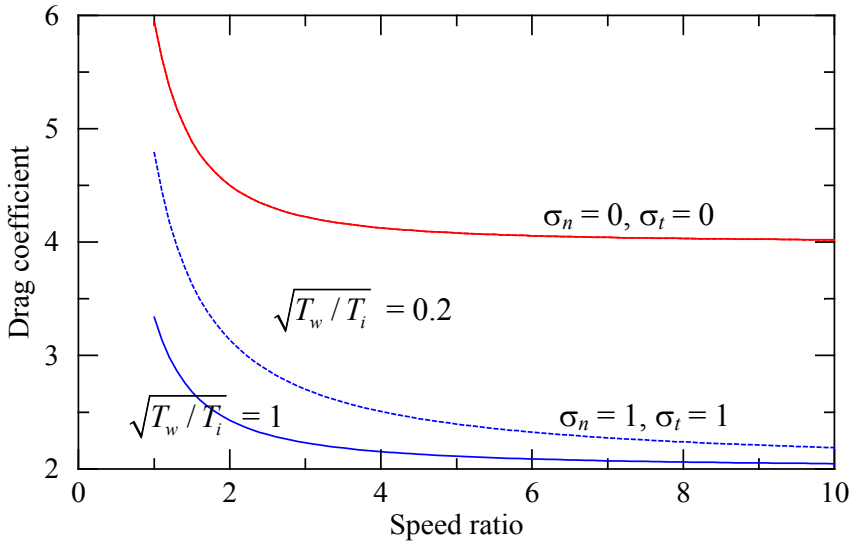

Fig. 3.17 – Coeficiente de força aerodinâmica num elemento de superfície plano, em função dos coeficientes de troca de movimento e da temperatura da superfície.

A força elementar deverá ser integrada sobre toda a superfície do satélite exposta à atmosfera (superfície externa A_{ext}), para que seja obtida a resultante da força aerodinâmica, ou seja

$$\mathbf{f}_{aer} = \int_{A_{ext}} \left(p_k \, \mathbf{n}^s + p_u \, \mathbf{u}^s \right) dA \,, \tag{3.166}$$

Esta força será proporcional ao termo $\rho_i \, \mathbf{v}_o^2 / 2$, conhecido como pressão dinâmica.

As expressões de p_n e p_t, ou de p_k e p_u dependem da razão de velocidades, s, da relação entre as temperaturas da superfície do satélite e da temperatura da atmosfera (T_w / T_i) e do ângulo de incidência do fluxo, θ, ou seja, da orientação do elemento com relação ao fluxo, ou ainda, da atitude do satélite. De uma maneira geral, a presença da exponencial nas expressões das pressões faz com que a força aerodinâmica caia com o aumento da razão de velocidades, mantidas constantes as demais condições.

O torque aerodinâmico num elemento de área e relativo ao centro de massa do corpo será dado por:

$$d\mathbf{g}_{aer} = (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_{cg}) \times d\mathbf{f}_{aer} \,, \tag{3.167}$$

onde $\mathbf{r}_e$ é o vetor posição do centro do elemento de área e $\mathbf{r}_{cg}$ é o vetor posição do centro de massa do corpo, ambos em relação ao sistema de eixos geométrico do satélite. Este conceito de torque aerodinâmico é diferente daquele usualmente encontrado na literatura, onde o torque é geralmente dado pelo produto da força aerodinâmica pelo "centro de pressão", que é o ponto onde a resultante das forças elementares de pressão se anula. Na prática é muito difícil obter-se este centro de pressões, a não ser que sejam adotadas simplificações nos

modelos matemáticos. O torque resultante das forças aerodinâmicas no satélite é a integral do torque num elemento de área, ou seja:

$$\mathbf{g}_{aer} = \int_{A_{ext}} (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_{cg}) \times \left(p_k \, \mathbf{n}^s + p_u \, \mathbf{u}^s \right) dA \,, \tag{3.168}$$

Para estudar-se o efeito da geometria do satélite na força aerodinâmica sem se preocupar com as características da atmosfera, introduz-se o conceito de coeficiente de arrasto C_D, igual à projeção da força aerodinâmica na direção da velocidade da atmosfera em relação ao satélite, dividida pela pressão dinâmica e por uma área de referência:

$$C_D = \frac{\mathbf{f}_{aer} \cdot \mathbf{u}^s}{\frac{1}{2} \rho_i \, \mathbf{v}_o^2 \, A_r} \,. \tag{3.169}$$

Normalmente adota-se a área de referência, A_r, como a área contida no contorno do satélite projetado numa dada direção. Um cilindro com diâmetro d e altura h, por exemplo, tem uma área projetada na direção transversal ao eixo de simetria de $A_r = d\ h$. Uma esfera de raio r possui área projetada de $\pi\ r^2$. O motivo de se adotar a área de referência como sendo igual à área dentro do contorno projetado numa dada direção vem do fato de que se pode provar que, se a direção de projeção for igual à direção da velocidade relativa $\mathbf{v}_o$, então

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ A_r = A_p}} C_D = 2 \,, \tag{3.170}$$

onde A_p é a área dentro do contorno projetado na direção da velocidade relativa, no caso de colisão difusa ($\sigma_n = \sigma_t = 1$) e com acomodação total ($\sqrt{T_w / T_i} = 1$). Para fins práticos, considera-se que o limite é atingido quando s for maior do que 10. O coeficiente de arrasto é então dado por:

$$C_D = \frac{2}{\rho_i \, \mathbf{v}_o^2 \, A_r} \int_{A_{ext}} \left(p_k \, \mathbf{n}^s + p_u \, \mathbf{u}^s \right) \cdot \mathbf{u}^s \, dA \,. \tag{3.171}$$

Lembrando, contudo, que $\cos\theta = -\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}^s$, tem-se então que

$$C_D = -\frac{2}{\rho_i \, \mathbf{v}_o^2 \, A_r} \int_{A_{ext}} \left(p_k \cos\theta - p_u \right) dA = -\frac{2}{\rho_i \, \mathbf{v}_o^2 \, A_r} \int_{A_{ext}} \left(p_n \cos\theta + p_t \operatorname{sen}\theta \right) dA \,, \tag{3.172}$$

ou ainda

$$C_D = \frac{1}{A_r} \int_{A_{ext}} C_f \, dA \,, \tag{3.173}$$

onde o coeficiente adimensional para uma placa plana, C_f, vale:

$$\begin{aligned} C_f = \frac{1}{s^2} \Bigg\{ & \left[\frac{2-\sigma_n}{\sqrt{\pi}} s \cos^2\theta + \frac{\sigma_t}{\sqrt{\pi}} s \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\sigma_n}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \cos\theta \right] \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2\theta} + \\ & + \cos\theta \left[1 + \operatorname{erf}\left(s \cos\theta \right) \right] \\ & \left[(2-\sigma_n) \left(\frac{1}{2} + s^2 \cos^2\theta \right) + \sigma_t \, s^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\sigma_n}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \, s \cos\theta \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.174}$$

Em algumas geometrias é comum que o ângulo θ entre a normal e a direção do fluxo seja expresso como uma composição de direções, e, neste caso, é conveniente expressar o coeficiente adimensional como função apenas do co-seno do ângulo. Após re-agrupar os termos, obtém-se

$$C_f = \frac{1}{s^2}\left\{\left[\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\cos^2\theta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\cos\theta + \frac{\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\right]\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} + \right.$$
$$+\cos\theta\left[1+\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right)\right] \tag{3.175}$$
$$\left.\left[(2-\sigma_n-\sigma_t)\, s^2\cos^2\theta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\theta + 1 - \frac{\sigma_n}{2} + \sigma_t\, s^2\right]\right\}$$

Nota-se que o sinal negativo em C_D compensa o fato de ambos os fatores, p_n e p_t serem também negativos. O coeficiente de arrasto é portanto igual à intensidade da força aerodinâmica projetada na direção da velocidade e adimensionalizada. A componente da força numa direção perpendicular à da velocidade é chamada de força de sustentação, e sua adimensionalização é conhecida como coeficiente de sustentação, definido por:

$$C_L = \frac{\left|\mathbf{f}_{aer}\times\mathbf{u}^s\right|}{\frac{1}{2}\rho_i\, \mathbf{v}_o^2\, A_r}\,. \tag{3.176}$$

O coeficiente de sustentação possui uma direção de atuação, e, por isso, deve-se integrar a força antes de se efetuar o produto vetorial.

O coeficiente de sustentação é, em geral, menor do que o coeficiente de arrasto. Isto significa que as forças aerodinâmicas laterais podem ser desprezadas quando comparadas à força provocada pelo arrasto, isto é, na direção da velocidade relativa.

As expressões de C_D e C_L podem ser integradas analiticamente em corpos simples como esfera, cilindro, caixa, cone, elipsóide, ou ainda em corpos compostos por estas formas básicas. Schaff e Chambré (1961) apresentam o coeficiente de arrasto para algumas destas geometrias.

3.6.6 Coeficiente de arrasto numa esfera

Seja um satélite esférico de raio R, com coeficientes de transferência de quantidade de movimento σ_n e σ_t. Um elemento de área dA da superfície da esfera na tem como coordenadas os ângulos θ e φ, conforme apresenta a Figura 3.18. O ângulo θ foi escolhido de tal forma a ser válida a relação $\cos\theta = -\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}^s$. A área do elemento será dada então por $dA = R\, d\theta\, R\, \mathrm{sen}\theta\, d\varphi$. Os limites de integração dos ângulos θ e φ são dados por: $0 \le \theta < \pi$ e $0 \le \varphi < 2\pi$. A área de referência será adotada como sendo igual à área da seção transversal da esfera, ou seja: $A_r = \pi R^2$.

O coeficiente de arrasto será dado por:

$$C_D = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} C_f\left(\sigma_n, \sigma_t, s, \theta, \sqrt{T_w/T_i}\right) R^2\, \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi\,. \tag{3.177}$$

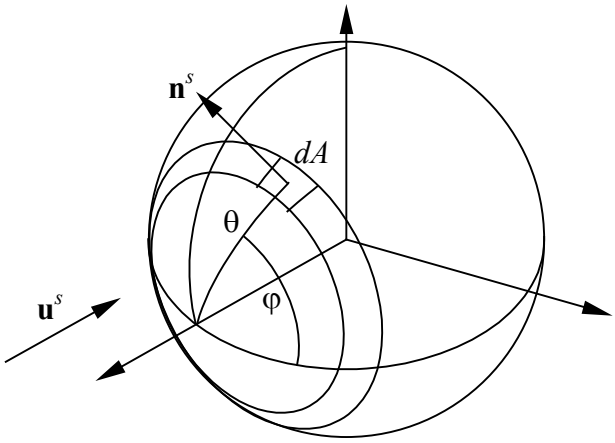

Fig. 3.18 – Definição do sistema de coordenadas e do elemento de superfície numa esfera.

Uma vez que C_f não depende do ângulo φ, segue então que a integral nesta variável é imediata, resultando

$$C_D = 2\int_0^{\pi} C_f\left(\sigma_n, \sigma_t, s, \theta, \sqrt{T_w/T_i}\right) \operatorname{sen}\theta \, d\theta\,, \tag{3.178}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
C_D = {} & \frac{2}{s}\frac{2-\sigma_n}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, e^{-s^2\cos^2\theta}\, d\theta + \frac{\sigma_n}{s^2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, e^{-s^2\cos^2\theta}\, d\theta + \\
& + \frac{2}{s}\frac{\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\, e^{-s^2\cos^2\theta}\, d\theta + \frac{2-\sigma_n}{s^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta + \\
& + \frac{2-\sigma_n}{s^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta + 2\,(2-\sigma_n)\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta\, d\theta + \\
& + 2\,(2-\sigma_n)\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta + \\
& + \frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta + \frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta + \\
& + 2\,\sigma_t\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\, d\theta + 2\,\sigma_t\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta
\end{aligned} \tag{3.179}$$

Algumas dessas integrais são ímpares no intervalo 0 a π, enquanto que outras são pares. As integrais ímpares anulam-se, e as pares podem ser integradas no intervalo 0 a π/2. São funções ímpares neste intervalo as funções $\cos^{2k+1}\theta$ e erf($s$cosθ), onde k = 0, 1, 2 .... O coeficiente de arrasto resulta então

$$\begin{aligned}
C_D = {} & \frac{4}{s}\frac{2-\sigma_n}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, e^{-s^2\cos^2\theta}\, d\theta + 2\,\frac{2-\sigma_n}{s^2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta + \\
& + 4\,(2-\sigma_n)\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta + 2\,\frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta + \\
& + \frac{4}{s}\frac{\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\, e^{-s^2\cos^2\theta}\, d\theta + 4\,\sigma_t\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta
\end{aligned} \tag{3.180}$$

As integrais serão obtidas separadamente. Na primeira delas faz-se uma mudança de variáveis tal que $t = s\cos\theta$,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} \, d\theta = \int_0^s \frac{t^2}{s^3} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \,. \tag{3.181}$$

A seguir, integra-se por partes, com $u = t$ e $dv = t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Com isso, tem-se que

$$I_1 = -\frac{1}{2s^2}\mathrm{e}^{-s^2} + \frac{1}{2s^3}\int_0^s \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \,. \tag{3.182}$$

Esta última integral é a própria função erro, e, portanto,

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4s^3}\operatorname{erf}(s) - \frac{1}{2s^2}\mathrm{e}^{-s^2} \,. \tag{3.183}$$

Para integrar a segunda componente, será utilizada a regra de Leibnitz, que estabelece que se

$$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx \,, \tag{3.184}$$

então

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} f(x,\alpha)\, dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha} \,. \tag{3.185}$$

Logo, integrando por partes a segunda integral, com $u = \operatorname{erf}(s\cos\theta)$ e $dv = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, tem-se que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta = \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right)\right]_0^{\pi/2} + \frac{s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} \, d\theta \end{aligned} \tag{3.186}$$

O primeiro termo resulta nulo, uma vez que o seno anula-se em 0 e o argumento da função erro anula-se em $\pi/2$. Assim, fazendo-se $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ na integral, chega-se a:

$$I_2 = \frac{s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} \, d\theta - \frac{s}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta} \, d\theta \,. \tag{3.187}$$

Faz-se agora uma mudança de variáveis, novamente com $t = s\cos\theta$, que resulta

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^s \mathrm{e}^{-t^2} \, dt - \frac{1}{s^2\sqrt{\pi}}\int_0^s t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \,. \tag{3.188}$$

A primeira integral é a própria função erro, e a segunda integral foi avaliada em I_1. Com isso, tem-se para I_3

$$I_2 = \frac{1}{4s^2}\operatorname{erf}(s)\left(2s^2 - 1\right) + \frac{1}{2s\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-s^2} \,. \tag{3.189}$$

Para avaliar a terceira componente, faz-se novamente a transformação de variáveis $t = s \cos\theta$:

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta = \frac{1}{s^4}\int_0^s t^3 \operatorname{erf}(t)\, dt\,, \tag{3.190}$$

que pode ser integrado por partes, com $u = \operatorname{erf}(t)$ e $dv = t^3$:

$$I_3 = \frac{1}{4}\operatorname{erf}(s) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^s t^4\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\,. \tag{3.191}$$

A integral remanescente também pode ser integrada por partes, com $u = t^3$ e $dv = t\,\mathrm{e}^{-t^2}$, que resulta

$$I_3 = \frac{1}{4}\operatorname{erf}(s) - \frac{1}{2s^4\sqrt{\pi}}\left[-\frac{s^3}{2}\mathrm{e}^{-s^2} + \frac{3}{2}\int_0^s t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\right]. \tag{3.192}$$

A integral que resta já foi avaliada em I_1, e portanto

$$I_3 = \frac{1}{4}\operatorname{erf}(s) - \frac{1}{2s^4\sqrt{\pi}}\left[-\frac{s^3}{2}\mathrm{e}^{-s^2} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf}(s) - \frac{3s}{4}\mathrm{e}^{-s^2}\right], \tag{3.193}$$

ou ainda

$$I_3 = \frac{1}{16s^4}\operatorname{erf}(s)\left(4s^4 - 3\right) + \frac{1}{8s^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-s^2}\left(3 + 2s^2\right). \tag{3.194}$$

A quarta integral possui solução imediata fazendo-se a mudança de variáveis $t = \cos\theta$:

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3} \tag{3.195}$$

A quinta integral é dada por

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\theta}\, d\theta\,, \tag{3.196}$$

que já foi avaliada em I_2 e vale

$$I_5 = \frac{\sqrt{\pi}}{4s^3}\operatorname{erf}(s)\left(2s^2 - 1\right) + \frac{1}{2s^2}\mathrm{e}^{-s^2}\,. \tag{3.197}$$

A última integral pode ser separada em duas, fazendo-se $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta \end{aligned} \tag{3.198}$$

que resultam, portanto, na diferença entre I_2 e I_3:

$$I_6 = I_2 - I_3 = \frac{1}{16\,s^4}\,\mathrm{erf}(s)\left(4\,s^4 - 4\,s^2 + 3\right) + \frac{1}{8\,s^3\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s^2}\left(2\,s^2 - 3\right) \tag{3.199}$$

Substituindo as integrais na expressão do coeficiente de arrasto obtém-se

$$\begin{aligned}
C_D = {} & \frac{4}{s}\,\frac{2-\sigma_n}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4\,s^3}\,\mathrm{erf}(s) - \frac{1}{2\,s^2}\,\mathrm{e}^{-s^2}\right] + \\
& +2\,\frac{2-\sigma_n}{s^2}\left[\frac{1}{4\,s^2}\,\mathrm{erf}(s)\left(2s^2-1\right) + \frac{1}{2\,s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s^2}\right] + \\
& +4\,(2-\sigma_n)\left[\frac{1}{16\,s^4}\,\mathrm{erf}(s)\left(4\,s^4-3\right) + \frac{1}{8\,s^3\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s^2}\left(3+2\,s^2\right)\right] + \\
& +2\,\frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\,\frac{1}{3} + \\
& +\frac{4}{s}\,\frac{\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4\,s^3}\,\mathrm{erf}(s)\left(2s^2-1\right) + \frac{1}{2\,s^2}\,\mathrm{e}^{-s^2}\right] + \\
& +4\,\sigma_t\left[\frac{1}{16\,s^4}\,\mathrm{erf}(s)\left(4\,s^4-4\,s^2+3\right) + \frac{1}{8\,s^3\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s^2}\left(2\,s^2-3\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.200}$$

ou, após re-agrupar os termos,

$$C_D = \frac{2-\sigma_n+\sigma_t}{2\,s^3}\left[\left(4\,s^4+4s^2-1\right)\frac{\mathrm{erf}(s)}{2\,s} + \left(2\,s^2+1\right)\frac{\mathrm{e}^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}\right] + \frac{2}{3}\,\frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \tag{3.201}$$

O coeficiente de arrasto para uma esfera com reflexão especular ($\sigma_n = \sigma_t = 0$) fica

$$C_{Desp} = \frac{1}{s^3}\left[\left(4\,s^4+4s^2-1\right)\frac{\mathrm{erf}(s)}{2\,s} + \left(2\,s^2+1\right)\frac{\mathrm{e}^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}\right]. \tag{3.202}$$

Quando a razão de velocidades s for muito grande, então

$$\lim_{s\to\infty} C_{Desp} = 2 \tag{3.203}$$

Isto se deve, é claro, ao fato de utilizar-se uma área de referência, A_r, igual à área projetada na direção da velocidade, que coincide com a área da seção transversal da esfera.

O coeficiente de arrasto na reflexão totalmente difusa ($\sigma_n = \sigma_t = 1$) resulta:

$$C_{Ddif} = \frac{1}{s^3}\left[\left(4\,s^4+4s^2-1\right)\frac{\mathrm{erf}(s)}{2\,s} + \left(2\,s^2+1\right)\frac{\mathrm{e}^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}\right] + \frac{2}{3\,s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \tag{3.204}$$

ou ainda

$$C_{Ddif} = C_{Desp} + \frac{2}{3\,s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \geq C_{Desp}\,, \tag{3.205}$$

ou seja, o coeficiente de arrasto da esfera numa reflexão difusa é sempre maior do que na reflexão especular. Além disso, nota-se que o limite do coeficiente de arrasto difuso para a razão de velocidades tendendo ao infinito é também igual a 2. A Figura 3.19 mostra o coeficiente de arrasto especular e difuso de uma esfera. O coeficiente de arrasto na reflexão difusa é mostrado em duas situações: na primeira, a raiz quadrada da razão de temperaturas é unitária, e na segunda é igual a 0,5.

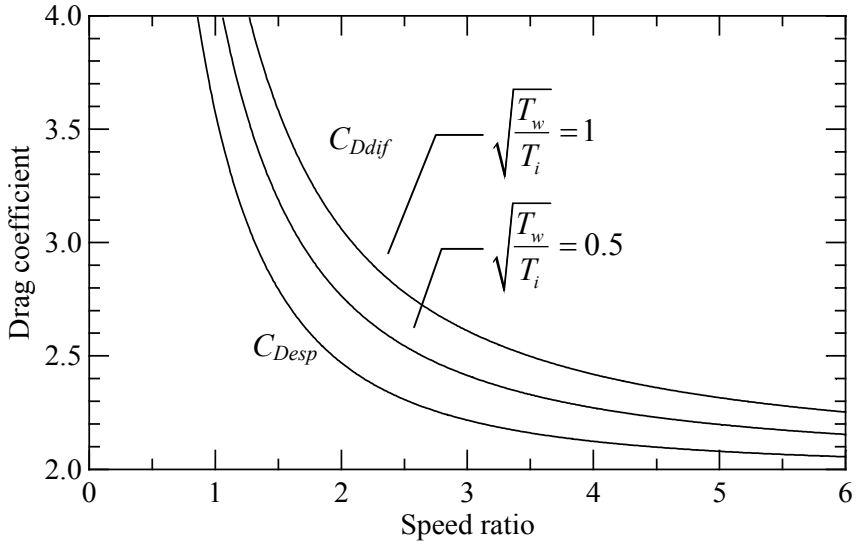

Fig. 3.19 – Coeficiente de arrasto numa esfera em função da razão de velocidades *s*.

3.6.7 Coeficiente de arrasto num cilindro

Considera-se agora um satélite cilíndrico de altura L e raio da base R. Admite-se, que a direção do fluxo faz com o plano perpendicular ao eixo do cilindro um ângulo α, conhecido como ângulo de ataque, conforme mostra a Figura 3.20. Despreza-se os efeitos das duas tampas, isto é, das extremidades superior e inferior do cilindro. Adota-se como área de referência a área da seção transversal do cilindro na direção da velocidade relativa com o meio, ou seja, $A_r = 2\,R\,L$. O elemento de área vale $dA = R\,L\,d\theta$. Tem-se assim que

$$C_D = \frac{1}{2\,R\,L}\int_0^{2\pi} C_f\left(\sigma_n, \sigma_t, s, \eta, \sqrt{T_w/T_i}\right) R\,L\,d\theta\,. \tag{3.206}$$

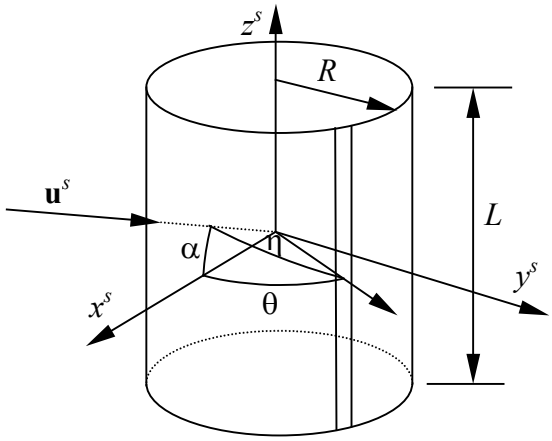

Fig. 3.20 – Definição do sistema de coordenadas e do elemento de superfície num cilindro.

Nota-se que, devido à simetria do problema, a integral realizada no intervalo 0 a 2π é igual ao dobro da integral de 0 a π. Substituindo a expressão de C_f e separando-se as integrais, chega-se a

$$\begin{aligned}
C_D = {} & \frac{2-\sigma_n}{s\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos^2\eta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} \, d\theta + \frac{\sigma_n}{2s^2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \int_0^{\pi} \cos\eta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} \, d\theta + \\
& + \frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\eta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} \, d\theta + \frac{(2-\sigma_n)}{2s^2} \int_0^{\pi} \cos\eta \, d\theta + \\
& + \frac{(2-\sigma_n)}{2s^2} \int_0^{\pi} \cos\eta \operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right) d\theta + (2-\sigma_n) \int_0^{\pi} \cos^3\eta \, d\theta + \\
& + (2-\sigma_n) \int_0^{\pi} \cos^3\eta \operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right) d\theta + \sigma_t \int_0^{\pi} \cos\eta \operatorname{sen}^2\eta \, d\theta + \\
& + \sigma_t \int_0^{\pi} \cos\eta \operatorname{sen}^2\eta \operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right) d\theta + \frac{\sigma_n}{2s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \int_0^{\pi} \cos^2\eta \, d\theta + \\
& + \frac{\sigma_n}{2s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \int_0^{\pi} \cos^2\eta \operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right) d\theta
\end{aligned} \quad . \qquad (3.207)$$

Algumas das integrais resultarão nas integrais de Bessel de ordem 0 e 1, que são as funções de Bessel modificadas do primeiro tipo $I_0(x)$ e $I_1(x)$ (discutidas no Apêndice A).

Nota-se que o ângulo entre a direção do fluxo e a normal ao elemento de área vale cosη = cosα cosθ. Substituindo esta expressão na relação que fornece o coeficiente de arrasto, percebe-se que no intervalo 0 a π as funções cosθ, $\cos^3\theta$ e erf(s cosα cosθ) são ímpares, e portanto suas integrais se anulam. Por outro lado, as integrais remanescentes são pares, e iguais ao dobro da integral realizada entre 0 e π/2. Logo, a expressão do coeficiente de arrasto num cilindro resume-se a

$$\begin{aligned}
C_D = {} & 2\,\frac{2-\sigma_n}{s\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha \cos^2\theta \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta} \, d\theta + \\
& + \frac{2-\sigma_n}{s^2} \int_0^{\pi/2} \cos\alpha\cos\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta + \\
& + 2\,(2-\sigma_n) \int_0^{\pi/2} \cos^3\alpha \cos^3\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta + \\
& + \frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha\cos^2\theta \, d\theta + \\
& + 2\,\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\alpha\cos^2\theta) \, \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta} \, d\theta + \\
& 2\,\sigma_t \int_0^{\pi/2} \cos\alpha\cos\theta\,(1-\cos^2\alpha\cos^2\theta) \operatorname{erf}\left(s\cos\theta\right) d\theta
\end{aligned} \quad . \qquad (3.208)$$

que podem ser re-agrupadas na forma

$$
\begin{aligned}
C_D = {} & 2\,\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\cos^2\alpha\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\,d\theta + \\
& +\left(\frac{2-\sigma_n}{s^2}+2\,\sigma_t\right)\cos\alpha\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{erf}\left(s\cos\alpha\,\cos\theta\right)d\theta + \\
& +2\,(2-\sigma_n-\sigma_t)\cos^3\alpha\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{erf}\left(s\cos\alpha\,\cos\theta\right)d\theta + \\
& +\frac{\sigma_n}{s}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\cos^2\alpha\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta + 2\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\,d\theta
\end{aligned}
\quad . \tag{3.209}
$$

Para avaliar a primeira integral, faz-se a transformação

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos u}{2}, \tag{3.210}$$

de onde se tem

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1-\cos u}{2}. \tag{3.211}$$

Derivando esta última, chega-se a

$$d\theta = \frac{du}{2}. \tag{3.212}$$

Alterando convenientemente os limites, tem-se

$$J_1 = \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos u}{4}\,\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\frac{1+\cos u}{2}}\,du \tag{3.213}$$

ou ainda

$$J_1 = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{s^2\cos^2\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{s^2\cos^2\alpha\cos u}{2}}\,du + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos u\,\mathrm{e}^{-\frac{s^2\cos^2\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{s^2\cos^2\alpha\cos u}{2}}\,du \tag{3.214}$$

A primeira integral do segundo membro é uma integral de Bessel de ordem 0, e fazendo a transformação $t = \cos u$ na segunda integral, resulta

$$J_1 = \frac{\mathrm{e}^{-s_\alpha}}{4}\left[\pi\,I_0(s_\alpha) + \int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha t}\,dt\right], \tag{3.215}$$

onde, por conveniência, define-se s_α como:

$$s_\alpha = \frac{s^2\cos^2\alpha}{2}. \tag{3.216}$$

A integral remanescente pode ser resolvida por partes, uma vez que

$$u = \mathrm{e}^{-s_\alpha t},\ \text{e}\ dv = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \tag{3.217}$$

de onde

$$du = -s_\alpha \, \mathrm{e}^{-s_\alpha t} \, dt \text{, e } v = -\sqrt{1-t^2} \, . \tag{3.218}$$

que resulta

$$J_1 = \frac{\mathrm{e}^{-s_\alpha}}{4} \left\{ \pi \, I_0(s_\alpha) + \left[-\sqrt{1-t^2} \; \mathrm{e}^{-s_\alpha t} \right]_{-1}^{1} - s_\alpha \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \; \mathrm{e}^{-s_\alpha t} \; dt \right\}. \tag{3.219}$$

O termo mediano é nulo e o último termo é a própria integral de Bessel de ordem 1, e portanto

$$J_1 = \frac{\mathrm{e}^{-s_\alpha}}{4} \pi \left[I_0(s_\alpha) - I_1(s_\alpha) \right]. \tag{3.220}$$

A segunda integral é também avaliada por partes, fazendo-se u = erf(s cosα cosθ), e dv = cosθ dθ. Disto resulta

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha \cos\theta\right) d\theta = \\ &= \left[\mathrm{sen}\,\theta \, \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha \cos\theta\right) \right]_0^{\pi/2} + \frac{2\, s \cos\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\,\theta \; \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2\alpha \cos^2\theta} \; d\theta \end{aligned} \tag{3.221}$$

A primeira parcela da integração é nula, pois o seno anula-se em θ = 0, e a função erro anula-se quando θ = π/2. Neste ponto faz-se novamente a transformação

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos u}{2}, \tag{3.222}$$

e

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1-\cos u}{2}, \tag{3.223}$$

que fica

$$J_2 = \frac{s \cos\alpha}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (1-\cos u) \, \mathrm{e}^{-\frac{s^2 \cos^2\alpha}{2}(1+\cos u)} \; du \, . \tag{3.224}$$

Mas esta integral é semelhante àquela já realizada acima, e portanto

$$J_2 = \frac{s \cos\alpha \sqrt{\pi}}{2} \, \mathrm{e}^{-s_\alpha} \left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha) \right]. \tag{3.225}$$

A terceira integral fica

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \, \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha \cos\theta\right) d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha \cos\theta\right) d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{sen}^2\,\theta \, \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha \cos\theta\right) d\theta \end{aligned} \tag{3.226}$$

A primeira das integrais já foi avaliada anteriormente, e integrando a segunda delas por partes, com

$$u = \mathrm{erf}(s\,\cos\alpha\,\cos\theta)\,,\ \text{e}\ \ dv = \mathrm{sen}^2\,\theta\,\cos\theta\,d\theta\,, \tag{3.227}$$

onde

$$du = -\frac{2\,s\,\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\,d\theta\,,\ \text{e}\ \ v = \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{3}\,, \tag{3.228}$$

resulta

$$J_3 = J_2 - \left[\frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{3}\,\mathrm{erf}\left(s\cos\alpha\,\cos\theta\right)\right]_0^{\pi/2} - \frac{2\,s\,\cos\alpha}{3\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^4\,\theta\,\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\,d\theta\,. \tag{3.229}$$

A parcela já integrada resulta nula, e, fazendo-se novamente uma mudança de variáveis tal que

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1-\cos u}{2}\,,\ \text{e}\ \ \cos^2\theta = \frac{1+\cos u}{2}\,, \tag{3.230}$$

tem-se que

$$J_3 = J_2 - \frac{s\,\cos\alpha}{12\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}(1-2\cos u+\cos^2 u)\,\mathrm{e}^{-\frac{s^2\cos^2\alpha}{2}(1+\cos u)}\,du\,. \tag{3.231}$$

Efetuando agora as integrais separadamente, na forma:

$$\begin{aligned} J_3 = J_2 - \frac{s\,\cos\alpha}{12\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\,\Bigg(&\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-s_\alpha\cos u}\,du + \\ &-2\int_0^{\pi}\cos u\,\mathrm{e}^{-s_\alpha\cos u}\,du + \int_0^{\pi}\cos^2 u\,\mathrm{e}^{-s_\alpha\cos u}\,du\Bigg)\,, \end{aligned} \tag{3.232}$$

conclui-se que a primeira e a segunda parcela são iguais às funções de Bessel modificadas de primeira e segunda ordem, respectivamente. A terceira parcela é posta em função do seno do ângulo θ.

$$\begin{aligned} J_3 = J_2 - \frac{s\,\cos\alpha}{12\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\,\Big[&\pi\,I_0(s_\alpha) + 2\,\pi\,I_1(s_\alpha) + \\ &+\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-s_\alpha\cos u}\,du - \int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\,u\,\mathrm{e}^{-s_\alpha\cos u}\,du\Big] \end{aligned} \tag{3.233}$$

As integrais remanescentes são novamente iguais às funções de Bessel, e portanto

$$J_3 = J_2 - \frac{s\,\cos\alpha}{12\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[2\,\pi\,I_0(s_\alpha) + 2\,\pi\,I_1(s_\alpha)\left(1-\frac{1}{2\,s_\alpha}\right)\right] \tag{3.234}$$

Substituindo o valor de J_2 e re-agrupando os termos, resulta

$$J_3 = \frac{s\cos\alpha\,\sqrt{\pi}}{3}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\left(1+\frac{1}{4\,s_\alpha}\right)\right] \tag{3.235}$$

A próxima integral é imediata e resulta

$$J_4 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{3.236}$$

A última parcela foi parcialmente avaliada em J_2, e fazendo a transformação

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos u}{2}, \text{ e } \cos^2\theta = \frac{1+\cos u}{2}, \tag{3.237}$$

tem-se que

$$J_5 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\frac{s^2\cos^2\alpha}{2}(1+\cos u)}\, du \tag{3.238}$$

Esta integral resulta na primeira integral de Bessel, ou seja:

$$J_5 = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-s_\alpha}\, I_0(s_\alpha) \tag{3.239}$$

Substituindo as integrais na expressão do coeficiente de arrasto e re-agrupando-se os termos, tem-se

$$\begin{aligned} C_D = \frac{\sqrt{\pi}}{s}\mathrm{e}^{-s_\alpha} \Bigg\{ & \sigma_t\, I_0(s_\alpha) + (2-\sigma_n-\sigma_t)\frac{\cos^2\alpha}{2}\left[I_0(s_\alpha) - I_1(s_\alpha)\right] + \\ & + \left(\frac{1}{2}(2-\sigma_n) + s^2\,\sigma_t\right)\cos^2\alpha\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\right] + \\ & + (2-\sigma_n-\sigma_t)\frac{2}{3}s_\alpha\cos^2\alpha\left[2I_0(s_\alpha) + 2I_1(s_\alpha) + \frac{1}{2s_\alpha}I_1(s_\alpha)\right]\Bigg\} + \\ & + \frac{\sigma_n\,\pi\sqrt{\pi}}{4s}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\cos^2\alpha \end{aligned} . \tag{3.240}$$

Se o ângulo de ataque for nulo (eixo do cilindro perpendicular à direção do fluxo) então a expressão acima se resume a

$$\begin{aligned} C_D = & \frac{\sqrt{\pi}}{s}\mathrm{e}^{-s^2/2}\left[2(2-\sigma_n)+\sigma_t\right]\left[\left(\frac{s^2}{3}+\frac{1}{2}\right)I_0(s^2/2) + \frac{1}{3}\left(s^2+\frac{1}{2}\right)I_1(s^2/2)\right] + \\ & + \sigma_n\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4s}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \end{aligned} \tag{3.241}$$

Neste caso, se a reflexão das moléculas for especular ($\sigma_n = \sigma_t = 0$) então o coeficiente de arrasto resulta:

$$C_{Desp} = \frac{\sqrt{\pi}}{s}\mathrm{e}^{-s^2/2}\left[2\left(\frac{2s^2}{3}+1\right)I_0(s^2/2) + \frac{2}{3}\left(2s^2+1\right)I_1(s^2/2)\right], \tag{3.242}$$

ao passo que na reflexão difusa ($\sigma_n = \sigma_t = 1$) tem-se que

$$C_{Ddif} = \frac{\sqrt{\pi}}{s}\,\mathrm{e}^{-s^2/2}\left[\left(s^2+\frac{3}{2}\right)I_0(s^2/2)+\left(s^2+\frac{1}{2}\right)I_1(s^2/2)\right]+\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4s}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\,. \qquad (3.243)$$

Isto significa que

$$C_{Ddif} = \frac{3}{4}C_{Desp}+\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4s}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\,. \qquad (3.244)$$

O coeficiente de arrasto é mostrado nas Figuras 3.21 e 3.22, em função da razão de velocidades s, e do ângulo de ataque α. No ambiente espacial, a temperatura média do satélite encontra-se por volta de 300°K, ao passo que a temperatura da atmosfera fica compreendida entre 500 a 2500°K. Isto faz com que a razão de temperaturas T_w/T_i assuma valores entre 0.1 a 0.6.

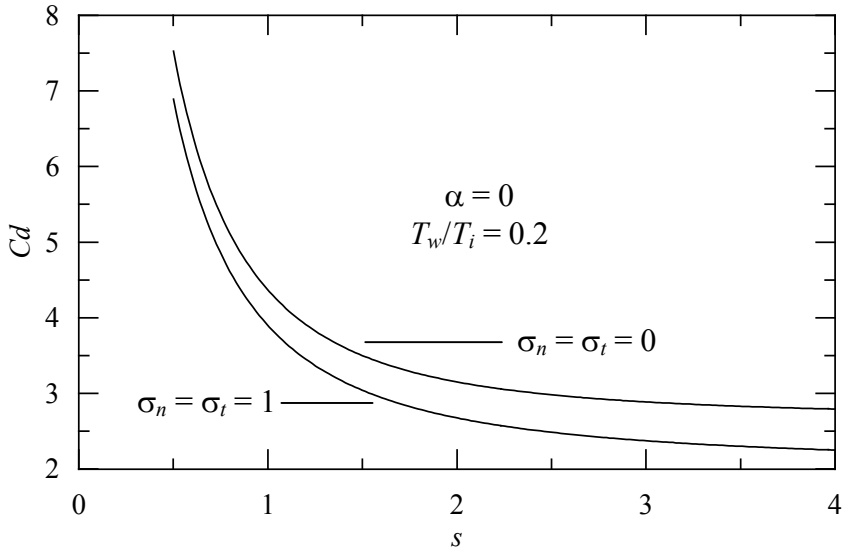

Fig. 3.21 – Coeficiente de arrasto em um cilindro, em função da razão de velocidades.

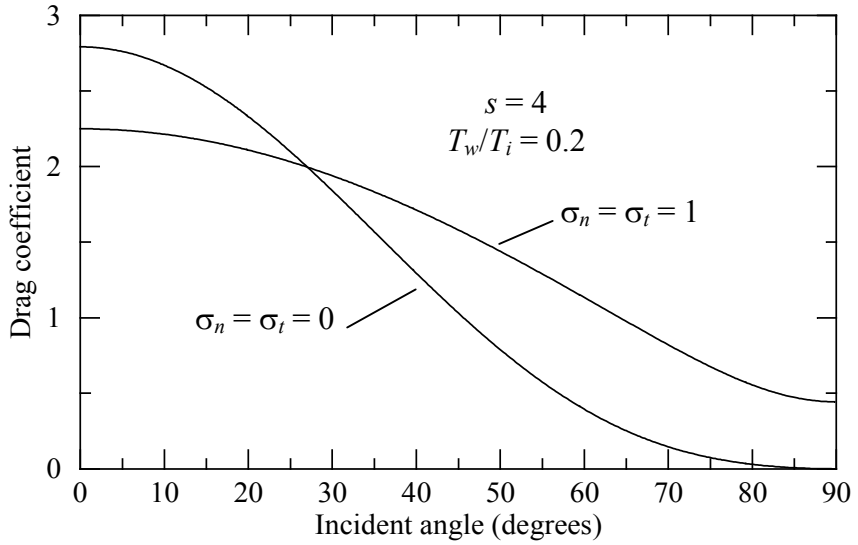

Fig. 3.22 – Coeficiente de arrasto em um cilindro, em função do ângulo de incidência do fluxo.

3.6.8 Força aerodinâmica em um cilindro

Apresenta-se agora o cálculo da força aerodinâmica num cilindro altura L e raio R. Admite-se a mesma geometria adotada no cálculo do coeficiente de arrasto. Novamente o efeito das duas tampas é desprezado. A força aerodinâmica fica então

$$d\mathbf{f}_{a_c} = \left(p_k \, \mathbf{n}^s + p_u \, \mathbf{u}^s \right) dA \,, \tag{3.245}$$

onde a resultante nas direções normal, p_k, e do fluxo, p_u, são dadas por

$$\begin{aligned} p_k = & -\frac{\rho_i \, v_o^2}{2} \frac{1}{s^2} \left\{ \left[\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}} s \cos\eta + \frac{\sigma_n}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \right] \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2 \eta} + \right. \\ & + \left[(2-\sigma_n) \left(\frac{1}{2} + s^2 \cos^2 \eta \right) - \sigma_t \, s^2 \cos^2 \eta + \frac{\sigma_n}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \, s \cos\eta \right] \\ & \left. \left[1 + \operatorname{erf}\left(s \cos\eta \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.246}$$

e

$$p_u = \frac{\rho_i \, v_o^2}{2} \frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2 \eta} + \sqrt{\pi} \, s \cos\eta \left[1 + \operatorname{erf}\left(s \cos\eta \right) \right] \right\} . \tag{3.247}$$

A resultante da força fica então

$$\mathbf{f}_{a_c} = 2 \int_0^{\pi} [p_k \, (\cos\theta \, \mathbf{i}^s + \operatorname{sen}\theta \, \mathbf{j}^s) - p_u \, (\cos\alpha \, \mathbf{i}^s + \operatorname{sen}\alpha \, \mathbf{k}^s)] \, R \, L \, d\theta \,, \tag{3.248}$$

pois $\mathbf{n}^s = \cos\theta \, \mathbf{i}^s + \operatorname{sen}\theta \, \mathbf{j}^s$, e $\mathbf{u}^s = -\cos\alpha \, \mathbf{i}^s - \operatorname{sen}\alpha \, \mathbf{k}^s$. Separando-se as integrais nos três eixos do satélite, chega-se a

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{a_c} &= R \, L \int_{-\pi}^{\pi} (p_k \cos\theta - p_u \cos\alpha) \, d\theta \, \mathbf{i}^s + R \, L \int_{-\pi}^{\pi} p_k \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, \mathbf{j}^s - \\ & - R \, L \int_{-\pi}^{\pi} p_u \operatorname{sen}\alpha \, d\theta \, \mathbf{k}^s \\ &= f_x \, \mathbf{i}^s + f_y \, \mathbf{j}^s + f_z \, \mathbf{k}^s \end{aligned} \tag{3.249}$$

O coeficiente da força aerodinâmica na direção do eixo x fica então:

$$C_x = \frac{f_x}{RL} \frac{2}{\rho_i \, v_o^2} = \frac{2}{\rho_i \, v_o^2} \int_{-\pi}^{\pi} (p_k \cos\theta - p_u \cos\alpha) \, d\theta \,, \tag{3.250}$$

ou seja:

$$C_x = \frac{2}{\rho_i \, v_o^2} \int_{-\pi}^{\pi} p_k \cos\theta \, d\theta - \frac{2}{\rho_i \, v_o^2} \int_{-\pi}^{\pi} p_u \cos\alpha \, d\theta \tag{3.251}$$

Lembrando que $\cos\eta = -u^s \cdot n^s = \cos\alpha \cos\theta$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
C_x = -\frac{1}{s^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg\{ & \left[\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\cos\alpha\cos\theta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\right] \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta} + \\
& + \Bigg[(2-\sigma_n)\left(\frac{1}{2}+s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta\right) - \sigma_t\, s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta + \\
& + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\alpha\cos\theta\Bigg]\Big[1+\operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right)\Big]\Bigg\}\cos\theta\, d\theta + \\
& - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\alpha\cos\theta\Big[1+\operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right)\Big]\right\}\cos\alpha\, d\theta
\end{aligned}
\tag{3.252}
$$

e que pode ser separado nas integrais:

$$C_{x1} = -\frac{1}{s^2}\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\cos\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\cos^2\theta\, d\theta \tag{3.253}$$

$$C_{x2} = -\frac{1}{s^2}\frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta \tag{3.254}$$

$$C_{x3} = -\frac{1}{s^2}(2-\sigma_n)\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\, d\theta \tag{3.255}$$

$$C_{x4} = -\frac{1}{s^2}(2-\sigma_n)\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right)\cos\theta\, d\theta \tag{3.256}$$

$$C_{x5} = -\frac{1}{s^2}(2-\sigma_n)\, s^2\cos^2\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\, d\theta \tag{3.257}$$

$$C_{x6} = -\frac{1}{s^2}(2-\sigma_n)\, s^2\cos^2\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta \tag{3.258}$$

$$C_{x7} = \frac{1}{s^2}\sigma_t\, s^2\cos^2\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\, d\theta \tag{3.259}$$

$$C_{x8} = \frac{1}{s^2}\sigma_t\, s^2\cos^2\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta \tag{3.260}$$

$$C_{x9} = -\frac{1}{s^2}\frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta \tag{3.261}$$

$$C_{x10} = -\frac{1}{s^2}\frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta \tag{3.262}$$

$$C_{x11} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\cos\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\, d\theta \tag{3.263}$$

$$C_{x12} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\, s\cos^2\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\, d\theta \tag{3.264}$$

$$C_{x13} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\, s\cos^2\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta \tag{3.265}$$

No intervalo $-\pi$ a π as integrais do tipo $\cos\theta$, $\cos^3\theta$ e $\operatorname{erf}(s\cos\theta)$ anulam-se, e, portanto, as integrais 2, 3, 5, 7, 10, e 12 são nulas. As demais resultam no quádruplo da integral realizada no intervalo 0 a $\pi/2$. As integrais 4 e 13 são idênticas, bem como as integrais 6 e 8.

A primeira integral fica:

$$A_1 = 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta} \cos^2\theta\, d\theta\,, \tag{3.266}$$

que já foi realizada anteriormente e resulta

$$A_1 = \mathrm{e}^{-s_\alpha}\, \pi\left[I_0(s_\alpha) - I_1(s_\alpha)\right], \tag{3.267}$$

onde I_0 e I_1 são as integrais de Bessel de ordem 0 e 1, e

$$s_\alpha = \frac{s^2\cos^2\alpha}{2} \tag{3.268}$$

A quarta integral também já foi avaliada anteriormente e resultou em

$$A_4 = 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right)\cos\theta\, d\theta = 2s\cos\alpha\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\right] \tag{3.269}$$

A sexta integral ficou

$$\begin{aligned} A_6 &= 4\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \operatorname{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta = \\ &= 4\frac{s\cos\alpha\sqrt{\pi}}{3}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\left(1 + \frac{1}{4s_\alpha}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.270}$$

A oitava integral é idêntica à sexta, e a nona fica

$$A_9 = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi \tag{3.271}$$

A décima primeira integral resulta

$$A_{11} = 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\, d\theta = 2\pi\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\, I_0(s_\alpha)\,, \tag{3.272}$$

e, finalmente, a última integral é idêntica à quarta. Recompondo agora as integrais, tem-se

$$C_{x1} = -\frac{1}{s^2}(2 - \sigma_n - \sigma_t)\, s\cos\alpha\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha) - I_1(s_\alpha)\right] \tag{3.273}$$

$$C_{x4} = -\frac{1}{s^2}(2 - \sigma_n)\, s\cos\alpha\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\right] \tag{3.274}$$

$$C_{x6} = -\frac{1}{s^2}(2 - \sigma_n)\frac{4}{3}s^3\cos^3\alpha\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\left(1 + \frac{1}{4s_\alpha}\right)\right] \tag{3.275}$$

$$C_{x8} = \frac{1}{s^2}\sigma_t \frac{4}{3} s^3 \cos^3\alpha \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-s_\alpha} \left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\left(1 + \frac{1}{4 s_\alpha}\right)\right] \tag{3.276}$$

$$C_{x9} = -\frac{1}{s^2}\frac{\sigma_n}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s \cos\alpha \sqrt{\pi}\, \pi \tag{3.277}$$

$$C_{x11} = -\frac{\sigma_t}{s} 2 \cos\alpha \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-s_\alpha}\, I_0(s_\alpha) \tag{3.278}$$

$$C_{x13} = -\frac{\sigma_t}{s} 2\, s^2 \cos^3\alpha \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-s_\alpha} \left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\right] \tag{3.279}$$

$$C_{x6} + C_{x8} = -\frac{1}{s^2}(2 - \sigma_n - \sigma_t)\frac{4}{3} s^3 \cos^3\alpha \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-s_\alpha} \left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\left(1 + \frac{1}{4 s_\alpha}\right)\right] \tag{3.280}$$

$$C_{x4} + C_{x13} = -\frac{1}{s^2} s \cos\alpha \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-s_\alpha}\, (2 - \sigma_n + 2\sigma_t s^2 \cos^2\alpha)\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\right] \tag{3.281}$$

e o coeficiente de força na direção x resulta então, após a simplificação,

$$\begin{aligned} C_x = & -\frac{1}{s^2} s \cos\alpha \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-s_\alpha} \Big\{ (2 - \sigma_n - \sigma_t)\left[I_0(s_\alpha) - I_1(s_\alpha)\right] + \\ & + (2 - \sigma_n - \sigma_t)\frac{4}{3} s^2 \cos^2\alpha \left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\left(1 + \frac{1}{4 s_\alpha}\right)\right] + \\ & + (2 - \sigma_n + 2\sigma_t s^2 \cos^2\alpha)\left[I_0(s_\alpha) + I_1(s_\alpha)\right] + 2\sigma_t I_0(s_\alpha)\Big\} - \\ & - \frac{1}{s}\frac{\sigma_n}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_i}} \cos\alpha \sqrt{\pi}\, \pi \end{aligned} \tag{3.282}$$

A força na direção x é simplesmente

$$f_x = \frac{\rho_i\, v_o^2}{2} R L C_x \tag{3.283}$$

Na direção y a força é simétrica e portanto é nula. Já na direção z tem-se

$$C_z = -\frac{2}{\rho_i\, v_o^2} \int_{-\pi}^{\pi} p_u\, \mathrm{sen}\,\alpha\, d\theta\,, \tag{3.284}$$

ou

$$C_z = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \sqrt{\pi}\, s \cos\eta \left[1 + \mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\} \mathrm{sen}\,\alpha\, d\theta \tag{3.285}$$

mas como $\cos\eta = \cos\alpha \cos\theta$, então

$$C_z = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\alpha \int_{-\pi}^{\pi}\left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s\cos\alpha\cos\theta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right)\right]\right\} d\theta \,. \tag{3.286}$$

Separando as integrais, tem-se

$$C_{z1} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\alpha\cos^2\theta}\, d\theta \tag{3.287}$$

$$C_{z2} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\sqrt{\pi}\, s\cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\, d\theta \tag{3.288}$$

$$C_{z3} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\sqrt{\pi}\, s\cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\,\mathrm{erf}\left(s\cos\alpha\cos\theta\right) d\theta \tag{3.289}$$

A segunda integral é nula (simetria), e as restantes já foram avaliadas anteriormente. Tem-se com isso que

$$C_{z1} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\; 2\pi\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\; I_0(s_\alpha) \tag{3.290}$$

$$C_{z3} = -\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\; 2\sqrt{\pi}\, s^2\cos^2\alpha\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left[I_0(s_\alpha)+I_1(s_\alpha)\right] \tag{3.291}$$

e portanto

$$C_z = -\frac{\sigma_t}{s}\, 2\sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{e}^{-s_\alpha}\left\{I_0(s_\alpha)+s^2\cos^2\alpha\left[I_0(s_\alpha)+I_1(s_\alpha)\right]\right\} \tag{3.292}$$

O coeficiente de arrasto pode ser calculado por meio da força aerodinâmica, dado que

$$C_D \triangleq \frac{\mathbf{f}_{a_c}\cdot\mathbf{u}^s}{2RL}\,\frac{2}{\rho_i\, v_o^2}\,, \tag{3.293}$$

onde

$$\mathbf{f}_{a_c} = f_x\,\mathbf{i}^s + f_z\,\mathbf{k}^s = \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,RL(C_x\mathbf{i}^s + C_z\mathbf{k}^s)\,, \tag{3.294}$$

ou seja

$$C_D = \frac{1}{2}(C_x\mathbf{i}^s + C_z\mathbf{k}^s)\cdot\mathbf{u}^s\,, \tag{3.295}$$

que resulta na expressão já apresentada anteriormente. A resultante da força aerodinâmica no cilindro é então dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{a_c} &= \frac{\rho_i\, v_o^2}{2} RL(C_x \mathbf{i}^s + C_z \mathbf{k}^s) = \\
&= \frac{\rho_i\, v_o^2}{2} RL \frac{\sqrt{\pi}}{s} \cos\alpha \left\{ -\mathrm{e}^{-s_\alpha} \left\{ (2-\sigma_n-\sigma_t)\left[I_0(s_\alpha)-I_1(s_\alpha)\right] + \right.\right. \\
&+ (2-\sigma_n-\sigma_t)\,\frac{8}{3}\, s_\alpha \left[I_0(s_\alpha)+I_1(s_\alpha)\left(1+\frac{1}{4 s_\alpha}\right)\right] + \\
&\left. + (2-\sigma_n+4\sigma_t\, s_\alpha)\left[I_0(s_\alpha)+I_1(s_\alpha)\right] + 2\sigma_t I_0(s_\alpha)\right\} - \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\,\pi \Bigg\}\, \mathbf{i}^s - \\
&- \frac{\rho_i\, v_o^2}{2} RL \frac{\sqrt{\pi}}{s}\, 2\,\sigma_t\, \mathrm{sen}\,\alpha\, \mathrm{e}^{-s_\alpha} \left\{ I_0(s_\alpha) + 2 s_\alpha \left[I_0(s_\alpha)+I_1(s_\alpha)\right]\right\} \mathbf{k}^s
\end{aligned}
\tag{3.296}
$$

O torque no cilindro com relação à origem do sistema de referência devido à força aerodinâmica também pode ser calculado, usando-se para isso a definição

$$
\mathbf{g}_{a_c} = \int_{A_{ext}} \mathbf{r} \times \left(p_k\, \mathbf{n}^s + p_u\, \mathbf{u}^s \right) dA\,, \tag{3.297}
$$

tal que

$$
\mathbf{r} = R\, \mathbf{n}^s = R\, (\cos\theta\, \mathbf{i}^s + \mathrm{sen}\,\theta\, \mathbf{j}^s)\,, \tag{3.298}
$$

resultando

$$
\mathbf{g}_{a_c} = -R \int_{A_{ext}} p_u\, (\mathrm{sen}\,\alpha\, \mathrm{sen}\,\theta\, \mathbf{i}^s - \mathrm{sen}\,\alpha\, \cos\theta\, \mathbf{j}^s + \cos\alpha\, \mathrm{sen}\,\theta\, \mathbf{k}^s)\, dA\,. \tag{3.299}
$$

Devido à óbvia simetria do cilindro, as componentes do torque nas direções *z*, do eixo do cilindro, e *x*, que contém a direção da velocidade de incidência, são nulas. Logo, o torque fica

$$
\mathbf{g}_{a_c} = R \int_{A_{ext}} p_u\, \mathrm{sen}\,\alpha\, \cos\theta\, dA\, \mathbf{j}^s\,, \tag{3.300}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_{a_c} = R^2 L \frac{\rho_i\, v_o^2}{2} \frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}} \mathrm{sen}\,\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta \\
\left\{ \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2\alpha \cos^2\theta} + \sqrt{\pi}\, s \cos\alpha\, \cos\theta \left[1 + \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha\, \cos\theta \right)\right]\right\} d\theta\, \mathbf{j}^s
\end{aligned}\,, \tag{3.301}
$$

que apresenta integrais já avaliadas anteriormente que resultam

$$
g_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\, \mathrm{e}^{-s^2 \cos^2\alpha \cos^2\theta}\, d\theta = 0 \tag{3.302}
$$

$$
g_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi \tag{3.303}
$$

$$
g_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\, \mathrm{erf}\left(s \cos\alpha\, \cos\theta \right) d\theta = 0\,. \tag{3.304}
$$

Com isso o torque resulta

$$\mathbf{g}_{a_c} = \frac{\rho_i \, v_o^2}{2} R^2 L \, \pi \, \sigma_t \, \text{sen}\,\alpha \, \cos\alpha \, \mathbf{j}^s \,, \tag{3.305}$$

e, como era de se esperar, o torque é nulo tanto em $\alpha = 0$ quanto em $\alpha = \pm \pi/2$.

O comportamento dos coeficientes de força e torque aerodinâmicos num cilindro pode ser visualizado na Figura 3.23. Mostra-se a curva de C_x (vermelho) e C_z (azul) em função do ângulo de ataque α. O torque no eixo y é mostrado na curva em preto. Os demais parâmetros utilizados foram: $R = 0.5$, $L = 1$, $\sigma_n = \sigma_t = 1$, $s = 4$ e $T_w/T_i = 1$.

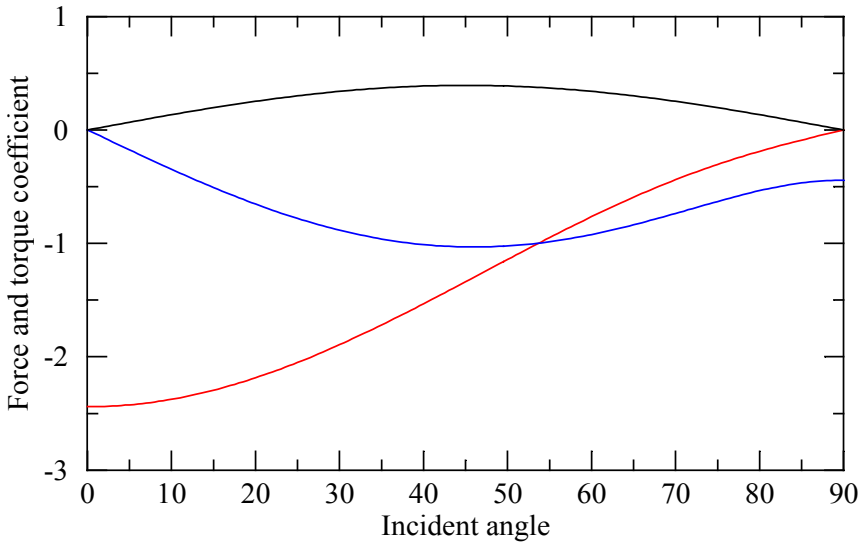

Fig. 3.23 – Coeficientes de força e torque aerodinâmicos em um cilindro, em função do ângulo de incidência do fluxo.

3.6.9 Força e momento em um cilindro transverso

Considera-se agora o caso de um cilindro de raio R cujo eixo de simetria esteja numa direção qualquer com relação a um sistema de coordenadas x^b, y^b e z^b, e cujo centro geométrico não coincida com a origem deste sistema, como visto na Figura 3.24. Deseja-se, neste caso, calcular a força e o torque aerodinâmico que age neste cilindro, em relação à origem do sistema de eixos. Se $\mathbf{v}_b$ e $\mathbf{v}_t$ forem dois vetores que fornecem as posições dos centros das faces dos cilindros (fundo e topo), então $\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_b$ representa um vetor alinhado com o eixo de simetria do cilindro, enquanto que seu módulo fornece o comprimento do cilindro, isto é $L = |\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_b|$. Para o cálculo da força de arrasto, utilizam-se as relações já obtidas na seção anterior, porém deve-se fixar um sistema de coordenadas x^s, y^s e z^s no cilindro, tal que z^s coincida com o eixo de simetria e x^s esteja no plano formado por z^s e $\mathbf{u}^b$ (direção de incidência do fluxo).

É claro que

$$\mathbf{k}^s = \frac{\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_b}{|\,\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_b\,|} \,, \tag{3.306}$$

$$\mathbf{i}^s = \frac{-\mathbf{u}^b + (\mathbf{u}^b \cdot \mathbf{k}^s)\,\mathbf{k}^s}{|\,-\mathbf{u}^b + (\mathbf{u}^b \cdot \mathbf{k}^s)\,\mathbf{k}^s\,|} \,, \tag{3.307}$$

e a direção $\mathbf{j}^s$ fica

$$\mathbf{j}^s = \mathbf{k}^s \times \mathbf{i}^s . \tag{3.308}$$

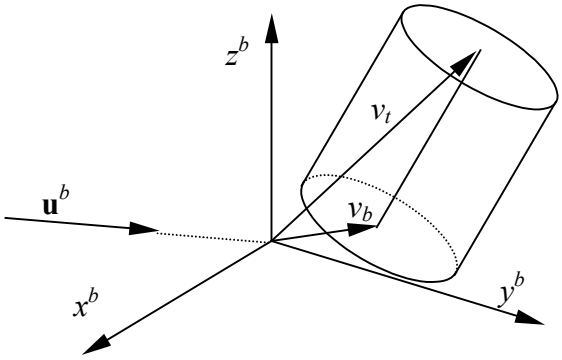

Fig. 3.24 – Definição do sistema de coordenadas e com relação a um cilindro transverso.

Disto tira-se também que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= -\mathbf{u}^b \cdot \mathbf{k}^s \\ \cos\alpha &= -\mathbf{u}^b \cdot \mathbf{i}^s \end{aligned} \tag{3.309}$$

A origem do sistema *s* coincide com o centro geométrico do cilindro, e cujas coordenadas no sistema *b* vale

$$\mathbf{p}^b = \frac{\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_b}{2} . \tag{3.310}$$

A partir daí, pode-se calcular a força e o torque aerodinâmico com as relações obtidas para o cilindro com sistema de coordenadas fixado ao centro geométrico (Seção 3.6.8), mas o torque final deve ainda ser acrescido da parcela devido à mudança de pólo, na forma:

$$\mathbf{g}^b_{a_c} = \mathbf{g}^s_{a_c} + \mathbf{p}^b \times \mathbf{f}^s_{a_c} , \tag{3.311}$$

onde $\mathbf{g}^s_{a_c}$ é o torque no cilindro referido ao sistema *s*.

3.6.10 Força aerodinâmica em placas planas paralelas

É comum que satélites apresentem geometrias nas quais uma face é paralela a outra. Exemplos são as faces opostas de um paralelepípedo, ou então a face anterior e posterior de um painel solar. Consegue-se alguma simplificação nas equações da força aerodinâmica quando se sabe de antemão que uma superfície será paralela a outra. De fato, não importa se as faces paralelas estejam próximas ou distantes entre si. Basta tão somente que tenham áreas idênticas, e que suas normais sejam opostas.

Seja então uma placa plana de área *dA*, tal que ambas as faces desta placa estejam sujeitas ao ambiente. É claro que uma delas sofrerá impacto direto das moléculas da atmosfera, enquanto que a outra terá incidência apenas daquelas moléculas que tiverem estatisticamente velocidade contrária ao fluxo, como visto na Figura 3.25. A força fica então dada por

$$\mathbf{f}_{a_pp} = \left[p_k(\eta)\,\mathbf{n} + p_u(\eta_b)\,\mathbf{u}^e + p_k(\eta)\,\mathbf{b} + p_u(\eta_b)\,\mathbf{u}^e \right] dA . \tag{3.312}$$

na qual a face contrária ao fluxo possui normal **b** e ângulo com relação ao fluxo dado por η_b. Lembrando que $\mathbf{b} = -\mathbf{n}$, que $\cos\eta = -\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}$, e que $\cos\eta_b = -\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{b} = \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n} = -\cos\eta$, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{a_pp} &= \{[p_k(\eta) - p_k(\eta_b)]\,\mathbf{n} + [p_u(\eta) + p_u(\eta_b)]\,\mathbf{u}^e\}\,dA = \\ &= (p_{kp}(\eta)\,\mathbf{n} + p_{up}(\eta)\,\mathbf{u}^e)\,dA\end{aligned} \quad . \tag{3.313}$$

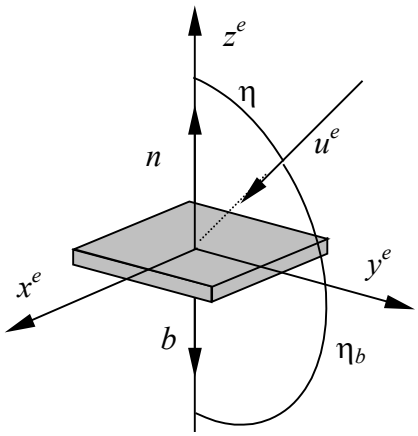

Fig. 3.25 – Placas planas paralelas e opostas.

Pode-se agora avaliar os termos nas direções da normal e da velocidade separadamente. A componente na direção da normal fica:

$$\begin{aligned}p_{kp}(\eta) &= p_k(\eta) - p_k(\eta_b) = \\ &-\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\frac{1}{s^2}\left\{\left[\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\,\cos\eta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\right]\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \right. \\ &+\left[\left(2-\sigma_n-\sigma_t\right)s^2\,\cos^2\eta + 1 - \frac{\sigma_n}{2} + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\eta\right] \\ &\left.\left[1+\operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\} + \\ &+\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\frac{1}{s^2}\left\{\left[-\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\,\cos\eta + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\right]\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \right. \\ &+\left[\left(2-\sigma_n-\sigma_t\right)s^2\,\cos^2\eta + 1 - \frac{\sigma_n}{2} - \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\eta\right] \\ &\left.\left[1-\operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.314}$$

que resulta

$$\begin{aligned}p_{kp}(\eta) = -\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\frac{2}{s^2}\Bigg\{&\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\,\cos\eta\,\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\, s\cos\eta + \\ &+\left[\left(2-\sigma_n-\sigma_t\right)s^2\,\cos^2\eta + 1 - \frac{\sigma_n}{2}\right]\operatorname{erf}\left(s\cos\eta\right)\Bigg\}\end{aligned} \quad . \tag{3.315}$$

Já a componente na direção da velocidade será dada por

$$
\begin{aligned}
p_{up}(\eta) &= p_u(\eta) + p_u(\eta_b) = \\
&= \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \sqrt{\pi}\; s\cos\eta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\} + , \\
&+ \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\left\{ \mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} - \sqrt{\pi}\; s\cos\eta\left[1-\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{3.316}
$$

ou seja

$$
p_{up}(\eta) = \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{2\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \sqrt{\pi}\; s\cos\eta\;\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right\} \tag{3.317}
$$

A expressão completa para a força fica então:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{a_pp} &= -\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{2}{s^2}\left\{\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\,\cos\eta\;\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\; s\cos\eta + \right. \\
&+ \left.\left[\left(2-\sigma_n-\sigma_t\right)s^2\,\cos^2\eta + 1 - \frac{\sigma_n}{2}\right]\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right\}\mathbf{n} + \\
&+ \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{2\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \sqrt{\pi}\; s\cos\eta\;\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right\}\mathbf{u}^e\; dA
\end{aligned}
\tag{3.318}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{a_pp} &= -\frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{2}{s^2}\left\{\frac{2-\sigma_n-\sigma_t}{\sqrt{\pi}}\, s\,\cos\eta\;\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \frac{\sigma_n}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_w}{T_i}}\; s\cos\eta + \right. \\
&+ \left.\left[\;(2-\sigma_n-\sigma_t)\; s^2\,\cos^2\eta + \frac{2-\sigma_n}{2}\right]\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right\}\mathbf{n} + \\
&+ \frac{\rho_i\, v_o^2}{2}\,\frac{2\sigma_t}{s}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta}}{\sqrt{\pi}} + s\cos\eta\;\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right\}\mathbf{u}^e\; dA
\end{aligned}
\tag{3.319}
$$

Se as faces estiverem separadas por uma distância l, pode-se então calcular o torque com relação ao ponto médio da linha que une os baricentros das faces

$$
\mathbf{g}_{a_pp} = \frac{l}{2}\mathbf{n}\times\left[\,p_k(\eta)\;\mathbf{n} + p_u(\eta)\;\mathbf{u}^e\right] dA - \frac{l}{2}\mathbf{n}\times\left[\,p_k(\eta)\;\mathbf{b} + p_u(\eta_b)\;\mathbf{u}^e\right] dA\,, \tag{3.320}
$$

ou seja

$$
\mathbf{g}_{a_pp} = \frac{l}{2}[\,p_u(\eta) - p_u(\eta_b)]\;\mathbf{n}\times\mathbf{u}^e\; dA\,. \tag{3.321}
$$

Mas $\mathbf{n}\times\mathbf{u}^e = \mathrm{sen}(\pi-\eta)\;\mathbf{i}^e = \mathrm{sen}\,\eta\;\mathbf{i}^e$, e portanto

$$\mathbf{g}_{a_pp} = \frac{l}{2}[p_u(\eta) - p_u(\eta_b)]\,\mathrm{sen}\,\eta\,\mathbf{i}^e\,dA =$$

$$= \frac{\rho_i\,v_o^2}{2}\,\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\frac{l}{2}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} + \sqrt{\pi}\,s\cos\eta\left[1+\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\}\mathrm{sen}\,\eta\,\mathbf{i}^e\,dA + \tag{3.322}$$

$$-\frac{\rho_i\,v_o^2}{2}\,\frac{\sigma_t}{s\sqrt{\pi}}\,\frac{l}{2}\left\{\mathrm{e}^{-s^2\cos^2\eta} - \sqrt{\pi}\,s\cos\eta\left[1-\mathrm{erf}\left(s\cos\eta\right)\right]\right\}\mathrm{sen}\,\eta\,\mathbf{i}^e\,dA$$

que resulta

$$\mathbf{g}_{a_pp} = \frac{\rho_i\,v_o^2}{2}\,\sigma_t\,l\,\mathrm{sen}\,\eta\cos\eta\,dA\,\mathbf{i}^e\,, \tag{3.323}$$

ou

$$\mathbf{g}_{a_pp} = \frac{\rho_i\,v_o^2}{2}\,l\,\sigma_t\cos\eta\,dA\,\mathbf{n}\times\mathbf{u}^e \tag{3.324}$$

O comportamento do coeficiente de arrasto numa placa dupla em função do ângulo de incidência do fluxo pode ser visualizado na Figura 3.26, para dois valores da razão de velocidades: s = 4 (curva cheia) e s = 10 (curva tracejada). O ângulo de incidência é complementar ao ângulo η, isto é, é igual a $90^o - \eta$. Adotou-se neste gráfico os seguintes valores: $\sigma_n = \sigma_t = 0.5$ e $T_w/T_i = 0.25$.

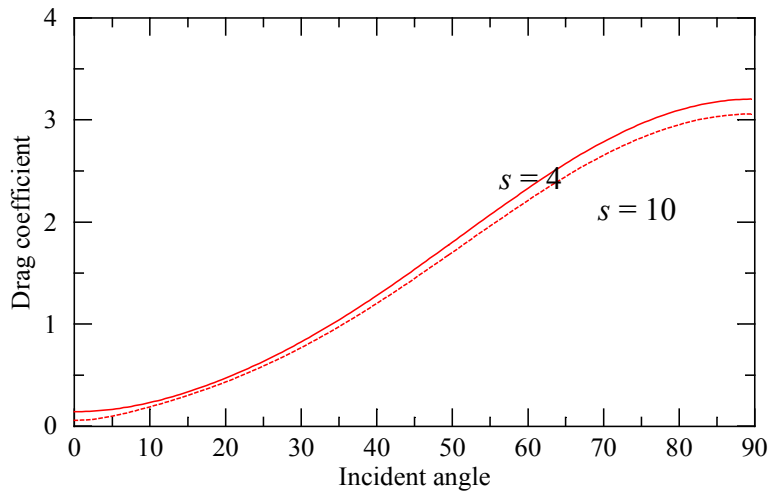

Fig. 3.26 – Coeficiente de arrasto em placas planas paralelas e opostas.

A Figura 3.27 mostra a contribuição da face anterior (em vermelho) e da face posterior (em azul) para o arrasto total (em preto). Nota-se que a contribuição da face posterior é somente relevante para baixos valores do ângulo de incidência do fluxo (tangente à superfície). Foram adotados nesta figura os mesmos coeficientes do gráfico anterior, e s = 4.

A Figura 3.28 mostra a seguir o coeficiente de sustentação, na direção perpendicular à velocidade do fluxo. O coeficiente resultou negativo em virtude do sistema de coordenadas adotado para o elemento de superfície. A sustentação se anula tanto para ângulo de incidência nulo quanto para incidência ortogonal à superfície.

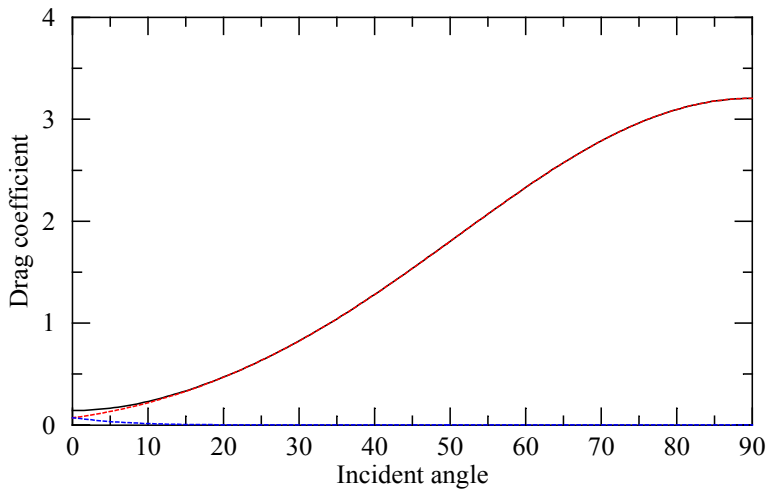

Fig. 3.27 – Coeficiente de arrasto na placa frontal e na placa oposta ao fluxo.

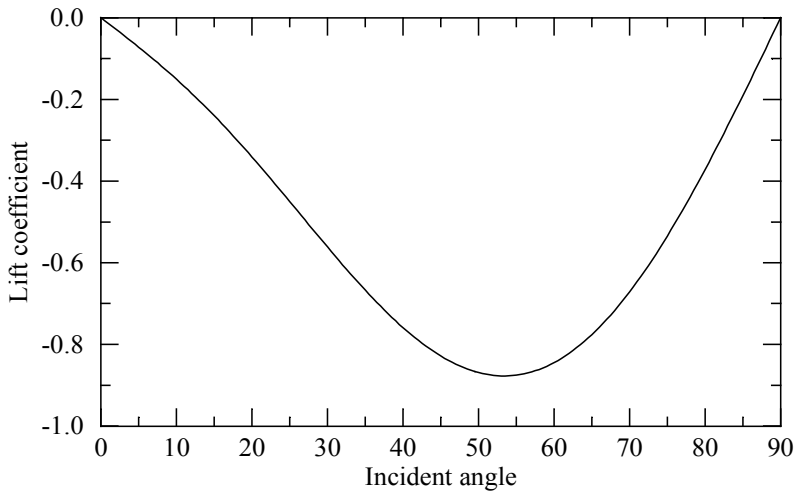

Fig. 3.28 – Coeficiente de sustentação numa placa composta.

3.6.11 Força aerodinâmica em paralelepípedos

O paralelepípedo é um sólido no qual todas as suas faces são retangulares (ou quadrados, eventualmente). Esta geometria é muito encontrada em satélites, pela facilidade de se produzir estruturas neste formato. Pode-se considerar um paralelepípedo como formado por 6 faces, paralelas duas a duas. Considerando-se um sistema de coordenadas fixado ao centro do paralelepípedo, de lados l_x, l_y, e l_z, nas direções dos eixos x, y e z, respectivamente, como indica a Figura 3.29, tem-se então que a força aerodinâmica fica

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{a_pl} = &\left[p_{kp}(\eta_x)\,\mathbf{i}^s + p_{up}(\eta_x)\,\mathbf{u}^s\right] l_y\, l_z + \left[p_{kp}(\eta_y)\,\mathbf{j}^s + p_{up}(\eta_y)\,\mathbf{u}^s\right] l_x\, l_z + \\ &+\left[p_{kp}(\eta_z)\,\mathbf{k}^s + p_{up}(\eta_z)\,\mathbf{u}^s\right] l_x\, l_y\end{aligned}, \tag{3.325}$$

e tal que

$$\begin{aligned}\cos\eta_x &= \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{i}^s = \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\eta_y &= \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{j}^s = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta, \\ \cos\eta_z &= \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{k}^s = \operatorname{sen}\beta\end{aligned} \tag{3.326}$$

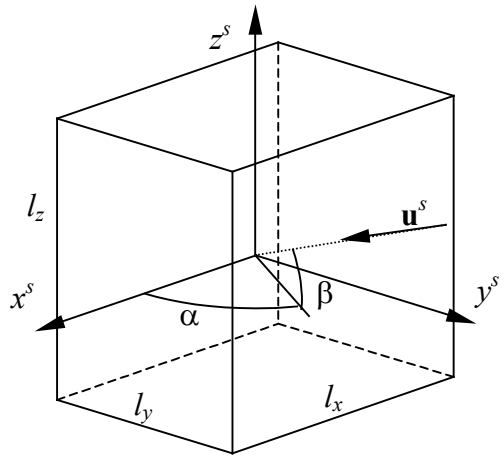

Fig. 3.29 – Sistemas de coordenadas e direção de incidência num paralelepípedo.

Percebe-se que pouca simplificação é conseguida nas equações para cálculo da força aerodinâmica no paralelepípedo. Com relação ao conjugado (torque) as simplificações são ainda menores. Logo é preferível, para o paralelepípedo, calcular tanto a força quanto o torque a partir da sua definição, isto é, pela soma da contribuição das 6 faces.

A Figura 3.30 apresenta a variação do coeficiente de força (vetor), definido por

$$\mathbf{c}_F \triangleq \frac{\mathbf{f}_{a_c}}{A} \frac{2}{\rho_i \, v_o^2} \tag{3.327}$$

para uma caixa de lados iguais a 1 m, 1,5 m e 2 m, nas direções x, y e z, respectivamente, em função do ângulo α, com β = 0°. Os demais parâmetros foram $s = 4$, $\sigma_n = \sigma_t = 0.5$, $T_w/T_i = 0.25$, e $A = 12$ m^2.

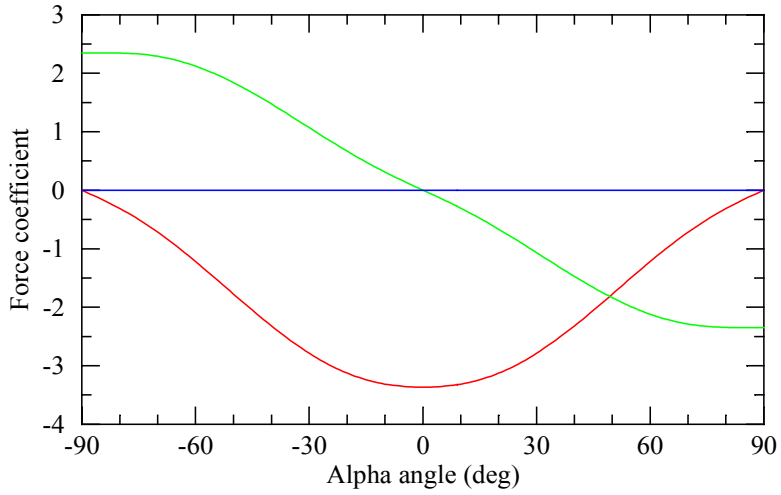

Fig. 3.30 – Coeficiente de força num paralelepípedo, em função do ângulo de incidência α, nos eixos x (vermelho), y (verde) e z (azul).

Em virtude da simetria, os torques com relação ao centro da caixa resultam nulos.

4 FORÇAS E TORQUES DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO

No projeto de sistemas de controle de atitude ou no controle de órbita dos satélites todos os torques e forças perturbadores devem ser considerados. Neste aspecto, a pressão de radiação é um dos principais fatores que afetam a órbita e a atitude de satélites. O efeito da pressão de radiação é mais pronunciado a partir dos 700 km de altura, pois a perturbação aerodinâmica, que predomina nas altitudes mais baixas, é suplantada pela pressão de radiação em altitudes acima desta. As principais fontes de radiação que modificam os elementos da órbita e da atitude dos satélites artificiais são o Sol e a Terra. A Terra combina dois efeitos de radiação: a radiação solar refletida difusamente pela superfície (conhecida como albedo) e radiação ou re-emissão terrestre, que consiste de um fluxo radiativo térmico na região do infra-vermelho do espectro. Esta radiação corresponde à emissão de um corpo negro com uma temperatura de cerca de 300°K.

Os fatores que mais influem na determinação das forças e torques de radiação são:

- A intensidade, o espectro e a direção da radiação incidente ou emitida
- A geometria do satélite e a orientação da fonte radiativa com relação a ele.
- As propriedades óticas das superfícies externas do satélite onde incide a radiação ou da qual a radiação é emitida.

Nota-se que a emissão de energia na forma de ondas eletromagnéticas pelo satélite, pelos radiadores térmicos, pelas antenas de comunicação e pela superfície externa são também considerados fontes de radiação.

A formulação das forças provocadas pela pressão de radiação depende, é claro, da fonte emissiva considerada. Deve-se, por isso, tratar separadamente a radiação solar direta, o albedo terrestre e a emissão terrestre.

4.1 Radiação solar direta

A intensidade da pressão de radiação solar decresce com o inverso do quadrado da distância do satélite ao Sol. Para um satélite em órbita da Terra, pode-se desprezar a variação da distância ao Sol, causada pela órbita do satélite, quando comparada à distância da Terra ao Sol, e, com isso, a pressão de radiação é praticamente constante. Ocorre apenas uma pequena variação (ao redor de 7%) na pressão quando a Terra passa do periélio para o afélio. A influencia da força de radiação é maior na excentricidade orbital mas pode alterar também o semi-eixo maior. Na atitude, seus efeitos são mais sentidos em satélites geoestacionários e em sondas espaciais, em virtude dos torques aerodinâmicos e magnéticos serem praticamente nulos nestas órbitas. O torque é também mais pronunciado em satélites altamente assimétricos ou que possuam apêndices de grande comprimento ou vasta área.

Define-se como intensidade de radiação a energia por unidade de tempo (potência) e por unidade de área que deixa um elemento de área dA numa direção θ (com relação à normal ao elemento) e subentendida num ângulo sólido $d\Omega$, conforme ilustra a Figura 4.1. A intensidade é dada, portanto, por

$$I = \lim_{\substack{dA\to 0\\ d\Omega\to 0\\ dt\to 0}} \frac{dE}{dA\cos\theta\, d\Omega\, dt}, \tag{4.1}$$

onde dE é a energia emitida por dA no intervalo de tempo dt, subentendida no ângulo sólido $d\Omega$, que faz com a normal ao elemento um ângulo θ.

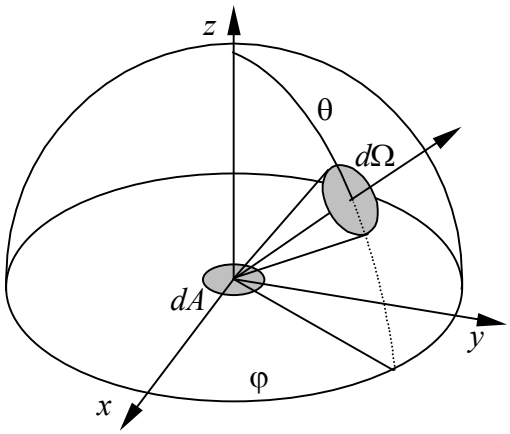

Fig. 4.1 – Energia emitida por um elemento de área dA subentendida num ângulo sólido $d\Omega$.

A integral da intensidade de radiação no hemisfério visível de dA fornece a potência irradiada por unidade de área do elemento, ou seja:

$$S = \int_{Hem} I \cos\theta \, d\Omega \,. \tag{4.2}$$

Nota-se que a intensidade I independe da direção de emissão, ou seja, do ângulo θ, pois o fator $\cos\theta$ corrige a projeção da área dA nesta direção. Além disso, como a radiação é emitida numa faixa do espectro de comprimentos de onda, a intensidade I representa, na verdade, uma média da intensidade monocromática ou espectral I_λ. Efetuando-se a integral nos ângulos φ e θ, e lembrando que $d\Omega = \text{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$, e supondo que a intensidade de radiação é isotrópica, isto é, não depende φ ou θ, tem-se que

$$S = \pi \, I \tag{4.3}$$

Admite-se, agora, que o Sol possa ser considerado como um elemento infinitesimal, irradiando uniformemente em todas as direções. Esta hipótese é bastante razoável, uma vez que o Sol é visto, a partir da Terra, subentendido num ângulo relativamente pequeno (0,53°). A potência emitida pelo Sol por unidade de área a uma distância de R_o = 149 10^6 km (1 UA) é constante com o tempo e vale S_o = 1353 W/m^2. A excentricidade da órbita da Terra faz, no entanto, que a constante solar varie ligeiramente ao longo de um ano, de acordo com a relação

$$S = S_o \left(\frac{R_o}{R} \right)^2 , \tag{4.4}$$

onde R é a distância da Terra ao Sol.

A teoria quântica relaciona a pressão (ou quantidade de movimento) associada à radiação com o conteúdo energético dos fótons. Esta relação tem a forma:

$$p_s = \frac{S}{c} , \tag{4.5}$$

onde p_s é a pressão devido à radiação incidente, e c é a velocidade da luz (cerca de 300000 km/s). Considera-se novamente o sistema de referência fixo num elemento de área externo do satélite, conforme mostra a Figura 4.2.

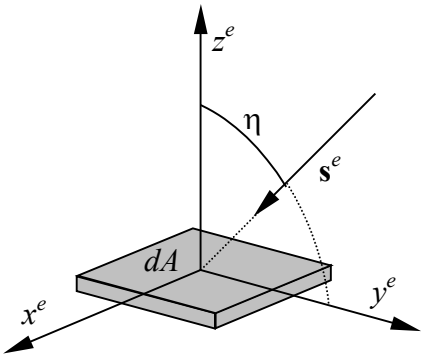

Fig. 4.2 – Sistema de coordenadas fixado a um elemento de área dA.

Neste sistema, o eixo z^e é coincidente com a normal ao elemento, ao passo que a direção de incidência dos raios solares está contida no plano y^e-z^e. A força que os fótons imprimem ao se chocar com o elemento de área dA é dada por:

$$d\mathbf{f}_I = p_s \, dA \cos\eta \, \mathbf{s}^e \,, \tag{4.6}$$

na direção de incidência, $\mathbf{s}^e$. Decompondo esta força nas direções normal e tangencial, tem-se:

$$\begin{aligned} dP_I &= -p_s \, dA \cos^2\eta \\ dT_I &= -p_s \, dA \cos\eta \operatorname{sen}\eta \end{aligned} \tag{4.7}$$

A radiação incidente pode ser refletida, absorvida ou transmitida. Em aplicações espaciais, são raras as superfícies que transmites radiações, e, portanto, serão analisadas apenas as superfícies opacas. A radiação refletida pode ser visualizada, grosso modo, como composta por dois tipos de reflexão: especular e difusa. A reflexão especular é aquela em que a radiação refletida forma com a normal um ângulo igual ao da radiação incidente. A normal à superfície, a direção de incidência e a direção de reflexão estão todas contidas num mesmo plano. A radiação difusa é aquela onde não existe uma direção preferencial para a reflexão da radiação. Embora as superfícies reais tenham comportamento diferente, é válido supor que a reflexão numa superfície possa ser composta como uma parcela especular e outra difusa, nas aplicações espaciais. Chamando então de γ a parcela da radiação incidente que é refletida (em ambas as formas) e de ρ a parcela especular da radiação refletida, tem-se os casos limites para a reflexão:

- Reflexão totalmente especular: $\gamma = 1$ e $\rho = 1$.
- Reflexão perfeitamente difusa: $\gamma = 1$ e $\rho = 0$.
- Superfície totalmente negra: $\gamma = 0$.

A rigor, γ e ρ dependem de uma série de fatores, entre os quais os principais são o ângulo de incidência da radiação, o material e o acabamento da superfície, e o espectro da radiação.

Fazendo agora δ ser a parcela da radiação incidente que é refletida na forma difusa, e ser a parcela refletida especularmente e α a parcela absorvida, e supondo que a superfície seja opaca, isto é, não transmita radiação, então as seguintes relações são válidas:

$$
\begin{aligned}
e &= \gamma\,\rho \\
\delta &= \gamma\,(1-\rho) \\
\alpha &= (1-\gamma) = 1 - e - \delta
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Os casos limites para estas novas variáveis são:

- Reflexão totalmente especular: $e = 1$, $\delta = 0$ e $\alpha = 0$.
- Reflexão perfeitamente difusa: $e = 0$, $\delta = 1$ e $\alpha = 0$.
- Superfície totalmente negra: $e = 0$, $\delta = 0$ e $\alpha = 1$.

A força agindo no elemento devido à reflexão especular, nas direções normal e tangencial ficam então dadas por:

$$
\begin{aligned}
dP_E &= -\gamma\,\rho\,p_s\,dA\cos^2\eta \\
dT_E &= \gamma\,\rho\,p_s\,dA\cos\eta\,\mathrm{sen}\,\eta
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Nota-se que a parcela da radiação incidente que é refletida especularmente é dada por $\gamma\,\rho$ e que a componente tangencial possui sentido contrário à força tangencial causada pela radiação incidente.

A intensidade de radiação na forma difusa que deixa o elemento vale:

$$
I = \gamma\,(1-\rho)\,\frac{S}{\pi}\cos\theta \tag{4.10}
$$

A força agindo no elemento devido à radiação refletida difusamente numa direção θ, conforme é apresentado na Figura 4.3, pode ser decomposta nas direções do sistema fixo ao elemento, x^e, y^e e z^e, respectivamente:

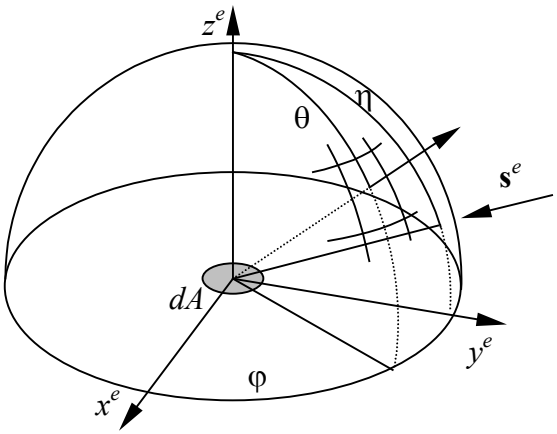

Fig. 4.3 – Radiação refletida pelo elemento dA na direção dada por θ e φ.

$$
dT_D = -\gamma\,(1-\rho)\,\frac{p_s\,dA}{\pi}\cos\eta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,d\theta\,d\phi \tag{4.11}
$$

$$
dL_D = -\gamma\,(1-\rho)\,\frac{p_s\,dA}{\pi}\cos\eta\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\theta\,d\phi \tag{4.12}
$$

$$
dP_D = -\gamma\,(1-\rho)\,\frac{p_s\,dA}{\pi}\cos\eta\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \tag{4.13}
$$

A resultante é obtida integrando-se os três componentes da força em θ e φ. As componentes nas direções x^e e y^e resultam nulas, em virtude da simetria do problema, e a resultante em z^e fica:

$$dP_D = -\frac{2}{3}\gamma\,(1-\rho)\,p_s\cos\eta\,dA\,. \tag{4.14}$$

A parcela restante da radiação incidente, 1–γ, será absorvida pela superfície, que irá se aquecer no processo. Numa situação de equilíbrio, a energia absorvida por um elemento de área será transferida parcialmente para os elementos vizinhos, através de condução e irradiação. Parte da energia é irradiada de volta para o espaço, a uma taxa que depende da temperatura da superfície e da sua emissividade média ε no espectro de potência da energia irradiada. Logo, esta energia tem a forma dada pela equação de Stefan-Boltzmann:

$$S_i = \varepsilon\,\sigma\,T_w^4 \tag{4.15}$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann (σ = 5,667 10^{-8} J/m^{2}s°K^4) e T_w é a temperatura absoluta do elemento. A emissividade, como as demais propriedades da superfície, depende do ângulo de irradiação, da direção e temperatura do elemento e da freqüência da radiação. No entanto pode-se usar valores médios para a emissividade, de forma a garantir uma razoável precisão nos cálculos.

O conhecimento da temperatura T_w depende de um prévio estudo térmico realizado no satélite. Este estudo é normalmente complexo pois, além de ser influenciado pelas características superficiais, materiais, estruturais e geométricas do satélite, ainda varia com o tempo, já que um satélite típico normalmente passa por períodos de iluminação e sombra com relação ao Sol. A dissipação elétrica por efeito Joule nos equipamentos de bordo também deve ser considerada nesse estudo. Durante o projeto térmico de um satélite, procura-se manter a temperatura dos equipamentos próximos das temperaturas comumente encontradas na superfície da Terra, uma vez que os componentes eletrônicos de bordo podem falhar quando submetidos a extremos de temperatura.

Uma maneira de se analisar o efeito da temperatura superficial na força de pressão de radiação é com o coeficiente ν, definido como a relação entre a energia emitida por um elemento de superfície e a parcela absorvida da energia incidente:

$$\nu = \frac{\varepsilon}{1-\gamma}\,\sigma\,\frac{T_w^4}{S\cos\eta} \tag{4.16}$$

Nas superfícies isoladas termicamente, isto é, que não trocam calor com os elementos vizinhos, a energia absorvida é totalmente irradiada e portanto ν = 1. Esta situação não é muito realista, uma vez que fica implícito que superfícies na sombra têm temperatura absoluta nula. Superfícies negras e brancas, neste caso, terão o mesmo coeficiente de radiação, pois a energia absorvida pela superfície negra é irradiada difusamente, da mesma forma que a radiação refletida pela superfície branca. Considerando um valor de 1353 W/m^2 para a potência solar nas proximidades da Terra, e considerando uma superfície negra (γ = 0), a máxima temperatura que uma superfície atingiria seria de cerca de 120°C, aproximadamente. Na prática consegue-se pouco mais de 90°C.

Se a temperatura externa variar ao longo da estrutura do satélite, então se pode obter o coeficiente ν para cada uma das superfícies. Uma aproximação válida consiste em admitir que

nas superfícies condutoras a temperatura varia pouco, de forma que o coeficiente passa a depender quase que exclusivamente do ângulo de incidência η. Nesta situação pode-se fazer uma aproximação e supor que toda a energia incidente é distribuída e irradiada uniformemente pelo satélite.

Seja então A_p a área do contorno do satélite projetada na direção de incidência da radiação e seja A_t a área externa total do satélite. Igualando-se as energias, tem-se que

$$T_w = \left[\frac{(1-\gamma)\, S\, A_p}{\varepsilon\, \sigma\, A_t} \right]^{1/4} . \tag{4.17}$$

Uma esfera sujeita a radiação solar direta teria, nestas circunstâncias, uma temperatura de cerca de 5°C. Uma placa plana voltada para o Sol ficaria com uma temperatura de 57°C.

Substituindo esta última na relação anterior, resulta para ν:

$$\nu = \frac{A_p}{A_t} \frac{1}{\cos\eta} \tag{4.18}$$

É claro que esta aproximação só é válida se a emissividade ε e a refletividade γ forem constantes em toda a superfície externa. Além disso, pode-se concluir que sendo a temperatura constante, a força ou o torque resultante da irradiação anula-se quando integrado sobre a superfície externa. A força elementar devido à emissão de radiação será portanto dada por:

$$dP_R = -\frac{2}{3}\, \nu\, (1-\gamma)\, p_s \cos\eta\, dA , \tag{4.19}$$

ou então

$$dP_R = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon\, \sigma}{c} T_w^4\, dA \tag{4.20}$$

A resultante da força de radiação nas direções normal e tangencial se reduz a

$$dP_N = -p_s \cos\eta \left\{ (1+\gamma\, \rho) \cos\eta + \frac{2}{3} \left[\gamma\, (1-\rho) + \nu\, (1-\gamma) \right] \right\} dA . \tag{4.21}$$

$$dP_T = -p_s \cos\eta\, (1-\gamma\, \rho)\, \mathrm{sen}\, \eta\, dA . \tag{4.22}$$

Pode-se também decompor a força de radiação nas direções conhecidas, que são a normal à superfície, $\mathbf{n}^s$ e a direção de incidência, $\mathbf{s}^s$, ambas referidas ao sistema geométrico do satélite. Disto resulta

$$d\mathbf{f}_R = dF_n\, \mathbf{n}^s + dF_s\, \mathbf{s}^s , \tag{4.23}$$

onde as componentes das forças nas direções normal e incidente valem, respectivamente

$$dF_n = -p_s \cos\eta \left\{ 2\, \gamma\, \rho \cos\eta + \frac{2}{3} \left[\gamma\, (1-\rho) + \nu\, (1-\gamma) \right] \right\} dA , \tag{4.24}$$

$$dF_s = p_s \cos\eta\,(1-\gamma\,\rho)\,dA\,. \tag{4.25}$$

Deve-se agora integrar a força de radiação elementar em toda a superfície externa do satélite iluminada pela radiação solar direta, ou seja, o limite de integração deve ser tal que a condição

$$\cos\eta = -\mathbf{n}^s \cdot \mathbf{s}^s \geq 0 \tag{4.26}$$

seja obedecida. Nas superfícies não iluminadas diretamente, ou na sombra, a resultante elementar é dada por

$$d\mathbf{f}_R = -\frac{2}{3}\,\varepsilon\,\frac{\sigma}{c}\,T_w^4\,dA\,\mathbf{n}^s\,, \tag{4.27}$$

se $\cos\eta < 0$, ou ainda $d\mathbf{f}_R = 0$ se $\nu = 1$.

A resultante da força deve ser integrada sobre toda a superfície externa do satélite exposta à radiação solar direta ou que emita radiação infravermelha:

$$\mathbf{f}_R = \int_A d\mathbf{f}_R \tag{4.28}$$

Em resumo, caso a distribuição de temperatura T_w na superfície seja conhecida, a expressão final para a força fica

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_R = p_s \int_I \left\{\cos\eta\,(1-\gamma\,\rho)\,\mathbf{s}^s - \cos\eta\left[2\,\gamma\,\rho\cos\eta + \frac{2}{3}(\gamma-\gamma\rho)\right]\mathbf{n}^s\right\} dA - \\ -\frac{2}{3}\frac{\sigma}{c}\int_A \varepsilon\,T_w^4\,\mathbf{n}^s\,dA\end{aligned}\,, \tag{4.29}$$

onde I indica a integração realizada apenas na região iluminada ($\cos\eta > 0$), e A indica a integração realizada em toda a superfície externa.

Se a temperatura for desconhecida pode-se assumir um valor para ν situado entre 0 e 1, onde 1 significa que os elementos são perfeitamente adiabáticos, e 0 significa que não há emissão de energia por parte do corpo. Embora isso pareça irreal, é uma aproximação válida, se for admitida a hipótese de que a energia irradiada na região do infravermelho é muito menor do que aquela refletida pela superfície. Em ambos os casos a integração é realizada apenas na área iluminada, já que numa extremidade não há emissão e na outra não há condução de energia para as áreas sombreadas. Isto significa que a temperatura da superfície encoberta será sempre nula. Contudo, o limite de integração deve obrigatoriamente mudar caso ν tenha um valor intermediário. É provável também que, nesta situação, o próprio valor de ν dependa do fato da área ser iluminada ou não, já que a temperatura e a quantidade de energia absorvida variam entre os elementos. A expressão para a força fica então:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_R = p_s \int_I \left\{\cos\eta\,(1-\gamma\,\rho)\,\mathbf{s}^s - \cos\eta\left[2\,\gamma\,\rho\cos\eta + \frac{2}{3}(\gamma-\gamma\rho)\right]\mathbf{n}^s\right\} dA - \\ -p_s\,\frac{2}{3}\int_A (1-\gamma)\,\nu\cos\eta\,\mathbf{n}^s\,dA\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pode-se ainda assumir que a temperatura seja constante em toda a superfície, ou seja, que a energia absorvida seja distribuída uniformemente por todo o corpo. Neste caso

$$\mathbf{f}_R = p_s \int_I \left\{ \cos\eta\,(1-\gamma\,\rho)\,\mathbf{s}^s - \cos\eta \left[2\,\gamma\,\rho\cos\eta + \frac{2}{3}(\gamma-\gamma\rho) \right] \mathbf{n}^s \right\} dA - \\ -p_s\,\frac{2}{3}\frac{A_p}{A_t}\int_A (1-\gamma)\,\mathbf{n}^s\,dA \tag{4.31}$$

O torque atuante num elemento com relação ao centro de massa do satélite é dado por

$$d\mathbf{g}_R = (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_{cg}) \times d\mathbf{f}_R \tag{4.32}$$

onde $\mathbf{r}_e$ é a posição do centro do elemento de área dA e $\mathbf{r}_{cg}$ é a posição do centro de massa relativos ao sistema geométrico do satélite. De forma similar, define-se o coeficiente de pressão de radiação como sendo

$$C_R = \frac{\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{s}^s}{p_s\,A_r} \tag{4.33}$$

onde A_r é uma área de referência do satélite. Em geral A_r é a área do perfil do satélite projetada na direção de iluminação. Pode ser igualmente a área de uma seção transversal qualquer.

Substituindo as expressões da força no coeficiente de pressão de radiação, tem-se que

$$C_R = \frac{1}{A_r}\int_A \left\{ 2\,\gamma\,\rho\cos^3\eta + \frac{2}{3}\left[\gamma\,(1-\rho) + \nu\,(1-\gamma)\right]\cos^2\eta + (1-\gamma\,\rho)\cos\eta \right\} dA\ , \tag{4.34}$$

O coeficiente de pressão de radiação pode ser integrado em corpos simples, como esfera e cilindro. Numa esfera, considerando que o elemento de área é dado por $dA = R^2\,\mathrm{sen}\eta\,d\eta\,d\varphi$, e adotando-se para a área de referência o valor $A_r = \pi\,R^2$ tem-se que

$$C_R = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \left\{ 2\,\gamma\,\rho\cos^3\eta + \frac{2}{3}\left[\gamma\,(1-\rho) + \nu\,(1-\gamma)\right]\cos^2\eta + (1-\gamma\,\rho)\cos\eta \right\} \\ \mathrm{sen}\,\eta\,d\phi\,d\eta \tag{4.35}$$

Nota-se que a condição de iluminação ($\cos\eta \geq 0$) impõe que o limite de integração em η seja entre 0 e $\pi/2$. A integral em φ é imediata, e portanto

$$C_R = 2\int_0^{\pi/2} \left\{ 2\,\gamma\,\rho\cos^3\eta + \frac{2}{3}\left[\gamma\,(1-\rho) + \nu\,(1-\gamma)\right]\cos^2\eta + (1-\gamma\,\rho)\cos\eta \right\} \mathrm{sen}\,\eta\,d\eta \tag{4.36}$$

ou seja:

$$C_R = 1 + \frac{4}{9}\,\left[\gamma\,(1-\rho) + \nu\,(1-\gamma)\right]\ . \tag{4.37}$$

Se a superfície for isolada termicamente, então $\nu = 1$ e portanto

$$C_R = \frac{13 - 4\gamma\,\rho}{9}\,. \tag{4.38}$$

Numa esfera negra ou completamente difusa o coeficiente de radiação é igual a 13/9. Numa esfera totalmente espelhada, o coeficiente é igual a 1. Se a radiação absorvida for desprezada ($\nu = 0$), então o coeficiente resulta:

$$C_R = 1 + \frac{4}{9}\gamma\,(1-\rho)\,. \tag{4.39}$$

Neste caso, uma esfera negra possui coeficiente igual a 1, enquanto que um satélite totalmente difuso (branco) possui coeficiente igual a 13/9, e num satélite totalmente espelhado é também igual a 1. Finalmente, considerando o caso de uma esfera totalmente condutora de calor, $\nu = 1/(4\cos\eta)$, o coeficiente de radiação resulta:

$$\begin{aligned} C_R = {} & 2\int_0^{\pi/2}\left\{2\,\gamma\,\rho\cos^3\eta + \frac{2}{3}\gamma\,(1-\rho)\cos^2\eta + (1-\gamma\,\rho)\cos\eta\right\}\operatorname{sen}\eta\,d\eta + \\ & + 2\int_0^{\pi}\left\{\frac{2}{3}\nu\,(1-\gamma)\cos^2\eta\right\}\operatorname{sen}\eta\,d\eta \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$C_R = \frac{9 + 4\gamma\,(1-\rho)}{9}\,. \tag{4.41}$$

Uma esfera negra agora tem um coeficiente de radiação de 1; a esfera difusa resulta 13/9, e a esfera espelhada resulta igual a 1. O coeficiente de radiação numa esfera fica portanto sempre confinado entre 1 e 1.44.

A Tabela 4.1 apresenta os valores para o coeficiente de radiação numa esfera, nos casos de reflexão difusa, especular e corpo negro, em ambos os casos, isto é, com a integração realizada apenas na face iluminada e integração total.

Tabela 4.1 – Coeficientes de pressão de radiação numa esfera

ν	C_R (0 a $\pi/2$)		
	Especular	Difuso	Corpo negro
0	1	13/9	1
1	1	13/9	13/9
$1/(4\cos\eta)$	1	13/9	1

4.2 Força numa esfera

A força na esfera é dada simplesmente por

$$\mathbf{f}_R = C_R\;p_s\;A_r\;\mathbf{s}^s \tag{4.42}$$

Pode-se também integrar a força de pressão de radiação numa esfera por meio da definição:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_R = {} & p_s\int_I\left\{\cos\eta\,(1-e)\,\mathbf{s}^s - \cos\eta\left[2\,e\cos\eta + \frac{2}{3}\delta\right]\mathbf{n}^s\right\}dA - \\ & -\frac{2}{3}\frac{\sigma}{c}\int_A \varepsilon\,T_w^4\,\mathbf{n}^s\,dA \end{aligned}\,, \tag{4.43}$$

e considerando que $dA = R^2 \operatorname{sen}\eta \, d\eta \, d\varphi$, a força fica

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_R = p_s \, R^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left\{ (1-e)\cos\eta \, \mathbf{s}^s - \cos\eta \left[2\, e \cos\eta + \frac{2}{3}\delta \right] \mathbf{n}^s \right\} \operatorname{sen}\eta \, d\eta \, d\varphi - \\ - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{c} R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \, T_w^4 \, \mathbf{n}^s \operatorname{sen}\eta \, d\varphi \, d\eta\end{aligned} \tag{4.44}$$

O módulo da força na direção de incidência da luz é dada por $f_{Rs} = \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{s}^s$. Lembrando que $\mathbf{s}^s \cdot \mathbf{n}^s = -\cos\eta$, o módulo resulta

$$\begin{aligned}f_{Rs} = p_s \, R^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left\{ (1-e)\cos\eta + \cos^2\eta \left[2\, e \cos\eta + \frac{2}{3}\delta \right] \right\} \operatorname{sen}\eta \, d\varphi \, d\eta \; + \\ + \frac{2}{3}\frac{\sigma}{c} R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \, T_w^4 \cos\eta \operatorname{sen}\eta \, d\varphi \, d\eta\end{aligned} \tag{4.45}$$

Admitindo que a temperatura e a emissividade sejam constantes na superfície da esfera, efetuando a integral no ângulo φ, tem-se

$$\begin{aligned}f_{Rs} = 2\pi \, p_s \, R^2 \int_0^{\pi/2} \left[(1-e)\cos\eta + \frac{2}{3}\delta \cos^2\eta + 2\, e \cos^3\eta \right] \operatorname{sen}\eta \, d\eta + \\ + \frac{2}{3}\frac{\sigma}{c} 2\pi \, R^2 \int_0^{\pi} \varepsilon \, T_w^4 \cos\eta \operatorname{sen}\eta \, d\eta\end{aligned} \tag{4.46}$$

cujas integrais individuais são

$$\int_0^{\pi/2} \cos\eta \operatorname{sen}\eta \, d\eta = \left[-\frac{\cos^2\eta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \left[-\frac{0}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \tag{4.47}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\eta \operatorname{sen}\eta \, d\eta = \left[-\frac{\cos^3\eta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \left[-\frac{0}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} \tag{4.48}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3\eta \operatorname{sen}\eta \, d\eta = \left[-\frac{\cos^3\eta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \left[-\frac{0}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \tag{4.49}$$

$$\int_0^{\pi} \cos\eta \operatorname{sen}\eta \, d\eta = \left[-\frac{\cos^2\eta}{2} \right]_0^{\pi} = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0 \, , \tag{4.50}$$

Substituindo estes resultados na força de radiação na esfera, tem-se

$$f_{Rs} = \pi \, p_s \, R^2 \left(1 + \frac{4}{9}\delta \right) \tag{4.51}$$

4.3 Coeficiente de radiação de um cilindro

Quando integrado num cilindro com ângulo de incidência α e área elementar $dA = R\, L\, d\theta$, tal que $\cos\eta = \cos\alpha \cos\theta$ e $A_r = 2R\, L$, tem-se para o coeficiente de radiação

$$C_R = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{2\,\gamma\,\rho\cos^3\alpha\cos^3\theta + \frac{2}{3}\left[\gamma\,(1-\rho)+\nu\,(1-\gamma)\right]\cos^2\alpha\cos^2\theta + \right. \\ \left. +(1-\gamma\,\rho)\cos\alpha\cos\theta\right\}d\theta \quad , \tag{4.52}$$

Nota-se que, neste caso, os limites de integração no ângulo θ são −π/2 e π/2. O coeficiente de radiação resulta então:

$$C_R = \frac{4}{3}\gamma\,\rho\cos^3\alpha + \frac{\pi}{6}\left[\gamma\,(1-\rho)+\nu\,(1-\gamma)\right]\cos^2\alpha + (1-\gamma\,\rho)\cos\alpha \tag{4.53}$$

Se as superfícies forem isoladas, isto é, se ν = 1, então o coeficiente fica

$$C_R = \frac{4}{3}\gamma\,\rho\cos^3\alpha + \left[1+\frac{\pi}{6}\cos\alpha\right](1-\gamma\,\rho)\cos\alpha \tag{4.54}$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 4.4 em função do ângulo de ataque α.

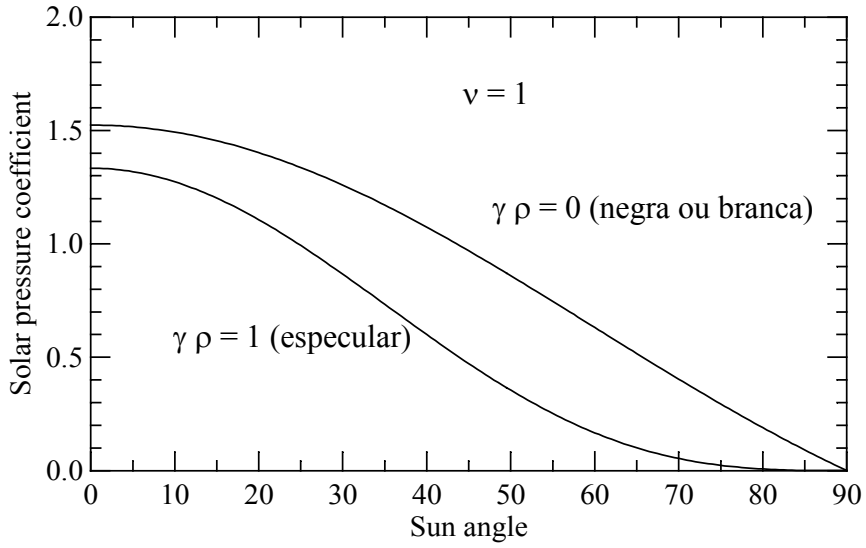

Fig. 4.4 – Coeficiente de pressão de radiação num cilindro com superfície não condutora.

Se o coeficiente ν for nulo (despreza-se a radiação re-emitida), o coeficiente fica

$$C_R = \frac{4}{3}\gamma\,\rho\cos^3\alpha + \frac{\pi}{6}\gamma\,(1-\rho)\cos^2\alpha + (1-\gamma\,\rho)\cos\alpha\,, \tag{4.55}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 4.5

Para o caso da superfície altamente condutora, isto é, tal que a superfície irradia uniformemente a radiação absorvida, então

$$\nu = \frac{A_p}{A_t}\frac{1}{\cos\eta} = \frac{2R\,L\cos\alpha}{2\pi\,R\,L}\frac{1}{\cos\eta} = \frac{\cos\alpha}{\pi\cos\eta} = \frac{\cos\alpha}{\pi\cos\alpha\cos\theta} = \frac{1}{\pi\cos\theta} \tag{4.56}$$

e assim

$$C_R = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{2\,\gamma\,\rho\cos^3\alpha\cos^3\theta + \frac{2}{3}\gamma\,(1-\rho)\cos^2\alpha\cos^2\theta + \right.$$
$$\left. +(1-\gamma\,\rho)\cos\alpha\cos\theta\right\}d\theta + \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\nu\,(1-\gamma)\right]\cos^2\alpha\cos^2\theta\,d\theta \tag{4.57}$$

que resulta

$$C_R = \frac{4}{3}\gamma\,\rho\cos^3\alpha + \frac{\pi}{6}\gamma\,(1-\rho)\cos^2\alpha + (1-\gamma\,\rho)\cos\alpha\,. \tag{4.58}$$

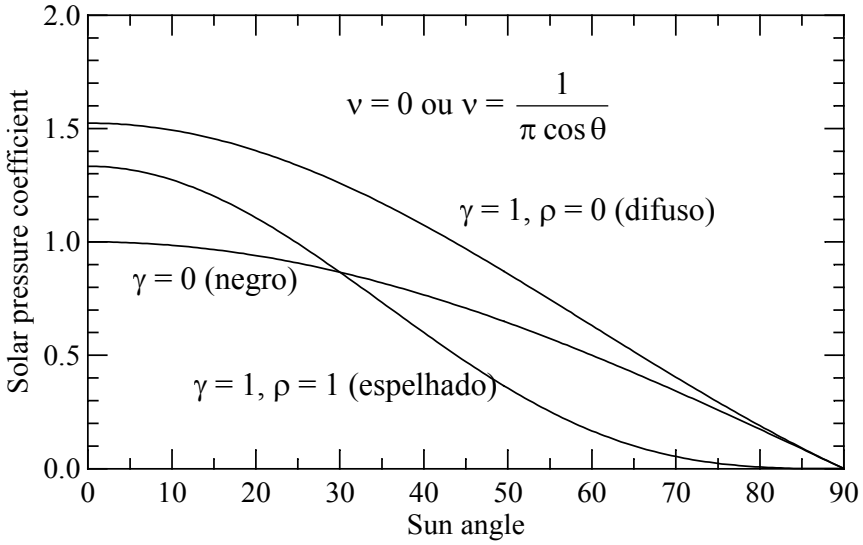

Fig. 4.5 – Coeficiente de pressão de radiação num cilindro sem reemissão de radiação ou com superfície condutora.

Este resultado é idêntico ao de ν nulo, e portanto cujo gráfico é o mesmo da Figura 4.5. Se a reflexão for totalmente especular ($\gamma = 1$ e $\rho = 1$) o coeficiente resulta

$$C_R = \frac{4}{3}\cos^3\alpha\,, \tag{4.59}$$

enquanto que a reflexão perfeitamente difusa ($\gamma = 1$ e $\rho = 0$) resulta

$$C_R = \frac{\pi}{6}\cos^2\alpha + \cos\alpha\,, \tag{4.60}$$

e para superfície totalmente negra ($\gamma = 0$) tem-se

$$C_R = \cos\alpha \tag{4.61}$$

A temperatura da superfície pode ser calculada para este caso, resultando

$$T_w = \left[\frac{(1-\gamma)\,S\cos\alpha}{2\,\varepsilon\,\sigma}\right]^{1/4} = \left[\frac{(1-\gamma)\,p_s\cos\alpha}{2\,\varepsilon\,\Sigma}\right]^{1/4}, \tag{4.62}$$

onde $\Sigma = \sigma / c$, que resulta em cerca de 57°C, considerando α e γ nulos, e ε unitário.

4.4 Força e torque num cilindro

Considerando que a direção de incidência faz com o plano transversal do cilindro um ângulo α, na qual a normal a um elemento de área $dA = RL\ d\theta$ é dada por $\mathbf{n}^s = \cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s$, o versor de incidência vale $\mathbf{s}^s = -\cos\alpha\,\mathbf{i}^s - \sin\alpha\,\mathbf{k}^s$, e o ângulo entre a normal e o versor é calculado por $\mathbf{s}^s \cdot \mathbf{n}^s = -\cos\eta = -\cos\alpha\cos\theta$, a força fica:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_R = -p_s\ RL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big\{ &\cos\alpha\cos\theta\,(1-e)\,(\cos\alpha\,\mathbf{i}^s + \sin\alpha\,\mathbf{k}^s) + \\ &+\left(\frac{2}{3}\delta\cos\alpha\cos\theta + 2\,e\cos^2\alpha\cos^2\theta\right)(\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s)\Big\}\,d\theta - \\ &-\frac{2}{3}\frac{\sigma}{c}RL\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon\,T_w^4\,(\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s)\,d\theta\end{aligned} \tag{4.63}$$

A componente da força devido à emissão de radiação será nula em virtude da simetria, supondo que a temperatura e a emissividade sejam constantes na superfície. A integral da força na direção *y* será igualmente nula pela simetria, e as demais integrais irão resultar:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_R = &-p_s\ RL\,(1-e)\cos^2\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\ \ d\theta\,\mathbf{i}^s + \\ &-p_s\ RL\,\frac{2}{3}\delta\cos\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\,\mathbf{i}^s + \\ &-p_s\ RL\,2\,e\cos^2\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta\,\mathbf{i}^s + \\ &-p_s\ RL\cos\alpha\sin\alpha\,(1-e)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{k}^s\end{aligned} \tag{4.64}$$

As integrais são calculadas por

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\ \ d\theta = \left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \tag{4.65}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \tag{4.66}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \left[\frac{3\operatorname{sen}\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen}3\theta}{12}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right] = \frac{4}{3}, \tag{4.67}$$

e substituindo estes resultados na força, tem-se que

$$\mathbf{f}_R = -p_s\ RL\left\{\left[\frac{\pi}{3}\delta\cos\alpha + 2\left(1 + \frac{1}{3}e\right)\cos^2\alpha\right]\mathbf{i}^s + 2\cos\alpha\sin\alpha\,(1-e)\,\mathbf{k}^s\right\} \tag{4.68}$$

O coeficiente de radiação de um cilindro pode igualmente ser calculado a partir da expressão da força e fica

$$C_R = \frac{\mathbf{f}_R \cdot s^s}{p_s 2RL} = \mathbf{f}_R \cdot (-\cos\alpha\, \mathbf{i}^s - \sin\alpha\, \mathbf{k}^s) = \\ = \left\{ \left[\frac{\pi}{6} \delta \cos^2\alpha + \left(1 + \frac{1}{3} e\right) \cos^3\alpha \right] + \cos\alpha \sin^2\alpha\, (1-e) \right\} \tag{4.69}$$

que resulta

$$C_R = \frac{\pi}{6} \delta \cos^2\alpha + \frac{4}{3} e \cos^3\alpha + (1-e)\cos\alpha\,, \tag{4.70}$$

expressão já obtida anteriormente. O torque de radiação num cilindro é também calculado a partir da sua definição:

$$\mathbf{g}_R = \int_A \mathbf{r}^s \times d\mathbf{f}_R\,, \tag{4.71}$$

com $\mathbf{r}^s$ dado por $\mathbf{r}^s = R\,\mathbf{n}^s = R\,(\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s)$. Substituindo na expressão que fornece a força elementar, tem-se

$$\mathbf{g}_R = -p_s\, RL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\,(\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s) \times \left\{ \cos\alpha\cos\theta\,(1-e)\,(\cos\alpha\,\mathbf{i}^s + \sin\alpha\,\mathbf{k}^s) + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \delta \cos\alpha\cos\theta + 2\,e\cos^2\alpha\cos^2\theta \right) (\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s) \right\} d\theta - \\ - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{c} RL \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\, T_w^4\, R\,(\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s) \times (\cos\theta\,\mathbf{i}^s + \sin\theta\,\mathbf{j}^s)\, d\theta \tag{4.72}$$

que irá resultar

$$\mathbf{g}_R = -p_s\, R^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \left\{ -\cos\alpha\cos\theta\,(1-e)\sin\alpha\,\mathbf{j}^s + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \delta \cos\alpha\cos\theta + 2\,e\cos^2\alpha\cos^2\theta \right) \sin\theta\,\mathbf{k}^s) \right\} d\theta - \\ - p_s\, R^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \left\{ \cos\alpha\cos\theta\,(1-e)\,(-\cos\alpha\,\mathbf{k}^s + \sin\alpha\,\mathbf{i}^s) + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \delta \cos\alpha\cos\theta + 2\,e\cos^2\alpha\cos^2\theta \right) (-\cos\theta\,\mathbf{k}^s + \sin\theta\,\mathbf{i}^s) \right\} d\theta - \\ - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{c} R^2 L \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\, T_w^4 \cos\theta\sin\theta\,\mathbf{k}^s\, d\theta - \\ - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{c} R^2 L \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\, T_w^4 \sin\theta\,(-\cos\theta\,\mathbf{k}^s)\, d\theta \tag{4.73}$$

As componentes do torque nas direções dos eixos x e z devem ser nulas, pois há simetria na geometria, supondo a temperatura e emissividade superficial constantes. Resta apenas o torque na direção do eixo y, que resulta:

$$\mathbf{g}_R = p_s\, R^2 L\,(1-e)\cos\alpha\sin\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta\, \mathbf{j}^s\,, \tag{4.74}$$

cuja integral já foi avaliada (igual a $\pi/2$) e o torque resulta

$$\mathbf{g}_R = p_s \, R^2 L \frac{\pi}{2}(1-e)\cos\alpha \sin\alpha \, \mathbf{j}^s \tag{4.75}$$

A Figura 4.6 apresenta os coeficientes de força de radiação em um cilindro, em função do ângulo de incidência α. Na curva em negro, é mostrado o coeficiente de pressão de radiação, isto é, a força na direção de incidência. Em vermelho e verde são representados os coeficientes da força, nos eixos x e z, respectivamente. A curva azul mostra o coeficiente de torque no eixo y. Os parâmetros utilizados para gerar a figura foram: $e = 0.2$ e $\delta = 0.8$.

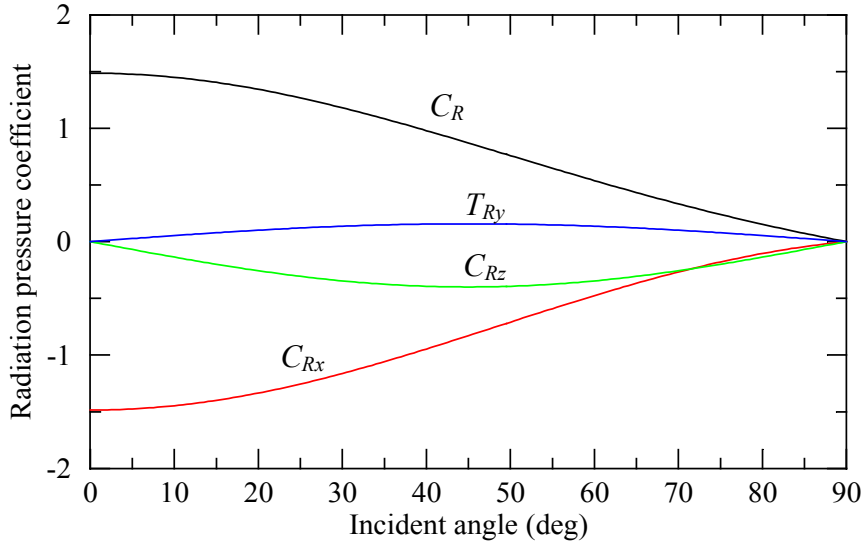

Fig. 4.6 – Coeficientes de força e torque de pressão de radiação num cilindro.

No caso de um cilindro transverso, pode-se utilizar as equações mostradas na Seção 3.6.9, que relacionam as direções dos versores fixados ao cilindro com o sistema de coordenadas do satélite.

4.5 Força e torque num cone truncado

Uma outra geometria de bastante interesse na área espacial é o cone, utilizado principalmente no último estágio de veículos propulsores. Algumas missões espaciais consistiram unicamente de satelizar o último estágio do foguete, como o Explorer I, e, portanto, sua geometria era composta por um cone geralmente associado também a um cilindro. Nesta seção será apresentada a formulação para a integral da força e torque de pressão de radiação em um cone truncado, que é a generalização do cone. Considera-se então o cone truncado e um sistema de coordenadas fixado ao centro da base, como indicado na Figura 4.7. A geometria do cone é perfeitamente definida pelo raio da base, R_b, raio do tôpo, R_t, e altura L. A direção de incidência da radiação no cone, $\mathbf{s}^s$, forma com o eixo de simetria do cone, x^s, um ângulo α. Admite-se, sem perda de generalidade, que o eixo z^s esteja contido no plano formado por x^s e $\mathbf{s}^s$, e o eixo y^s completa o triedro. Neste sistema a direção de incidência é dada por:

$$\mathbf{s}^s = -\left(\cos\alpha \, \mathbf{i}^s + \operatorname{sen}\alpha \, \mathbf{k}^s\right) \tag{4.76}$$

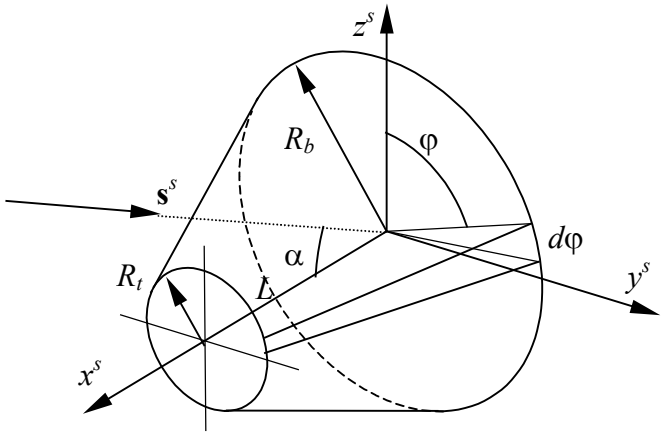

Fig. 4.7 – Sistema de coordenadas fixado a um cone truncado.

Adota-se um elemento de área do cone formado por um pequeno segmento angular $d\varphi$, ao longo de toda geratriz do cone truncado. A área deste elemento trapezoidal será dada por:

$$dA = \frac{1}{2} d\ (R_b + R_t)\ d\varphi \tag{4.77}$$

onde d é o comprimento da geratriz, obtido de:

$$d = \sqrt{L^2 + (R_b - R_t)^2} \tag{4.78}$$

Assume-se que a força no elemento de área esteja concentrada no baricentro do trapézio, cujas coordenadas, no sistema fixado ao cone, são dadas por:

$$\mathbf{q} = q_1\ \mathbf{i}^s + q_2\ \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathbf{j}^s + q_2\ \cos\varphi\ \mathbf{k}^s \tag{4.79}$$

no qual

$$q_1 = \frac{1}{3} L \frac{R_b + 2R_t}{R_b + R_t} \tag{4.80}$$

e

$$q_2 = \frac{2}{3} \frac{R_b^2 + R_b R_t + R_t^2}{R_b + R_t} \tag{4.81}$$

A normal ao elemento trapezoidal pode ser também obtida por geometria, resultando

$$\mathbf{n}^s = \left(\mathrm{sen}\,\beta\ \mathbf{i}^s + \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\varphi\ \mathbf{j}^s + \cos\beta\cos\varphi\ \mathbf{k}^s\right) \tag{4.82}$$

onde β é o semi-ângulo da geratriz do cone, e pode ser facilmente calculado por

$$\cos\beta = \frac{L}{d} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + (R_b - R_t)^2}} \tag{4.83}$$

e

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{R_b - R_t}{d} = \frac{R_b - R_t}{\sqrt{L^2 + (R_b - R_t)^2}} \tag{4.84}$$

O ângulo de incidência η das moléculas em relação à normal à superfície fica

$$\cos\eta = -\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}^s = -\left(\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos\varphi\right) \tag{4.85}$$

Antes de proceder à integração da força de radiação elementar em toda a superfície externa do cone, deve-se estabelecer quais os elementos de área que efetivamente recebem a incidência de radiação, ou seja, que obedecem à condição:

$$\cos\eta = -\mathbf{n}^s \cdot \mathbf{s}^s \geq 0 \tag{4.86}$$

Substituindo-se a expressão para $\cos\eta$ nesta última e resolvendo-se a desiguadade, chega-se a

$$-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \tag{4.87}$$

na qual o valor de φ_0 depende da direção de incidência da radiação no cone, como mostrado na Figura 4.8, e assume os limites:

- **I**. Esta condição ocorre quando $\alpha \leq \beta$. Neste caso todo o cone recebe incidência de radiação e portanto o limite será dado por $\varphi_0 = \pi$

- **II**. Nesta condição, na qual $\beta \leq \alpha \leq \pi - \beta$, apenas parte do cone recebe incidência de radiação. O limite de integração neste caso é dado por

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right) = \arccos\left(-\frac{R_b - R_t}{L}\frac{\mathbf{s}^s \cdot \mathbf{i}^s}{\mathbf{s}^s \cdot \mathbf{k}^s}\right) \tag{4.88}$$

- **III**. Nesta região, onde $\alpha \geq \pi - \beta$, todo o cone é encoberto pela sua própria sombra, e portanto $\varphi_0 = 0$

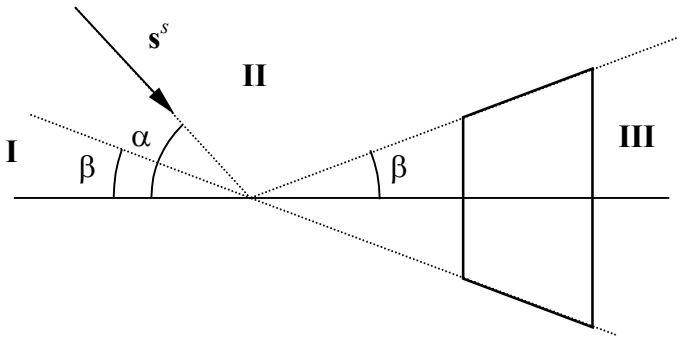

Fig. 4.8 – Limites de integração da radiação num cone truncado.

Contudo, as condições de incidência da radiação não levam em conta a forma com que a energia é redistribuída na superfície, ou como esta energia é absorvida ou re-emitida. Para viabilizar uma solução para a integração das forças e torques, admite-se então que a temperatura da superfície seja uniforme e constante, igual a T_w. Neste caso a parcela da força devido à irradiação do cone será obtida pela relação de Stefam-Boltzman, a ser integrada em toda a superfície do cone, isto é, entre $-\pi$ e π. A força elementar resulta então na expressão

$$d\mathbf{F}_{cone} = -p_s \cos\eta \left(2\, e \cos\eta + \frac{2}{3}\delta \right) \mathbf{n}^s \; dA + p_s \cos\eta \, (1-e) \, \mathbf{s}^s \; dA$$
$$- \frac{2}{3} \varepsilon \, \sigma \frac{T_w^4}{c} \; \mathbf{n}^s \; dA \tag{4.89}$$

Substituindo-se as Relações 4.76, 4.82 e 4.85 nesta última, separando as componentes nas direções dos eixos cartesianos fixados ao cone, e passando-se à integral, tem-se que

$$F_{cone_x} = -p_s \; 2\, e\, h \operatorname{sen}\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos\varphi)^2 \; d\varphi \; -$$
$$-p_s \frac{2}{3} \delta \, h \operatorname{sen}\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos\varphi) \; d\varphi \; -$$
$$-p_s \, (1-e) \, h \cos\alpha \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos\varphi) \; d\varphi -$$
$$-\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \, \sigma}{c} \, h \operatorname{sen}\beta \int_{-\pi}^{\pi} T_w^4 \; d\varphi \tag{4.90}$$

e

$$F_{cone_z} = -p_s \; 2\, e \cos\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos\varphi)^2 \; \cos\varphi \; dA \; -$$
$$-p_s \frac{2}{3} \delta \cos\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos\varphi) \cos\varphi \; dA \; -$$
$$-p_s \, (1-e) \operatorname{sen}\alpha \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos\varphi) \; dA -$$
$$-\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \, \sigma}{c} \cos\beta \int_{-\pi}^{\pi} T_w^4 \cos\varphi \; dA + \tag{4.91}$$

onde

$$h = \frac{1}{2} d \; (R_b + R_t) \tag{4.92}$$

Nota-se que as extremidades do cone, base e tôpo, não são considerados no cálculo. Uma vez que estes elementos são planos, basta acrescentar o cálculo destes elementos ao final da integração. A força na direção do eixo y^s não precisa ser integrada, pois irá resultar nula, em virtude da simetria do cone. Na expressão da força e do torque surgem integrais em potência de co-seno, cujos resultados já são conhecidos:

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos x \; dx = 2 \operatorname{sen}\varphi_0 \tag{4.93}$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^2 x \; dx = \varphi_0 + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi_0}{2} \tag{4.94}$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^3 x \; dx = \frac{3 \operatorname{sen}\varphi_0}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\varphi_0}{6} \tag{4.95}$$

Tem-se com isso os resultados

$$
\begin{aligned}
F_{cone_x} = & -2 p_s \; h \; \varphi_0 \; \text{sen}\,\beta \\
& \left\{ 2\, e \cos^2\alpha \,\text{sen}^2\beta + \frac{2}{3}\delta \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta + (1-e)\cos^2\alpha + e \sin^2\alpha \cos^2\beta \right\} - \\
& -2 p_s \; h \cos\beta \sin\alpha \,\text{sen}\,\varphi_0 \left\{ 4\, e \cos\alpha \,\text{sen}^2\beta + \frac{2}{3}\delta \,\text{sen}\,\beta + (1-e)\cos\alpha \right\} + \\
& -p_s \; h \; e \,\text{sen}\,\beta \sin^2\alpha \cos^2\beta \,\text{sen}\,2\varphi_0 - \frac{4\pi}{3}\frac{\varepsilon\,\sigma}{c} T_w^4 \; h \,\text{sen}\,\beta
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

e

$$
\begin{aligned}
F_{cone_z} = & -2 p_s \; h \; \varphi_0 \sin\alpha \\
& \left\{ 2\, e \cos\alpha \cos^2\beta \,\text{sen}\,\beta + \frac{1}{3}\delta \cos^2\beta + (1-e)\cos\alpha \,\text{sen}\,\beta \right\} - \\
& -p_s \; h \cos\beta \,\text{sen}\,\varphi_0 \\
& \left\{ 4\, e \cos^2\alpha \,\text{sen}^2\beta + 3\, e \sin^2\alpha \cos^2\beta + \frac{4}{3}\delta \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta + (1-e)\, 2\,\text{sen}^2\alpha \right\} \\
& -p_s \; h \sin\alpha \cos^2\beta \,\text{sen}\,2\varphi_0 \left\{ 2\, e \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta + \frac{1}{3}\delta \right\} \\
& -p_s \; h \; e \sin^2\alpha \cos^3\beta \frac{\text{sen}\,3\varphi_0}{3}
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

o que resulta para a força

$$
\mathbf{F}_{cone} = F_{cone_x}\, \mathbf{i}^s + F_{cone_z}\, \mathbf{k}^s \tag{4.98}
$$

Para o cálculo do torque gerado pela força de pressão de radiação no cone truncado, admite-se que a força elementar seja aplicada ao baricentro do elemento de área trapezoidal, e portanto o torque elementar fica igual a

$$
d\mathbf{T}_{cone} = \mathbf{q} \times d\mathbf{F}_{cone} \tag{4.99}
$$

onde o baricentro **q** é fornecido pelas equações 4.79 a 4.81. Considerando-se então que a força elementar seja fornecida por

$$
d\mathbf{F}_{cone} = dF_{cone_x}\, \mathbf{i}^s + dF_{cone_y}\, \mathbf{j}^s + dF_{cone_z}\, \mathbf{k}^s \tag{4.100}
$$

o torque elementar fica:

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{T}_{cone} = & \; q_2\, (\text{sen}\,\varphi\, dF_{cone_z} - \cos\varphi\, dF_{cone_y})\, \mathbf{i}^s + \\
& + (q_2 \cos\varphi\, dF_{cone_x} - q_1\, dF_{cone_z})\, \mathbf{j}^s + \\
& + (q_1\, dF_{cone_y} - q_2\, \text{sen}\,\varphi\, dF_{cone_x})\, \mathbf{k}^s
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

Devido à simetria do cone, o torque de pressão de radiação terá componente apenas na direção do eixo $\mathbf{j}^s$, e portanto, substituindo as expressões de dF_{cone_x} e dF_{cone_z} no torque, além da Relação 4.85, tem-se que

$$
\begin{aligned}
T_{cone_y} = {} & 2\, p_s\, h\, e \left(q_1 \cos\beta - q_2 \operatorname{sen}\beta\right) \\
& \left(\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\varphi\, d\varphi + 2\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^2\varphi\, d\varphi + \right. \\
& \left. \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\beta \cos\varphi \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^3\varphi\, d\varphi \right) + \\
& -p_s\, h \left[\frac{2}{3}\delta\left(q_1 \cos\beta - q_2 \operatorname{sen}\beta\right) - q_2\,(1-e)\cos\alpha\right] \\
& \left(\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\varphi\, d\varphi + \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) + \\
& -p_s\, q_1\, h\,(1-e) \operatorname{sen}\alpha \left(\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi + \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos\varphi\, d\varphi\right) \\
& + h\,\frac{2}{3}\,\varepsilon\,\sigma\,\frac{T_w^4}{c}\left(q_1 \cos\beta - q_2 \operatorname{sen}\beta\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

que irá resultar, após efetuar todas as integrações, em

$$
\begin{aligned}
T_{cone_y} = {} & -2\, p_s\, h\, e \left(q_2 \operatorname{sen}\beta - q_1 \cos\beta\right) \left\{ 2\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \sin\alpha \cos\beta \left(\varphi_0 + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi_0}{2}\right) + \right. \\
& \left. +2\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}\varphi_0 + \sin^2\alpha \cos^2\beta \left(\frac{3\operatorname{sen}\varphi_0}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\varphi_0}{6}\right)\right\} - \\
& -p_s\, h \left[q_2\,(1-e)\cos\alpha + \frac{2}{3}\delta\left(q_2 \operatorname{sen}\beta - q_1 \cos\beta\right)\right] \\
& \left\{ 2\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\varphi_0 + \sin\alpha \cos\beta \left(\varphi_0 + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi_0}{2}\right)\right\} + \\
& +p_s\, q_1\, h\,(1-e) 2 \operatorname{sen}\alpha \left(\cos\alpha \operatorname{sen}\beta\, \varphi_0 + \sin\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\varphi_0\right)
\end{aligned}
\tag{4.103}
$$

e o torque no cone fica portanto

$$
\mathbf{T}_{cone} = T_{cone_y}\, \mathbf{j}^s \tag{4.104}
$$

As equações acima foram implementadas em computador, e foram obtidos os coeficientes de força e torque de radiação num cone cujas características são: R_b = 0,6, R_t = 0,2 e L = 1,0, cuja geometria é mostrada na Figura 4.9.

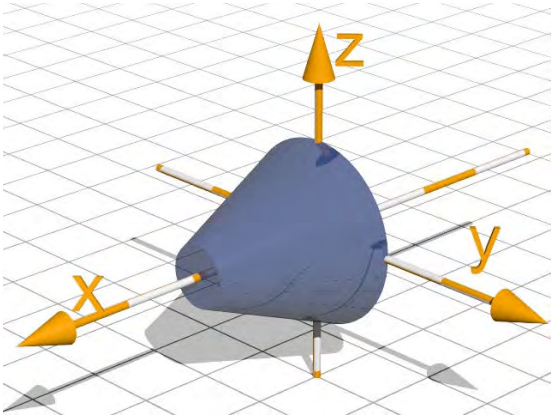

Fig. 4.9 – Geometria do cone truncado (a base e o topo não são consideradas na integração).

O coeficiente de força de pressão de radiação no cone truncado nos eixos x^s e z^s é mostrado na Figura 4.10, em função do ângulo α entre a direção de incidência da radiação e o eixo x^s, para duas situações de reflexão: superfície totalmente difusa (e = 0 e δ = 1) e superfície totalmente especular (e = 1 e δ = 0). Em ambas as situações, considerou-se que a emissividade ε = 1 e a temperatura da superfície é T_w = 300°K. Na figura, a linha cheia representa representa a reflexão difusa e a tracejada representa a especular. A curva em vermelho indica a força na direção x^s e em azul a força em z^s. Como esperado, a força é sempre negativa, exceto quando a incidência se dá por trás do cone, no eixo x^s e com reflexão difusa.

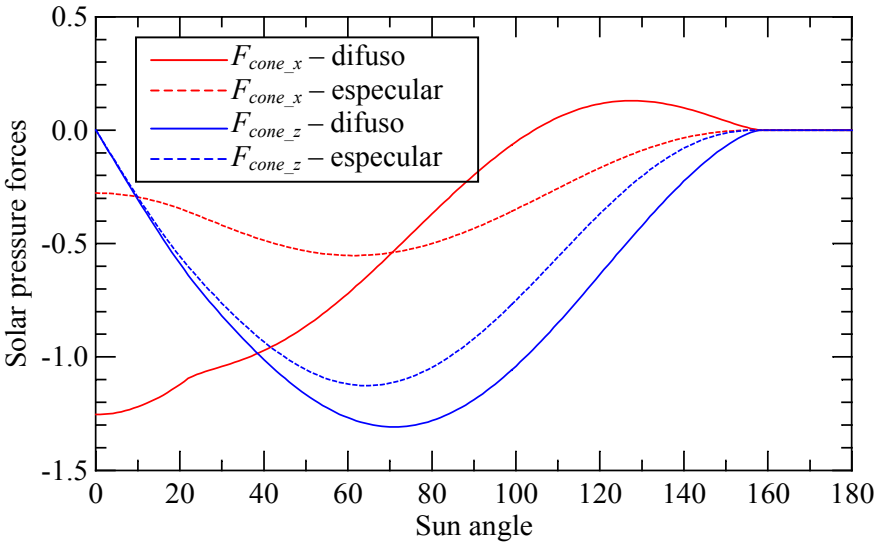

Fig. 4.10 – Coeficiente de força de radiação num cone truncado nos eixos x^s (vermelho) e z^s (azul).

A Figura 4.11 mostra o coeficiente de torque de pressão de radiação no cone truncado, ao redor do eixo y^s, nas situações de superfície difusa e especular.

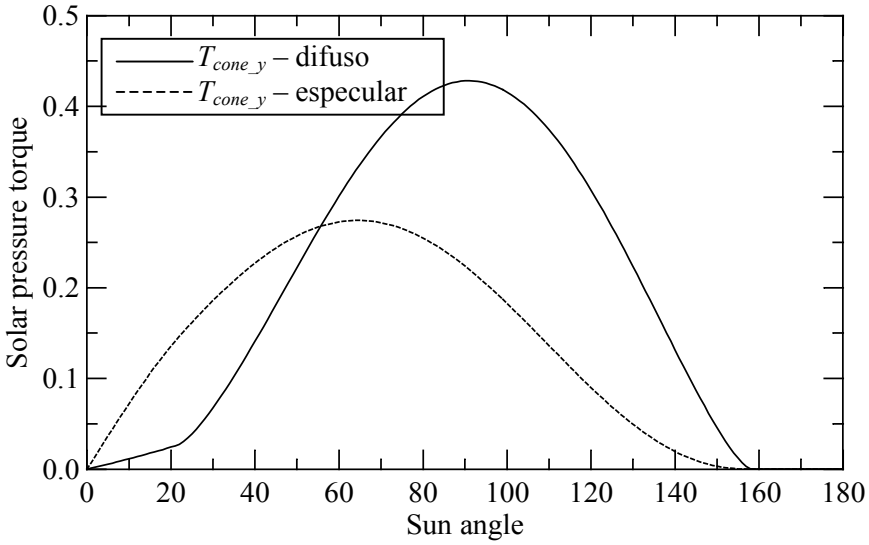

Fig. 4.11 – Coeficiente de torque de radiação num cone truncado no eixo y^s.

O cálculo analítico das forças e torques de pressão de radiação num prisma retangular (paralelepípedo) não apresenta simplificações significativas além da mera junção de um conjunto de 6 placas planas.

5 RADIAÇÃO TERRESTRE

Uma pequena parcela da energia solar que atinge a Terra é absorvida pela atmosfera. A maior parte atinge a superfície, onde parte da radiação é absorvida e parte é refletida de volta para o espaço. A parcela absorvida aquece a superfície e é reemitida para o espaço na forma de irradiação no espectro infravermelho. A parcela refletida na forma especular é muito pequena, e só consegue ser distinguida nos oceanos. Pode-se considerar, portanto, que toda a radiação refletida é difusa. Esta radiação possui um espectro ligeiramente diferente do espectro solar, visto que a atmosfera e a própria superfície absorvem seletivamente certos comprimentos de onda. A radiação refletida pela Terra, ou albedo terrestre, representa aproximadamente 34% do total da radiação incidente. Este fator varia com a quantidade de nuvens, com a latitude, e com as características da superfície no local. No entanto, como o efeito de radiação provocado pelo albedo terrestre em um satélite é significativamente menor do que a radiação direta, é comum adotar-se a reflectância como sendo constante ($\alpha = 0.34$). Nota-se também que à medida que o satélite percorre sua órbita, irá passar sobre regiões na Terra que se encontram na sombra (onde o albedo é nulo) e regiões iluminadas pelo Sol. Além disso, a própria intensidade da radiação varia com a posição relativa entre o satélite, a Terra e o Sol, o que torna bastante complexa a análise dos efeitos do albedo em um satélite. Embora existam modelos do albedo médio em função da latitude e longitude terrestre, a adoção de um valor médio global e constante é válida, já que a magnitude das forças geradas pela radiação terrestre possui uma ordem de magnitude a menos das forças de radiação solar direta.

5.1 Radiação refletida pela Terra (albedo)

Considera-se então um sistema de coordenadas com origem no centro da Terra tal que o eixo x^a passe pelo centro de massa do satélite, e a direção de incidência dos raios solares na Terra, s^a, esteja contida no plano formado por x^a e y^a, conforme mostra a Figura 5.1. Considera-se também um elemento de área dA_T da superfície terrestre, cuja normal é $\mathbf{n}_T$, e localizada pelos ângulos θ e φ. A normal faz com a direção de incidência um ângulo β_s e com o raio vetor ρ_s que vai do elemento dA_T até o satélite um ângulo δ_s.

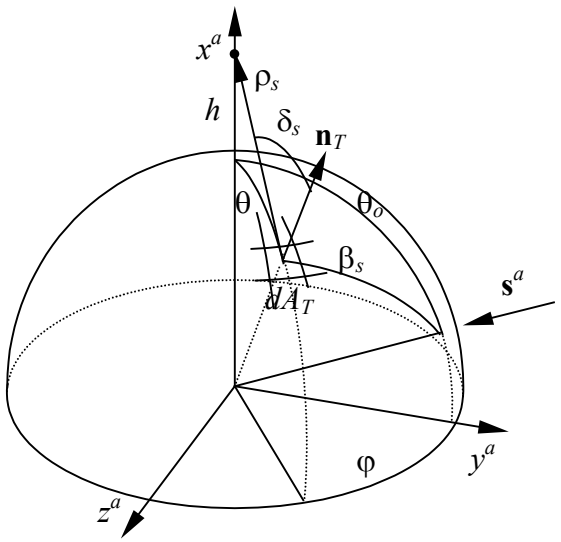

Fig. 5.1 – Elemento de superfície de radiação solar refletida pela Terra.

A energia solar incidente em dA_T, por unidade de tempo, vale

$$d\omega = S\cos\beta_s\, dA_T\,. \tag{5.1}$$

A intensidade de radiação difusa refletida por unidade de área será então

$$I = \alpha\,\frac{S\cos\beta_s}{\pi}\,. \tag{5.2}$$

Por outro lado, a radiação incidente no satélite devido apenas ao elemento de área dA_T é igual a

$$dS_D = \alpha\,\frac{S\cos\beta_s}{\pi}\cos\delta_s\,\frac{dA_T}{\rho_s}\,. \tag{5.3}$$

Além disso, por geometria tira-se as seguintes relações

$$\cos\beta_s = \operatorname{sen}\theta_o\,\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta_o\,\cos\theta \tag{5.4}$$

e

$$\cos\delta_s = R_T\,\frac{r\cos\theta - 1}{\rho_s}\,, \tag{5.5}$$

onde R_T é o raio médio terrestre e r é a distância do satélite até o centro da Terra, expresso em unidades do raio:

$$r = \frac{R_T + h}{R_T} \tag{5.6}$$

onde h é a altitude do satélite neste instante. Tem-se ainda que

$$\rho_s = R_T\,\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}\,, \tag{5.7}$$

e

$$dA_T = R_T^2\,\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \tag{5.8}$$

Substituindo estes valores na expressão de dS_D e dividindo-se pela velocidade da luz, obtém-se a pressão devido à radiação difusa refletida por um elemento de área da Terra:

$$dp_D = p_s\,\frac{\alpha}{\pi}\,(\operatorname{sen}\theta_o\,\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta_o\,\cos\theta)\,\frac{(r\cos\theta - 1)\operatorname{sen}\theta}{(r^2 - 2r\cos\theta + 1)^{3/2}}\,d\theta\, d\phi\,. \tag{5.9}$$

Esta expressão para dp_D tem a mesma característica da radiação solar direta, e, portanto, pode-se substituir o valor de p_s por dp_D nas expressões de dP_n e dP_t mostradas na seção anterior. A principal diferença é que a força e o torque devem ser integrados, agora, não apenas na área externa do satélite exposta à radiação, porém deve-se também integrar na região terrestre iluminada pelo Sol (integrais em θ e φ). Os limites de integração, contudo, não são constantes, uma vez que as condições $\cos\eta \geq 0$ (superfície do satélite é visível pelo elemento de área dA_T), e $\cos\beta_s \geq 0$ (elemento de área dA_T é iluminado pelo Sol) devem ser satisfeitas. Cabe ainda ressaltar que a direção de incidência da radiação refletida pela Terra no satélite será dada pela direção do vetor $\boldsymbol{\rho}^a$ cujas componentes são:

$$\rho_x^a = \frac{r - \cos\theta}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} \tag{5.10}$$

$$\rho_y^a = -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} \tag{5.11}$$

$$\rho_x^a = -\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} \tag{5.12}$$

O limite de integração no ângulo θ deverá ser tal que abranja toda a superfície da Terra visível pelo satélite, ou seja:

$$0 \le \theta \le \theta_{\max} = \arccos(1/r). \tag{5.13}$$

Já o limite de integração no ângulo φ depende se a região visível for ou não iluminada pelo Sol. Podem ocorrer 4 casos distintos:

a) Região visível totalmente iluminada pelo Sol (Figura 5.2*a*). Este caso ocorre quando o ângulo θ_{max} for menor do que a diferença $\pi/2 - \theta_o$, ou seja, quando $\tan\theta_{max} \tan\theta_o \le 1$, e, como não há sombra da Terra sobre a região visível, o limite de integração em φ é de $-\pi$ a π.

b) Região visível iluminada parcialmente, com $\theta_o < \pi/2$ (Figura 5.2*b*). Isto leva à condição $\theta_{max} \ge \pi/2 - \theta_o$. A região visível, neste caso, pode ser separada em duas regiões: um disco totalmente iluminado e outra um anel iluminado parcialmente. Na parte totalmente iluminada, os limites são:

$$0 \le \theta \le \pi/2 - \theta_o \text{ e } -\pi < \varphi \le \pi. \tag{5.14}$$

Na região parcialmente iluminada tem-se

$$\pi/2 - \theta_o < \theta \le \theta_{max} \text{ e } -\varphi_{max} \le \varphi \le \varphi_{max}. \tag{5.15}$$

onde

$$\phi_{\max} = \arccos(-\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cotg}\theta_o) \tag{5.16}$$

c) Região visível iluminada parcialmente, com $\pi/2 < \theta_o < \pi/2 - \theta_{max}$ (Figura 5.2*c*). A sombra da Terra atinge agora mais da metade da região visível, resultando os seguintes limites de integração em θ e em φ:

$$\theta_o - \pi/2 \le \theta \le \theta_{max} \text{ e } -\varphi_{max} \le \varphi \le \varphi_{max}. \tag{5.17}$$

d) O último caso ocorre quando o satélite se encontra na sombra da Terra, e toda a região visível não é iluminada pelo Sol. Isto ocorre quando $\theta_{max} \le \theta_o - \pi/2$, e neste caso a contribuição do albedo terrestre é nula.

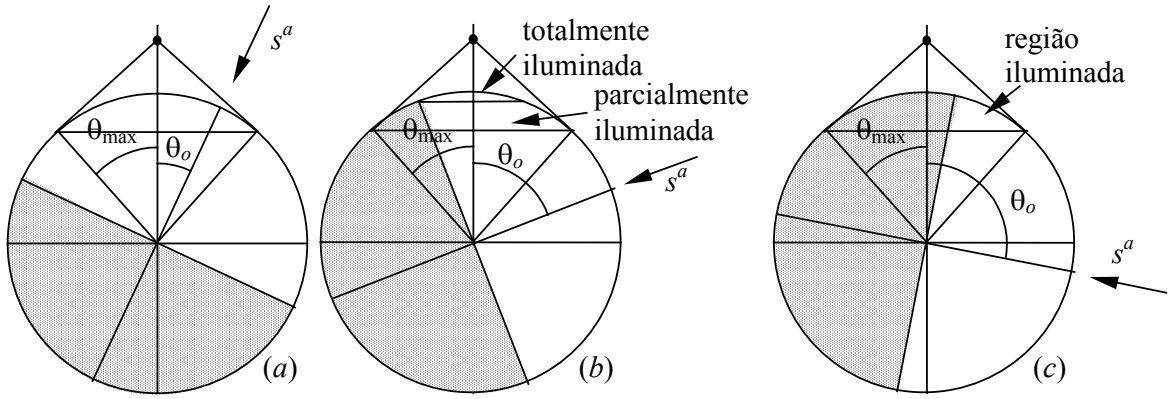

Fig. 5.2 – Superfície terrestre visível a partir do satélite, e região iluminada pelo Sol.

Nota-se também que a condição imposta pela visibilidade do elemento de superfície do satélite pode alterar os limites de integração conforme estabelecidos acima, uma vez que a condição $\cos\eta = -\mathbf{k}^e \cdot \boldsymbol{\rho}_s \geq 0$ (o elemento de superfície da Terra é avistado pelo elemento de superfície do satélite) precisa ser satisfeita. A determinação destes limites de integração pode ser obtida pela análise da interseção de um plano infinito (que coincide com o plano do elemento do satélite) com a esfera terrestre. Uma vez, porém que uma solução analítica para o problema do albedo é extremamente complexa, pode-se descartar os elementos de área da Terra que não satizfazem a condição acima numa eventual integração numérica.

5.2 Radiação emitida pela Terra

A parcela da energia solar absorvida pela superfície terrestre (cerca de 66%), não fica retida no local de incidência. A atmosfera transfere, por meio de convecção, a energia das regiões mais quentes (equatoriais) para as mais frias (polares). Desta forma, a diferença de temperatura média entre tais regiões não é tão elevada quanto seria se não houvesse a atmosfera. Portanto a potência irradiada pela superfície da Terra varia pouco com a latitude, e na verdade aproxima-se da irradiação de corpo negro a 288°K (15°C) nos comprimentos de onda onde a atmosfera é transparente (Figura 5.3). Nos demais comprimentos de onda, a radiação terrestre, nas altitudes orbitais, corresponde ao espectro de um corpo negro a 218°K (–55°C). Aproximadamente 95% desta radiação origina-se da superfície, enquanto que o restante parte da troposfera (NASA, 1969).

Desprezando-se o calor gerado internamente pela Terra (devido à desintegração radioativa) que escapa pela superfície terrestre, pode-se admitir então que toda a energia do Sol absorvida pela Terra é irradiada de volta ao espaço. Contudo, a área de incidência da radiação solar corresponde à metade da Terra, enquanto que a emissão se faz pela Terra toda. Isto significa portanto que a potência térmica irradiada será dada por:

$$S_E = (1-\alpha)\frac{S}{4} \tag{5.18}$$

À distância de uma unidade astronômica, esta potência iguala-se a 223 W/m^2. Efetuando-se agora o mesmo raciocínio utilizado na formulação da pressão de radiação devido ao albedo terrestre, obtém-se que a pressão de irradiação terrestre vale:

$$dp_E = \frac{S_E}{\pi c}\cos\delta_s \frac{dA_T}{\rho^2} \tag{5.19}$$

ou ainda

$$dp_E = (1-\alpha)\,\frac{S_E}{4\pi\,c}\,\frac{r\cos\theta - 1}{(r^2 - 2r\cos\theta + 1)^{3/2}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \tag{5.20}$$

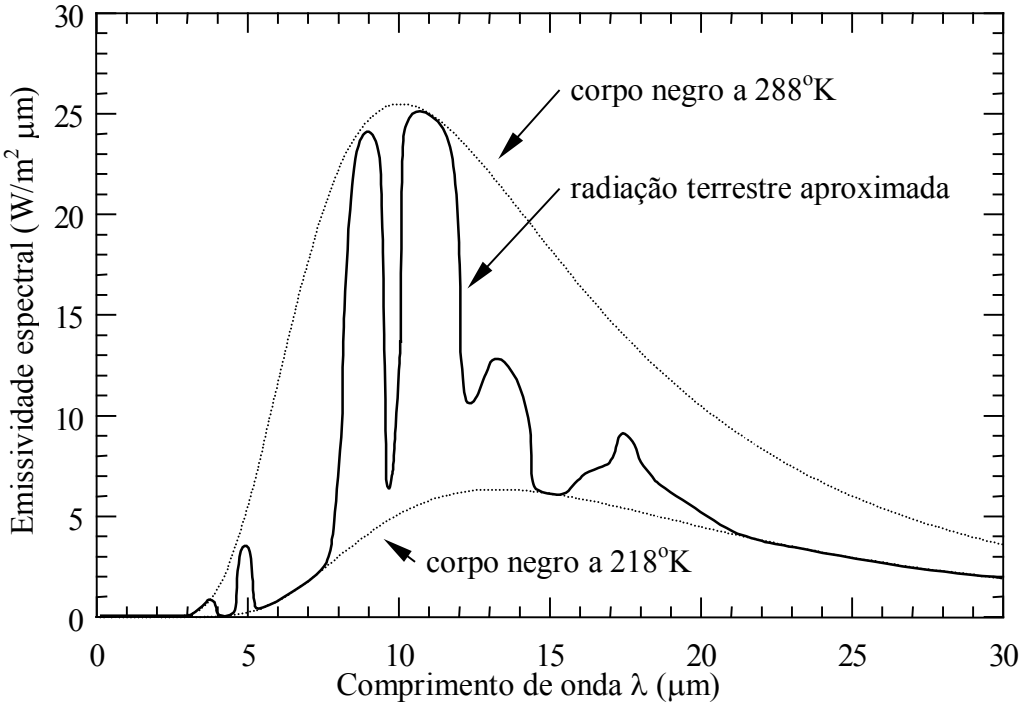

Fig. 5.3 – Curva de emissão espectral da radiação térmica terrestre.
Fonte: NASA, 1969.

Substituindo-se esta expressão no lugar de p_s na relação que fornece a força de radiação solar direta atuante num elemento, encontra-se a força devido à radiação terrestre. Esta força deverá ser integrada na superfície externa do satélite, e também nos ângulos θ e φ. Na radiação terrestre, diferentemente do albedo, o limite de integração em θ restringe-se à área terrestre visível pelo satélite, ou seja, $0 \le \theta \le \arccos(1/r)$, enquanto que o limite em φ depende da orientação da normal ao elemento de área do satélite relativo à Terra, de forma que a condição

$$\cos\eta = -\,\mathbf{n}^s \cdot \boldsymbol{\rho}^a \ge 0, \tag{5.21}$$

onde ρ^a é a direção de incidência da radiação terrestre, seja satisfeita. Esta direção, conhecida no sistema do albedo, deve ser transformada inicialmente no sistema orbital, uma vez que x^a e x^o são coincidentes, e, em seguida, no sistema geométrico do satélite. O ângulo que relaciona os sistemas orbital e do albedo é encontrado a partir da direção do Sol, conhecida no sistema inercial e, portanto, também no orbital, contida no plano x^a-y^a.

A irradiação ou poder emissivo monocromático de corpo negro é obtida pela formulação de Planck:

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5\,(\mathrm{e}^{C_2/\lambda T} - 1)}, \tag{5.22}$$

onde as constantes empíricas C_1 e C_2 valem, respectivamente, 374,15 10^{-18} W m^2 e 14,388 10^{-3} m K, e com o poder emissivo em W/ m^2 m.

BIBLIOGRAFIA:

BOETTCHER, R. -D. **The calculation of convex body aerodynamics in free molecular flow using a plane element surface approximation - Survey on theory and methods - Description of a FORTRAN program package**; final report, part 1. Götingen, Germany, DFVLR, 1979. (DFVLR-IB 251-79 A 13).

CARRARA, V. **Modelagem das forças e torques atuantes em satélites**. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE 2454 TDL/094)

CHAPMAN, S.; COWLING, T. G. **The mathematical theory of Non-Uniform Ga**ses. 3. ed. Cambridge University Press, UK, 1970.

GOODMAN, F. O.; WACHMAN, H, Y. **Dynamics of gas-surface scattering**. Academic, New York, 1976.

NASA. **Spacecraft Radiation Torques**. NASA SP-8027, 1969

PRESENT, R. D. **Kinetic Theory of Gases**. McGraw Hill, NY, 1958.

SCHAAF, S. A.; CHANBRÉ, P. L. **Fundamentals of gas dynamics - high speed aerodynamics and jet propulsion. Vol III - Flow of rarefied gases**. Princeton University Press, NJ, 1961 (Princeton Aeronautical Paperbacks, 8).

SINGER, S. F. **Torques and attitude sensing in Earth satellites**. Academic Press, 1964

WERTZ, J. R. **Spacecraft attitude determination and control**. D. Reidel Publishing, 1978.

APÊNDICE A

Na função de distribuição de velocidades maxwelliana a probabilidade de uma molécula ter um determinado intervalo de velocidades é proporcional à exponencial quadrática desta velocidade (como se fosse uma distribuição gaussiana). Em função deste aspecto, é freqüente nos problemas relacionados à modelagem de forças e torques aerodinâmicos que usam a teoria cinética dos gases o aparecimento de integrais cujo integrando é função de uma exponencial quadrática. Uma integral do tipo

$$L_n(a) = \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-a x^2} \, dx \,, \tag{A.1}$$

apresenta as seguintes soluções, para n = 0, 1, 2, 3 e 4:

$$L_0(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \,, \tag{A.2}$$

$$L_1(a) = \frac{1}{2a} \tag{A.3}$$

$$L_2(a) = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A.4}$$

$$L_3(a) = \frac{1}{2a^2} \tag{A.5}$$

$$L_4(a) = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \,. \tag{A.6}$$

Além disso, se n for par, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-a x^2} \, dx = 2 \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-a x^2} \, dx = 2 \, L_n(a) \,, \tag{A.7}$$

ao passo que se n for ímpar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-a x^2} \, dx = 0 \tag{A.8}$$

Algumas integrais envolvendo exponenciais resultam em integrais de Bessel de ordem 0 e 1 (funções de Bessel modificadas do primeiro tipo), que são definidas como:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\pm x \cos u} \, du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\pm x t}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \tag{A.9}$$

e

$$I_1(x) = \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}^2 u \, \mathrm{e}^{\pm x \cos u} \, du = \frac{x}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{e}^{\pm x t} \, dt \,, \tag{A.10}$$

ambos para argumento x positivo. O comportamento das funções de Bessel de ordem 0 e 1 em função do argumento x é mostrado na Figura A.1.

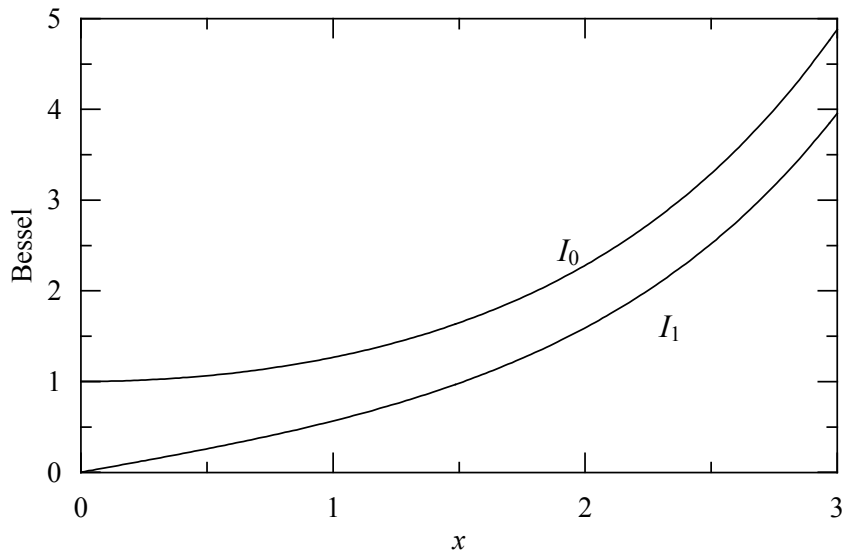

Fig. A.1 – Funções de Bessel modificadas do primeiro tipo de ordem 0 e 1.

As funções de Bessel encontram-se disponíveis em pacotes computacionais em diversas linguagens, em particular em Fortran e C. A listagem a seguir apresenta um código fonte obtido de Jean-Pierre Moreau originalmente em Fortran e convertido para C por Valdemir Carrara.

```
// http://jean-pierre.moreau.pagesperso-orange.fr/c_bessel.html
/**********************************************************************
*                                                                     *
*     Program to calculate the first kind modified Bessel function    *
*  of integer order N, for any REAL X, using the function BESSI(N,X).  *
*                                                                     *
* ------------------------------------------------------------------ *
*    SAMPLE RUN:                                                      *
*                                                                     *
*    (Calculate Bessel function for N=2, X=0.75).                     *
*                                                                     *
*    Bessel function of order 2 for X =  0.7500:                      *
*                                                                     *
*         Y = 0.073667                                                *
*                                                                     *
* ------------------------------------------------------------------ *
*    Reference: From Numath Library By Tuan Dang Trong in Fortran 77. *
*                                                                     *
*                              C++ Release 1.1 By J-P Moreau, Paris.  *
*                                                                     *
*    Version 1.1: corected value of P4 in BESSIO (P4=1.2067492 and not *
*                 1.2067429) Aug. 2011.                               *
**********************************************************************/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "stdafx.h"

double BESSI0(double X);
double BESSI1(double X);

// ------------------------------------------------------------------
  double BESSI(int N, double X) {
/*------------------------------------------------------------------
!     This subroutine calculates the first kind modified Bessel function
!     of integer order N, for any REAL X. We use here the classical
```

```
!      recursion formula, when X > N. For X < N, the Miller's algorithm
!      is used to avoid overflows.
!      REFERENCE:
!      C.W.CLENSHAW, CHEBYSHEV SERIES FOR MATHEMATICAL FUNCTIONS,
!      MATHEMATICAL TABLES, VOL.5, 1962.
-----------------------------------------------------------------------*/

      int IACC = 40;
         double BIGNO = 1e10, BIGNI = 1e-10;
      double TOX, BIM, BI, BIP, BSI;
      int J, M;

      if (N==0)  return (BESSI0(X));
      if (N==1)  return (BESSI1(X));
      if (X==0.0) return 0.0;

      TOX = 2.0/X;
      BIP = 0.0;
      BI  = 1.0;
      BSI = 0.0;
      M = (int) (2*((N+floor(sqrt((double)IACC*N)))));
      for (J = M; J>0; J--) {
        BIM = BIP+J*TOX*BI;
        BIP = BI;
        BI  = BIM;
        if (fabs(BI) > BIGNO) {
          BI  = BI*BIGNI;
          BIP = BIP*BIGNI;
          BSI = BSI*BIGNI;
        }
        if (J==N)  BSI = BIP;
      }
      return (BSI*BESSI0(X)/BI);
  }

// ---------------------------------------------------------------------
//  Auxiliary Bessel functions for N=0, N=1
  double BESSI0(double X) {
      double Y,P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9,AX,BX;
      P1=1.0; P2=3.5156229; P3=3.0899424; P4=1.2067492;
      P5=0.2659732; P6=0.360768e-1; P7=0.45813e-2;
      Q1=0.39894228; Q2=0.1328592e-1; Q3=0.225319e-2;
      Q4=-0.157565e-2; Q5=0.916281e-2; Q6=-0.2057706e-1;
      Q7=0.2635537e-1; Q8=-0.1647633e-1; Q9=0.392377e-2;
      if (fabs(X) < 3.75) {
        Y=(X/3.75)*(X/3.75);
        return (P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))));
      }
      else {
        AX=fabs(X);
        Y=3.75/AX;
        BX=exp(AX)/sqrt(AX);
        AX=Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*(Q5+Y*(Q6+Y*(Q7+Y*(Q8+Y*Q9)))))));
        return (AX*BX);
      }
  }

// ---------------------------------------------------------------------
  double BESSI1(double X) {
      double Y,P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9,AX,BX;
      P1=0.5; P2=0.87890594; P3=0.51498869; P4=0.15084934;
      P5=0.2658733e-1; P6=0.301532e-2; P7=0.32411e-3;
      Q1=0.39894228; Q2=-0.3988024e-1; Q3=-0.362018e-2;
      Q4=0.163801e-2; Q5=-0.1031555e-1; Q6=0.2282967e-1;
      Q7=-0.2895312e-1; Q8=0.1787654e-1; Q9=-0.420059e-2;
      if (fabs(X) < 3.75) {
        Y=(X/3.75)*(X/3.75);
        return(X*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7)))))));
```

```
      }
      else {
        AX=fabs(X);
        Y=3.75/AX;
        BX=exp(AX)/sqrt(AX);
        AX=Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*(Q5+Y*(Q6+Y*(Q7+Y*(Q8+Y*Q9)))))));
        return (AX*BX);
      }
  }

// ---------------------------------------------------------------------
/*
void main()  {

  double X,Y; int N;

  N=2;
  X=0.75;

  Y = BESSI(N,X);

  printf("\n Bessel Function of order %d, for X=%8.4f:\n\n", N, X);
  printf("      Y = %f\n\n", Y);

}

// end of file tbessi.cpp

*/
```

APÊNDICE B

A função erro, ou erf(·), é uma função bastante utilizada em estatística e é definida como:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\,. \tag{B.1}$$

Esta função não apresenta solução analítica da integral e possui as seguintes propriedades:

- $\mathrm{erf}(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1$
- $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$ (função ímpar)
- $\mathrm{erfc}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = 1 - \mathrm{erf}(x)$ (função erro complementar)

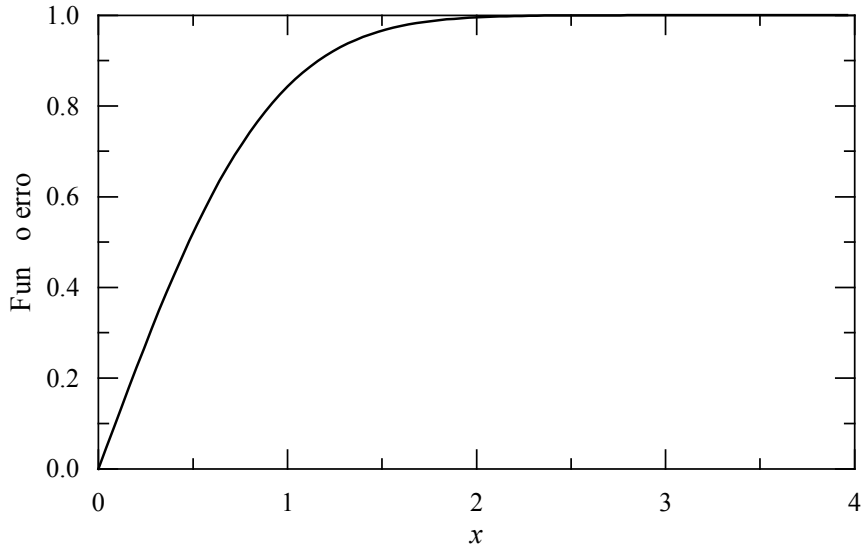

Fig. B.1 – Função erro.

Existem diversos algoritmos que implementam a função erro em computadores. Encontram-se disponíveis códigos fonte ou algoritmos em Fortran e C, como, por exemplo, o código mostrado a seguir.

```
double edm_erf(double x)
/*
 Module:
     Environmental perturbation modelling

 Purpose:
     The edm_erf function is a double precision error function
     of an argument x. It uses a rational aproximation  for
     the function, given by M. Abramowitz in his  'Handbook
     of Mathematical Functions', page 299, equation 7.1.25.

 Inputs:
       x
              Error function argument, in range -50<x<50 (double, value).
```

```
 Outputs:
       edm_erf
             Double precision error function

 Author:
        Valdemir Carrara    Apr/11
*/
{
       static const double a1 = 0.254829592, a2 = -0.284496736,
              a3 = 1.421413741, a4 = -1.453152027, a5 = 1.061405429,
              pe = 0.327591100;
       static double t, erf;

       t      = 1./(1. + pe*fabs(x));
       erf    = 1. - t*(a1 + t*(a2 + t*(a3 + t*(a4 + t*a5))))*exp(-x*x);
       if (x < 0) erf = -erf;
       return erf;
}
```