



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.15.17.00-TDI

## **APLICAÇÃO DO CONTROLADOR MISTO $H_2/H_\infty$ NO CONTROLE DA ATITUDE DE UM MICROSSATÉLITE NA PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS**

Erberson Rodrigues Pinheiro

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 25 de fevereiro de 2013.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3DHSFJL>>

INPE  
São José dos Campos  
2013

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Luciana Manacero - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.15.17.00-TDI

## **APLICAÇÃO DO CONTROLADOR MISTO $H_2/H_\infty$ NO CONTROLE DA ATITUDE DE UM MICROSSATÉLITE NA PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS**

Erberson Rodrigues Pinheiro

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 25 de fevereiro de 2013.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3DHSFJL>>

INPE  
São José dos Campos  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Pinheiro, Erberson Rodrigues.

P655a      Aplicação do Controlador misto  $H_2/H_\infty$  no controle da atitude de um microssatélite na presença de incertezas paramétricas / Erberson Rodrigues Pinheiro. – São José dos Campos : INPE, 2013. xxii + 117 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2013/02.15.17.00-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013.

Orientador : Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza.

1. microssatélite. 2. incerteza paramétrica. 3. controle misto. I.Título.

CDU 629.7.062-2

---

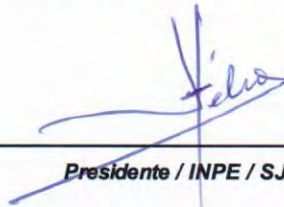
Copyright © 2013 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2013 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Mestre** em

**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle**

Dr. Hélio Koiti Kuga



---

**Presidente / INPE / SJC Campos - SP**

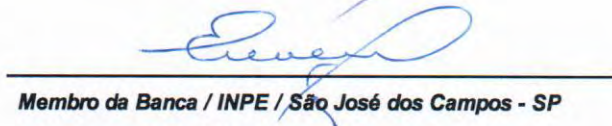
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza



---

**Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP**

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macaul



---

**Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP**

Dr. Luiz de Siqueira Martins Filho



---

**Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP**

**Este trabalho foi aprovado por:**

**maioria simples**

**unanimidade**

Aluno (a): **Erberson Rodrigues Pinheiro**

**São José dos Campos, 25 de Fevereiro de 2013**



*A meus pais Edson e Suely.*





## AGRADECIMENTOS

- A Deus, pois sem Ele nada seria possível.
- A meus pais, Edson e Suely, e a meus avós, João e Eliedes por sempre terem me apoiado em meus estudos e por terem me dado uma boa educação. Com eles aprendi lições que levarei para o resto da vida.
- A meu irmão Tiago e a meus primos Kesley, Keila e Paulo, pelo companheirismo e amizade.
- Aos meus amigos do mestrado, pelo apoio que sempre deram. Em especial, os amigos Adolfo, Alain, Alessandra, Alexandre, Danilo, Liana e Rafael (Rafão), pelos momentos de estudo em grupo que muito contribuíram para meu aprendizado.
- Aos professores da pós-graduação da ETE, em sua maior parte, sempre disponíveis para tirar dúvidas.
- Ao meu orientador Professor Luiz Carlos Gadelha, que sempre me motivou e com toda boa vontade tirou todas as minhas dúvidas.
- À CAPES pelo suporte financeiro.



## RESUMO

O projeto de um sistema de controle de atitude de um satélite é de suma importância para o sucesso das missões espaciais, e tem como objetivo realizar manobras angulares para manter uma orientação específica. Devido as limitações financeiras das missões espaciais, constelações de satélites pequenos seriam uma escolha economicamente viável. No entanto, o sistema de controle de atitude de microssatélites é mais vulnerável às incertezas devido às variações do momento de inércia. Satélites artificiais estão sujeitos a dois tipos de incertezas: incerteza estruturada, que representa a incertezas de alguns parâmetros e a incerteza não estruturada, que está relacionada aos erros de modelagem. Essas incertezas devem ser levadas em consideração no projeto do sistema de controle, pois este pode perder desempenho e robustez. Para o caso de microssatélites com massa menor que 100kg a atitude é muito sensível a perturbações externas e as variações no momento de inércia. Diante de perturbações e incertezas, surge a necessidade de projetar um controle que seja robusto e ao mesmo tempo mantenha um bom desempenho. A proposta deste trabalho é a modelagem de um microssatélite e o estudo do controlador misto  $H_2/H_\infty$  via LMI e com alocação regional de pólos.



## ABSTRACT

The design of the satellite attitude control system is paramount to the success of the space missions that aims to perform angle maneuver and to maintain a specific orientation. Due to the space missions limited budget, small satellite cluster or constellation would be an economical choice. From risk-sharing viewpoint, a number of smaller satellites have a significant reliability advantage over a bigger one. However, microsatellite attitude control system design becomes more vulnerable to uncertainty disturbances due to moment-of-inertia variation as the satellite has great decrease in size and weight. Artificial satellites are subject to two kinds of uncertainty: structure uncertainty that represent some satellite parameter variation and the unstructured uncertainty, which represent some kind of the satellite model error. These uncertainty must be considered into the design of satellite attitude control, because the lost of robustness and performance. For microsatellite with mass less than 100kg the attitude is more sensitive to external disturbance and the moment-of-inertia variation. The purpose of this work is to model a microsatellite and to perform a mixed  $H_2/H_\infty$  Control via LMI optimization with regional pole placement.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Movimento rotacional de um corpo rígido. . . . .	8
2.2 Representação de um corpo rígido imerso no campo gravitacional. . . . .	14
2.3 Representação de um corpo rígido imerso no campo gravitacional após algumas considerações. . . . .	15
3.1 Sistema de controle com retroação negativa. . . . .	23
3.2 Sistema $G(s)$ com entrada $d$ e saída $y$ . . . . .	24
4.1 Configuração padrão $M - \Delta$ . . . . .	33
4.2 Configuração LFT inferior. . . . .	34
4.3 Diagrama de blocos para o ângulo de pitch. . . . .	35
4.4 Diagrama de blocos para o ângulo de pitch com incerteza. . . . .	36
4.5 Entradas e saídas na planta generalizada P. . . . .	38
4.6 Representação da TLF do sistema com incertezas. . . . .	39
4.7 Valor singular do ângulo de pitch com incerteza. . . . .	40
4.8 Planta com incerteza para roll e yaw . . . . .	44
4.9 Representação da TLF do sistema com incertezas. . . . .	45
5.1 Estrutura do filtro de Kalman. . . . .	51
5.2 Diagrama de blocos do LQG. . . . .	52
5.3 Estrutura do LQG. . . . .	53
6.1 Sistema G. . . . .	57
6.2 Sistema G com o controlador K. . . . .	69
6.3 configuração do $H_2$ . . . . .	71
6.4 Estrutura do LQG na configuração geral. . . . .	73
6.5 Configuração do $H_\infty$ . . . . .	76
6.6 Planta com perturbação e saídas $z_2$ e $z_\infty$ . . . . .	80
6.7 Planta com perturbação e saídas $z_2$ e $z_\infty$ . . . . .	83
7.1 Sistema com incerteza. . . . .	87
7.2 Resposta às condições iniciais para o ângulo de roll, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	91
7.3 Resposta às condições iniciais para o ângulo de pitch, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	91
7.4 Resposta às condições iniciais para o ângulo de pitch, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	92

7.5	Velocidade do ângulo de roll para a resposta às condições iniciais, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	92
7.6	Velocidade do ângulo de pitch para a resposta às condições iniciais, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	93
7.7	Velocidade do ângulo de yaw para a resposta às condições iniciais, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	93
7.8	Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de roll referente à condição inicial. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	94
7.9	Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de pitch referente à condição inicial. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	94
7.10	Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de yaw referente à condição inicial. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	95
7.11	Comportamento do ângulo de roll após uma entrada impulso, que representa uma perturbação no sistema. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	97
7.12	Comportamento do ângulo de pitch após uma entrada impulso, que representa uma perturbação no sistema. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	97
7.13	Comportamento do ângulo de yaw após uma entrada impulso, que representa uma perturbação no sistema. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	98
7.14	Velocidade do ângulo de roll para a resposta à uma entrada impulso, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	98
7.15	Velocidade do ângulo de pitch para a resposta à uma entrada impulso, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	99
7.16	Velocidade do ângulo de yaw para a resposta à uma entrada impulso, comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	99
7.17	Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de roll referente à uma entrada impulso. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ).	100



7.18	Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de pitch referente à uma entrada impulso. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	100
7.19	Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de yaw referente à uma entrada impulso. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	101
7.20	Comportamento do ângulo de roll após uma entrada senoidal mais um degrau, que representa os torques externos. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	102
7.21	Comportamento do ângulo de pitch após uma entrada senoidal mais um degrau, que representa os torques externos. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	103
7.22	Comportamento do ângulo de yaw após uma entrada senoidal mais um degrau, que representa os torques externos. Comparação dos controladores $H_\infty$ ( $\gamma = 0, 2$ ), $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ) e $H_2$ ( $\gamma = 100$ ). . . . .	103
7.23	Região de alocação de pólos( $\alpha = -0.1$ e $\theta = 90\pi/180$ ). . . . .	104
7.24	Ângulo de roll controlado com $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos. . . . .	106
7.25	Ângulo de pitch controlado com $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos. . . . .	106
7.26	Ângulo de yaw controlado com $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos. . . . .	107
7.27	Sinal de controle para estabilizar o ângulo de roll com o controlador $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos. . . . .	107
7.28	Sinal de controle para estabilizar o ângulo de pitch com o controlador $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos. . . . .	108
7.29	Sinal de controle para estabilizar o ângulo de yaw com o controlador $H_2/H_\infty$ ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos. . . . .	108



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
7.1 Parâmetros do microssatélite . . . . .	85
7.2 Dados do sensor de estrela . . . . .	86
7.3 Atuador: Roda de reação . . . . .	86
7.4 Pólos em malha fechada (roll/yaw) . . . . .	105



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 DINAMICA DA ATITUDE DE MICROSSATÉLITES</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Representação da atitude . . . . .	5
2.1.1 Sistemas de Referencia . . . . .	5
2.1.2 Referencial Inercial Celeste . . . . .	5
2.1.3 Referencial Vertical Local Horizontal Local (VLHL) . . . . .	5
2.1.4 Referencial do Corpo . . . . .	6
2.1.5 Sensores de atitude . . . . .	6
2.1.6 Ângulos de Euler . . . . .	6
2.2 Equações da dinâmica . . . . .	7
2.2.1 Energia Cinética Rotacional de um Corpo Rígido . . . . .	10
2.2.2 Referencial Principal do Corpo . . . . .	11
2.2.3 Equações de Movimento para a Atitude de um Satélite . . . . .	12
2.2.3.1 Torque de Gradiente de Gravidade . . . . .	13
2.2.3.2 Equações da Dinâmica de Atitude Linearizadas . . . . .	18
2.2.4 Torque Magnético . . . . .	20
2.2.5 Torque Aerodinâmico . . . . .	21
<b>3 CONTROLE MULTIVARIÁVEL</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1 Sistemas MIMO . . . . .	23
3.1.1 Sistemas de controle com retroação negativa . . . . .	23
3.1.2 Resposta em frequência . . . . .	24
3.1.3 Direções em sistemas multivariáveis . . . . .	25
3.1.4 Valores Singulares . . . . .	27
3.1.5 Direções de saída e de entrada . . . . .	27
3.1.6 Valores singulares máximos e mínimos . . . . .	28
<b>4 MODELOS DE INCERTEZA E ANÁLISE DE ROBUSTEZ</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1 Incertezas . . . . .	31
4.2 Transformação Linear Fracionária (TLF) . . . . .	33
4.3 Ângulo de Pitch com Incerteza Aditiva . . . . .	34
4.4 Ângulos de Roll/Yaw com Incerteza Aditiva . . . . .	40

<b>5</b>	<b>CONTROLE ÓTIMO</b>	<b>47</b>
5.1	Regulador Linear Quadrático (LQR)	47
5.2	Filtro de Kalman	50
5.3	Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)	51
5.4	LTR	53
<b>6</b>	<b>CONTROLE ROBUSTO</b>	<b>57</b>
6.1	Normas	57
6.1.1	Norma $H_2$	57
6.1.2	Norma $H_\infty$	59
6.2	Desigualdades Matriciais Lineares	60
6.2.0.1	Complemento de Schur	63
6.2.0.2	Variáveis matriciais	63
6.2.0.3	Vínculos lineares	64
6.2.1	Tipos de problemas LMI	64
6.2.1.1	Problemas viabilidade de LMI	65
6.2.1.2	Problemas de autovalor	65
6.2.1.3	Problemas de autovalor generalizado	66
6.2.2	Método do ponto interior	67
6.2.3	Regiões LMI	67
6.3	Projeto dos Controladores	69
6.3.0.1	Formulação Geral	69
6.3.1	Controle ótimo $H_2$	71
6.3.2	LQG: Um caso especial do controlador $H_2$	72
6.3.3	Controle $H_2$ por Riccati	73
6.3.4	Controle $H_2$ por LMI	75
6.3.5	Controle ótimo $H_\infty$	76
6.3.6	Controlador $H_\infty$ por Riccati	77
6.3.7	Controlador $H_\infty$ por LMI	79
6.3.8	Controle Misto $H_2/H_\infty$	80
<b>7</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>85</b>
7.1	Análise e resultados	85
7.2	Controlador misto $H_2/H_\infty$	86
7.3	Robustez com respeito às incertezas no momento de inércia	89
7.4	Robustez com respeito à entrada impulso	96
7.5	Robustez com respeito aos torques externos	102
7.6	Controlador misto $H_2/H_\infty$ com alocação de pólos	104

<b>8 CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>APÊNDICE A</b> . . . . .	<b>115</b>
A.1 Otimização convexa . . . . .	115
A.2 Conjuntos Convexos . . . . .	115
A.3 Funções Convexas . . . . .	116





# 1 INTRODUÇÃO

Os primeiros satélites a serem lançados eram pequenos, por causa das limitações da tecnologia de satélites e da capacidade dos veículos lançadores. Após alguns anos, devido a demanda e com o avanço da tecnologia dos veículos lançadores, o tamanho dos satélites foi aumentando. Atualmente o tamanho dos satélites estão diminuindo, pois com o avanço da tecnologia é possível construir satélites pequenos capazes de realizar missões complexas. Um satélite pequeno também é mais economicamente viável.

Os microssatélites são muito importantes em várias missões espaciais, tais como posicionamento e localização, observação da terra ( GRASSI et al., 1995 ), coleta de dados atmosféricos ( SAHRAOUI et al., 1998 ), experimentos científicos (WOLFE et al. , 1989 ) e comunicação (MUNCHEBERG , 1996 ).

Para se alcançar a precisão nos requerimentos de desempenho de apontamento, é necessário aplicar um controle de atitude nos três eixos do microssatélite, o que resulta em sistema de controle multivariável.

Para veículos espaciais de órbitas baixas (LEO) abaixo de 1000km de altitude, o torque de gradiente de gravidade, torque aerodinâmico, e o torque devido ao campo magnético da terra são as perturbações mais influentes. Alguns equipamentos que se movem no satélite, tais como câmeras, antenas, telescópio e painéis solares podem causar uma pequena mudança no momento de inércia. Para microssatélites com massa menor que 100kg o momento de inércia geralmente é menor que 20kgm<sup>2</sup>, o que torna a atitude mais sensível às perturbações e às variações no momento de inércia (WERTZ; LARSON , 1989 ).

Na literatura encontram-se várias aplicações de técnicas de controle no projeto do sistema de controle de um veículo espacial. Cada técnica de controle aplicada deve atingir as especificações do sistema a ser controlado. No entanto para que essas especificações sejam atingidas é necessário fazer algumas aproximações que muitas vezes deixam o modelo muito simplificado não correspondendo com a realidade.

Neste trabalho é discutido sobre controle moderno, mostrando como se dá o projeto dos controladores LQR (Linear Quadratic Regulator), LQG (Linear Quadratic Gaussian), LQG/LTR (LQG Loop Transfer Recovery) para posteriormente mostrar que esses controladores são casos especiais do controlador  $H_2$ .

Este trabalho se justifica a partir de outras abordagens para o problema, tais

como: no artigo (MARTINS-FILHO et al., 2005) é projetado um controlador LQG para um satélite de grande porte, no qual os atuadores usados são jatos de gás. No artigo (SHOW et al., 2002) é projetado um controlador PID robusto para o controle de atitude de um veículo espacial, no qual é considerado uma dinâmica não linear e incertezas, já no trabalho de Pittelkau (1992) é projetado um controlador LQG para controle do ângulo de pitch de um satélite no qual os torques externos são modelados como sendo uma constante mais uma senóide, e inseridos nas equações do sistema, e no trabalho (LAHDHIRI, 1993) é feito o mesmo, porém os torques externos não são modelados, mas são tratados como um ruído branco.

Esses artigos muitas vezes se omitem quando o assunto a ser tratado é a atenuação da perturbação, atenuação dos ruídos e incertezas paramétricas. O controlador misto  $H_2/H_\infty$  fornece uma abordagem sistemática para tratar desse tipo de problema.

Controle robusto é ideal para a análise e síntese de sistemas de controle com incerteza e perturbação. Os controles  $H_2$  e  $H_\infty$  são as duas principais correntes na teoria de controle robusto (ZHOU et al., 1996). A interpretação no domínio do tempo da norma  $H_2$  é a medida do valor quadrático médio do sinal de saída dirigido por um impulso unitário ou um ruído branco, e a norma  $H_\infty$  é a medida da estabilidade robusta com respeito à incerteza estabelecida no domínio da frequência que representa o pior caso de atenuação de uma entrada senoidal. Assim a combinação do controle  $H_2$  e  $H_\infty$ , chamado de controle misto  $H_2/H_\infty$ , foi primeiro introduzido por Bernstein e Haddad (1989) que minimiza a norma  $H_2$  de alguma função em malha fechada sujeita a um vínculo dado pela norma  $H_\infty$  de alguma outra função em malha fechada. Khargonekar e Rotea (1991) consideraram os problemas de realimentação de estados e de saída para o controle misto  $H_2/H_\infty$  e usaram uma abordagem de otimização convexa para resolver as equações matriciais de Riccati não linear. Scherer (1995) utilizou a parametrização de Youla para os requerimentos de desempenho medidos pelas normas  $H_2$  e  $H_\infty$  e reduziu o problema de controle  $H_2/H_\infty$  a uma sequência do problema de otimização convexa de dimensão finita.

Nos últimos anos tem-se desenvolvido algoritmos numéricos para resolver problemas do tipo LMI (Linear Matrix Inequality), e a abordagem da LMI tem surgido como uma ferramenta muito útil para resolver uma ampla variedade de problemas de controle. Chilali e Gahinet (1996) resolveram o problema de controle  $H_2/H_\infty$  com a alocação de pólos via LMI. Scherer (1995) apresentou uma visão geral da abordagem LMI para a síntese do controle misto  $H_2/H_\infty$  para controladores com realimentação de estados e realimentação de saída. Na verdade, LMIs podem ser re-

solvidas por algoritmos de otimização de ponto interior como descrito na referência (BOYD et al. , 1994 ). Por outro lado, *software* como MATLAB possui ferramentas que podem resolver problemas de controle via LMI de maneira eficiente (GAHINET et al. , 1995).

A proposta deste trabalho é desenvolver um controlador misto  $H_2/H_\infty$  com realimentação de saída para controlar a atitude de um microssatélite que orbita a terra sujeito às perturbações externas e incertezas no momento de inércia. Neste trabalho o controlador  $H_2/H_\infty$  é projetado usando a função *hinfmix* que oferece um algoritmo de solução de LMIs usando o método dos pontos interiores, e fornece um controle por realimentação de saída. Além do mais é considerado a técnica de alocação de pólos em regiões LMI, que também é realizada com a função *hinfmix*.



## 2 DINAMICA DA ATITUDE DE MICROSSATÉLITES

A orientação de um satélite, isto é, a direção para a qual o satélite aponta é denominada de atitude. Compreender como se dá este movimento de atitude é importante para prever o comportamento do satélite, e a partir daí desenvolver um controlador robusto para controlar a sua atitude. Neste capítulo será mostrado o desenvolvimento das equações de Euler, que são as equações de movimento de um corpo rígido, que nesse caso é um microsatélite.

### 2.1 Representação da atitude

A atitude de um corpo rígido é a sua orientação em relação a um referencial, e pode ser descrita como uma rotação usando os ângulos de Euler ( [TEWARI, 2007](#) ; [WERTZ; LARSON , 1989](#) ).

#### 2.1.1 Sistemas de Referencia

Para representar a atitude de um corpo rígido é necessário definir vários sistemas de referências. Esta seção apresenta alguns sistemas que são mais comuns quando se trata de satélites ([BRENDON , 2005](#) ).

#### 2.1.2 Referencial Inercial Celeste

O referencial inercial celeste é um sistema de referência no qual as leis de Newton são válidas. Esse referencial está fixo no espaço e a sua origem é o centro da terra com eixo z apontando para o polo norte. O eixo x aponta para o equinócio vernal, o ponto onde o plano da órbita da terra em torno do sol cruza o Equador indo do sul para o norte, e o eixo y é determinado pela regra da mão direita ( [TEWARI, 2007](#) ; [WERTZ; LARSON , 1989](#) ).

#### 2.1.3 Referencial Vertical Local Horizontal Local (VLHL)

O referencial VLHL se move com o satélite e é conhecido como sistema de coordenadas do satélite. O eixo z aponta na direção da terra, o eixo y aponta na direção normal ao plano da órbita e o eixo x é determinado pela regra da mão direita, e aponta na direção do movimento ao longo da trajetória da órbita e é perpendicular ao vetor radial.

### 2.1.4 Referencial do Corpo

O referencial do corpo é um sistema de referência que tem sua origem no centro de massa do satélite e nesse caso os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  coincidem com os eixos principais de inércia. O eixo  $z$  é apontado para a terra, o eixo  $y$  na direção normal a órbita e o eixo  $x$  é determinado pela regra da mão direita. Quando esse referencial está alinhado com o referencial VLHL diz-se que o ângulo de atitude é de  $0^\circ$  em roll, pitch e yaw. A variação desse referencial em relação ao referencial VLHL é o que descreve a atitude do satélite.

### 2.1.5 Sensores de atitude

Sensores de estrela são projetados para ser um sensor de atitude sofisticado que determinam a atitude de um satélite precisamente. Há uma variedade de sensores de atitude, mas os sensores de estrela oferecem um melhor desempenho quando comparados com outros sensores. Os sensores solares e os sensores de terra são limitados em suas ordens de operação, magnetômetros exigem satélites sem componentes magnéticos e são limitados a órbitas baixas, e GPS são limitados em seu ângulo de operação e altitude orbital. Sensores de estrela, no entanto, oferecem informações de três ângulos, uma ordem de operação ampla, habilidade de operar em qualquer órbita, não depende de dispositivos adicionais de navegação, e possui uma boa precisão.

Os sensores de estrela são os sensores mais precisos atualmente. O seu grau de precisão pode chegar a 1 arco de segundo. Eles ficam fixos nos satélites, são pequenos e leves. Infelizmente eles são muito complexos, sua operação necessita de algoritmos complicados e possui um preço muito elevado. Porém dependendo da missão, é mais vantajoso usar o sensor de estrela pelo seu grau de precisão.

### 2.1.6 Ângulos de Euler

Existem várias maneiras de representar a atitude/orientação de um satélite. Uma orientação geral de um satélite no espaço pode ser obtida usando sucessivas rotações em torno dos eixos do referencial VLHL. O mínimo número de rotações necessárias para especificar uma rotação, que são os graus de liberdade, é três ( TEWARI, 2007 ). Esta maneira de representar a atitude por três ângulos é chamada de representação por ângulos de Euler  $\Theta = [ \psi \ \theta \ \phi ]^T$ .

Considere que o referencial VLHL possui os seguintes vetores unitários  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ , com  $\mathbf{a}_1$  na mesma direção do movimento orbital do microsatélite,  $\mathbf{a}_3$  apontando para a terra e  $\mathbf{a}_2$  na direção determinada pela regra da mão direita. Para

descrever a orientação do referencial do corpo, que tem os vetores unitários  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , com respeito ao referencial VLHL em termos dos três ângulos de Euler, são aplicadas as seguintes rotações dos ângulos de Euler ( YANGA; SUN, 2005)

- Rotacionar o referencial  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  em torno de  $\mathbf{a}_3$  por um ângulo  $\psi$ , resultando assim o referencial  $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3\}$ ;
- Rotacionar o referencial  $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3\}$  em torno de  $\mathbf{a}'_2$  por um ângulo  $\theta$ , resultando assim o referencial  $\{\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \mathbf{a}''_3\}$ ;
- Rotacionar o referencial  $\{\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2, \mathbf{a}''_3\}$  em torno de  $\mathbf{a}''_1$  por um ângulo  $\phi$ , resultando assim o referencial  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ;

Resultando assim na seguinte matriz de rotação

$$R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Sendo  $s\phi \equiv \sin\phi$  e  $c\phi \equiv \cos\phi$ . Os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , são chamados de roll, pitch e yaw.

## 2.2 Equações da dinâmica

Considerando um corpo rígido se movimentando em um referencial inercial, pode-se descrever o movimento do corpo como um movimento de translação do seu centro de massa, junto com o movimento rotacional do corpo em torno de algum eixo que passa no seu centro de massa. Dessa forma, pode-se determinar a seguinte operação em um dado vetor  $\vec{A}$

$$\frac{d}{dt}\vec{A} \Big|_I = \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_B + \vec{\omega} \times \vec{A}, \quad (2.2)$$

que mostra que a variação temporal de um certo vetor  $\vec{A}$  observado em um referencial fixo (I: inercial nesse caso) é igual a variação temporal do vetor  $\vec{A}$  como observada em um referencial que gira com uma velocidade  $\vec{\omega}$  (B: referencial do corpo), mais um termo dado por:  $\vec{\omega} \times \vec{A}$  (SIDI, 1997).

Na figura 2.1 é suposto que três eixos ortogonais e unitários  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  estão localizados no centro de massa do corpo, e estão alinhados com os eixos do referencial.

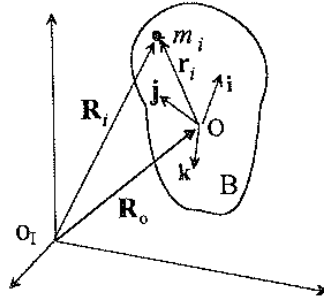


Figura 2.1 - Movimento rotacional de um corpo rígido.

Para uma partícula  $m_i$  no corpo B,  $\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i$ , tal que

$$\begin{aligned}\dot{\vec{R}}_i &= \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \\ \dot{\vec{R}}_i &= \vec{v}_0 + \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_i,\end{aligned}\quad (2.3)$$

sendo  $\vec{\omega}$  a velocidade angular do corpo B com respeito ao referencial inercial. O momento angular da partícula  $m_i$  é (SIDI, 1997)

$$\begin{aligned}\vec{h}_i &= \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{R}}_i, \\ \vec{h}_i &= \vec{r}_i \times m_i (\dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_i).\end{aligned}\quad (2.4)$$

No entanto, por definição tem-se que  $\dot{\vec{r}}_i = 0$  em um corpo rígido. Dessa forma, tem-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned}\vec{h}_i &= \vec{r}_i \times m_i (\dot{\vec{R}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i), \\ \vec{h}_i &= -\vec{v}_0 \times m_i \vec{r}_i + \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Para encontrar o momento angular do corpo como um todo, faz-se necessário somar as componentes dos momentos de todas as partículas de massa:

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \sum_{m_i} -\vec{v}_0 \times m_i \vec{r}_i + \sum_{m_i} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \\ \vec{h} &= -\vec{v}_0 \times \sum_{m_i} m_i \vec{r}_i + \sum_{m_i} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Visto que o momento angular em torno do centro de massa é nulo, pois se está



trabalhando com um corpo rígido :  $\sum_{m_i} m_i \vec{r}_i = 0$ . Finalmente:

$$\vec{h} = \sum_{m_i} \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) m_i. \quad (2.7)$$

Para o caso de um corpo rígido com uma distribuição contínua de massa, considera-se que a partícula de massa  $m_i$  seja a massa  $\rho dV$  de um pequeno elemento de volume  $dV$ , sendo o escalar  $\rho$  a densidade de massa no ponto. Somando sobre todo o volume do corpo rígido cada elemento infinitesimal, obtém-se a seguinte integral

$$\vec{h} = \int_V \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV. \quad (2.8)$$

sendo  $\vec{r}$  o vetor posição do elemento de volume  $dV$ .

Após realizar os produtos vetoriais na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \left[ \omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y(yx) - \omega_z(xz) \right] \mathbf{i} \\ &+ \left[ \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_x(xy) - \omega_z(yz) \right] \mathbf{j} \\ &+ \left[ \omega_z(x^2 + y^2) - \omega_x(xz) - \omega_y(yz) \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os momentos de inércia são definidos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V r(y^2 + z^2) dV, \\ I_{yy} &= \int_V r(x^2 + z^2) dV, \\ I_{zz} &= \int_V r(x^2 + y^2) dV, \end{aligned} \quad (2.10)$$

defini-se também os produtos de inércia

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{xz} = \int_V rxy dV, \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int_V rxz dV, \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_V ryz dV. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usando a equação (2.8) e as definições (2.10)-(2.11), o momento angular pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \left[ \omega_x I_{xx} - \omega_y I_{xz} - \omega_z I_{yx} \right] \mathbf{i} + \left[ \omega_y I_{yy} - \omega_x I_{yx} - \omega_z I_{yz} \right] \mathbf{j} + \left[ \omega_z I_{zz} - \omega_x I_{zx} - \omega_y I_{zy} \right] \mathbf{k} \\ &= h_x \mathbf{i} + h_y \mathbf{j} + h_z \mathbf{k},\end{aligned}\tag{2.12}$$

$\vec{h}$  é o vetor momento angular do corpo rígido.

Definindo o vetor velocidade angular como:  $\vec{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  a equação (2.12) pode ser escrita na seguinte forma matricial

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [\mathbf{I}] \vec{\omega}.\tag{2.13}$$

Por simetria, é deduzido que  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  e  $I_{yz} = I_{zy}$ . A matriz  $[\mathbf{I}]$  é o tensor de inércia, ou matriz de inércia.

### 2.2.1 Energia Cinética Rotacional de um Corpo Rígido

Considera-se um corpo rígido se movendo no espaço com um conjunto de eixos cuja a origem coincide com o centro de massa do corpo. A energia cinética é dada por  $\Delta T = \frac{1}{2} v^2 \Delta m$  (TEWARI, 2007). De acordo com a figura e a equação 2.2, tem-se que

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

a velocidade ao quadrado é dada por

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_0^2 + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i).$$

A energia cinética é dada por

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \int_M v^2 dm = \frac{1}{2} \int v_0^2 dm + \frac{2}{2} \int \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 M + \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= T_{transl} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \times 0 + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= T_{transl} + T_{rot}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Por definição o movimento angular é em torno do centro de massa do corpo rígido, então  $\int \vec{r} dm = 0$ . Dessa forma a equação acima é reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \frac{1}{2} \int_M [(\omega_x z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Após realizar a integral sobre a massa  $M$  do corpo e usar as definições de momentos de inércia e produtos de inércia, encontra-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} [(\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z - 2\omega_y \omega_x I_{yx} - 2\omega_y \omega_z I_{zy} - 2\omega_z \omega_x I_{zx})] \\ &= \frac{1}{2} [\omega_x(\omega_x I_x - \omega_z I_{zx} - \omega_y I_{yx}) + \\ &\quad + \omega_y(\omega_y I_y - \omega_z I_{yz} - \omega_x I_{yx}) + \omega_z(\omega_z I_z - \omega_y I_{zy} - \omega_x I_{zx})]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Que pode ser escrito da seguinte forma matricial

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [\mathbf{I}] \vec{\omega}. \quad (2.17)$$

Pode-se observar que a energia rotacional é expressa em termos da matriz de inércia e que juntamente com momento angular descrevem o movimento rotacional do corpo rígido.

### 2.2.2 Referencial Principal do Corpo

O problema a ser resolvido agora é transformar a matriz de inércia (2.13) em uma matriz diagonal. O referencial do corpo usado para derivar as equações de Euler possui uma orientação arbitrária relativa ao corpo rígido. Existem infinitas maneiras em que os eixos podem ser fixados no centro de massa do corpo. Uma grande simplificação acontece nas equações de Euler quando se escolhe uma orientação particular do referencial do corpo relativo ao corpo rígido tal que os produtos de inércia se tornam zero. Esse referencial é chamado de referencial principal do corpo (TEWARI, 2007). A matriz de inércia calculada nesse referencial é uma matriz diagonal,  $I_p$ . Para calcular um conjunto de eixos unitários no referencial principal  $\mathbf{i}_p$ ,  $\mathbf{j}_p$  e  $\mathbf{k}_p$  a partir de um referencial do corpo arbitrário,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  é necessário fazer uma transformação

através da matriz de rotação definida como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = C_p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{j}_p \\ \mathbf{k}_p \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

A relação entre um vetor calculado no referencial principal e o mesmo vetor calculado em referencial do corpo arbitrário é feita através da matriz de rotação  $C_p$ . O vetor velocidade angular pode ser denotado por

$$\vec{\omega} = C_p \vec{\omega}_p. \quad (2.19)$$

Visto que não há mudança na energia cinética causada por uma transformação de coordenadas, a equação (2.17) pode ser escrita da seguinte forma

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_p^T [\mathbf{I}]_p \vec{\omega}_p. \quad (2.20)$$

Substituindo a equação (2.19) na equação (2.20), e comparando os termos ambos os lados da equação, tem-se

$$\vec{\omega}_p^T [\mathbf{I}]_p \vec{\omega}_p = \vec{\omega}^T [\mathbf{I}]_p \vec{\omega} = \vec{\omega}_p^T C_p^T [\mathbf{I}]_p C_p \vec{\omega}_p, \quad (2.21)$$

aplicando a condição de ortogonalidade da matriz de rotação, obtém-se

$$[\mathbf{I}]_p = C_p^T [\mathbf{I}] C_p. \quad (2.22)$$

Visto que  $[\mathbf{I}]_p$  é diagonal, os seus elementos da diagonal são os autovalores de  $[\mathbf{I}]$  (TEWARI, 2002), e os autovetores de  $[\mathbf{I}]$  são as colunas de  $C_p$ . Ressaltando que os elementos da diagonal são os momentos principais de inércia.

No decorrer do trabalho será usado apenas o referencial principal do corpo e não será usado o índice subscrito  $p$ .

### 2.2.3 Equações de Movimento para a Atitude de um Satélite

No presente trabalho o microsatélite está equipado com três rodas de reação, uma em cada eixo, que serão usadas como atuadores ao se projetar o sistema de controle. Também será levado em consideração a ação dos torques de perturbação externa, tais como: torque de gradiente de gravidade, aerodinâmico e magnético. Dessa forma, as equações de Euler que serão derivadas devem considerar todos os

torques produzidos por essas perturbações externas e internas.

$$\vec{T} = \dot{\vec{h}}_I = \dot{\vec{h}}_B + \vec{\omega} \times \vec{h}. \quad (2.23)$$

Essa é a equação de movimento de Euler. O índice subscrito  $I$  indica que a derivada acontece no referencial inercial e o índice subscrito  $B$  indica que a derivada acontece no referencial do corpo. O torque  $\vec{T}$  será dividido em duas partes:  $\vec{T}_c$ , que serão os torques de controle; e  $\vec{T}_d$ , os torques externos provenientes de fenômenos naturais. O torque total será dado por  $\vec{T} = \vec{T}_c + \vec{T}_d$ .

O momento angular do sistema por completo é dado pelo momento angular do corpo rígido  $h_B = [h_x \ h_y \ h_z]^T$  e o momento angular das rodas de reação  $h_w = [h_{wx} \ h_{wy} \ h_{wz}]^T$  sendo o momento angular total dado por  $\vec{h} = \vec{h}_B + \vec{h}_w$ . Com essas definições e usando a equação 2.12 as equações de movimento se tornam

$$\begin{aligned} \vec{T} = \vec{T}_c + \vec{T}_d = & [\dot{h}_x + \dot{h}_{wx} + (\omega_y h_z - \omega_z h_y) + (\omega_y h_{wz} - \omega_z h_{wy})] \mathbf{i} \\ & + [\dot{h}_y + \dot{h}_{wy} + (\omega_z h_x - \omega_x h_z) + (\omega_z h_{wx} - \omega_x h_{wz})] \mathbf{j} \quad (2.24) \\ & + [\dot{h}_z + \dot{h}_{wz} + (\omega_x h_y - \omega_y h_x) + (\omega_x h_{wy} - \omega_y h_{wx})] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Aqui  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são os vetores unitários dos eixos do referencial do corpo. Essa equação é a equação completa do movimento de atitude de um satélite.

### 2.2.3.1 Torque de Gradiente de Gravidade

Se o campo gravitacional for uniforme sobre o corpo, o centro de massa se torna o centro de gravidade, e o torque gravitacional sobre o centro de massa é zero. No espaço, o campo gravitacional não é uniforme, e as variações resultantes na força gravitacional (em magnitude e direção) sobre o corpo leva, em geral, ao torque gravitacional em torno do centro de massa.

Considere um corpo  $\beta$ , não necessariamente rígido, imerso no campo gravitacional, como mostrado na figura 2.2, onde  $\beta$  representa o veículo espacial. O campo é devido a outros corpos, e  $\rho_n$  é a posição de  $dm$  com respeito a  $dm_n$  em  $\beta_n$ . Os corpos  $\beta_n$  representam a fonte gravitacional.

A força gravitacional em  $dm$  é dada por

$$d\vec{f} = -Gdm \sum_{n=1}^N \int_{\beta_n} \frac{\vec{\rho}_n dm_n}{\rho_n^3}, \quad (2.25)$$

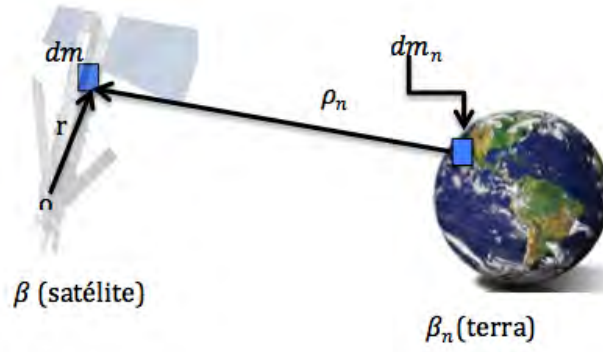


Figura 2.2 - Representação de um corpo rígido imerso no campo gravitacional.

onde  $\rho_n$  é a magnitude de  $\vec{\rho}_n$  e  $G$  é a constante gravitacional.

$$G = 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / Kg^2. \quad (2.26)$$

Portanto a força gravitacional e o torque (em torno de O) em  $\beta$  são

$$\vec{f} = \int_{\beta} d\vec{f} = -G \sum_{n=1}^N \int_{\beta_n} \int_{\beta} \frac{\vec{\rho}_n dm_n dm}{\rho_n^3}, \quad (2.27)$$

$$\vec{g}_0 = \int_{\beta} \vec{r} \times d\vec{f} = -G \sum_{n=1}^N \int_{\beta_n} \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{\rho}_n dm_n dm}{\rho_n^3}. \quad (2.28)$$

Essas equações são muito gerais, as integrações múltiplas fazem com que o seu desenvolvimento seja praticamente impossível sem fazer algumas considerações. Porém após fazermos algumas considerações, os aspectos mais importantes para a análise da dinâmica de atitude de um veículo espacial poderão ser explorados.

Serão feitas quatro considerações que simplificarão as expressões para o torque gravitacional. Duas se referem ao veículo espacial e duas ao campo gravitacional:

- Apenas um corpo celeste (fonte gravitacional) será considerado.
- Esse corpo possui uma distribuição de massa esfericamente simétrica.
- O veículo espacial é pequeno comparado com a sua distância em relação ao centro de massa da fonte gravitacional.
- O veículo espacial consiste de apenas um corpo.

De acordo com as considerações acima, temos a figura 2.3

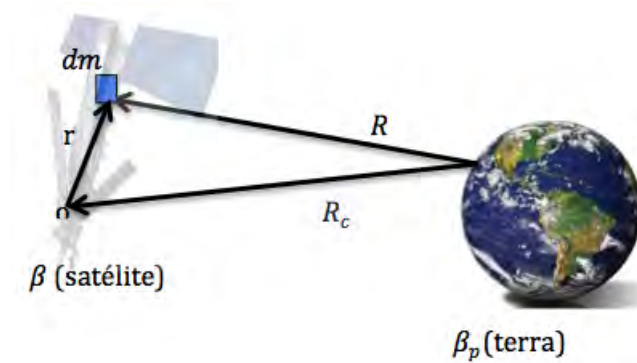


Figura 2.3 - Representação de um corpo rígido imerso no campo gravitacional após algumas considerações.

A primeira consideração permite que o somatório em (2.27) e (2.28) pode ser feito para um único termo, então:

$$\vec{f} = -G \int_{\beta_1} \int_{\beta} \frac{\vec{\rho}_1 dm_1 dm}{\rho_1^3}, \quad (2.29)$$

$$\vec{g}_c = -G \int_{\beta_1} \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{\rho}_1 dm_1 dm}{\rho_1^3}. \quad (2.30)$$

A segunda consideração nos permite trocar a integração sobre  $\beta_n$  por uma massa pontual equivalente no centro de massa de  $\beta_n$ . Dessa forma

$$\vec{f} = -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{\rho}_1 dm}{\rho_1^3}, \quad (2.31)$$

$$\vec{g}_c = -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{\rho}_1 dm}{\rho_1^3}. \quad (2.32)$$

A terceira consideração pode ser traduzida como  $r/R_c \ll 1$ , onde  $r$  é a dimensão do veículo espacial e  $R_c$  é a distância entre o veículo espacial e a fonte gravitacional. Assim temos

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{r}. \quad (2.33)$$

A ultima consideração nos permite escolher, sem perda de generalidade, o centro de massa do veículo espacial como sendo nosso ponto de referência em  $\beta$ . Dessa forma as equações podem ser escritas da seguinte maneira

$$\vec{f} = -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{R}}{R^3} dm, \quad (2.34)$$

$$\vec{g}_c = -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{R}}{R^3} dm. \quad (2.35)$$

Substituindo a equação (2.33), nas equações (2.34) e (2.35), obtem-se

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{R}_c + \vec{r}}{R^3} dm \\ \vec{f} &= -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{R}_c}{R^3} dm, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_c &= -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times (\vec{R}_c + \vec{r})}{R^3} dm \\ \vec{g}_c &= -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{R}_c + \vec{r} \times \vec{r}}{R^3} dm \\ \vec{g}_c &= -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{R}_c}{R^3} dm. \end{aligned} \quad (2.37)$$

O termo  $R^{-3}$ , pode ser desenvolvido da seguinte maneira:

$$|\vec{R}| = |\vec{R}_c + \vec{r}|, \quad (2.38)$$

que após algumas manipulações, chega-se no seguinte resultado

$$R^{-3} = R_c^{-3} \left( 1 + \frac{2\vec{R}_c \cdot \vec{r}}{R_c^2} + \frac{r^2}{R_c^2} \right)^{-3/2}. \quad (2.39)$$

Lembrando que  $r/R \ll 1$ , podemos desenvolver a equação anterior usando a expansão binomial, que é dada por

$$(1 + x^m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (2.40)$$



sendo  $x \ll 1$

Dessa forma, tem-se que

$$R^{-3} = R_c^{-3} \left[ 1 - 3 \frac{(\vec{R}_c \cdot \vec{r})}{R_c^2} + O\left(\frac{r^2}{R_c^2}\right) \right] \quad (2.41)$$

Substituindo (2.41), nas equações (2.36) e (2.37), obtendo assim

$$\vec{f} = -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{R}_c}{R_c^3} \left[ 1 - 3 \frac{(\vec{R}_c \cdot \vec{r})}{R_c^2} \right] dm,$$

$$\vec{g}_c = -Gm_1 \int_{\beta} \frac{\vec{r} \times \vec{R}_c}{R_c^3} \left[ 1 - 3 \frac{(\vec{R}_c \cdot \vec{r})}{R_c^2} \right] dm.$$

Desenvolvendo as equações acima e considerando que  $\int \vec{r} dm = \vec{0}$ :

$$\vec{f} = -\left(\frac{\mu m}{R_c^3}\right) \vec{R}_c, \quad (2.42)$$

$$\vec{g}_c = -\left(\frac{3\mu}{R_c^5}\right) \int_{\beta} (\vec{r} \cdot \vec{R}_c) (\vec{r} \times \vec{R}_c) dm, \quad (2.43)$$

sendo  $\mu = Gm_1$ .

O vetor  $R_c$  que vai do centro de massa do corpo ao centro da terra em termos dos eixos principais do corpo é dado por

$$\vec{R}_c = R_c(-\text{sen}\theta\mathbf{i} + \text{sen}\phi\text{cos}\theta\mathbf{j} + \text{cos}\phi\text{cos}\theta\mathbf{k}). \quad (2.44)$$

O vetor  $r$  que é o vetor de um elemento de massa do corpo relativo ao centro de massa do corpo em termos dos eixos principais de inércia é dado por

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.44) e (2.45) na equação (2.43), e considerando  $\vec{g}_c = T_{gx}\mathbf{i} + T_{gy}\mathbf{j} +$

$T_{gz}\mathbf{k}$ , obtém-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} T_{gx} &= \frac{3\mu}{R_c^3}(I_z - I_y)\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi, \\ T_{gy} &= \frac{3\mu}{R_c^3}(I_z - I_x)\cos\theta\cos\phi\sin\theta, \\ T_{gz} &= \frac{3\mu}{R_c^3}(I_x - I_y)\cos\theta\sin\phi\sin\theta. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Que são as equações para o torque de gradiente de gravidade.

Considerando um corpo rígido em uma órbita circular e pequenas variações dos ângulos de Euler, as equações (2.46) podem ser grandemente simplificadas. A velocidade angular lateral de um corpo em uma órbita circular é dada por  $v = \sqrt{\mu/R_c}$  (SIDI, 1997), assim a velocidade angular orbital ou frequência orbital do corpo será  $n = v/R_c = \sqrt{\mu/R_c^3}$ . Visto que, será considerado pequenas variações dos ângulos de Euler nas equações (2.46), tem-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} T_{gx} &= 3n^2(I_z - I_y)\phi, \\ T_{gy} &= 3n^2(I_z - I_x)\theta, \\ T_{gz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

As componentes lineares do torque de gradiente de gravidade (2.47) são usadas para encontrar as equações linearizadas da dinâmica de atitude.

### 2.2.3.2 Equações da Dinâmica de Atitude Linearizadas

As equações de Euler foram calculadas no sistema de referência fixo no corpo (B) e os vetores unitários dos eixos são  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , a variação desse referencial em relação ao referencial VLHL (A) é o que descreve a atitude do satélite. O sistema LVLH possui os seguintes vetores unitários  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ , com  $\mathbf{a}_1$  na direção da velocidade do satélite no plano orbital,  $\mathbf{a}_3$  apontando para a terra, e  $\mathbf{a}_2$  normal ao plano da órbita.

Para descrever a orientação do referencial fixo no corpo B com respeito ao referencial A em termos dos ângulos de Euler, faz-se a seguinte transformação de coordenadas (3-2-1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Dessa forma, a velocidade angular do referencial fixo no corpo (B) relativa ao referencial LVLH (A) será

$$\vec{\omega}^{B/A} = \omega_x^{B/A} \mathbf{i} + \omega_y^{B/A} \mathbf{j} + \omega_z^{B/A} \mathbf{k}, \quad (2.49)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} \omega_x^{B/A} \\ \omega_y^{B/A} \\ \omega_z^{B/A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

A velocidade angular do referencial fixo no corpo B relativa a um referencial inercial N fixo no centro da terra se torna

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{B/N} = \vec{\omega}^{B/A} + \vec{\omega}^{A/N} = \vec{\omega}^{B/A} - n\vec{a}_2. \quad (2.51)$$

Substituindo as equações (2.48)-(2.50) na equação (2.51), tem-se

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad (2.52)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} c\theta s\psi \\ s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \end{bmatrix}.$$

Para pequenos desvios da atitude do referencial VLHL, obtém-se a seguinte cinemática da atitude linearizada

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} - n\psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} - n, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + n\phi. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo as equações (2.47) e (2.53) na equação (2.24), tem-se as equações de Euler com o torque de gradiente de gravidade linearizadas

$$T_d = I_x \ddot{\phi} - n(I_x - I_y + I_z) \dot{\psi} + 4n^2(I_y - I_z)\phi + J_z(\dot{\Omega} - n) + \dot{h}_{wx} - nh_{wz} \quad (2.54)$$

$$T_d = I_y \ddot{\theta} + 3n^2(I_x - I_z)\theta + \dot{h}_{wy}, \quad (2.55)$$

$$T_d = I_z \ddot{\psi} + n(I_x - I_y + I_z) \dot{\phi} + n^2(I_y - I_x)\psi + \dot{h}_{wz} + nh_{wx}. \quad (2.56)$$

Nesse trabalho o sistema de controle não será integrado, ou seja, no projeto do controlador não haverá os momentos angulares da roda de reação. O torque da roda de reação será implícito no sinal de controle  $u$ . Dessa forma as equações (2.54)-(2.56) se reduzem a

$$u_x + T_{dx} = I_x \ddot{\phi} - n(I_x - I_y + I_z) \dot{\psi} + 4n^2(I_y - I_z) \phi, \quad (2.57)$$

$$u_y + T_{dy} = I_y \ddot{\theta} + 3n^2(I_x - I_z) \theta, \quad (2.58)$$

$$u_z + T_{dz} = I_z \ddot{\psi} + n(I_x - I_y + I_z) \dot{\phi} + n^2(I_y - I_x) \psi. \quad (2.59)$$

Sendo  $T_{di}$ , os torques magnético e aerodinâmico e  $u_i$  os sinais de controle.

#### 2.2.4 Torque Magnético

A interação de materiais magnéticos dos veículos espaciais com o campo magnético da terra, resulta em um torque que pode ser expresso da seguinte maneira

$$\vec{T}_m = \vec{M} \times \vec{B}, \quad (2.60)$$

sendo  $\vec{M}$  o momento magnético residual do veículo espacial causado pelo magnetismo permanente e induzido, e  $\vec{B}$  é a densidade de fluxo de magnético geocêntrico. A magnitude do campo magnético da terra pode ser aproximado da seguinte forma (WERTZ; LARSON , 1989 )

$$B = \frac{\mu_E}{r^3} (1 + 3\text{sen}^2\Theta)^{1/2}, \quad (2.61)$$

sendo  $r = 6878\text{km}$  a distância do centro do dipolo ao satélite,  $\mu_E = 7,96 \times 10^{15} \text{tesla} \cdot \text{m}^3$  a magnitude do vetor de momento magnético ao longo da direção magnética axial, e  $\Theta$  é a latitude magnética medida do equador geomagnético. Com esses dados temos que para o pior caso o campo magnético será equivalente a  $B = 5 \times 10^{-5}$ . Considerando que o dipolo magnético do satélite  $\vec{M}$  tenha magnitude  $1\text{A} \cdot \text{m}^2$ , tem-se

$$T_m = 5 \times 10^{-5} \text{N} \cdot \text{m}. \quad (2.62)$$

### 2.2.5 Torque Aerodinâmico

O rápido movimento de um veículo espacial na atmosfera causa torque aerodinâmico. O torque pode ser expresso como (WERTZ; LARSON , 1989 )

$$\vec{T}_a = \frac{1}{2}\rho V^2 C_d A (\vec{u} \times \vec{s}_{cp}), \quad (2.63)$$

sendo  $\rho = 3 \times 10^{-11} \text{kg/m}^3$  a densidade atmosférica típica para a altitude,  $C_d = 1,5$  o coeficiente de arrasto,  $V = 7613 \text{m/s}$  a velocidade do veículo espacial,  $A = 0,5 \times 0,6 = 0,3 \text{m}^2$  a área do veículo espacial perpendicular a  $\vec{u}$ ,  $\vec{s}_{cp}$  é o vetor que vai do centro de massa ao centro de pressão e  $\vec{u}$  o vetor unitário na direção da velocidade, sendo neste trabalho  $|\vec{u} \times \vec{s}_{cp}| = 0,04 \text{m}$ . Dessa forma, obtém-se o seguinte resultado

$$T_a = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-11} \times 7613^2 \times 1,5 \times 0,3 \times 0,04 = 1,56 \times 10^{-5} \text{N} \cdot \text{m}. \quad (2.64)$$

A densidade atmosférica  $\rho$  é altamente dependente da atividade solar. Em uma altura de 500 km, do dia para a noite a densidade atmosférica pode variar aproximadamente 2 ordens de magnitude. Da mesma forma, devido a complexa interação magnética entre o vento solar e o campo geomagnético, torna-se trabalhoso encontrar um modelo para campo magnético bem exato. No entanto o pior caso estimado para os torque magnéticos e aerodinâmicos podem ser úteis para análise do projeto do controle de atitude.



### 3 CONTROLE MULTIVARIÁVEL

Neste capítulo é feita uma pequena introdução a sistemas que possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas. É discutido sobre resposta em frequência e valores singulares, que representam o ganho para um sistema multivariável.

#### 3.1 Sistemas MIMO

Um sistema MIMO (Multiple-input and multiple-output) é caracterizado por ser um sistema que possui múltiplas entradas ( $l$  entradas) e múltiplas saídas ( $m$  saídas). As entradas são dadas por um vetor  $u(m \times 1)$  e as saídas são dadas pelo vetor  $y(l \times 1)$ . Quando se faz uma mudança na primeira entrada  $u_1$ , geralmente todas as saídas,  $y_1, y_2, \dots, y_l$  são afetadas. i.e. há uma interação entre as entradas e as saídas. Uma planta não interativa se caracteriza pelo seguinte:  $u_1$  afeta  $y_1$ ,  $u_2$  afeta  $y_2$ , e assim sucessivamente (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005 ; MACIEJOWSKI, 1989 ).

##### 3.1.1 Sistemas de controle com retroação negativa

Para um sistema com retroação de estados dado pela figura 3.1 define-se  $L$  como sendo a função de transferência em malha aberta. Considerando que o “loop” consiste de uma planta  $G$  e um controlador  $K$ , tem-se

$$L = GK$$

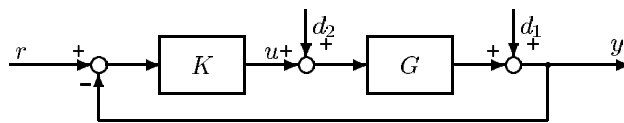


Figura 3.1 - Sistema de controle com retroação negativa.

A sensibilidade e a sensibilidade complementar são definidas como

$$S \triangleq (I + L)^{-1}, \quad (3.1)$$

$$T \triangleq I - S = L(I + L)^{-1}, \quad (3.2)$$

na figura 3.1,  $T$  é a função de transferência de  $r$  a  $y$ , e  $S$  é a função de transferência de  $d_1$  a  $y$ .

### 3.1.2 Resposta em frequência

Uma função de transferência é uma função da variável de Laplace  $s$  e pode ser usada para representar a dinâmica do sistema. Fixando uma frequência  $s = j\omega$ , tem-se uma matriz complexa  $l \times m$  dada por  $G(j\omega)$ . Essa matriz  $G(j\omega)$  representa a resposta a um sinal senoidal de frequência  $\omega$ .

O domínio da frequência é ideal para o estudo de direções em sistemas multivariáveis em qualquer frequência (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005). Considere o sistema dado pela figura 3.2 com entrada  $d$  e saída  $y$ :

$$y(s) = G(s)d(s)$$

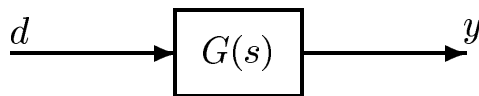


Figura 3.2 - Sistema  $G(s)$  com entrada  $d$  e saída  $y$ .

Os elementos da matriz  $G$  são dados por  $g_{ij}(j\omega)$ , que representa a resposta senoidal da entrada  $j$  à saída  $i$ . Aplica-se uma entrada senoidal no canal  $j$

$$d_j(t) = d_{j0}\text{sen}(\omega t + \alpha_j), \quad (3.3)$$

a saída no canal  $i$  também é um sinal senoidal de mesma frequência

$$y_i(t) = y_{0i}\text{sen}(\omega t + \beta_i), \quad (3.4)$$

sendo que a amplificação (ganho) e o desvio de fase podem ser obtidos da seguinte maneira

$$\frac{y_{io}}{d_{j0}} = |g_{ij}(j\omega)|, \quad (3.5)$$



$$\beta_i - \alpha_j = \angle g_{ij}(i\omega). \quad (3.6)$$

Na notação de fase, pode-se escrever de maneira compacta a resposta senoidal descrita pelas equações (3.3)-(3.6) da seguinte maneira

$$y_i(\omega) = g_{ij}(j\omega)d_j(\omega), \quad (3.7)$$

sendo  $d_j(\omega) = d_{j0}e^{j\alpha_j}$  e  $y_i(\omega) = y_{i0}e^{j\beta_i}$ . É usado  $\omega$  e não  $j\omega$  como argumento de  $d_j(\omega)$  e  $y_i(\omega)$ , no qual indica que estes números são complexos, e representam a magnitude e a fase dos sinais senoidais (3.3) e (3.4) em cada frequência.

A resposta à entradas simultâneas de mesma frequência em múltiplos canais de entrada é, pelo princípio de superposição para sistemas lineares, igual a soma das respostas individuais (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005). Da equação (3.7) tem-se

$$y_i(\omega) = g_{i1}(j\omega)d_1(\omega) + g_{i2}(j\omega)d_2(\omega) + \dots = \sum_j g_{ij}(j\omega)d_j(\omega), \quad (3.8)$$

na forma matricial

$$y(\omega) = G(j\omega)d(\omega), \quad (3.9)$$

com os vetores  $d(\omega)$  e  $y(\omega)$  dados por

$$d(\omega) = \begin{bmatrix} d_1(\omega) \\ d_2(\omega) \\ \vdots \\ d_m(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$y(\omega) = \begin{bmatrix} y_1(\omega) \\ y_2(\omega) \\ \vdots \\ y_m(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Direções em sistemas multivariáveis

Para sistemas SISO,  $y = Gd$ , o ganho em uma dada frequência é dado por

$$\frac{|y(\omega)|}{|d(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)d(\omega)|}{|d(\omega)|} = |G(j\omega)|. \quad (3.12)$$

Pode ser observado que o ganho depende da frequência  $\omega$ , e por se tratar de um sistema linear, não há uma dependência da entrada  $|d(\omega)|$ .

Para sistemas MIMO, essa abordagem não é tão simples, pois os sinais de entrada e de saída são vetores, e é necessário “somar” as magnitudes dos elementos em cada vetor usando alguma norma. Usando a norma-2, tem-se em uma dada frequência  $\omega$  a magnitude do vetor de sinal de entrada

$$\|d(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_j |d_{j\omega}|^2} = \sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots}, \quad (3.13)$$

e a magnitude do vetor de sinal de saída é

$$\|y(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_i |y_{i\omega}|^2} = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}. \quad (3.14)$$

O ganho do sistema  $G(s)$  para um sinal de entrada particular  $d(\omega)$  é dado pela razão

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots}}{\sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots}}. \quad (3.15)$$

Assim como acontece em um sistema SISO o ganho depende da frequência  $\omega$ , e é independente da magnitude da entrada  $\|d(\omega)\|_2$ . No entanto, para um sistema MIMO há alguns graus de liberdade a mais e o ganho também depende das direções da entrada  $d^1$  (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005). O ganho máximo em uma dada direção é o valor singular máximo de  $G$ ,

$$\max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \max_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \bar{\sigma}(G). \quad (3.16)$$

e o ganho mínimo é o valor singular mínimo

$$\min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \min_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \underline{\sigma}(G). \quad (3.17)$$

Essas identidades são verdadeiras porque o ganho é independente da magnitude do

---

<sup>1</sup>O termo direção se refere aos vetores normalizados de comprimento unitário

sinal de entrada para um sistema linear.

### 3.1.4 Valores Singulares

A magnitude dos autovalores de uma função de transferência matricial ( $|\lambda_i(G(j\omega))|$ ), não é a generalização do ganho para um sistema SISO ( $|G(j\omega)|$ ). Os autovalores só podem ser calculados para uma matriz quadrada, e mesmo assim os resultados não são satisfatórios muitas vezes funciona para um caso em particular mas não para outros casos.

Considere um sistema MIMO  $G(j\omega)$  com  $m$  entradas e  $l$  saídas. Qualquer matriz  $G$  (para simplificar  $G(j\omega) \equiv G$ ) pode ser decomposta em valores singulares, que se procede da seguinte maneira:

$$G = U\Sigma V^H. \quad (3.18)$$

- $\Sigma$  é uma matriz  $l \times m$  com  $k = \min\{l, m\}$  valores singulares não negativos,  $\sigma_i$ , que se encontram em ordem decrescente na diagonal principal; os outros elementos fora da diagonal são todos zeros (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005; MACIEJOWSKI, 1989). Os valores singulares são as raízes quadradas positivas dos autovalores de  $G^H G$ , sendo  $G^H$  a transposta da complexa conjugada de  $G$ ,

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)}. \quad (3.19)$$

- $U$  é uma matriz  $l \times l$  das saídas dos vetores singulares,  $u_i$ .
- $V$  é uma matriz  $m \times m$  das entradas dos vetores singulares,  $v_i$ .

### 3.1.5 Direções de saída e de entrada

Os vetores das colunas de  $U$ , denotados por  $u_i$ , representam as direções de saídas da planta. Eles são ortogonais e de comprimento unitário (ortonormal) i.e.

$$\|u_i\|_2 = \sqrt{|u_{i1}|^2 + |u_{i2}|^2 + \dots + |u_{il}|^2} = \mathbf{1}, \quad (3.20)$$

$$u_i^H u_i = 1, \quad u_i^H u_j = 0, \quad i \neq j. \quad (3.21)$$

Da mesma forma, os vetores das colunas de  $V$ , denotados por  $v_i$ , são ortogonais

e de comprimento unitário, e representam as direções das entradas. Essas direções de entrada e de saídas então relacionadas pelos valores singulares. Visto que  $V$  é unitária tem-se  $V^H V = I$ , de acordo com a equação (3.18) pode-se escrevê-la como  $GV = U\Sigma$ , que para a coluna  $i$  tem-se

$$Gv_i = u_i\sigma_i, \quad (3.22)$$

sendo  $v_i$  e  $u_i$  vetores e  $\sigma_i$  escalar. O que quer dizer que ser for considerado uma entrada na direção  $v_i$ , a saída será na direção  $u_i$ . Dessa forma, se  $\|v_i\|_2 = 1$  e  $\|u_i\|_2 = 1$  pode ser observado que o  $i$ -ésimo valor singular  $\sigma$  é o ganho da matriz  $G$  nessa direção. Em outras palavras

$$\sigma_i(G) = \|Gv_i\|_2 = \frac{\|Gv_i\|_2}{\|v_i\|_2}. \quad (3.23)$$

Algumas vantagens da decomposição em valores singulares para analisar os ganho de um sistema multivariável são (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005):

- Os valores singulares fornecem melhores informações sobre os ganhos da planta.
- As direções obtidas da decomposição em valores singulares são ortogonais.
- A decomposição em valores singulares aplica-se diretamente à plantas não quadradas.

### 3.1.6 Valores singulares máximos e mínimos

Pode ser mostrado também que o maior ganho para qualquer direção de entrada é igual ao máximo valor singular

$$\bar{\sigma}(G) \equiv \sigma_1(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_1\|_2}{\|v_1\|_2}, \quad (3.24)$$

e o menor ganho para qualquer direção de entrada é igual ao mínimo valor singular

$$\underline{\sigma}(G) \equiv \sigma_k(G) = \min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_k\|_2}{\|v_k\|_2}, \quad (3.25)$$

sendo  $k = \min\{l, m\}$ . Assim, para qualquer vetor  $d$ , que não esteja no espaço nulo de  $G$ , tem-se

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} \geq \bar{\sigma}(G). \quad (3.26)$$

Definindo  $u_1 = \bar{u}$ ,  $v_1 = \bar{v}$ ,  $u_k = \underline{u}$  e  $v_k = \underline{v}$ , e segue que

$$\begin{aligned} G\bar{v} &= \bar{\sigma}\bar{u} \\ G\underline{v} &= \underline{\sigma}\underline{u}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

O vetor  $\bar{v}$  corresponde à direção de entrada com a maior amplificação, e  $\bar{u}$  é a correspondente direção de saída em que as entradas são mais efetivas. As direções envolvendo  $\bar{v}$  e  $\bar{u}$  são algumas vezes referidas como as direções de “maiores ganhos” ou “mais importantes”. Por outro lado as direções associadas com  $\underline{v}$  e  $\underline{u}$  são referidas como sendo as direções “menos importantes” ou de “menores ganhos”.



## 4 MODELOS DE INCERTEZA E ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Neste capítulo será estudado modelos dinâmicos na presença de incertezas. A incerteza que será considerada é a incerteza paramétrica.

### 4.1 Incertezas

Ao projetar um sistema de controle usa-se um sistema simplificado para facilitar o projeto, porém o controlador deve ser aplicado a um sistema físico real que é não linear e está sujeita à perturbações externas. Quando o controlador mantém o sistema estável mesmo diante de todas as perturbações e não linearidades, diz-se que o controlador é robusto. A principal ideia de um controlador robusto é que as especificações do projeto sejam satisfeitas mesmo diante do pior caso de incerteza.

No projeto deve-se determinar as incerteza do sistemas, ou seja, encontrar um modelo matemático do sistema com incerteza, posteriormente verificar a estabilidade robusta para saber se o sistema permanece estável para todo conjunto de incertezas e por último determinar o desempenho robusto, que implica em verificar se as especificações são satisfeitas para todo o conjunto de incertezas. Incertezas na planta do modelo pode ter várias origens:

- Sempre há parâmetros no modelo linear que não são muito bem conhecidos pelo projetista.
- Os parâmetros no modelo linear podem variar devido às não linearidades ou mudanças nas condições de operação.
- Os instrumentos de medidas não são perfeitos e podem oferecer valores um pouco diferentes dos valores reais.
- Em altas frequências tanto a estrutura quanto a ordem do modelo são desconhecidos.
- Mesmo quando um modelo do sistema bem detalhado está disponível, prefere-se trabalhar com um modelo nominal (ordem baixa) e representar a dinâmica negligenciada como incerteza.

Essas fontes de incertezas mencionadas acima podem ser divididas em dois tipos:

- a) **Incerteza paramétrica:** A estrutura do modelo é conhecida (incluindo a ordem), mas alguns parâmetros são incertos.

- b) **Incerteza dinâmica:** Há erros no modelo por causa da dinâmica negligenciada durante a linearização. Qualquer modelo de um sistema real irá conter essa fonte de incerteza.

Para quantificar a incerteza paramétrica considera-se que cada parâmetro é delimitado dentro de uma região  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ . Os parâmetros são representados da seguinte forma:

$$\alpha_p = \bar{\alpha}(1 + r_\alpha \Delta),$$

sendo  $\bar{\alpha}$  é o valor nominal ou valor médio do parâmetro,  $r_\alpha = (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})/(\alpha_{\max} + \alpha_{\min})$  é a incerteza relativa no parâmetro, e  $\Delta$  é um escalar real que satisfaz  $|\Delta| \leq 1$ .

Incerteza dinâmica é menos precisa e mais difícil de quantificar, porém é representada no domínio da frequência. Dessa forma, a incerteza dinâmica é uma perturbação complexa que é normalizada tal que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . Neste trabalho será considerado apenas incertezas paramétricas.

Incertezas paramétricas são algumas vezes chamadas de incertezas estruturadas e incertezas dinâmicas são chamadas de incertezas não estruturadas. Incertezas paramétricas afetam o desempenho em baixa frequência (DA-WEI GU et al. , 2005 ).

Uma maneira geral de manipular incertezas paramétricas foi proposta no trabalho ( PACKARD, 1988 ). Considera-se o modelo no espaço de estados:

$$\dot{x} = A_p x + B_p u, \quad (4.1)$$

$$y = C_p x + D_p u. \quad (4.2)$$

Assume que a incerteza é causada pela variação de alguns parâmetros reais  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$  (que pode ser temperatura, massa, volume, etc), e assume-se também que as matrizes do espaço de estados dependem linearmente desses parâmetros, i.e.

$$A_p = A + \sum \delta_i A_i, \quad (4.3)$$

$$B_p = B + \sum \delta_i B_i, \quad (4.4)$$

$$C_p = C + \sum \delta_i C_i, \quad (4.5)$$

$$D_p = D + \sum \delta_i D_i. \quad (4.6)$$

A, B, C e D são as matrizes do modelo nominal do sistema. Essa descrição têm múltiplas perturbações, e não pode ser representada como apenas uma perturbação.



Essas perturbações que afetam A, B, C e D podem ser colocadas juntas em uma matriz diagonal  $\Delta$  com  $\delta_i$ 's ao longo da diagonal.

## 4.2 Transformação Linear Fracionária (TLF)

A configuração geral da representação da incerteza em um sistema é dada pela figura 4.1. Essa tipo de representação foi feita pela primeira vez em 1950 em análise de circuitos, e mais tarde foi aplicado no estudo de controle robusto ( SAFONOV, 1982 ).

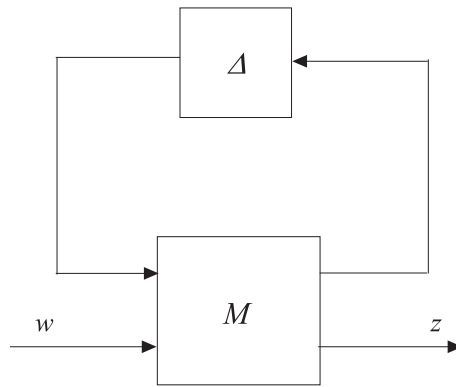


Figura 4.1 - Configuração padrão  $M - \Delta$

A função de transferência de correlação M na figura 4.1 é dada por

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

sendo a dimensão de  $M_{11}$  de acordo com a dimensão de  $\Delta$ . A relação entre a entrada e a saída é dada por

$$z = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]w, \quad (4.8)$$

considerando que  $I - M_{11}\Delta$  seja invertível. Tem-se então

$$z = F(M, \Delta)w, \quad (4.9)$$

$$F(M, \Delta) = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]. \quad (4.10)$$

$F(M, \Delta)$  é chamada de transformação linear fracionária (Linear fractional transformation) de  $M$  e  $\Delta$ . O bloco  $M$  fecha o loop com  $\Delta$  por cima, por esse motivo essa transformação fracionária também é conhecida como transformação linear fracionária superior, e descrita com o  $u$  subscrito, i.e.  $F_u(M, \Delta)$ , para mostrar como acontece a conexão. Da mesma maneira acontece a transformação linear fracionária inferior que geralmente é usada para indicar a presença de um controlador  $K$  no sistema. Essa transformação pode ser observada na figura 4.2 e é definida por

$$F_l(M, K) = [M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}]. \quad (4.11)$$

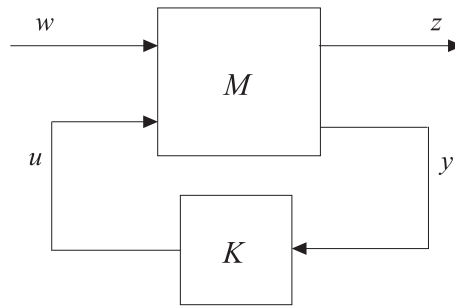


Figura 4.2 - Configuração LFT inferior.

Um microssatélite com incertezas paramétricas pode ser representado de acordo com a figura 4.1.

### 4.3 Ângulo de Pitch com Incerteza Aditiva

Nesta seção será considerado apenas a equação do ângulo de pitch do microssatélite. Esse microssatélite possui incerteza no momento de inércia, ou seja, tem-se uma incerteza paramétrica. A equação é dada por

$$I_y \ddot{\theta} + 3n^2(I_x - I_z)\theta = u_y + d, \quad (4.12)$$

o diagrama de blocos do sistema pode ser observado na figura 4.3.

O valor realístico dos momentos de inércia não são conhecidos, pois eles podem

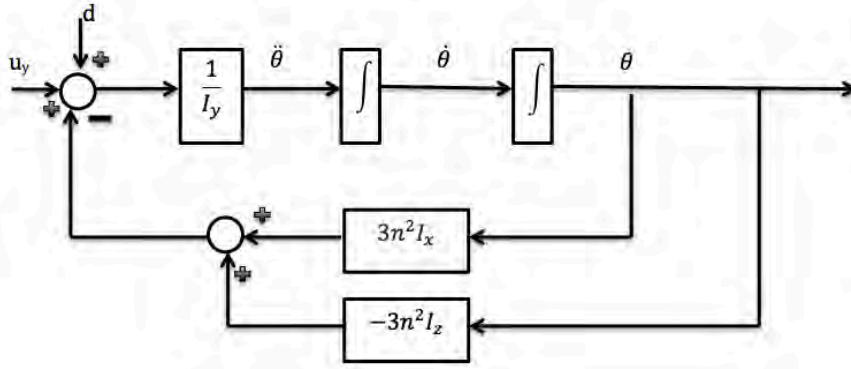


Figura 4.3 - Diagrama de blocos para o ângulo de pitch.

sofrer variações. Portanto define-se o valor dos momentos de principais inércia dentro de um certo intervalo

$$I_i = \bar{I}_i + p_i \delta_i \quad |\delta_i| \leq 1, i=x, y, z \quad (4.13)$$

sendo  $\bar{I}_i$  o valor nominal para o momento de inércia e  $p_i$  a variação do momento de inércia. Neste caso está sendo considerado uma variação de 10%, então  $-10\% \times I_i < p_i < 10\% \times I_i$  (YANGA; SUN, 2005).

Os três blocos constantes da figura 4.3 podem ser escritos em termos de  $\bar{I}_i$ ,  $p_i$  e  $\delta_i$ .

Usando o conceito das transformações lineares fracionárias, o primeiro bloco pode ser representado da seguinte maneira

$$\frac{1}{I_y} = \frac{1}{\bar{I}_y + p_y \delta_y}, \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{\bar{I}_y} - \frac{p_y}{\bar{I}_y} \delta_y \left(1 + \frac{1}{\bar{I}_y} \delta_y\right)^{-1} \frac{1}{\bar{I}_y}, \quad (4.15)$$

comparando com a equação (4.8), chega-se a seguinte matriz

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{p_y}{\bar{I}_y} & \frac{1}{\bar{I}_y} \\ -\frac{p_y}{\bar{I}_y} & \frac{1}{\bar{I}_y} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

De maneira similar para segundo e terceiro bloco:

$$3n^2 I_x = 3n^2 (\bar{I}_x + p_x \delta_x), \quad (4.17)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3n^2 p_x & 3n^2 \bar{I}_x \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$3n^2 I_z = 3n^2 (\bar{I}_z + p_x \delta_z), \quad (4.19)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3n^2 p_z & -3n^2 \bar{I}_z \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Para representar o modelo do sistema como uma TLF das perturbações reais  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\delta_z$  usa-se o diagrama de blocos dado pela figura 4.4, e denota-se as entradas e as saídas de  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\delta_z$  como sendo  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  respectivamente.

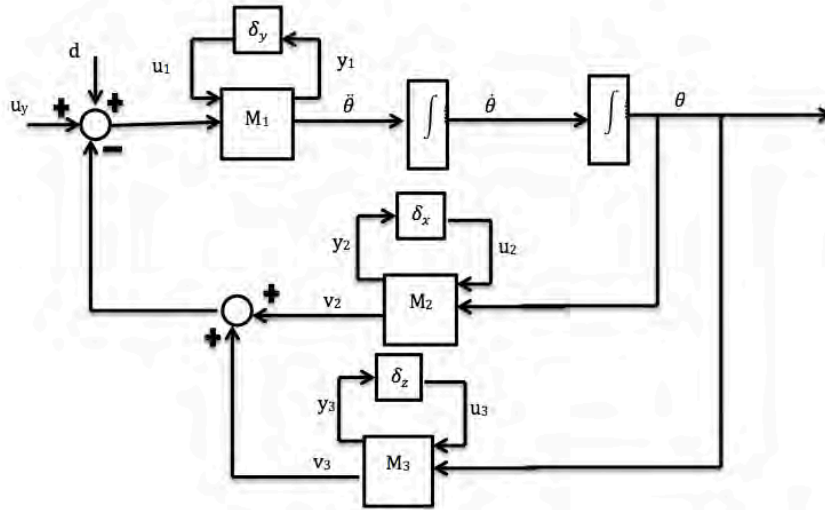


Figura 4.4 - Diagrama de blocos para o ângulo de pitch com incerteza.

As equações que relacionam as entradas com as saídas são dadas por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{p_y}{I_y} & \frac{1}{I_y} \\ -\frac{p_y}{I_y} & \frac{1}{I_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_y + d - (v_2 + v_3) \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3n^2 p_x & 3n^2 \bar{I}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3n^2 p_z & -3n^2 \bar{I}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

definindo  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  e  $y = \theta$ , obtém-se as seguintes equações:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{p_y}{\bar{I}_y} u_1 + \frac{1}{\bar{I}_y} (u_y + d - v_3 - v_2), \quad (4.25)$$

$$y_1 = -\frac{p_y}{\bar{I}_y} u_1 + \frac{1}{\bar{I}_y} (u_y + d - v_3 - v_2), \quad (4.26)$$

$$y_2 = x_1, \quad (4.27)$$

$$y_3 = -x_1, \quad (4.28)$$

$$v_2 = 3n^2 (p_x u_2 + \bar{I}_x x_1), \quad (4.29)$$

$$v_3 = 3n^2 (p_z u_3 - \bar{I}_z x_1). \quad (4.30)$$

$$(4.31)$$

Eliminando  $v_2$  e  $v_3$

$$-v_3 - v_2 = 3n^2 (-p_z u_3 + \bar{I}_z x_1 - p_x u_2 - \bar{I}_x x_1), \quad (4.32)$$

$$= 3n^2 [-p_z u_3 - p_x u_2 + (\bar{I}_z - \bar{I}_x) x_1]. \quad (4.33)$$

Então

$$\dot{x}_2 = -3n^2 \frac{(\bar{I}_x - \bar{I}_z)}{\bar{I}_y} x_1 - \frac{p_y}{\bar{I}_y} u_1 - 3n^2 \frac{p_x}{\bar{I}_y} u_2 - 3n^2 \frac{p_z}{\bar{I}_y} u_3 + \frac{1}{\bar{I}_y} u_y + \frac{1}{\bar{I}_y} d, \quad (4.34)$$

e

$$y_1 = -3n^2 \frac{(\bar{I}_x - \bar{I}_z)}{\bar{I}_y} x_1 - \frac{p_y}{\bar{I}_y} u_1 - 3n^2 \frac{p_x}{\bar{I}_y} u_2 - 3n^2 \frac{p_z}{\bar{I}_y} u_3 + \frac{1}{\bar{I}_y} u_y + \frac{1}{\bar{I}_y} d. \quad (4.35)$$

A representação no espaço de estados é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2, \\ C_1 & D_{11} & D_{12}, \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3n^2(I_x - I_z)}{I_y} & 0 & -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \\ \frac{-3n^2(I_x - I_z)}{I_y} & 0 & -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ d \\ u \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3n^2(I_x - I_z)}{I_y} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_y} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A planta  $P$  que denota a entrada e a saída do sistema leva em consideração as incertezas do momento de inércia é ilustrada na figura 4.5.  $P$  tem quatro entradas ( $u_1, u_2, u_3, u_y$ ), quatro saídas ( $y_1, y_2, y_3, y$ ) e dois estados ( $x_1, x_2$ ).

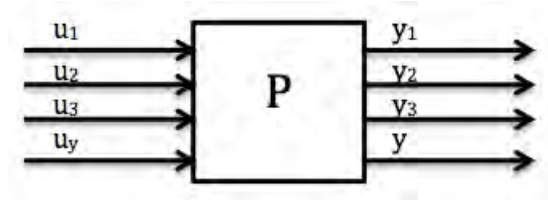


Figura 4.5 - Entradas e saídas na planta generalizada  $P$ .

O sistema com incerteza é representado como uma transformação matricial fracionária superior

$$y = F_u(P, \Delta)u, \quad (4.37)$$

com a matriz de incerteza diagonal  $\Delta = \text{diag}(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ , como está na figura 4.6. Pode-se notar que a matriz  $\Delta$ , que será chamada de matriz de incerteza, possui uma estrutura fixa, o que caracteriza uma incerteza estruturada (paramétrica).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_y & 0 & 0 \\ 0 & \delta_x & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

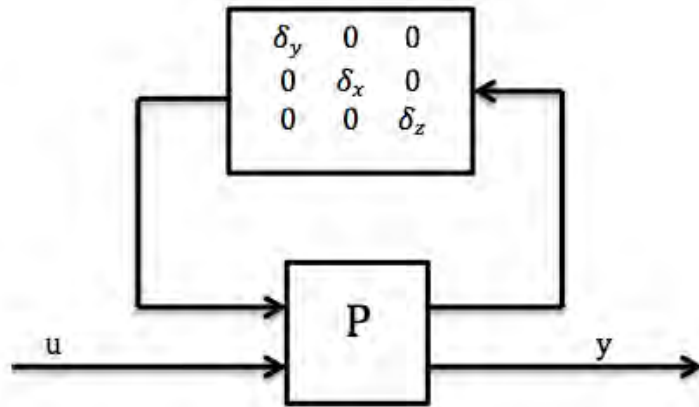


Figura 4.6 - Representação da TLF do sistema com incertezas.

A figura 4.7 mostra a resposta em frequência para o ângulo de pitch com incerteza.

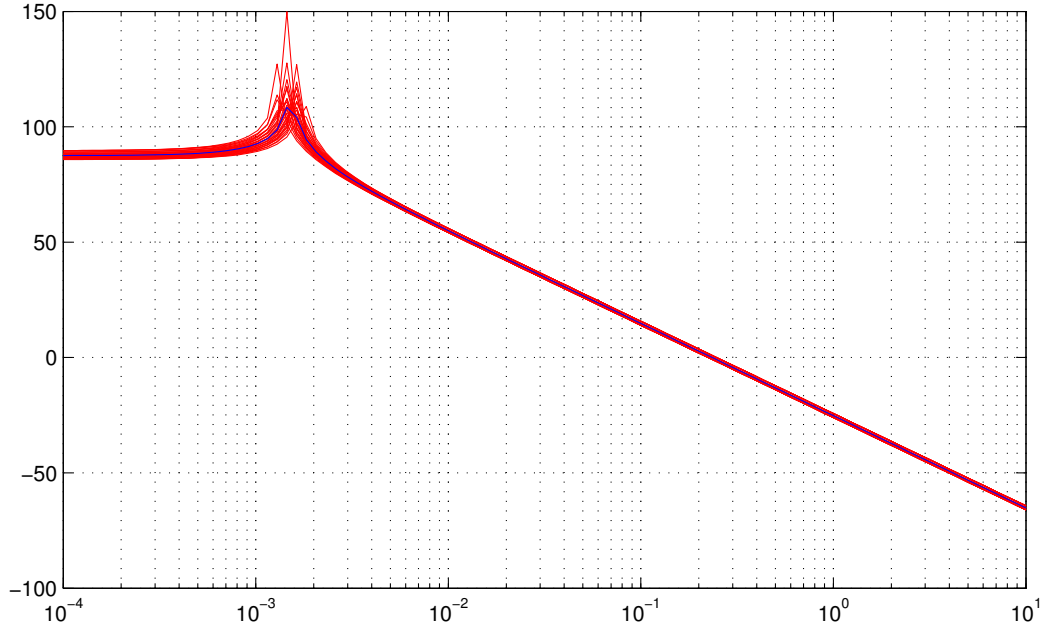


Figura 4.7 - Valor singular do ângulo de pitch com incerteza.

#### 4.4 Ângulos de Roll/Yaw com Incerteza Aditiva

Nesta seção será considerado os ângulos de roll/yaw com incerteza. As equações de Euler para os ângulos de roll/yaw (2.57) e (2.59) podem ser representadas na forma matricial

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = Gu + Td, \quad (4.39)$$

sendo

$$M = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -n(I_x - I_y + I_z) \\ n(I_x - I_y + I_z) & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 4n^2(I_y - I_z) & 0 \\ 0 & n^2(I_y - I_x) \end{bmatrix}, \quad G = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



e  $X = \begin{bmatrix} \phi & \psi \end{bmatrix}$  o vetor do espaço de estados dos ângulos de Euler.

Esse sistema matricial está sujeito à incerteza no momento de inércia. De maneira análoga ao ângulo de pitch essa incerteza é dada por

$$I_i = \bar{I}_i + p_i \delta_i \quad |\delta_i| \leq 1, i=x,y,z \quad (4.40)$$

- Primeiro bloco

Usando o conceito das transformações lineares fracionárias, ao inserir a incerteza no primeiro bloco, tem-se o seguinte

$$M = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_x + p_x \delta_x & 0 \\ 0 & \bar{I}_z + p_z \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$M = \begin{bmatrix} \bar{I}_x & 0 \\ 0 & \bar{I}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x & 0 \\ 0 & p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x & 0 \\ 0 & \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$M = \bar{M} + M_p \Delta_m, \quad (4.43)$$

a inversa é dada por

$$M^{-1} = (M_p^{-1} \bar{M} + \Delta_m)^{-1} M_p^{-1}. \quad (4.44)$$

Usando o lema de inversão de matriz

$$M^{-1} = \bar{M}^{-1} - \bar{M}^{-1} M_p \Delta_m (I_{2 \times 2} + \bar{M}^{-1} M_p \Delta_m)^{-1} \bar{M}^{-1} \quad (4.45)$$

A formulação geral da TLF é dada por

$$F_u(Q_M, \Delta_M) = Q_{M22} + Q_{M21} \Delta_D (I - Q_{M11} \Delta_M)^{-1} Q_{M12}, \quad (4.46)$$

sendo  $Q_{M11} = -\bar{M}^{-1} M_p$ ,  $Q_{M12} = \bar{M}^{-1}$ ,  $Q_{M21} = -\bar{M}^{-1} M_p$  e  $Q_{M22} = \bar{M}^{-1}$ . Dessa forma, tem-se

$$Q_M = \begin{bmatrix} -\bar{M}^{-1}M_p & \bar{M}^{-1} \\ -\bar{M}^{-1}M_p & \bar{M}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

- Segundo bloco

Para o segundo bloco com incerteza tem-se a seguinte matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -n(\bar{I}_x + p_x\delta_x - \bar{I}_y - p_y\delta_y + \bar{I}_z) + p_z\delta_z \\ n(\bar{I}_x + p_x\delta_x - \bar{I}_y - p_y\delta_y + \bar{I}_z) + p_z\delta_z & 0 \end{bmatrix}.$$

Após algumas manipulações, obtém-se

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -n(\bar{I}_x - \bar{I}_y + \bar{I}_z) \\ n(\bar{I}_x - \bar{I}_y + \bar{I}_z) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -p_x & 0 & -p_z & 0 & -p_y \\ p_x & 0 & p_z & 0 & p_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \bar{D} + D_p\Delta_d\Pi_d. \quad (4.48)$$

A formulação geral TLF é dada por

$$F_u(Q_D, \Delta_D) = Q_{D22} + Q_{D21}\Delta_D(I - Q_{D11}\Delta_D)^{-1}Q_{D12}, \quad (4.49)$$

sendo  $Q_{D11} = 0_{6 \times 6}$ ,  $Q_{D12} = \Pi_D$ ,  $Q_{D21} = D_p$  e  $Q_{D22} = \bar{D}$ . Dessa forma, tem-se

$$Q_D = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & \Pi_D \\ D_p & \bar{D} \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

- Terceiro bloco

O terceiro bloco com incerteza é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 4n^2(\bar{I}_y + p_x\delta_x - \bar{I}_z) - p_z\delta_z & 0 \\ 0 & n^2(\bar{I}_y + p_y\delta_y - \bar{I}_x - p_x\delta_x) \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Após algumas manipulações, obtém-se

$$K = \begin{bmatrix} 4n^2(\bar{I}_y - \bar{I}_z) & 0 \\ 0 & n^2(\bar{I}_y - \bar{I}_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_y & 0 & 0 & 0 & -4p_z & 0 \\ 0 & p_y & 0 & 0 & 0 & -p_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta_z & 0 \\ 0 & \delta_x \end{bmatrix}$$

$$K = \bar{K} + K_p \Delta_K \Pi_K \quad (4.52)$$

Forma geral da TLF

$$F_u(Q_K, \Delta_K) = Q_{K22} + Q_{K21} \Delta_K (I - Q_{K11} \Delta_K)^{-1} Q_{K12}, \quad (4.53)$$

sendo  $Q_{K11} = 0_{6 \times 6}$ ,  $Q_{K12} = \Pi_K$ ,  $Q_{K21} = K_p$  e  $Q_{K22} = \bar{K}$ . Dessa forma, tem-se

$$Q_K = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & \Pi_K \\ K_p & \bar{K} \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

O diagrama de blocos do sistema com incerteza é dado pela figura 4.8.

As equações que relacionam as entradas com as saídas são dadas por

$$\begin{bmatrix} y_M \\ \ddot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{M}^{-1} M_p & \bar{M}^{-1} \\ -\bar{M}^{-1} M_p & \bar{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_M \\ Gu + Td - (v_D + v_K) \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$$\begin{bmatrix} y_D \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & \Pi_D \\ D_p & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_D \\ \dot{X} \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

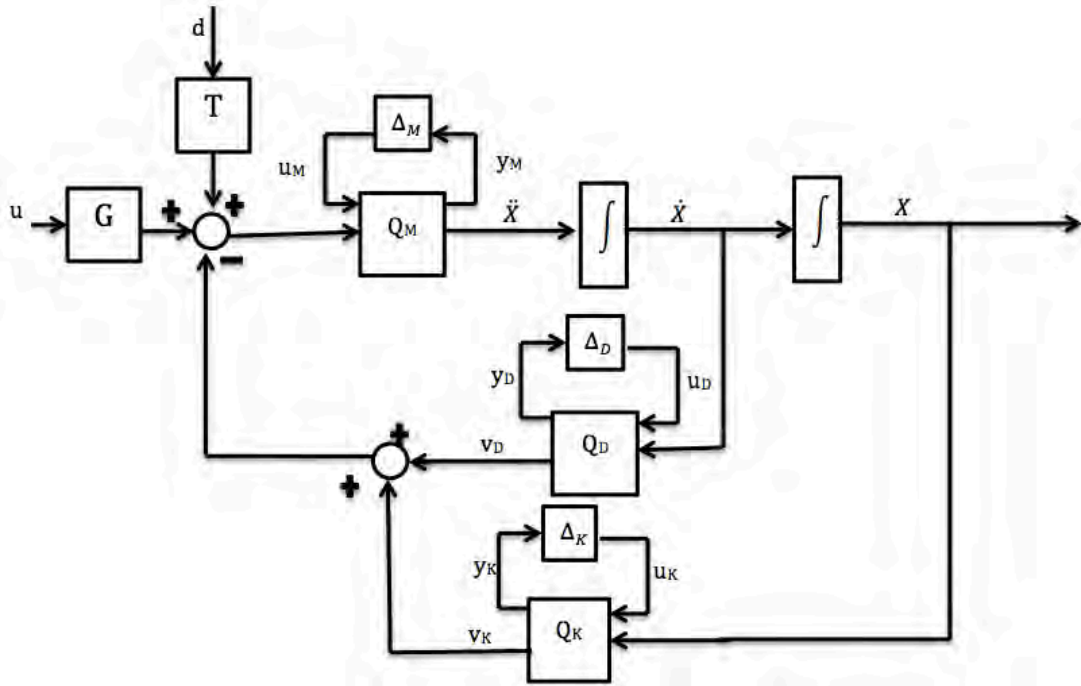


Figura 4.8 - Planta com incerteza para roll e yaw

$$\begin{bmatrix} y_K \\ v_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & \Pi_K \\ K_p & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_K \\ X \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Definindo  $x_1 = \phi$ ,  $x_2 = \psi$ ,  $x_3 = \dot{\phi}$  e  $x_4 = \dot{\psi}$ . As equações no espaço de estados serão

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (4.58)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (4.59)$$

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = -\bar{M}^{-1}M_p u_M + \bar{M}^{-1}Gu + \bar{M}^{-1}Td - \bar{M}^{-1}(v_D + v_K) \quad (4.60)$$

$$y_M = \bar{M}^{-1}M_p u_M + \bar{M}^{-1}Gu + \bar{M}^{-1}Td - \bar{M}^{-1}(v_D + v_K) \quad (4.61)$$

$$y_D = \Pi_D \dot{X} \quad (4.62)$$

$$y_K = \Pi_K X \quad (4.63)$$

$$v_D = D_p u_D + \bar{D} \dot{X} \quad (4.64)$$

$$v_K = K_p u_K + \bar{K} X \quad (4.65)$$

Para eliminar  $v_D$  e  $v_K$  faz-se o seguinte:

$$v_D + v_K = D_p u_D + \bar{D}\dot{X} + K_p u_K + \bar{D}X, \quad (4.66)$$

dessa forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = -\bar{M}^{-1}\bar{K}X - \bar{M}^{-1}\bar{D}\dot{X} - \bar{M}^{-1}M_p u_M - \bar{M}^{-1}D_p u_D - \bar{M}^{-1}K_p u_K + \bar{M}^{-1}Td + \bar{M}^{-1}Gu.$$

De maneira análoga

$$y_M = -\bar{M}^{-1}\bar{K}X - \bar{M}^{-1}\bar{D}\dot{X} - \bar{M}^{-1}M_p u_M - \bar{M}^{-1}D_p u_D - \bar{M}^{-1}K_p u_K + \bar{M}^{-1}Td + \bar{M}^{-1}Gu.$$

Colocando as equações acima no formato matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ y_M \\ y_D \\ y_K \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{D} & -\bar{M}^{-1}M_p & -\bar{M}^{-1}D_p & -\bar{M}^{-1}K_p & \bar{M}^{-1}T & \bar{M}^{-1}G & \\ & -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{D} & -\bar{M}^{-1}M_p & -\bar{M}^{-1}D_p & -\bar{M}^{-1}K_p & \bar{M}^{-1}T & \bar{M}^{-1}G & \\ 0 & & \Pi_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \Pi_K & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_M \\ u_D \\ u_K \\ d \\ u \end{bmatrix},$$

O sistema com incerteza é representado como uma transformação matricial fracionária superior

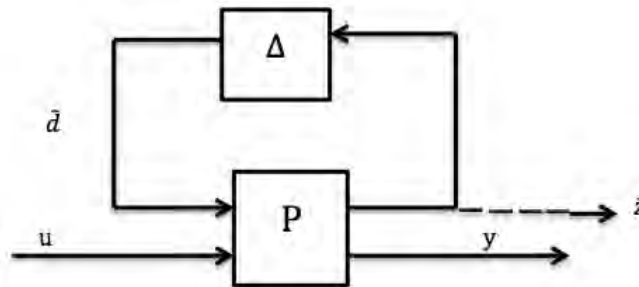


Figura 4.9 - Representação da TLF do sistema com incertezas.

A relação das entradas com as saídas do bloco de incertezas é dada por

$$\begin{bmatrix} u_M \\ u_D \\ u_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_D & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_M \\ y_D \\ y_K \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Escrevendo (4.67) de maneira reduzida

$$\tilde{d} = \Delta \tilde{z}.$$

$\Delta$  é a matriz de ganho normalizada das incertezas nos momentos de inércia,  $\tilde{z}$  é a saída do sistema nominal para o bloco das incertezas, e  $\tilde{z}$  é a entrada do bloco das incertezas no sistema nominal.

## 5 CONTROLE ÓTIMO

O objetivo da teoria de controle ótimo é determinar os sinais de controle que resultam em um processo que satisfaça os vínculos físicos e ao mesmo tempo minimize ou maximize algum critério de performance (KIRK , 2004).

### 5.1 Regulador Linear Quadrático (LQR)

O problema do regulador consiste em aplicar uma entrada de controle em uma planta em que os estados são diferentes de zero e fazer com que os estados sejam zero ou um valor próximo de zero. Este problema geralmente ocorre em quando a planta está sujeita a perturbações não desejadas (a atitude de uma satélite por exemplo).

No caso do regulador linear quadrático (LQR), assume-se que todos os estados estão disponíveis para realimentação. Considere a dinâmica do sistema dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (5.2)$$

sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$ ,  $B$  uma matriz  $n \times m$ ,  $C$  uma matriz  $k \times n$  e  $D$  uma matriz  $k \times m$ .

Define-se uma função de custo dada por

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt. \quad (5.3)$$

O funcional  $J$  representa a soma da energia dos estados e do sinal de controle que deve ser minimizado em relação ao sinal de controle  $u$ . A matriz de peso  $Q$  é uma matriz semi-definida positiva que penaliza os estados e a matriz de peso  $R$  é uma matriz definida positiva e penaliza os sinais de controle. Se a matriz  $Q$  aumenta enquanto  $R$  permanece constante, o tempo de acomodação será reduzido assim como os estados aproximarão de zero com uma razão maior. Se  $R$  é muito maior se comparado com  $Q$ , a energia de controle é penalizada de maneira mais intensa.

Para resolver o problema de controle ótimo usa-se o princípio de Pontriagin (KIRK

, 2004). Primeiro, definisse a hamiltoniana

$$H(x, \lambda, t) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu). \quad (5.4)$$

De acordo com o princípio de minimização, o controle ótimo e as trajetórias dos estados devem satisfazer as seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \\ -\dot{\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo  $x(0) = x_0$  o estado e  $\lambda(T) = 0$  é o vínculo.

Usando o sistema dado pela equação (5.1), as equações se tornam

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ -\dot{\lambda} &= Qx + A^T \lambda, \\ u^* &= -R^{-1} B^T \lambda, \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo  $u^*$  o sinal de controle ótimo e  $R$  uma matriz positiva definida na qual a sua inversa existe. As equações diferenciais acima formam um problema de valor de contorno em dois pontos que por causa da condição de contorno mista, torna-se difícil encontrar uma solução numérica. Escrevendo (5.6) no formato de espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

A matrix no lado direito é conhecida como a matrix hamiltoniana,  $H$ , e possui uma importância muito grande na teoria do LQR. O problema de valor de contorno em dois pontos não precisa necessariamente ser resolvido, para isso faz-se a seguinte substituição

$$\lambda = Px, \quad (5.8)$$

Diferenciando ambos os lados da equação (5.8) e substituindo na equação (5.7),



tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dP}{dt}x + P\frac{dx}{dt}, \\ &= \frac{dP}{dt}x + PAx - PBR^{-1}B^T Px,\end{aligned}\tag{5.9}$$

e inserindo o  $\dot{\lambda}$  da equação (5.6)

$$-Qx - A^T Px = \frac{dP}{dt}x + PAx - PBR^{-1}B^T Px.\tag{5.10}$$

A equação (5.10) deve ser verdadeira para qualquer  $x$ , assim uma condição suficiente para o controle ótimo é que  $P$  deve satisfazer

$$\frac{dP}{dt} = Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P.\tag{5.11}$$

A equação (5.11) é conhecida como a equação diferencial de Riccati. É uma equação diferencial não linear de primeira ordem. A formulação apresentada para a solução do LQR é conhecida como o problema de tempo finito. Toda essa formulação do LQR resulta em um controlador com retroação de estados linear variante no tempo, dado por

$$u(t) = -K(t)x(t),\tag{5.12}$$

sendo  $K(t) = R^{-1}B^T P(t)$ .

Na situação em que o processo a ser controlado reside em um intervalo de tempo infinito fornece uma solução simples para encontrar o controlador do LQR (KIRK, 2004). Se o par  $(A, B)$  é controlável, o par  $(A, C)$  é observável e as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $R$  e  $Q$  são constantes,  $P(t) \rightarrow P$  (uma matriz constante) quando  $t_f \rightarrow \infty$ . Se estas condições são satisfeitas, a lei de controle ótimo para um processo de duração infinita é estacionária. Dessa forma a equação diferencial de Riccati (5.11) passa a ser uma equação algébrica

$$PA + A^T P + C^T QC - PBR^{-1}B^T P = 0,\tag{5.13}$$

pois,  $\frac{dP}{dt} = 0$  na equação (5.11). Dessa forma o sinal de controle que minimiza o

funcional  $J$  é dado por

$$u(t) = -K_r x(t), \quad (5.14)$$

sendo  $K_r = R^{-1}B^T P$ ,

Substituindo a equação (5.14) na equação (5.1) ter-se-á o controle da dinâmica em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - BK_r)x(t). \quad (5.15)$$

Uma propriedade do controlador LQR é que se o sistema é controlável e observável o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, ou seja, os auto-valores de  $A - BK_r$  possuem a parte real negativa.

## 5.2 Filtro de Kalman

Quando não se tem todos os estados disponíveis para realimentação, é necessário estimar estes estados, para isso usa-se o filtro de Kalman. O filtro de Kalman é um estimador recursivo usado amplamente, pois é de fácil implementação e devido a sua natureza recursiva há uma economia de memória de armazenamento, já que as observações são processadas à medida que vão sendo coletadas (KUGA , 2005; GREWAL E ANDREWS, 2001 ).

Uma abordagem do filtro de Kalman pode ser feita para o caso de um sistema contínuo e invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + G_w w, \\ y(t) &= Cx(t) + \nu. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A covariância dos ruídos dinâmicos será  $E\{ww^T\} = W > 0$  e a covariância dos ruídos de medida será  $E\{\nu\nu^T\} = V > 0$ .

Se o sistema for observável é possível encontrar um ganho ótimo, conhecido como ganho de Kalman, capaz de estimar os estados não disponíveis para medida. Neste caso o filtro de Kalman terá a forma de um observador de estados, que tem como entrada os vetores de saída  $y$  e o sinal de controle  $u$  e como saída o vetor de estado estimado  $\hat{x}$ . O filtro de Kalman utiliza a matriz de ganho ótima dada por

$$K_f = P_f C^T V^{-1}, \quad (5.17)$$

sendo que  $P_f = P_f^T \geq 0$  é solução única da equação de Riccati invariante no tempo dada por

$$P_f A^T + A P_f + P_f C^T V^{-1} C P_f + B W B^T = 0. \quad (5.18)$$

Dessa forma a equação de estados do filtro de Kalman será

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x} + B u + K_f (y - C \hat{x}). \quad (5.19)$$

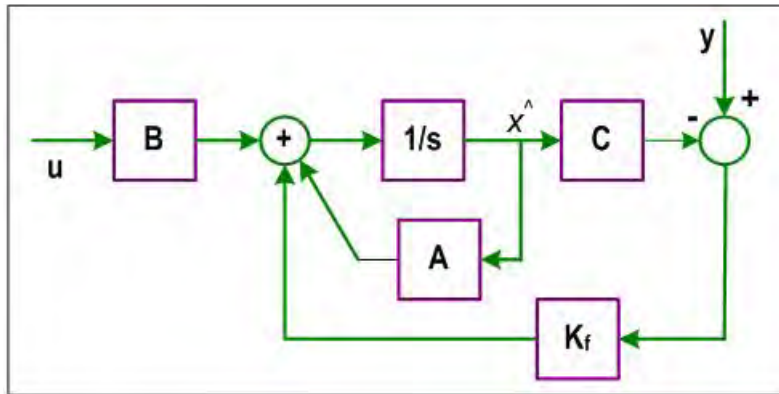


Figura 5.1 - Estrutura do filtro de Kalman.

### 5.3 Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)

Considerando uma planta em que nem todos os estados estão disponíveis para realimentação e o sinal de medida é corrompida por ruídos, temos a seguinte dinâmica do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + G_w w, \\ y(t) &= Cx(t) + D_2 \nu. \end{aligned} \quad (5.20)$$

O LQG é a técnica de controle que combina o LQR com o filtro de Kalman (ver figura 5.2), que consiste em encontrar um compensador que, ao utilizar as entradas  $u$  e as medidas  $y$ , gera um sinal de controle que minimiza a função de custo dada pela equação (5.3) para o sistema estocástico dado pela equação (5.20). Desta forma, o LQG se divide em dois subproblemas diferentes: o subproblema do regulador que é o LQR, e o subproblema da estimativa de estados, resolvido pelo filtro de Kalman.

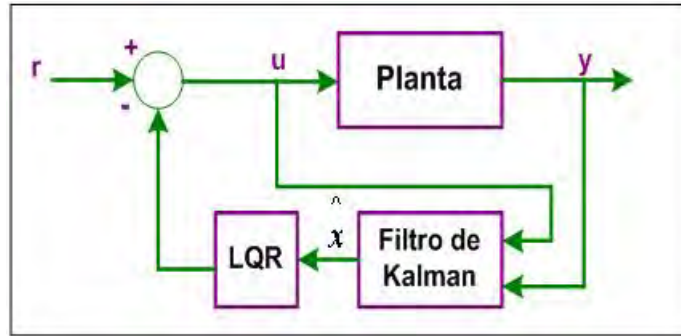


Figura 5.2 - Diagrama de blocos do LQG.

O sinal de controle do LQG é dado por

$$u(t) = -K_r \hat{x}(t), \quad (5.21)$$

sendo que  $K_r$  é o ganho dado pelo LQR e  $\hat{x}(t)$  o estado estimado pelo filtro de Kalman. A equação de estado do filtro de Kalman (observador) é dada por

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(y - C\hat{x}), \quad (5.22)$$

o ganho de Kalman é representado por  $K_f$ . O Filtro de Kalman é ótimo quando as perturbações que afetam a dinâmica do processo e da medida são modelados como um ruído branco.

Substituindo a equação (5.21) na equação (5.22), tem-se

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - BK_r)\hat{x} + K_f(y - C\hat{x}), \quad (5.23)$$

que é a equação do novo estado estimado através do Filtro de Kalman.

A função de transferência do compensador do LQG é dada por

$$K_{LQG} = K_r(sI - A + BK_r + K_fC)^{-1}K_f. \quad (5.24)$$

Algo importante que deve ser ressaltado é que o LQG não possui uma garantia de estabilidade, como acontece no LQR (DOYLE, 1978). Na verdade essa margem é pequena. Fazendo algumas mudanças nas matrizes  $Q$ ,  $R$  e na intensidade dos ruídos, pode ser observado que as propriedades dos sistema são drasticamente afetadas.

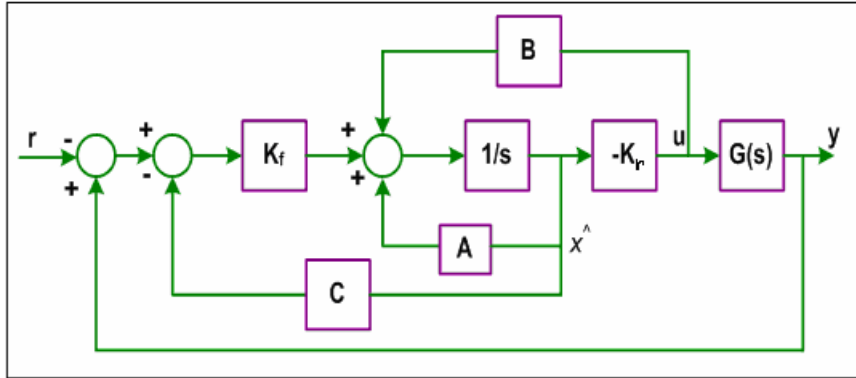


Figura 5.3 - Estrutura do LQG.

#### 5.4 LTR

Visto que o LQR e o filtro de Kalman possuem boas propriedades tais como boa robustez e desempenho, é de se esperar que o mesmo acontecesse com o LQG, porém isso não acontece, pois o LQG apresenta uma margem de estabilidade pequena. Felizmente há uma maneira de projetar o compensador tal que todas as propriedades de robustez e desempenho são recuperadas.

A função de transferência em malha aberta do LQR é dada por

$$L_1 = K_r(sI - A)^{-1}B. \quad (5.25)$$

A função de transferência em malha aberta do LQG é dada por

$$L_2 = K_r(sI - A + BK_r + K_fC)^{-1}K_fC(sI - A)^{-1}B. \quad (5.26)$$

A idéia do LTR é fazer com  $L_2$  se aproxime de  $L_1$  a partir do projeto do ganho de Kalman, que no processo de recuperação poderá ser aumentado até que as propriedades de robustez e performance sejam recuperadas ( DOYLE; STEIN, 1979 ). Deve-se levar em consideração que a planta é de fase mínima, ou seja, não possui zeros no semi-plano direito ?? .

Tem-se as seguintes considerações:  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  e  $\Psi(s) = (sI - A + BK_r)^{-1}$ . Dessa forma, a equação (5.26) pode ser escrita da seguinte maneira (sendo  $\Phi$  em vez de  $\phi(s)$ , etc)

$$L_2 = K_r(\Psi^{-1} + K_fC)^{-1}K_fC\Phi B, \quad (5.27)$$

que após algumas manipulações se torna

$$L_2 = K_r \Psi K_f [I + C \Psi K_f]^{-1} C \Phi B. \quad (5.28)$$

Agora o ganho de Kalman  $K_f$  será calculado com a matriz de covariância dos ruídos dinâmicos dada por

$$W = W_0 + q\Sigma, \quad (5.29)$$

sendo  $\Sigma = \Sigma^T \geq 0$ , e  $q$  é um parâmetro positivo e real. Neste caso  $W_0$  pode ser uma estimativa do valor real da covariância do ruído dinâmico ( $w$ ). Para realizar o LTR é necessário aumentar o valor de  $q$ , teoricamente aumentar até um valor muito alto ( MACIEJOWSKI, 1989 ; SKOGESTAD; POSTLEHWAITE , 2005 ).

Substituindo  $W$  na equação (5.18), obtém-se

$$\frac{P_f A^T}{q} + \frac{A P_f}{q} + \frac{P_f C^T V^{-1} C P_f}{q} + \frac{B W_0 B^T}{q} + B \Sigma B^T = 0. \quad (5.30)$$

Se a planta não possui zeros no semi-plano direito e o número de entradas for igual ao número de saídas, tem-se

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{P_f}{q} = 0. \quad (5.31)$$

Quando  $q = 0$ , o filtro será ótimo com respeito ao ruído verdadeiro (modelado). Quando  $q$  aumenta o filtro não irá funcionar completamente para a rejeição do ruído, porém haverá uma melhora significativa da estabilidade em malha fechada ( DOYLE; STEIN, 1979 ).

Das equações (5.30) e (5.31), tem-se

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (B \Sigma B^T)^{1/2} = P_f C^T V^{-1/2}. \quad (5.32)$$

Porém

$$K_f = P_f C^T V^{-1}, \quad (5.33)$$

então

$$K_f \rightarrow q^{1/2} B \Sigma^{1/2} V^{-1/2} \quad \text{quando } q \rightarrow \infty. \quad (5.34)$$

Considerando que  $\Sigma = I$  e que  $C(sI - A)^{-1}B$  não possui zeros no semi-plano direito

$$K_f \rightarrow q^{1/2}BV^{-1/2} \quad \text{quando } q \rightarrow \infty. \quad (5.35)$$

Substituindo a equação (5.35) na equação (5.28), obtém-se

$$\begin{aligned} L_2 &\longrightarrow q^{1/2}K_r\Psi BV^{-1/2}[I + q^{1/2}C\Psi BV^{-1/2}]^{-1}C\Phi B \quad \text{quando } q \rightarrow \infty \\ &\longrightarrow_{q \rightarrow \infty} K_r\Psi BV^{-1/2}[C\Psi BV^{-1/2}]^{-1}C\Phi B. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Assumindo que  $C\Psi B$  é quadrada, isto é, a planta possui o mesmo número de entradas e saídas e notando que

$$\Psi = \Phi[I + BK_r\Phi]^{-1}, \quad (5.37)$$

obtém-se

$$\lim_{q \rightarrow \infty} L_2 = K_r\Psi B(C\Psi B)^{-1}C\Phi B, \quad (5.38)$$

que após algumas manipulações, chega-se ao seguinte resultado

$$\lim_{q \rightarrow \infty} L_2 = K_r\Phi B. \quad (5.39)$$

Nota-se que o lado direito da equação é a função de transferência em malha aberta do sistema com o LQR (5.25).

Há uma vasta literatura sobre o desenvolvimento e as aplicações do LTR. Porém como um método para controle multivariável o LTR é muito limitado em sua aplicabilidade e algumas vezes o seu uso se torna difícil. A sua principal limitação é que só pode ser aplicado para plantas de fase mínima. Isso ocorre porque o procedimento de recuperação acontece através do cancelamento dos zeros da planta, e o cancelamento dos zeros de uma planta de fase não mínima pode levar o sistema a instabilidade. Quando se deseja uma recuperação completa, faz-se necessário atingir o limite  $q \rightarrow \infty$ , porém nesse limite os ganhos ficam muito altos, causando assim problemas na dinâmica não modelada. Dessa forma, no procedimento de recuperação evita-se chegar ao limite, seleciona-se um conjunto de valores para  $q$  e escolhe um valor que seja aceitável (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005).





## 6 CONTROLE ROBUSTO

Os controladores  $H_2$  e  $H_\infty$  são as duas principais correntes na teoria de controle robusto. A interpretação da norma  $H_2$  no domínio do tempo é a medida da energia do sinal de saída do sistema devido uma entrada impulso e está relacionada ao desempenho. A norma  $H_\infty$  representa a máxima amplificação do sinal de saída devido a uma entrada senoidal e está relacionada à robustez. A combinação do controle  $H_2$  e  $H_\infty$  e chamada de controlador misto  $H_2/H_\infty$ .

### 6.1 Normas

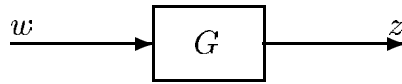


Figura 6.1 - Sistema G.

Dado o sistema da figura 6.1, com uma função de transferência matricial  $G(s)$  e uma matriz de resposta ao impulso  $g(t)$ , pode-se calcular o desempenho do sistema através de uma norma, pois dado um sinal de entrada  $w$ , calcula-se o quanto a saída  $z(t)$  vai aumentar ou diminuir.

Os sinais de saída são analisados através da norma-2,

$$\|z(t)\|_2 = \sqrt{\sum_i \int_{-\infty}^{\infty} |z_i(\tau)|^2 d\tau} \quad (6.1)$$

Neste trabalho será estudado dois tipos de normas: a norma  $H_2$  e a norma  $H_\infty$ . Cada uma possui uma interpretação e seu entendimento é fundamental para a aplicação dos controladores  $H_2$  e  $H_\infty$ .

#### 6.1.1 Norma $H_2$

Considera-se uma planta  $G(s)$  dada por

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D, \quad (6.2)$$

essa planta é estritamente própria, i.e.  $D = 0$ . Para a norma  $H_2$  usa-se a norma de Frobenius para uma matriz ( $\|G(j\omega)\|_F^2 = \sum_{ij} |G_{ij}(j\omega)|^2$ ) e integra-se sobre a frequência

$$\|G(s)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G(j\omega)^H G(j\omega)) d\omega}. \quad (6.3)$$

Pode ser observado que  $G(s)$  deve ser estritamente própria, caso contrário a norma  $H_2$  seria infinita. Pelo teorema de Parseval ( DOYLE et al. , 1992 ), a equação (6.3) é igual à norma  $H_2$  da resposta ao impulso

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \text{tr}(g(\tau)^T g(\tau)) d\tau}. \quad (6.4)$$

A norma  $H_2$  pode ser interpretada como a norma-2 do sinal de saída devido a várias entradas tipo impulso unitário  $\delta_j(t)$ , e essas entradas que acontecem uma após a outra permitem que o sinal de saída vá a zero antes da aplicação da próxima entrada (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE , 2005 ). De maneira mais clara

$$|G(s)|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|z_i(t)\|_2^2}, \quad (6.5)$$

sendo  $z_i(t)$  o vetor de saída resultado da aplicação de um impulso unitário  $\delta_i$  na  $i$ -ésima entrada. Dessa forma a norma  $H_2$  possui a seguinte interpretação determinística

$$\|G(s)\|_2 = \max_{w(t)=\delta_i} \|z_i(t)\|_2. \quad (6.6)$$

A matriz de resposta ao impulso é dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ce^{At}B + D\delta(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Para o cálculo numérico da norma  $H_2$ , considera-se a realização em espaço de estados  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  e substitui-se a equação (6.7) na equação (6.4), obtendo o seguinte resultado

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\text{tr}(B^TQB)}, \quad (6.8)$$

ou

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\text{tr}(CPC^T)}. \quad (6.9)$$

Sendo  $P$  e  $Q$  as observabilidade e controlabilidade Gramian, respectivamente, que são dadas por

$$P \triangleq \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A\tau} d\tau, \quad (6.10)$$

e

$$Q \triangleq \int_0^\infty e^{A\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau. \quad (6.11)$$

### 6.1.2 Norma $H_\infty$

Considere um sistema próprio e linear  $G(s)$  (i.e.  $D \neq 0$  é permitido). Para a norma  $H_\infty$  usa-se o valor singular (norma-2 induzida) espacial (para matriz) e seleciona-se o valor maior valor (pico) como uma função da frequência (SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005)

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \max_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (6.12)$$

Em termos de desempenho pode ser visto a partir da equação (6.12) que a norma  $H_\infty$  é o pico da magnitude da função de transferência. No entanto a norma  $H_\infty$  possui muitas interpretações de desempenho no domínio do tempo.

Uma interpretação da norma  $H_\infty$  é que ela representa o ganho do pior caso para uma entrada senoidal em qualquer frequência. Fazendo  $t \rightarrow \infty$ , e seja  $z(\omega)$  a resposta do sistema a uma entrada senoidal persistente  $w(\omega)$  tem-se  $z(\omega) = G(j\omega)w(\omega)$ . Em uma dada frequência  $\omega$ , a amplificação (ganho)  $\|z(\omega)\|_2/\|w(\omega)\|_2$  depende da direção de  $w(\omega)$ , e o ganho no pior caso de direção é dado pelo máximo valor singular:

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \max_{w(\omega) \neq 0} \frac{\|z(\omega)\|_2}{\|w(\omega)\|_2}. \quad (6.13)$$

O ganho também depende da frequência, e o ganho para o pior caso é dado pela norma  $H_\infty$ :

$$\|G(s)\|_\infty = \max_\omega \max_{w(\omega) \neq 0} \frac{\|z(\omega)\|_2}{\|w(\omega)\|_2} = \max_{\|w(\omega)\|_2=1} \|z(\omega)\|_2. \quad (6.14)$$

A norma  $H_\infty$  é calculada numericamente como o menor valor de  $\gamma$  tal que a matriz hamiltoniana  $\mathcal{H}$  não possua autovalores no eixo imaginário, sendo  $\mathcal{H}$  dada por

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

e  $R = \gamma^2 I - D^T D$  ( ZHOU et al., 1996 ). Esse procedimento é iterativo, e pode-se começar com um valor grande para  $\gamma$  e reduzi-lo até que o autovalor imaginário de  $H$  apareça.

## 6.2 Desigualdades Matriciais Lineares

Na teoria de controle encontra-se uma grande variedade de problemas que podem ser reduzidos a problemas padrões de otimização convexos ou quasi-convexos que envolvem LMIs (Linear Matrix Inequalities). Esses problemas podem ser resolvidos numericamente de forma eficaz usando os métodos dos pontos interiores, encontrando assim uma solução atrativa para o problema original (GAHINET et al. , 1995).

O uso de LMIs na análise de sistemas dinâmicos começou com Lyapunov em 1890 quando ele publicou o trabalho no qual hoje chamamos de teoria de Lyapunov. Ele mostrou que a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (6.16)$$

é estável se e somente se existe uma matriz  $P$  positiva-definida tal que

$$A^T P + PA < 0. \quad (6.17)$$

A condição  $A^T P + PA < 0$  é o que chamamos de inequação de Lyapunov em  $P$ , que é uma forma especial de LMI. Lyapunov também mostrou que esta LMI poderia ser resolvida. Na verdade, pode-se escolher qualquer  $Q = Q^T > 0$  e resolver a equação linear  $A^T P + PA = -Q$  para a matriz  $P$ , que é positiva-definida se o sistema (6.16) é estável.

Em 1940 Lur'e, Postnikov, e outros na União Soviética aplicaram o método de Lyapunov em alguns problemas específicos e práticos da engenharia de controle, especificamente no problema de estabilidade de sistemas de controle com não li-

nearidade no atuador. Apesar de não terem escrito as matrizes na forma de LMI, os critérios de estabilidade tinha forma de LMI. Essas inequações foram reduzidas a inequações polinomiais e resolvidas analiticamente. Obviamente esse método era limitado a sistemas pequenos de no máximo terceira ordem.

O próximo avanço feito na teoria foi em 1960, quando Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores que tiveram sucesso em resolver problemas de ordem maiores através de métodos gráficos, usando o que hoje é conhecido por lema positivo-real (PR).

O lema PR e suas extensões foram estudadas intensivamente na metade da década de 1960, e foi relacionado a ideias de passividade, critério do ganho pequeno introduzido por Zames e Sandberg, controle ótimo quadrático. Em 1970, foi descoberto que o lema PR poderia ser resolvido não apenas por métodos gráfico, mas também resolvendo uma equação algébrica de Riccati (EAR). Em 1971 Willems (1971) fez o seguinte para o problema do controle quadrático ótimo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

essa equação pode ser resolvida através do estudo de soluções simétricas da EAR

$$A^T P + PA - (PB + C^T)R^{-1}(B^T P + C) + Q = 0 \quad (6.19)$$

que pode ser resolvida por vários métodos.

Em 1971, pesquisadores já conheciam muitos métodos para resolver alguns tipos especiais de LMIs: direto (para pequenos sistemas), métodos gráficos, e resolvendo as equações de Lyapunov ou Riccati. Todos esses métodos oferecem uma solução analítica para algumas LMIs.

Em 1971 foi sugerido que um algoritmo computacional poderia ser mais eficiente para resolver LMIs. A partir daí começa um novo capítulo no estudo das LMIs. Um grande avanço pode ser resumido na seguinte frase: As LMIs que aparecem na teoria de controle podem ser formuladas como uma otimização convexa (ver apêndice A) que são viáveis para soluções computacionais.

Essa observação foi feita de maneira explícita por vários pesquisadores. Pyatnitskii e Skorodinskii (1982) foram os primeiros pesquisadores que fizeram esses pontos claros e completos. Eles reduziram o problema original de Lur'e (caso estendido de

múltiplas não linearidades) a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs, que foi resolvido usando o algoritmo elipsoide. Pyatnitskii e Skorodinskii (1982) também foram os primeiros a descrever a função de Lyapunov como um problema de otimização convexa, e aplicar um algoritmo que garante uma solução otimizada.

O capítulo final dos estudos sobre LMIs são relativamente recentes e de grande importância prática: o desenvolvimento de métodos eficientes como o método do ponto-interior resolve as LMIs que surgem na teoria de controle. Karmarkar's publicou vários trabalhos na área de métodos de ponto-interior para programação linear. Em 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos de ponto-interior que se aplicam diretamente a problemas convexos envolvendo LMIs.

Em resumo, os principais eventos na história das LMIs na teoria de controle foram:

- 1890: a primeira LMI aparece; solução analítica da LMI de Lyapunov através da equação de Lyapunov;
- Década de 40: aplicação dos métodos de Lyapunov a problemas reais da engenharia de controle. Pequenas LMIs resolvidas analiticamente;
- Início da década de 60: o Lema Real-Positivo fornece técnicas gráficas para resolver uma outra família de LMIs;
- Final dos anos 60: a observação de que a mesma família de LMIs pode ser resolvida resolvendo uma EAR (Equação Algébrica de Riccati);
- Início dos anos 80: reconhecimento de que muitas LMIs poderiam ser resolvidas pelo computador através da programação convexa;
- Final dos anos 80: desenvolvimento dos algoritmos de pontos-interiores, poderosos e eficientes, para tratamento das LMIs.

Uma desigualdade matricial linear (LMIs) possui a seguinte forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (6.20)$$

sendo

- $x = (x_1 \cdots x_m)^T \in \Re^m$  a variável;

- $F_i = F_i^T \in \Re^{n \times n}$  a matriz simétrica;
- o símbolo de inequação,  $>$ , significa que a matriz  $F(x)$  é positiva definida, i.e.,  $u^T F(x) u > 0$  para todo  $u \in \Re^n$  diferente de zero;

Há também LMIs na forma  $F(x) \geq$  em que o sinal  $\geq$  significa que a matriz é semidefinida positiva, e LMIs na forma  $F(x) < 0$  que são equivalentes a  $-F(x) > 0$ .

Um conjunto de múltiplas LMIs, tais como  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)} > 0$ , pode ser agrupado em apenas uma LMI:

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & F_p(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (6.21)$$

como consequência não há distinção entre um conjunto de LMIs e apenas uma LMI.

### 6.2.0.1 Complemento de Schur

Quando as matrizes  $F_i$  são diagonais, a LMI  $F(x) > 0$  é apenas um conjunto de inequações não lineares. Inequações não lineares (convexas) são transformadas em LMIs usando o complemento de Schur. A ideia é a seguinte: a LMI

$$H = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (6.22)$$

sendo as matrizes  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$ , e  $S(x) = S(x)^T$ , é equivalente a

$$R(x) > 0 \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0. \quad (6.23)$$

Em outras palavras, o conjunto de inequações não lineares (6.23) pode ser representado como uma LMI.

### 6.2.0.2 Variáveis matriciais

Há muitos problemas em que as variáveis são matrizes, por exemplo, a inequação de Lyapunov

$$A^T P + P A < 0, \quad (6.24)$$

sendo a matriz  $A \in \Re^{n \times n}$  dada e  $P = P^T$  a variável. Neste caso não se escreve a LMI explicitamente na forma  $F(x) > 0$ , mas deixa-se claro que matrizes são as variáveis. A frase “a LMI  $A^T P + PA < 0$  em  $P$ ” significa que a matriz  $P$  é uma variável. Deixando LMIs na forma condensada como (6.24), pode-se realizar um cálculo mais eficiente.

Um outro exemplo é o caso da inequação quadrática matricial

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0, \quad (6.25)$$

sendo  $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$  matrizes de tamanhos apropriados, e  $P = P^T$  é a variável. Note que essa é uma inequação matricial quadrática em  $P$ . Pode-se expressar essa inequação da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} > 0. \quad (6.26)$$

Essa representação mostra que a inequação matricial quadrática (6.25) é convexa em  $P$ , o que não é óbvio.

### 6.2.0.3 Vínculos lineares

Em alguns problemas encontram-se vínculos lineares nas variáveis, por exemplo

$$P > 0, \quad A^T P + PA < 0, \quad \mathbf{Tr}P = 1, \quad (6.27)$$

sendo  $P \in \Re^{k \times k}$  é a variável. Pode-se eliminar o vínculo para escrever (6.27) na forma  $F(x) > 0$ . Seja  $P_1, \dots, P_m$  a base para matrizes simétricas  $k \times k$  com traço igual a zero ( $m = (k(k+1)/2) - 1$ ) e seja  $P_0$  uma matriz simétrica  $k \times k$  com  $\mathbf{Tr}P_0 = 1$ . Então faz-se  $F_0 = \text{diag}(P_0, -A^T P_0 - P_0 A)$  e  $F_i = \text{diag}(P_i, -A^T P_i - P_i A)$  para  $i = 1, \dots, m$ .

### 6.2.1 Tipos de problemas LMI

Há vários tipos diferentes de problemas abordados via LMI, esses subgrupos de problemas incluem problemas de viabilidade, problemas de autovalor e problema de autovalor generalizado.



### 6.2.1.1 Problemas viabilidade de LMI

Dada uma LMI  $F(x) > 0$ , o problema LMI correspondente é encontrar  $x^*$  tal que  $F(x^*) > 0$  ou determinar que a LMI é inviável. Esse é o problema de viabilidade convexa.

Como um exemplo, considere o problema de estabilidade de Lyapunov: É dado  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, L$ , encontrar  $P$  que satisfaça a LMI

$$P > 0, \quad A^T P + P A < 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (6.28)$$

ou determinar que tal  $P$  não existe. Determinar que tal  $P$  não existe é equivalente a encontrar  $Q_0, \dots, Q_L$ , sendo que nem todos são diferentes de zero, tal que

$$Q_0 > 0, \dots, Q_L \geq 0 \quad Q_0 = \sum_{i=1}^L (Q_i A_i^T + A_i Q_i), \quad (6.29)$$

### 6.2.1.2 Problemas de autovalor

O problema de autovalor consiste em minimizar o máximo autovalor de uma matriz que depende das variáveis matriciais, sujeito a um vínculo LMI (ou determinar que tal vínculo é inviável )

$$\text{minimizar } \lambda \quad (6.30)$$

$$\text{sujeito a } \lambda I - A(x) > 0, \quad B(x) > 0 \quad (6.31)$$

A e B são matrizes simétricas que dependem da variável de otimização  $x$ . Esse é um problema de otimização convexa.

O cálculo da norma  $H_\infty$  de um sistema linear também pode ser tratado como uma LMI. Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + B\omega \quad (6.32)$$

$$z = Cx + D\omega \quad (6.33)$$

o problema de encontrar a norma  $H_\infty$  da função de transferência matricial  $T_{z\omega}$  de  $\omega$  para  $z$  é equivalente ao seguinte problema de otimização em  $P > 0$  (SKOGESTAD;

POSTLEHWAITE , 2005 )

minimizar  $\gamma$

tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & \gamma I & D^T \\ C & D & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (6.34)$$

apesar de que  $\gamma > 0$  ser único, não se pode garantir que  $P > 0$  seja única. Esse problema pode ser resolvidos usando software, tal como MATLAB.

### 6.2.1.3 Problemas de autovalor generalizado

O problema de autovalor generalizado consiste em minimizar o máximo autovalor generalizado de um par de matrizes que dependem de uma variável, sujeito a um vínculo LMI. A formulação é a seguinte:

$$\text{minimizar } \lambda \quad (6.35)$$

$$\text{sujeito a } \lambda B(x) - A(x) > 0, \quad B(x) > 0, \quad C(x) > 0 \quad (6.36)$$

A, B e C são matrizes simétricas que são funções afim de  $x$ . O problema pode ser expressado da seguinte maneira

$$\text{minimizar } \lambda_{\max}(A(x), B(x)) \quad (6.37)$$

$$\text{sujeito a } B(x) > 0, \quad C(x) > 0 \quad (6.38)$$

sendo  $\lambda_{\max}(X, Y)$  o máximo autovalor generalizado de  $\lambda Y - X$  com  $Y > 0$ , i.e., o maior autovalor da matriz  $Y^{-1/2} X Y^{-1/2}$ . Este problema é um problema de otimização quasi-convexo visto que o vínculo é convexo e o objetivo  $\lambda_{\max}(A(x), B(x))$ , é quasi-convexo.

Uma forma alternativa para esse problema é

$$\text{minimizar } \lambda \quad (6.39)$$

$$\text{sujeito a } A(x, \lambda) > 0, \quad (6.40)$$

sendo  $A(x, \lambda)$  afim em  $x$  para fixo  $\lambda$  e afim em  $\lambda$  para fixo  $x$ , e satisfaz a condição  $\lambda > \mu \implies A(x, \lambda) \geq A(x, \mu)$ .

Um exemplo desse problema é

$$\text{maximizar } \alpha \quad (6.41)$$

$$\text{sujeito a } -A^T P - PA - 2\alpha > 0, \quad P > 0 \quad (6.42)$$

a matriz  $A$  é dada, e as variáveis de otimização são as matrizes simétricas  $P$  e o escalar  $\alpha$ .

### 6.2.2 Método do ponto interior

Resolver esses problemas formulados anteriormente significa determinar se o problema é viável ou não, e se for, calcular o ponto de viabilidade com um valor objetivo que excede o mínimo global por menos que algum dado valor de precisão.

Nesse trabalho será usado a função *hinfnmix*, essa função otimiza a LMI através do método dos pontos interiores (GAHINET et al. , 1995) e calcula o controlador misto  $H_2/H_\infty$ . Alguns detalhes serão mostrados mais adiante.

### 6.2.3 Regiões LMI

Estabilidade é o mínimo de exigência de um sistema de controle. No entanto, na maioria das situações práticas, um bom controlador também deve fornecer uma resposta rápida e amortecida. Uma maneira garantir um transiente satisfatório é colocar os pólos da malha fechada em uma região estratégica do plano complexo. Essa técnica é chamada de alocação de pólos regional, em contraste à alocação de pólos pontual em que os pólos são colocados em algum lugar específico do plano complexo. Alocação de pólos regional pode ser aplicado em conjunto com os controladores  $H_\infty$ ,  $H_2$  e  $H_2/H_\infty$  ( CHILALI; GAHINET, 1996 ).

As regiões consideradas nesse trabalho são regiões LMI que foram introduzidas por Chilali e Gahinet (1996). Essa classe de região abrange uma grande variedade de regiões, tais como, semi-planos, discos, cônicas, entre outras.

Serão usadas as seguintes definições:  $\otimes$  é o produto de Kronecker,  $M = [\mu_{kl}]_{1 \leq l \leq m}$  significa que  $M$  é uma matriz  $m \times m$  com uma entrada genérica  $\mu_{kl}$  ( CHILALI; GAHINET, 1996 ).

Um subconjunto  $D$  do plano complexo é chamada de região LMI se existe uma

matriz simétrica  $\beta_{kl} \in \Re^{m \times m}$  e uma matriz  $\alpha_{kl} \in \Re^{m \times m}$  tal que

$$D = \{z \in C : F_D < 0, \} \quad (6.43)$$

com

$$f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{kl}\bar{z}]_{1 \leq k, l \leq m}. \quad (6.44)$$

$F_D$  é chamada de função característica de  $D$ . Alguns exemplos de regiões LMI são:

- semi-plano  $Re(z) < -\alpha : f_D(z) = z + \bar{z} + 2\alpha < 0$ ;
- disco centrado em  $(-q, 0)$  com raio  $r$ :

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0 \quad (6.45)$$

- cônica centrada na origem e ângulo interno  $\theta$ .

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} \text{sen} \frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) & \text{cos} \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \\ \text{cos} \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) & \text{sen} \frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0 \quad (6.46)$$

Vale destacar alguns fatos sobre regiões LMI

- Intersecções de regiões LMI também são regiões LMI;
- Qualquer região convexa que é simétrica com respeito ao eixo real pode ser aproximada a uma região LMI;
- Uma matriz real  $A$  é D-estável, i.e., possui todos os seus autovalores na região LMI  $D$ , se somente se existir uma matriz  $X$  simétrica tal que

$$\begin{aligned} M_D(A, X) &:= \alpha \otimes X + \beta \otimes (XA) + \beta^T \otimes (A^T X) < 0, & X > 0. \\ &= [\alpha_{kl}X + \beta_{kl}AX + \beta_{lk}XA^T]_{1 \leq k, l \leq m}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Alocação de pólos regionais LMI pode ser tratado como um problema de otimização convexa.

### 6.3 Projeto dos Controladores

Nesta seção será estudado os controladores  $H_2$ ,  $H_\infty$  e  $H_2/H_\infty$ . Essas técnicas de controle podem ser abordadas de várias maneiras diferentes, nesta seção será mostrado a solução para o  $H_2$  e  $H_\infty$  via ARE e LMI. O controlador misto  $H_2/H_\infty$  será resolvido apenas via LMI.

#### 6.3.0.1 Formulação Geral

Há várias maneiras de formular o problema de controle por retroação afim de aplicar a otimização da norma  $H_2$  e  $H_\infty$ . É muito importante ter uma formulação padrão no qual qualquer problema particular possa ser manipulado. Tal formulação para a aplicação da otimização da norma  $H_2$  e  $H_\infty$  pode ser observado na figura 6.2

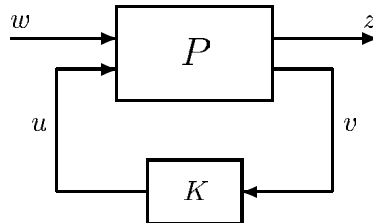


Figura 6.2 - Sistema G com o controlador K.

Esse sistema é descrito por

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6.48)$$

A planta  $P$  generalizada é dada por

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Os sinais são

- $u$ : variáveis de controle;
- $w$  : sinais de perturbação e de comandos;
- $z$  : erro a ser minimizado afim de alcançar os objetivos de controle;

A função de transferência em malha fechada de  $w$  para  $z$  é dada por

$$z = F_l(P, K)w, \quad (6.50)$$

sendo

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \quad (6.51)$$

O controle  $H_2$  e  $H_\infty$  envolve a minimização das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  de  $F_l(P, K)$  respectivamente.

Antes de aplicar o algoritmo para se resolver o problema de controle  $H_2$  e  $H_\infty$  é necessário fazer as seguintes considerações

(A1)  $(A, B_2, C_2)$  é estabilizável e observável;

(A2)  $D_{12}$  e  $D_{21}$  possui rank(posto) completo;

(A3)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  possui rank completo para qualquer  $\omega$ ;

(A4)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  possui rank completo para qualquer  $\omega$ ;

(A5)  $D_{11} = 0$  e  $D_{22} = 0$ ;

A consideração (A1) é requerida para a existência de um controlador estabilizável  $K$ , a consideração (A2) assegura que os controladores são próprios e realizáveis. As considerações (A3) e (A4) assegura que os controlador ótimo não irá cancelar os pólos e os zeros no eixo imaginário causando assim instabilidade em malha fechada. A consideração (A5) é convencional para o controle  $H_2$  e  $H_\infty$ , pois simplifica o algoritmo.

Essas considerações estão implementadas no *software* usado para resolver o problema de controle  $H_2$  e  $H_\infty$  (*Robust Control toolbox of MATLAB*).

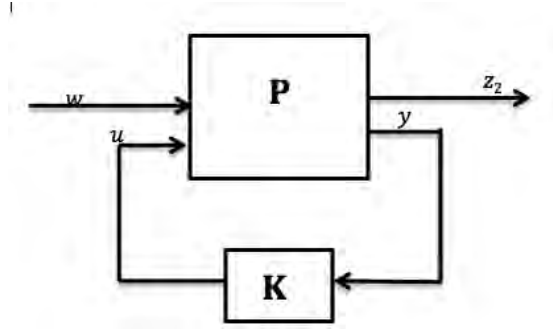


Figura 6.3 - configuração do  $H_2$ .

### 6.3.1 Controle ótimo $H_2$

O controle ótimo  $H_2$  consiste em encontrar um controlador  $K$  que minimiza

$$\|T_{wz_2}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(T_{wz_2}(j\omega)^H T_{wz_2}(j\omega)) d\omega}; \quad (6.52)$$

A planta  $P$  é composta pela planta do modelo, as interconexões da estrutura, e os pesos que são propostos pelo projetista.

A norma  $H_2$  possui diferentes determinações determinísticas. Supõe-se que na formulação dada pela figura 6.3 o sinal de entrada  $w$  seja um ruído branco de intensidade unitária. Tem-se então

$$E\{w(t)w(t)^T\} = I\delta(t - \tau). \quad (6.53)$$

o valor esperado do sinal de erro  $z$  é dado por

$$\begin{aligned} E\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t)^T z(t) dt\right\} &= \text{tr} E\{z(t)z(t)^H\}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[(T_{wz_2}(j\omega)^H T_{wz_2}(j\omega))] d\omega, \end{aligned} \quad (6.54)$$

pelo teorema de Parseval

$$= \|T_{wz_2}\|_2^2 \quad (6.55)$$

Dessa forma, minimizando a norma  $H_2$  da saída (ou erro) do sistema generalizado, devido à entrada unitária do ruído branco, é minimizado; o que está sendo minimizado é o valor quadrado médio (rms) do valor de  $z$ .

### 6.3.2 LQG: Um caso especial do controlador $H_2$

No capítulo anterior foi desenvolvido o controlador ótimo LQG para um sistema estocástico. Agora será visto que o LQG é um controlador  $H_2$ . Considere o seguinte sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w_d, \quad (6.56)$$

$$y(t) = Cx(t) + w_n. \quad (6.57)$$

sendo que

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d & w_n \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau). \quad (6.58)$$

O LQG consiste em encontrar  $u = K(s)y$  tal que o seguinte funcional é minimizado

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \right\}. \quad (6.59)$$

com  $Q = Q^T \geq 0$  e  $R = R^T > 0$ . Para que esse problema fique no formato da norma  $H_2$ , faz-se o seguinte. Define um sinal de erro  $z$  como sendo

$$z = \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

e as entradas podem ser representadas como

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{1/2} & 0 \\ 0 & V^{1/2} \end{bmatrix} w, \quad (6.61)$$

sendo  $w$  um ruído branco de intensidade unitária. A função de custo do LQG pode ser manipulada e reescrita da seguinte maneira

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [z(t)^T z(t)] dt \right\} = \|T_{wz_2}\|_2^2, \quad (6.62)$$

sendo que

$$z(s) = T_{wz_2} w(s). \quad (6.63)$$



e a planta generalizada  $P$  é dada por

$$P = \begin{bmatrix} A & W^{1/2} & 0 & B \\ Q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{1/2} \\ C & 0 & V^{1/2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Essa abordagem do LQG é ilustrada pela figura 6.4. A aplicação do algoritmo para encontrar o controlador através da minimização da norma  $H_2$  resulta no mesmo controlador encontrado pelo LQG tradicional (5.24).

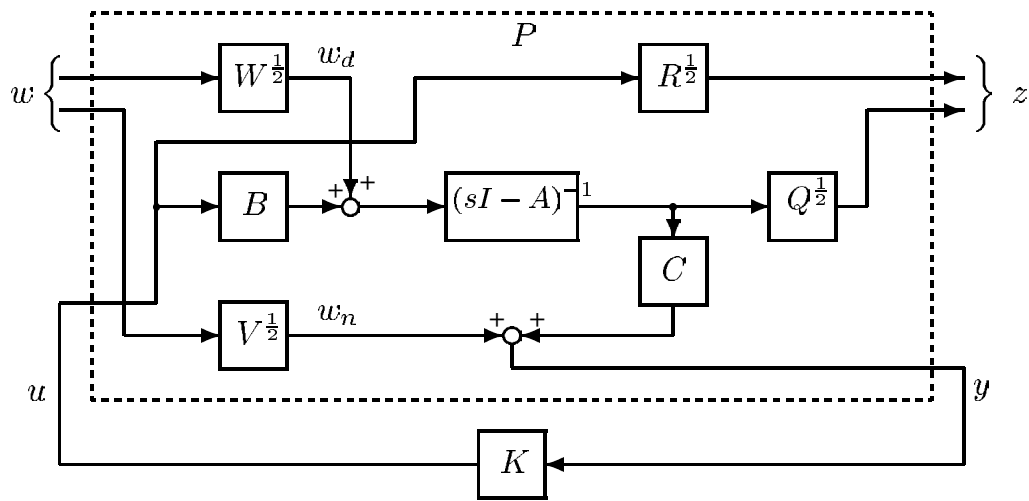


Figura 6.4 - Estrutura do LQG na configuração geral.

### 6.3.3 Controle $H_2$ por Riccati

Considerando novamente a configuração da figura 6.3, deseja-se projetar um controlador que estabiliza o sistema e ao mesmo tempo minimiza a amplitude do sinal de saída devido uma entrada  $w$ . Será considerado a planta generalizada

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & D_{22} \\ C_y & D_{y1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Deseja-se um controlador

$$K_2 : \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix}, \quad (6.66)$$

tal que a malha fechada seja dada por

$$T_{wz_2} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl1} & D_{cl1} \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Como já foi explicado anteriormente o objetivo é encontrar um controlador que estabiliza internamente o sistema e minimiza a norma  $H_2$  da função de transferência em malha fechada de  $w$  a  $z_2$  que é denotada por  $\|T_{wz_2}\|_2$ .

Considera-se as seguintes equações de Riccati

$$A^T X_2 + X_2 A - X_2 B_2 B_2^T X_2 + C_2^T C_2 = 0, \quad (6.68)$$

$$A Y_2 + Y_2 A^T - Y_2 C_y^T C_y Y_2 + B_1 B_1^T = 0. \quad (6.69)$$

Essas equações podem ser associadas às hamiltonianas ( [SANCHEZ-PENA; SNAZAIER, 1998](#) )

$$\mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T \\ -C_2^T C_2 & -A^T \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} A^T & -C_y^T C_y \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

que pertencem ao  $\text{dom}(\text{Ric})$ , e além do mais,  $X_2 = \text{Ric}(\mathcal{H}_2) \geq 0$  e  $X_2 = \text{Ric}(J_2) \geq 0$ . A partir dessas suposições tem-se as ferramentas para encontrar a solução do controle  $H_2$ .

O controlador ótimo e único  $H_2$  é dado por

$$K_2 = \begin{bmatrix} A_{FL} & L_2 \\ -F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

com o correspondente valor ótimo de  $\|T_{wz_2}\|_2$  é dado por

$$\min \|T_{wz_2}\|_2 = \|G_c(s) B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f(s)\|_2^2 \quad (6.73)$$

sendo

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} A_{FL} & I \\ C_{1F} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

$$G_f(s) = \begin{bmatrix} A_L & B_{1L} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

$$A_F = A + B_2 F_2 \quad (6.76)$$

$$C_{1F} = C_2 + D_{22} F_2 \quad (6.77)$$

$$A_L = A + L_2 C_2 \quad (6.78)$$

$$A_{FL} = A + B_2 F_2 + L_2 C_y \quad (6.79)$$

$$B_{1L} = B_1 + L_2 C_y \quad (6.80)$$

$$B_{1L} = B_1 + L_2 D_{22} \quad (6.81)$$

$$F_2 = -B_2^T X_2 \quad (6.82)$$

$$X_2 = Ric(H_2) \quad (6.83)$$

$$L_2 = -Y_2 C_y \quad (6.84)$$

$$Y_2 = Ric(J_2) \quad (6.85)$$

Os detalhes das afirmações acima podem ser encontradas nos livros de controle robusto, tais como ( [SANCHEZ-PENA; SNAZAIER, 1998](#) ; [ZHOU et al., 1996](#) ).

#### 6.3.4 Controle $H_2$ por LMI

A norma  $H_2$  pode ser calculada da seguinte maneira ( [SCHERER et al., 1997](#) )

$$\|T_{wz_2}\|_2 = \text{Tr}(C_{cl1} S_0 C_{cl1})^T, \quad (6.86)$$

sendo  $S_0$  a solução da equação de Lyapunov

$$A_{cl} S_0 + S_0 A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T = 0. \quad (6.87)$$

Visto que  $S_0 < S$  para qualquer  $S$  satisfazendo

$$A_{cl} S + S A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T < 0. \quad (6.88)$$

é rapidamente verificado que  $\|T_{wz_2}\|_2^2 < \nu$  se e somente se existe  $S > 0$  satisfazendo (6.88) e  $\text{Tr}(C_{cl1}S_0C_{cl1})^T < \nu$ . Com um parametro auxiliar  $Q$ , obtém-se o seguinte resultado:  $A_{cl}$  é estável se existe uma matriz simétrica  $X_2 = S^{-1}$  e  $Q$  tal que

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_2 + X_2 A_{cl} & B_{cl} \\ B_{cl}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.89)$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_{cl1} X_2 \\ X_2 C_{cl1}^T & -X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (6.90)$$

$$\text{Tr}(Q) < \nu, \quad D_{cl1} = 0. \quad (6.91)$$

### 6.3.5 Controle ótimo $H_\infty$

O problema do controle ótimo  $H_\infty$  consiste em encontrar um controlador  $K$  que minimiza a função de transferência de  $w$  a  $z_\infty$  dada por  $T_{wz_\infty}$  figura 6.5. A norma  $H_\infty$  da função de transferência  $T_{wz_\infty}$  dada por

$$\|T_{wz_\infty}\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(T_{wz_\infty})(j\omega). \quad (6.92)$$

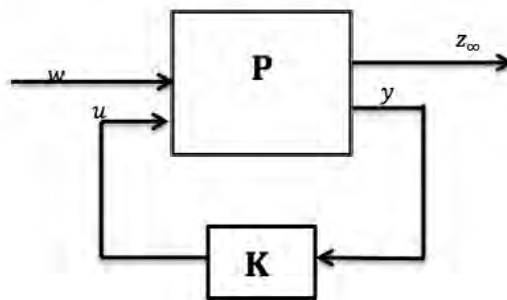


Figura 6.5 - Configuração do  $H_\infty$ .

Como já discutido anteriormente a norma  $H_\infty$  possui várias interpretações. Uma delas é que ela representa o pico do máximo valor singular. Uma outra interpretação

é dada por

$$\|T_{wz_\infty}\|_\infty = \max_{w(\omega) \neq 0} \frac{\|z(\omega)\|_2}{\|w(\omega)\|_2}, \quad (6.93)$$

sendo  $\|z(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i |z_i(t)|^2}$  a norma-2 do sinal vetorial.

Na pratica não é necessário e muitas vezes indesejável projetar um controlador  $H_\infty$  ótimo, porém o problema se torna mais simples quando se projeta um controlador sub-ótimo (algo muito próximo do ótimo). Um controlador sub-ótimo pode ter boas propriedades (ex. banda passante) em relação ao ótimo. Seja  $\gamma_{min}$  o mínimo valor de  $\|T_{wz_\infty}\|_\infty$  para todo  $K$ . Então o  $H_\infty$  sub-ótimo problema é: dado um  $\gamma > \gamma_{min}$ , encontrar um controlador  $K$  tal que

$$\|T_{wz_\infty}\|_\infty < \gamma. \quad (6.94)$$

Esse vínculo pode ser interpretado como a rejeição à perturbação e assegura também a estabilidade robusta. Especificamente esse vínculo assegura que a malha fechada permaneça estável para todas as perturbações em que  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$  (SCHERER et al., 1997 ).

### 6.3.6 Controlador $H_\infty$ por Riccati

Considerando a seguinte planta no espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_\infty \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_{\infty 1} & D_{\infty 1} & D_{\infty 2} \\ C_y & D_{y1} & D_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6.95)$$

Deseja-se um controlador

$$K_\infty : \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix}, \quad (6.96)$$

tal que a malha fechada seja dada por

$$T_{wz_\infty} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl1} & D_{cl1} \end{bmatrix}. \quad (6.97)$$

De maneira análoga ao controlador  $H_2$  tem-se as seguintes equações de Riccati

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_{\infty 1}^T C_{\infty 1} + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0, \quad (6.98)$$

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_{\infty 1}^T C_{\infty 1} - C_y^T C_y) Y_\infty = 0, \quad (6.99)$$

Essas equações podem ser associadas às hamiltonianas ( SANCHEZ-PENA; SNAZAIER, 1998 )

$$\mathcal{H}_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_{\infty 1}^T C_{\infty 1} & -A^T \end{bmatrix}. \quad (6.100)$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma C_{\infty 1}^T C_{\infty 1} - C_y^T C_y \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}. \quad (6.101)$$

A priori não é garantido que  $\mathcal{H}_\infty, J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  nem que  $\text{Ric}(\mathcal{H}_\infty) \geq 0$ ,  $\text{Ric}(J_\infty) \geq 0$ . Na verdade essas condições estão intimamente ligadas a um controlador sub-ótimo. Nota-se que quando  $\gamma \rightarrow \infty$  então  $H_\infty \rightarrow H_2$  e  $J_\infty \rightarrow J_2$ .

Da configuração do  $H_\infty$  dada pela figura 6.5 e das considerações feitas acima existe um controlador  $K(s)$  tal que  $\|T_{wz_\infty}\|_\infty < \gamma$  se e somente se

- (i)  $\mathcal{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  e  $X_\infty := \text{Ric}(\mathcal{H}_\infty) \geq 0$ .
- (ii)  $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  e  $Y_\infty := \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$ .
- (ii)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Após todos esses passos o controlador  $K_\infty = F_l(K_c, Q)$  é dado por

$$K_c(s) = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_y & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.102)$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad (6.103)$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_y^T, \quad (6.104)$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}, \quad (6.105)$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_y. \quad (6.106)$$

e  $Q$  é qualquer função de transferência estável e própria tal que  $\|Q\|_\infty < \gamma$ . Para  $Q = 0$  tem-se o controlador central

$$K_c(s) = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.107)$$

Esse controlador possui o mesmo número de estados que a planta generalizada.

Assim como no controlador  $H_2$ , esse controlador pode ser separado em estimador

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\gamma^{-2}B_1^T X_\infty \hat{x} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_y \hat{x} - y) \quad (6.108)$$

e uma retroação de estados

$$u = F_\infty \hat{x}. \quad (6.109)$$

Comparando o estimador do filtro de Kalman (5.19) com o estimador (6.108), nota-se algumas diferenças, a saber, o uso de  $Z_\infty L_\infty$  em vez de apenas  $L_\infty$  e o termo adicional  $B_1(\gamma^{-2}B_1^T X_\infty \hat{x})$ . O termo  $\gamma^{-2}B_1^T X_\infty \hat{x}$  pode ser interpretado como uma estimativa do pior caso de perturbação. Da mesma forma,  $Z_\infty L_\infty$  é o ganho do filtro ótimo para a estimação do sinal de controle,  $u = F_\infty x$ , na presença do pior caso de perturbação (SANCHEZ-PENA; SNAZAIER, 1998; SKOGESTAD; POSTLEHWAITE, 2005).

Iteração- $\gamma$ : Deseja-se encontrar  $\gamma_{min}$  com uma devida tolerância, para isso faz-se teste para valores de  $\gamma$  para determinar se esse valor é menor que  $\gamma_{min}$  ou se é maior que  $\gamma_{min}$ .

### 6.3.7 Controlador $H_\infty$ por LMI

O controlador  $H_\infty$  pode ser resolvido facilmente através das soluções das equações de Riccati mostradas anteriormente, porém quando é acrescentado a alocação de pólos, torna-se necessário recorrer a outros métodos para encontrara a solução do problema. Tratando esse problema como um problema de otimização convexa usa-se LMI para encontrar a solução. A abordagem tratada nessa seção leva em consideração a alocação de pólos.

Como já foi afirmado anteriormente uma matriz  $A$  só é D-estável se satisfazer

$$A^T X + X A < 0, \quad X > 0. \quad (6.110)$$

Dessa forma, pode-se afirmar que o vínculo da alocação de pólos é satisfeito se e somente se existe  $X_D > 0$  tal que

$$[\alpha_{kl}X_D + \beta_{kl}A_{cl}X_D + \beta_{lk}X_D A_{cl}^T]_{1 \leq k, l \leq m} < 0. \quad (6.111)$$

De acordo com o Bounded Real Lemma (SCHERER, 1990),  $A_{cl}$  é estável e a norma  $H_\infty$  de  $T_{wz_\infty}$  é menor que  $\gamma$  se e somente se existe uma matriz  $X_\infty$  simétrica com (WU et al., 2009; GAHINET et al., 1995)

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_\infty + X_\infty A_{cl}^T & B_{cl} & X_\infty C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -I & D_{cl1}^T \\ C_{cl}X_\infty & D_{cl1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad X_\infty > 0. \quad (6.112)$$

### 6.3.8 Controle Misto $H_2/H_\infty$

O controle misto  $H_2/H_\infty$  é um problema multiobjetivo, no qual o controle por retroação deve responder de maneira favorável duas especificações de desempenho. Tipicamente na síntese  $H_2/H_\infty$ , o  $H_\infty$  é usado para aumentar a robustez do sistema, e enquanto que o  $H_2$  garante o desempenho do sistema. Considera-se a seguinte

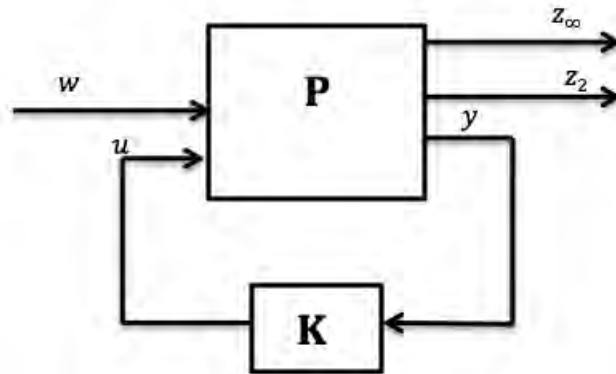


Figura 6.6 - Planta com perturbação e saídas  $z_2$  e  $z_\infty$

planta em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_\infty \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_\infty & D_{\infty 1} & D_{\infty 2} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \\ C_y & D_{y1} & D_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6.113)$$



Esse sistema possui duas funções de transferência:  $T_{wz_\infty}$  que é a função de transferência de  $w$  a  $z_\infty$  e  $T_{wz_2}$  que é a função de transferência de  $w$  a  $z_2$ . Deseja-se encontrar um controlador  $K$  que no espaço de estados é dado por

$$K : \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix}, \quad (6.114)$$

tal que, o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cl} \\ z_\infty \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl1} & D_{cl1} \\ C_{cl2} & D_{cl2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cl} \\ w \end{bmatrix}. \quad (6.115)$$

satisfaça as seguintes propriedades:

- a) **Estabilidade interna:**  $K$  estabiliza exponencialmente em malha fechada;
- b) **Desempenho fixo  $H_\infty$ :** O controle  $H_\infty$  possui um desempenho fixo tal que  $\|T_{wz_\infty}\|_\infty \leq \gamma$ ;
- c) **Desempenho ótimo  $H_2$ :** O desempenho  $H_2$   $\|T_{wz_2}\|_2$  é minimizado entre todos  $K$  satisfazendo 1 e 2.

As propriedades acima podem ser resumidas da seguinte maneira:

$$\text{minimizar } f(K) := \|T_{wz_2}\|_2^2 \quad (6.116)$$

$$\text{sujeito a } g(K) := \|T_{wz_\infty}\|_\infty^2 \leq \gamma^2 \quad (6.117)$$

Quando o problema do controlador misto  $H_2/H_\infty$  é tratado como um problema de otimização convexa usa-se LMI para encontrar a solução ótima do problema. Essa abordagem é muito eficaz, pois se existir pelo menos um controlador que estabiliza o sistema tal que  $\|T_{wz_\infty}\|_\infty^2 \leq \gamma^2$ , certamente haverá uma solução para o  $H_2$ . Para encontrar a solução ótima é necessário resolver um conjunto de equações de Riccati não lineares e acopladas e então sintetizar o controlador. Assim, pode-se considerar a abordagem de otimização convexa como uma maneira efetiva para resolver equações de Riccati não lineares e acopladas.

De acordo com o que foi discutido nos problemas  $H_2$  e  $H_\infty$ , o problema do controlador misto  $H_2/H_\infty$  é equivalente a minimizar o  $\text{Tr}(Q)$  sobre as matrizes  $X_D$ ,  $X_\infty$ ,  $X_2$ ,  $Q$  e  $K$  satisfazendo (6.89)-(6.91) e (6.111)-(6.112). O problema do  $H_\infty$  e

$H_2$  separados são problemas convexos, porém quando juntos se torna um problema não convexo.

Enquanto que esse problema é não convexo nas variáveis  $(X_D, X_\infty, X_2, Q, K)$ , a convexidade pode ser forçada pela procura de uma solução comum

$$X = X_D = X_\infty = X_2 > 0 \quad (6.118)$$

para (6.89)-(6.91) e (6.111)-6.112). As matrizes (6.89)-(6.91) e (6.111)-6.112) serão reescritas em termos de  $X$ ,  $Q$  e uma variável auxiliar  $Y = KX$ . Essa simples mudança de variável leva ao seguinte problema de otimização.

Minimizar  $\text{Tr}(Q)$  sobre  $X = X^T$ ,  $Q = Q^T$ , e  $Y$  que satisfazem as seguintes inequações matriciais lineares

$$[\alpha_{kl}X + \beta_{kl}(AX + B_2Y) + \beta_{lk}(AX + B_2Y)^T] < 0. \quad (6.119)$$

$$\begin{bmatrix} AX - B_2Y + (AX - B_2Y)^T & B_1 & (C_\infty X - D_{\infty 2}Y)^T \\ B_1^T & -I & D_{\infty 1}^T \\ C_\infty X - D_{\infty 2}Y & D_{\infty 1} & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.120)$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_2 X - D_{22} Y \\ (C_2 X - D_{22} Y)^T & X \end{bmatrix} > 0 \quad (6.121)$$

Assumindo que as LMIs (6.120) e (6.120) são viáveis e a solução desse problema de otimização seja  $X^*$ ,  $Q^*$  e  $Y^*$ , o controlador será dado por

$$K^* = Y^*(X^*)^{-1}. \quad (6.122)$$

Resultando em

$$\|T_{wz_\infty}\|_\infty \leq \gamma, \quad (6.123)$$

$$\|T_{wz_2}\|_2 \leq \sqrt{\text{Tr}(Q)}. \quad (6.124)$$

De acordo com o que foi discutido no capítulo 3 sobre incerteza, o requisito de

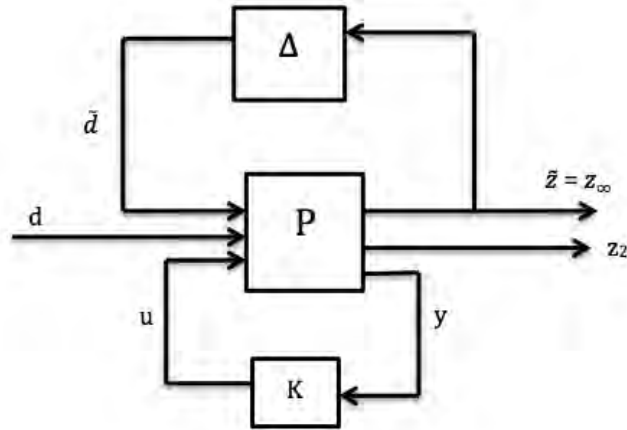


Figura 6.7 - Planta com perturbação e saídas  $z_2$  e  $z_\infty$

estabilidade com respeito a incerteza  $\Delta$  é representado por

$$z_\infty = \tilde{z}. \quad (6.125)$$

Lembrando que

$$\tilde{d} = \Delta \tilde{z}, \quad (6.126)$$

e de acordo com a figura 6.7 a incerteza aparece como sendo uma perturbação  $\tilde{d}$ . O controle  $H_\infty$  irá minimizar a função de transferência que vai da entrada da perturbação  $\tilde{d}$  a saída  $\tilde{z}$  e ao mesmo tempo encontrar um controlador que estabiliza a planta diante de incertezas em que  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ . Se o valor de  $\gamma$  for pequeno, a malha fechada permanece estável para um grande valor de incerteza, ou seja, uma grande variação momento de inércia.

Quando se trata do controle  $H_2$ , a perturbação externa pode ser modelada como uma entrada impulso de direção aleatória, sendo que o controle ótimo  $H_2$  minimiza o rms da resposta ao impulso (calculado pela norma  $H_2$ ).

Nos canais minimizados pela norma  $H_2$  estarão os estados e o sinal de controle para evitar a saturação do controlador.

$$z_2 = \begin{bmatrix} Q_x & 0 \\ 0 & Q_{\dot{x}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} u. \quad (6.127)$$

os estados e o sinal de controle são ponderados através dos pesos  $Q_x$ ,  $Q_{\dot{x}}$  e  $R$ .

No próximo capítulo será feita a aplicação do controle misto  $H_2/H_\infty$  através da função do MATLAB *hinfmix*.

## 7 RESULTADOS

Neste capítulo será mostrado os resultados do controle da atitude de um microsatélite com incerteza no momento de inércia e perturbações externas. É aplicado o controlador misto  $H_2/H_\infty$  com alocação de pólos.

### 7.1 Análise e resultados

O satélite considerado será um microsatélite genérico, os parâmetros e especificações são mostrados na tabela 7.1. Será considerado que o microsatélite está equipado com um sensor de estrela, ou seja, ter-se-á somente a medida dos ângulos. Um exemplo de sensor de estrela para microsatélite é mostrado no trabalho (SUNDE, 2005) e as suas especificações estão na tabela 7.2.

Tabela 7.1 - Parâmetros do microsatélite

Momentos de inércia (Kgm <sup>2</sup> )	$I_1 = 18,4$ $I_2 = 18,2$ $I_3 = 6,8$
Massa (Kg)	60
Tamanho (cm)	$50 \times 50 \times 60$
Altitude (Km)	500
Atitude inicial (graus)	$(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)$
Velocidade angular inicial (graus/s)	$\omega_{ib}^b = [0, 6; 0, 6; 0, 6]^T$

Para realizar o controle, é usado no microsatélite três rodas de reação, uma em cada um dos eixos principais. As rodas de reação são usadas para regular a velocidade do veículo espacial através da conservação do momento angular. Quando o microsatélite sofre uma perturbação externa que resulta em uma variação da velocidade angular, o excesso de velocidade angular do microsatélite é transferido para o momento angular das rodas de reação por meio de um torque interno que é gerado por um motor DC que muda a velocidade de rotação tal que a atitude do microsatélite volta ao seu estado original. Um exemplo de roda de reação é da empresa *Microsat Systems Canada Inc.* (MSCI, 2013) cuja especificações estão disponíveis na tabela 7.3.

Tabela 7.2 - Dados do sensor de estrela

Propriedades	Valor
Dimensão	$10 \times 10 \times 4,5$ cm
Massa	10 gr
Precisão	1 arcseg
Velocidade angular	acima de 10 graus/s
Confiabilidade	99,99 %
Razão de atualização	8 Hz

Tabela 7.3 - Atuador: Roda de reação

Velocidade (rpm)	$\pm 10000$
Capacidade de momento (N m s)	4
Torque (N m)	$150 \times 10^{-3}$
Massa (Kg)	
Roda de reação	$< 3,55$
Motor	$< 1,2$
Dimensão (cm)	$25 \times 25 \times 11$

## 7.2 Controlador misto $H_2/H_\infty$

Será explicitado aqui a solução apenas para o ângulo de pitch, porém para os ângulos de roll/yaw a solução é análoga. Vale ressaltar que nesse primeiro momento não será considerado a alocação de pólos.

A planta generalizada para o ângulo de pitch é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ z_\infty \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3n^2(I_x - I_z)}{I_y} & 0 & -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \\ \frac{-3n^2(I_x - I_z)}{I_y} & 0 & -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ d \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_y & 0 & 0 \\ 0 & \delta_x & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m \\ y_d \\ k_k \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{d} = \Delta \tilde{z}$$

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad (7.1)$$

$$z_\infty = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u. \quad (7.2)$$

$$z_2 = C_2 x + D_{22} u. \quad (7.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3n^2(I_x - I_z)}{I_y} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_y} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{p_y}{I_y} & -\frac{3n^2 p_x}{I_y} & -\frac{3n^2 p_z}{I_y} & -\frac{1}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}$$

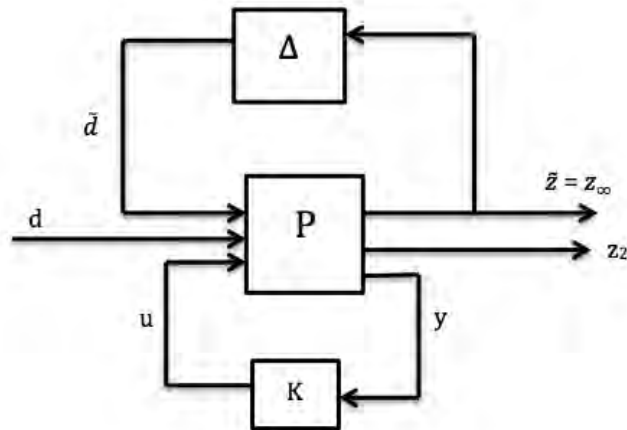


Figura 7.1 - Sistema com incerteza.

$\Delta$  é a matriz de ganho normalizada das incertezas nos momentos de inércia,  $\tilde{z}$  é a saída do sistema nominal para o bloco das incertezas, e  $\tilde{d}$  é a entrada dos bloco das incertezas ao sistema nominal.

Os requisitos de estabilidade robusta com respeito à incerteza  $\Delta$  é representada por  $\tilde{z}$ , i.e.

$$\tilde{z} = z_\infty$$

se existe um controlador que satisfaz  $\|\frac{z_\infty}{d}\|_\infty < \gamma$  então o sistema em malha fechada será estável e robusto para qualquer incerteza  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ .

O problema do controlador misto será resolvido via LMI, para isso será usado a seguinte função do MATLAB:

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix}(\text{P}, \text{r}, \text{obj}).$$

- P = Planta generalizada;
- r =  $[z_2 \ y \ u]$  especifica o tamanho de  $z_2$ ,  $y$  e  $u$ ;
- obj =  $[\gamma_0, \nu_0, \alpha, \beta]$  especifica o problema a ser resolvido.

Para aplicar o controlador misto no ângulo de pitch de um veículo espacial usa-se a seguinte configuração:

- P = Planta generalizada dada pela matriz acima;
- r =  $[3 \ 2 \ 1]$ . Três sinais serão minimizados pelo  $H_2$  ( $z_2 = 3$ ). Será considerado duas medidas ( $y = 2$ ). Tem-se um sinal de controle ( $u = 1$ );
- obj =  $[\gamma, 0, 0, 1]$ , minimizar  $\|T_2\|_2$  sujeito à  $\|T_\infty\|_\infty < \gamma$ .

Os pesos referentes aos sinais do  $H_2$  serão :  $Q_1 = 2$ ,  $Q_2 = 2$  e  $R = 10$ . Esses valores são escolhidos pelo projetista, e podem variar de acordo com as especificações do sistema.

Para encontrar o  $\gamma$  do  $H_\infty$ , faz-se

$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix}(\text{P}, [3 \ 2 \ 1], [0, 0, 1, 0])$$

obtendo assim gopt=0,11. Que é o menor valor de  $\gamma$  do  $H_\infty$ , tal que minimiza a norma  $\|T_\infty\|_\infty$  e mantém o sistema estável.

Agora basta calcular o controlador misto para um conjunto de valores de  $\gamma$ , i.e.,  $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$ ,  $\gamma = \{ 0,2; 2; 100 \}$ . Ao se aplicar o controlador misto  $H_2/H_\infty$  é



observado que ao se fazer o valor de  $\gamma$  próximo do valor de  $\gamma_{\min}$ , o resultado é o mesmo obtido pelo  $H_{\infty}$  puro, e ao se fazer o valor de  $\gamma$  muito maior que  $\gamma_{\min}$  o resultado é o mesmo obtido pelo  $H_2$ .

- $\gamma = 0,2$  corresponde ao  $H_{\infty}$  puro ( $\gamma \approx \gamma_{\min}$ ).
- $\gamma = 2$  corresponde ao controlador misto ( $H_2$  sujeito a  $\gamma = 2$ );
- $\gamma = 100$  corresponde ao  $H_2$  puro ( $\gamma$  tendendo a infinito).

### 7.3 Robustez com respeito às incertezas no momento de inércia

O microsatélite considerado pode sofrer uma variação de 10% no momento de inércia. Essa variação acontece devido ao movimento de antenas, câmeras, telescópio e painéis solares. Satélites com a massa menor que 100 kg são mais sensíveis às perturbações e às variações no momento de inércia.

Para analisar o desempenho do controlador misto  $H_2/H_{\infty}$  em uma planta com incerteza, foi considerado duas plantas: planta com incerteza 1 e planta com incerteza 2 para os ângulos roll/yaw e para pitch, pois as equações são desacopladas .

Robustez com respeito às incertezas no momento de inércia é muito importante no projeto do sistema de controle de atitude, principalmente quando se trata de um satélite de pequeno porte. A incerteza no momento de inércia é representada como uma perturbação no modelo nominal. Para quantificar a robustez com respeito às incertezas no momento de inércia usa-se a norma  $H_{\infty}$ . De acordo com o teorema do pequeno ganho se o controlador satisfizer o menor valor de  $\gamma$  da norma  $\|z_{\infty}/d\|_{\infty}$ , ou seja,  $|z_{\infty}/d| < \gamma$ , a malha fechada do sistema será estável para uma grande variação do valor nominal (a incerteza poderá ser grande), i.e,  $\|\Delta\|_{\infty} < 1/\gamma$ .

Será considerado uma variação do momento de inércia de 10% para mais e para menos. Esses valores são valores aceitáveis e estão baseados no artigo ( [YANGA; SUN, 2005](#)).

- Variações do momento de inércia para o ângulo de pitch:

Planta com incerteza 1:  $\Delta I_x = -10\%I_x$ ,  $\Delta I_y = +10\%I_y$  e  $\Delta I_z = -10\%I_z$ .

Planta com incerteza 2:  $\Delta I_x = +10\%I_x$ ,  $\Delta I_y = -10\%I_y$  e  $\Delta I_z = +10\%I_z$ .

- Variações do momento de inércia para os ângulos de roll e yaw:  
 Planta com incerteza 1:  $\Delta I_x = +10\%I_x$ ,  $\Delta I_y = -10\%I_y$  e  $\Delta I_z = -10\%I_z$ .  
 Planta com incerteza 2:  $\Delta I_x = -10\%I_x$ ,  $\Delta I_y = +10\%I_y$  e  $\Delta I_z = +10\%I_z$ .
- Condição inicial: A condição inicial considerada representa o momento em que o microssatélite se separa do veículo lançador. ( YANGA; SUN, 2005).

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

De acordo com as figuras 7.2–7.7 o controlador  $H_\infty$  puro ( $\gamma = 0.2$ ) possui o melhor desempenho para com respeito às incertezas, pois o comportamento da planta nominal e das plantas com incertezas são quase o mesmo. Por outro lado, para o controlador  $H_2$  puro ( $\gamma = 100$ ) pode ser observado que há uma certa diferença da planta nominal para as plantas com incerteza, ou seja, esse controlador não é robusto com respeito às incertezas. O controlador misto  $H_2/H_\infty$  com um valor de  $\gamma$  pequeno, fornece um melhor desempenho de robustez com respeito às incertezas no momento de inércia e quando aumenta o valor de  $\gamma$  o controlador fica mais sensível às incertezas. Pode ser observado também que o controlador misto com o  $\gamma$  muito grande possui uma resposta muito lenta com respeito à uma dada condição inicial, para um  $\gamma$  pequeno a resposta é mais rápida. Dessa forma, escolhe-se um valor de  $\gamma$  que não seja muito grande nem muito pequeno quando comparado com o  $\gamma_{\min}$ , no caso do microssatélite que está sendo estudado o valor escolhido foi  $\gamma = 2$ . Pode ser observado que a resposta não é lenta e o sistema continua robusto com respeito às incertezas (ver figuras 7.2–7.7).

Vale ressaltar também que o sinal de controle é muito maior para o controlador  $H_\infty$ . Como pode ser observado nas figuras 7.8–7.10 o sinal de controle para o ângulo de roll chega a 0.5 Nm para o  $H_\infty$  puro, e de acordo com a tabela 7.3 o máximo valor permitido para o torque de controle é 0.15 Nm. Para o controlador  $H_2$  puro o sinal de controle é bem pequeno, porém apresenta uma resposta lenta. Já o controlador misto  $H_2/H_\infty$  com  $\gamma = 2$ , apresenta um bom desempenho e não satura o atuador.

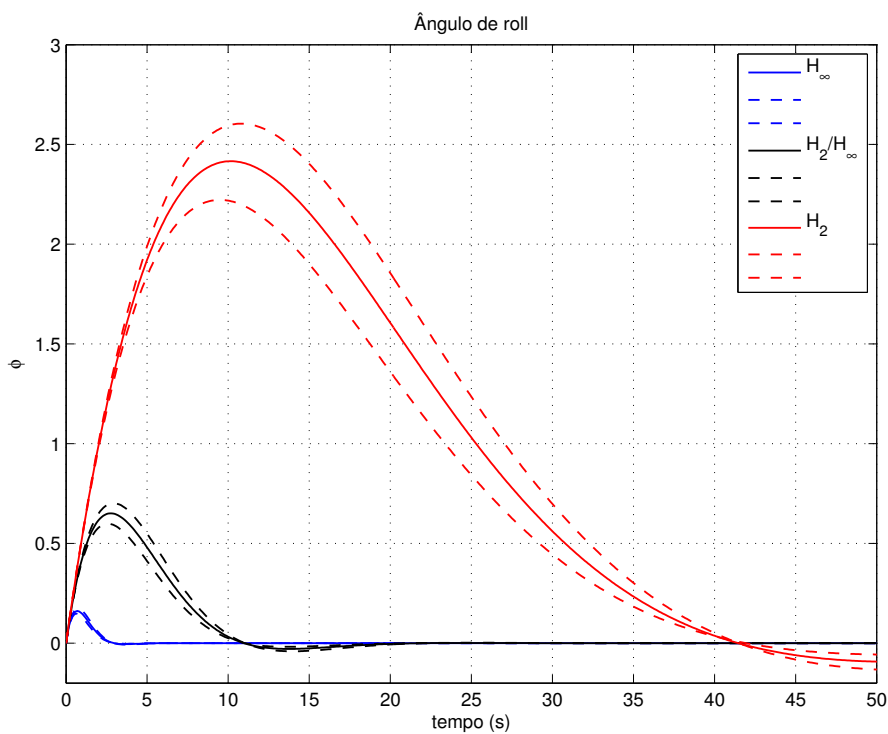


Figura 7.2 - Resposta às condições iniciais para o ângulo de roll, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

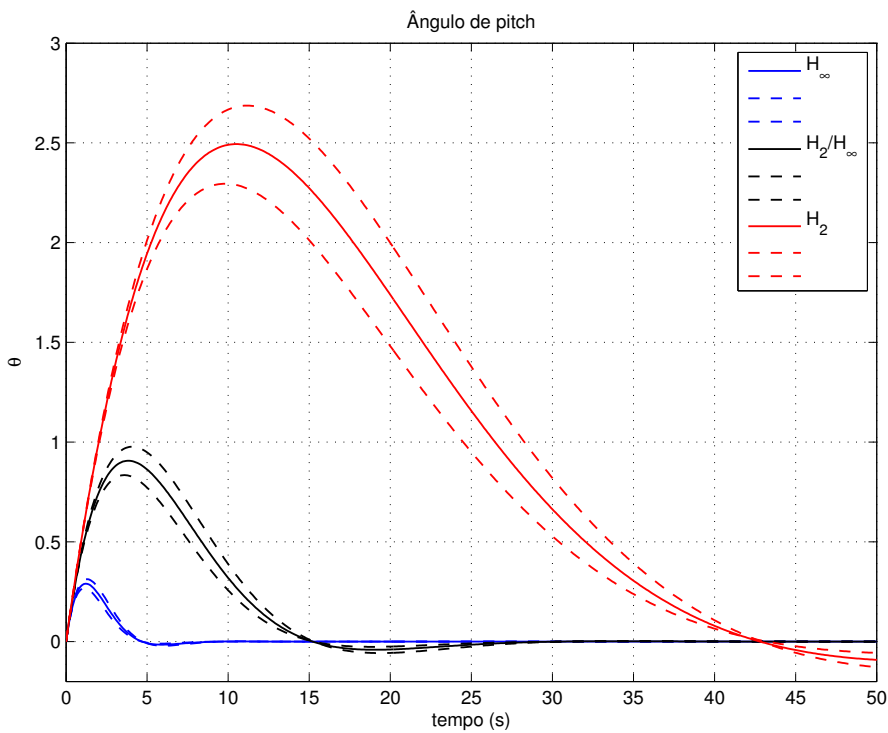


Figura 7.3 - Resposta às condições iniciais para o ângulo de pitch, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

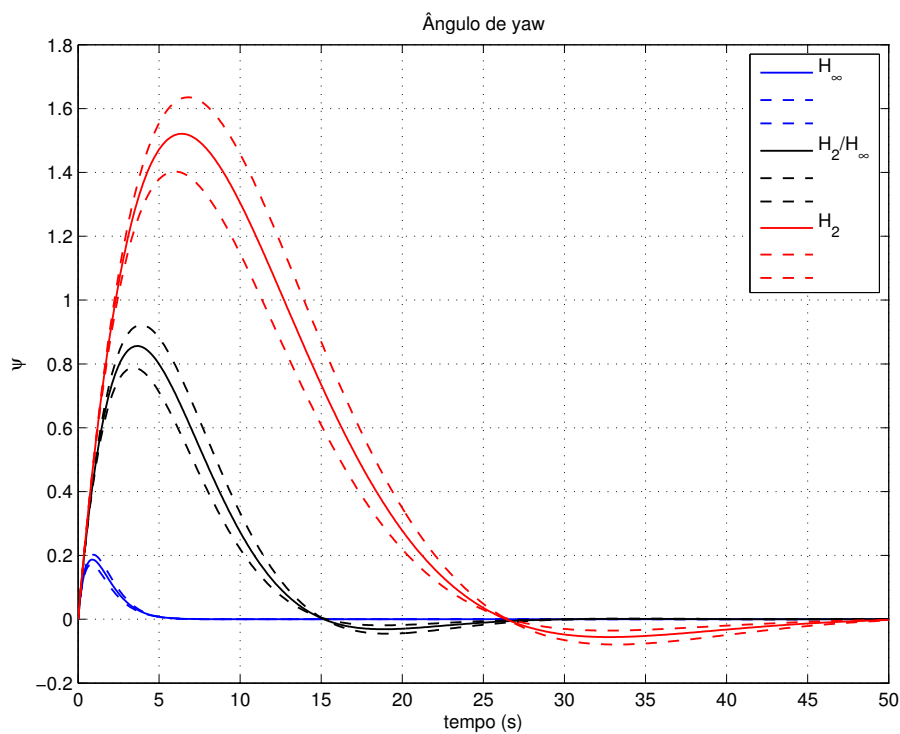


Figura 7.4 - Resposta às condições iniciais para o ângulo de pitch, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

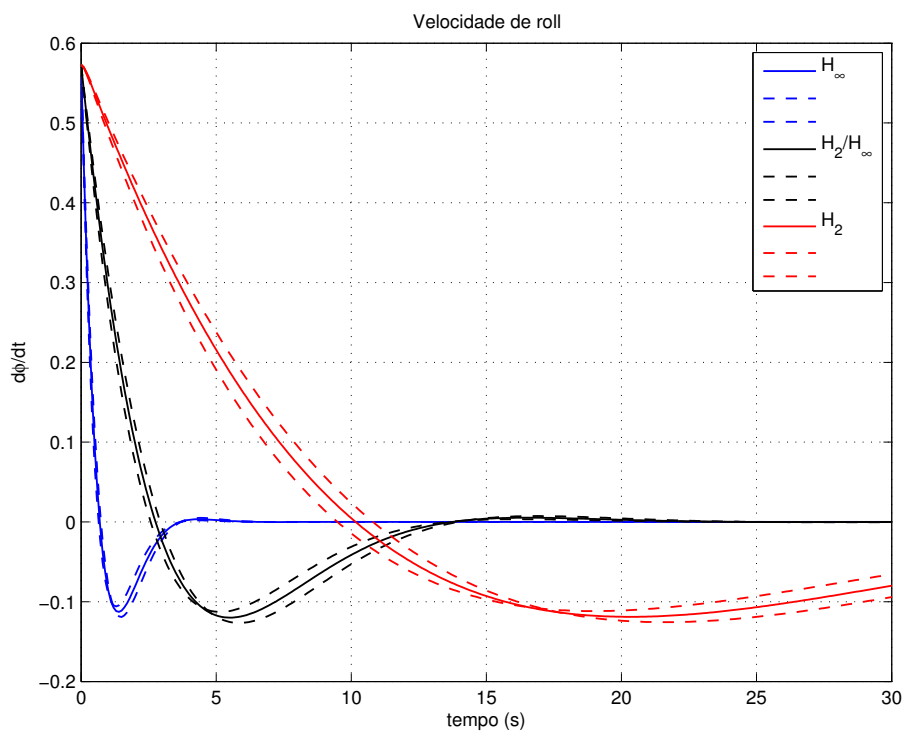


Figura 7.5 - Velocidade do ângulo de roll para a resposta às condições iniciais, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

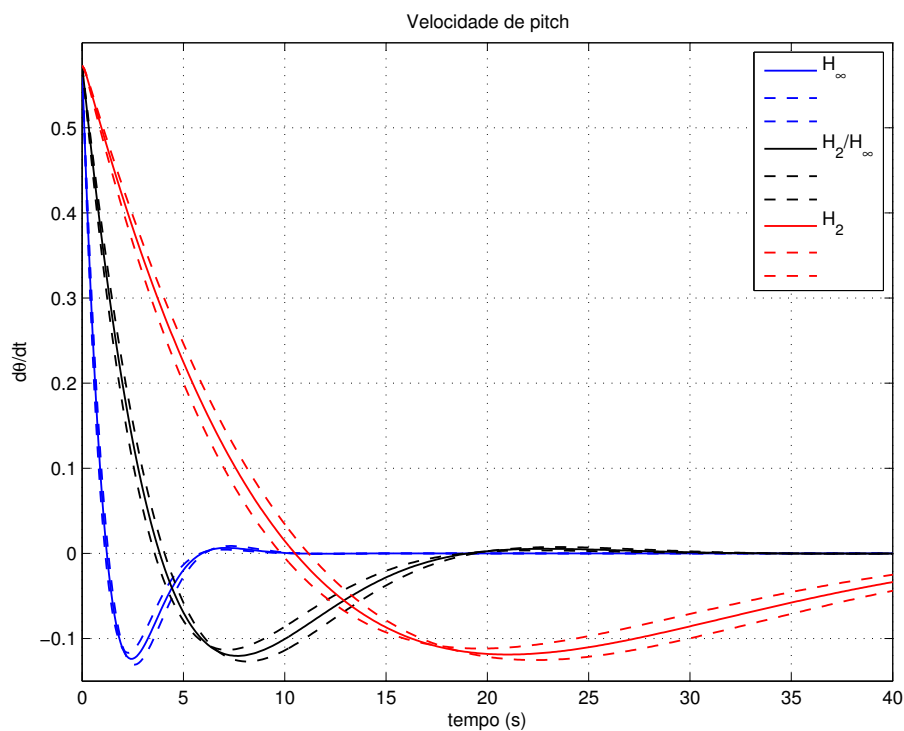


Figura 7.6 - Velocidade do ângulo de pitch para a resposta às condições iniciais, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

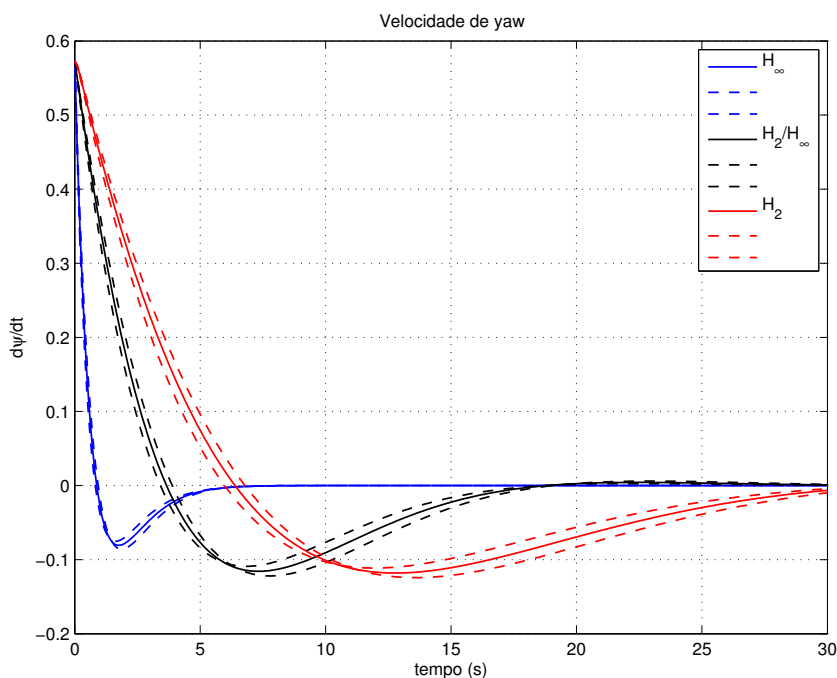


Figura 7.7 - Velocidade do ângulo de yaw para a resposta às condições iniciais, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

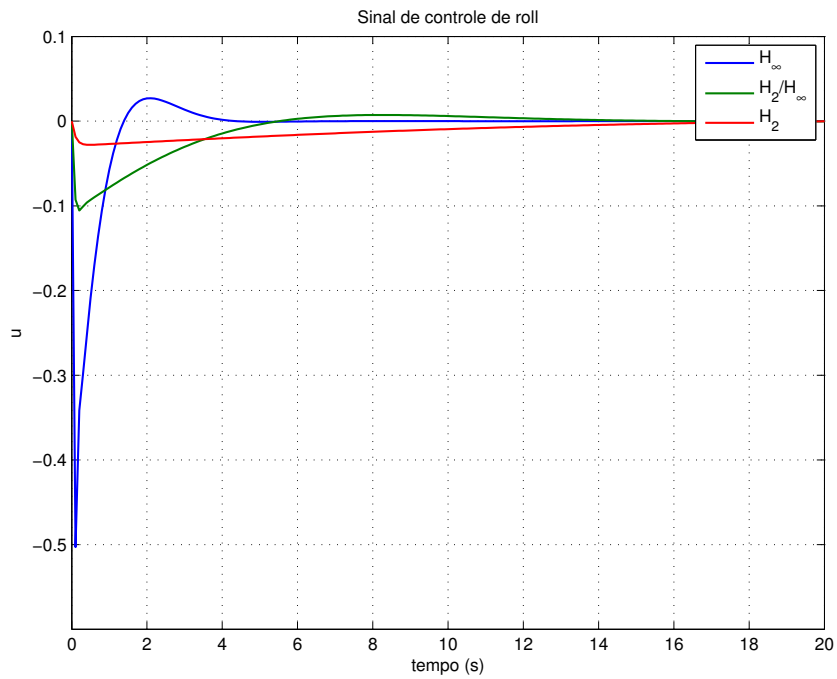


Figura 7.8 - Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de roll referente à condição inicial. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0,2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

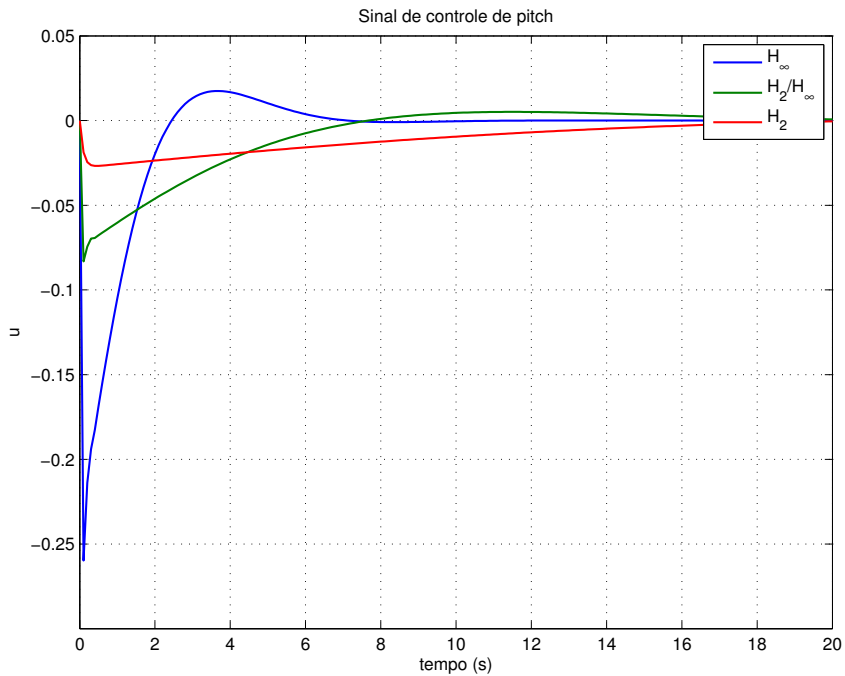


Figura 7.9 - Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de pitch referente à condição inicial. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0,2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

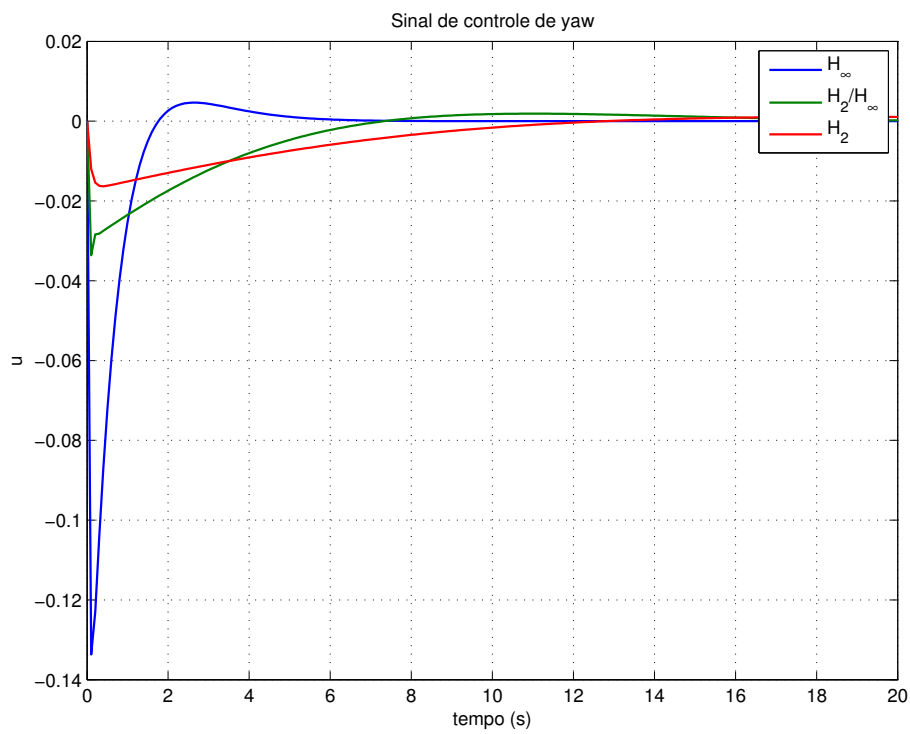


Figura 7.10 - Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de yaw referente à condição inicial. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

## 7.4 Robustez com respeito à entrada impulso

Uma entrada do tipo impulso representa uma perturbação de pequena duração. No caso de um microsatélite pode ser o movimento de uma antena, porém sem levar em consideração os modos de vibração. A simulação é realizada para um impulso de 0.001N.

As figuras 7.11- 7.13 representam o comportamento dos ângulos de atitude diante de uma perturbação tipo impulso. Para o controlador  $H_\infty$  o sistema se estabiliza em um tempo curto quando comparado com o  $H_2$ . Já o controlador misto  $H_2/H_\infty$  a resposta pode variar de acordo com o valor de  $\gamma$ . O valor de  $\gamma = 2$  para o controlador misto  $H_2/H_\infty$  oferece uma resposta rápida e o sinal de controle permanece dentro das especificações (ver figuras 7.17- 7.19).

O mesmo pode ser observado para as velocidades dos ângulos de atitude (ver figuras 7.14- 7.16). Para o controlador  $H_2$  a resposta é muito lenta quando comparada com  $H_\infty$ , e a escolha de  $\gamma = 2$  para o controlador misto  $H_2/H_\infty$  oferece uma resposta satisfatória.

Nota-se que para a entrada impulso o sinal de controle máximo para o caso do controlador  $H_\infty$  é quatro vezes maior do que o controlador  $H_2$  (ver figuras 7.17- 7.19). Para evitar a saturação do atuador é necessário manipular o vínculo do controlador  $H_\infty$ , i.e. manipular o valor de  $\gamma$  para reduzir o esforço máximo do sinal de controle. Vale observar que o sinal que está sendo minimizado pelo controle  $H_\infty$  não envolve os sinais de controle explicitamente, porém os sinais minimizados pelo controlador  $H_2$  contém pesos explícitos no sinal de controle. Isso pode ser observado nas equações (7.2) e (7.3), pois a matriz  $D_{12}$  que é a matriz que relaciona o sinal de controle com o sinal a ser minimizado pela norma  $H_\infty$  não possui peso e a matriz  $D_{22}$  que relaciona o sinal de controle com o sinal a ser minimizado pela norma  $H_2$  possui o peso  $R$  que pode ser manipulado pelo projetista de acordo com as especificações do sistema.



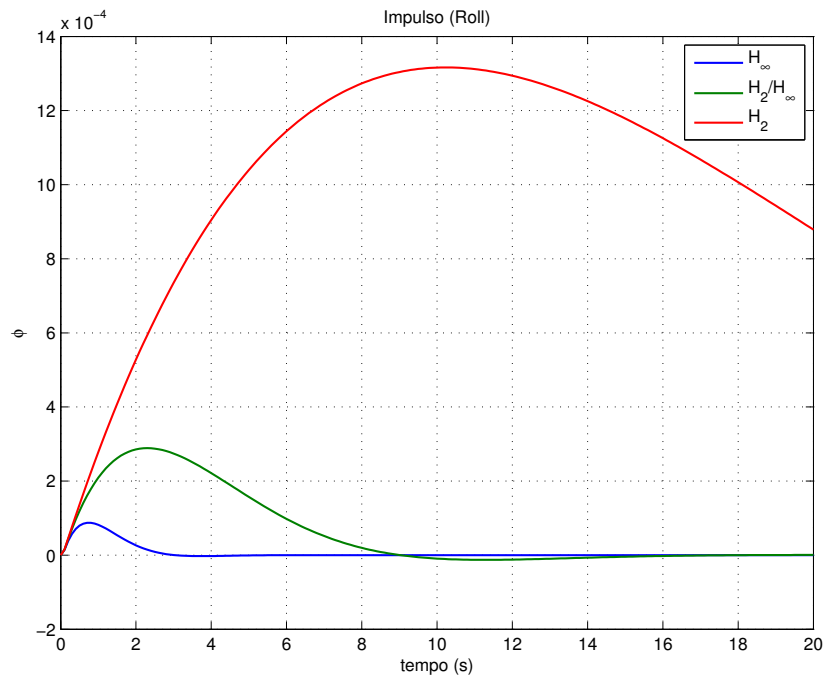


Figura 7.11 - Comportamento do ângulo de roll após uma entrada impulso, que representa uma perturbação no sistema. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

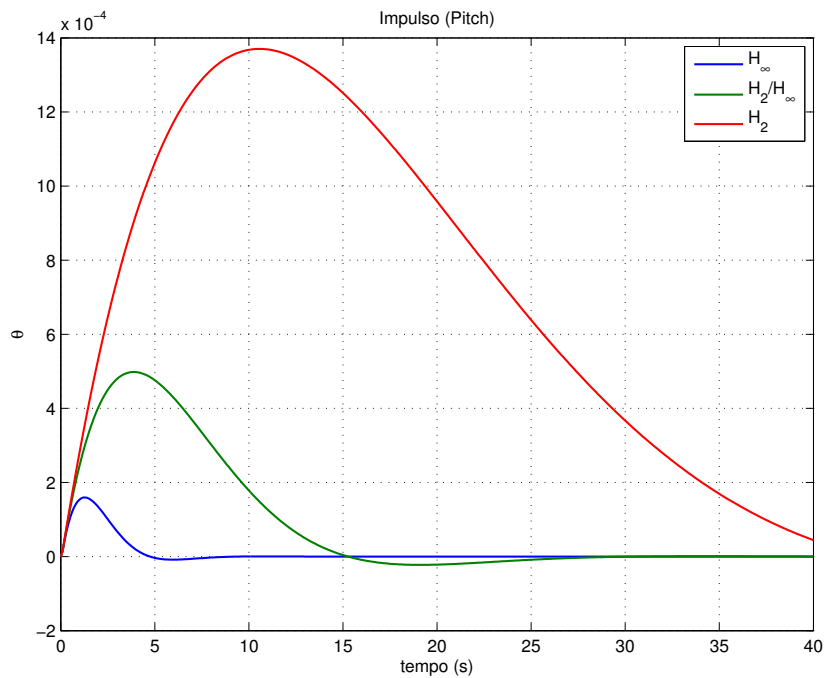


Figura 7.12 - Comportamento do ângulo de pitch após uma entrada impulso, que representa uma perturbação no sistema. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

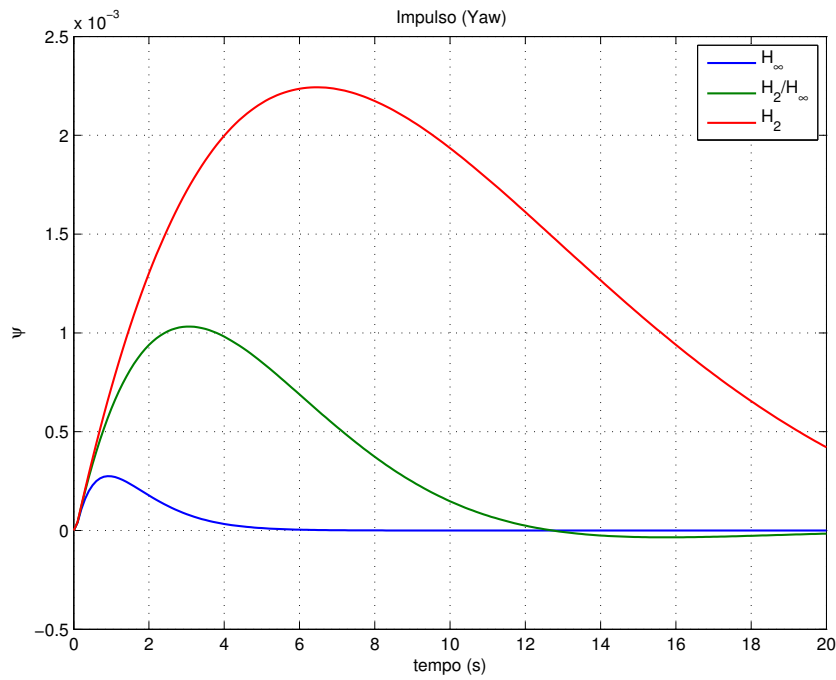


Figura 7.13 - Comportamento do ângulo de yaw após uma entrada impulso, que representa uma perturbação no sistema. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

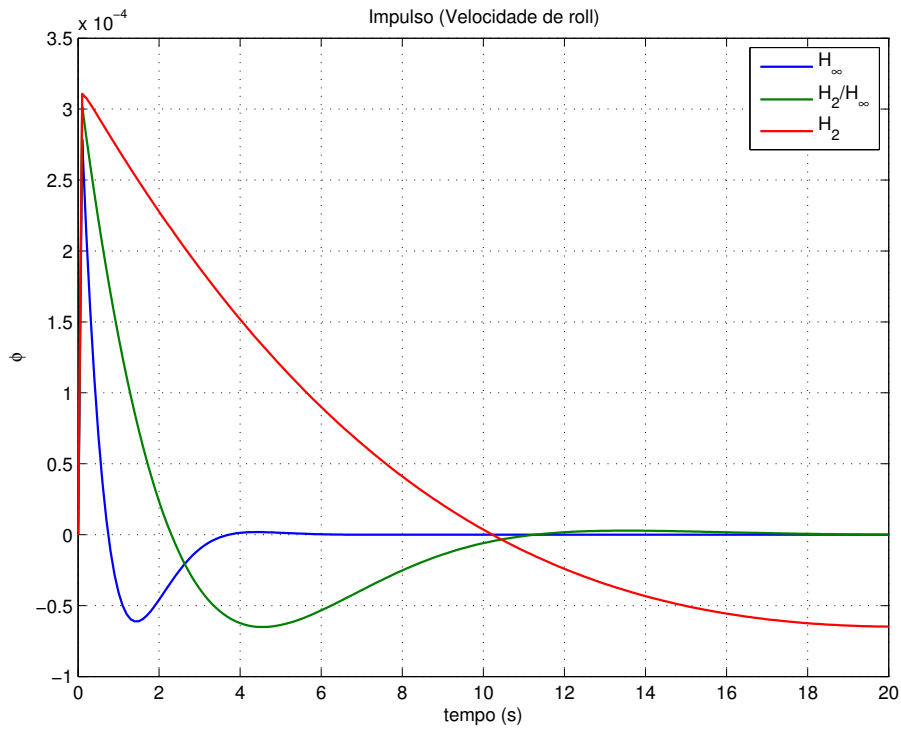


Figura 7.14 - Velocidade do ângulo de roll para a resposta à uma entrada impulso, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

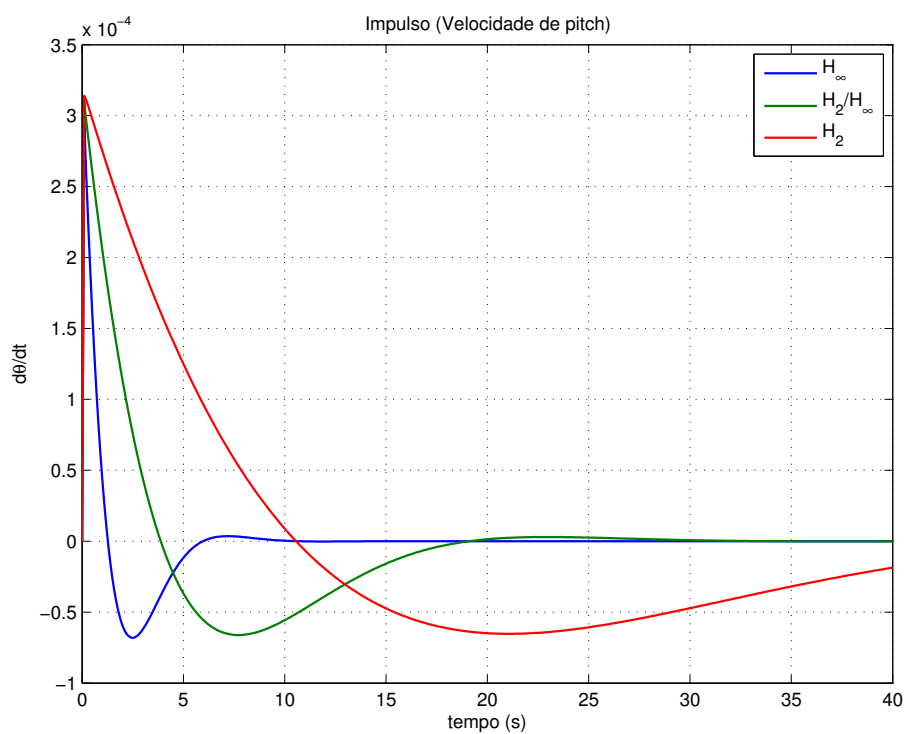


Figura 7.15 - Velocidade do ângulo de pitch para a resposta à uma entrada impulso, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

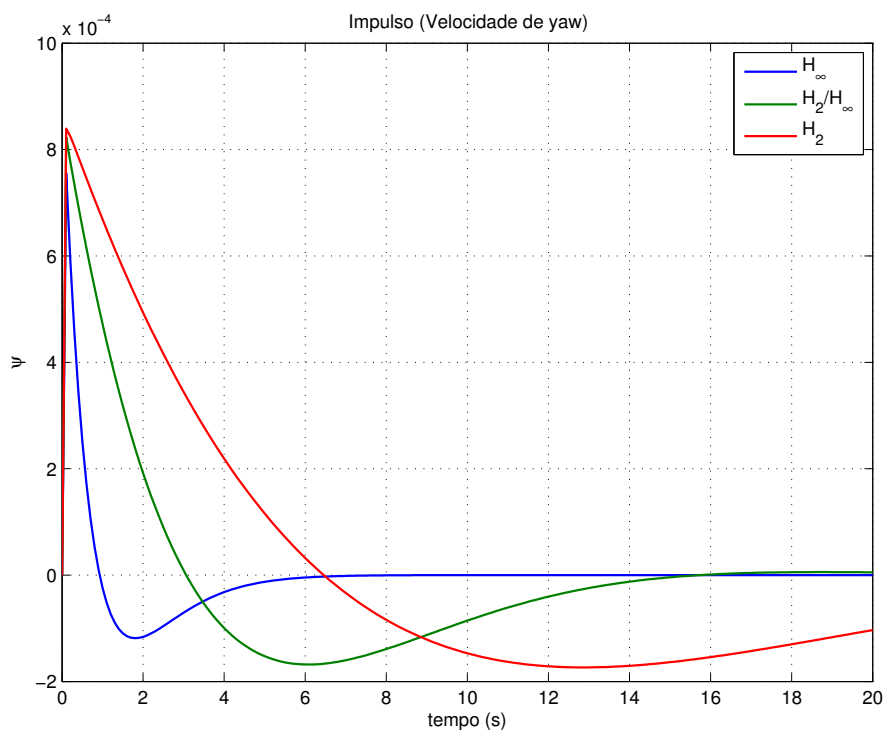


Figura 7.16 - Velocidade do ângulo de yaw para a resposta à uma entrada impulso, comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

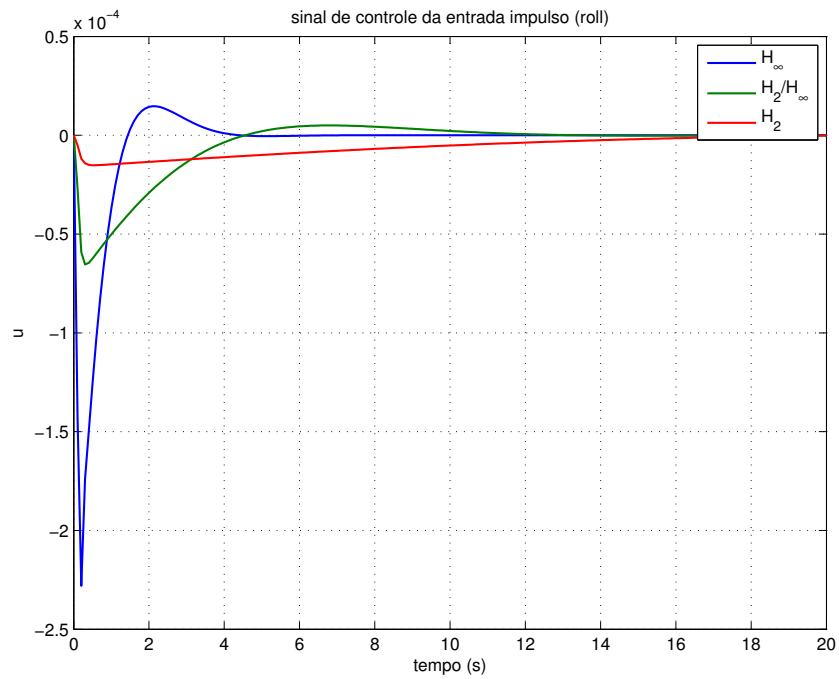


Figura 7.17 - Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de roll referente à uma entrada impulso. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0,2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

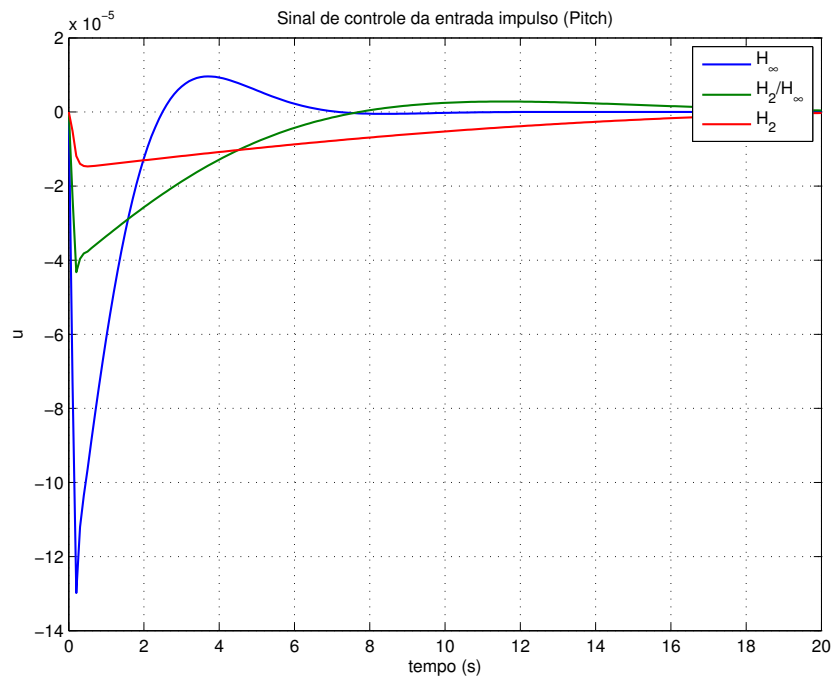


Figura 7.18 - Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de pitch referente à uma entrada impulso. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0,2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

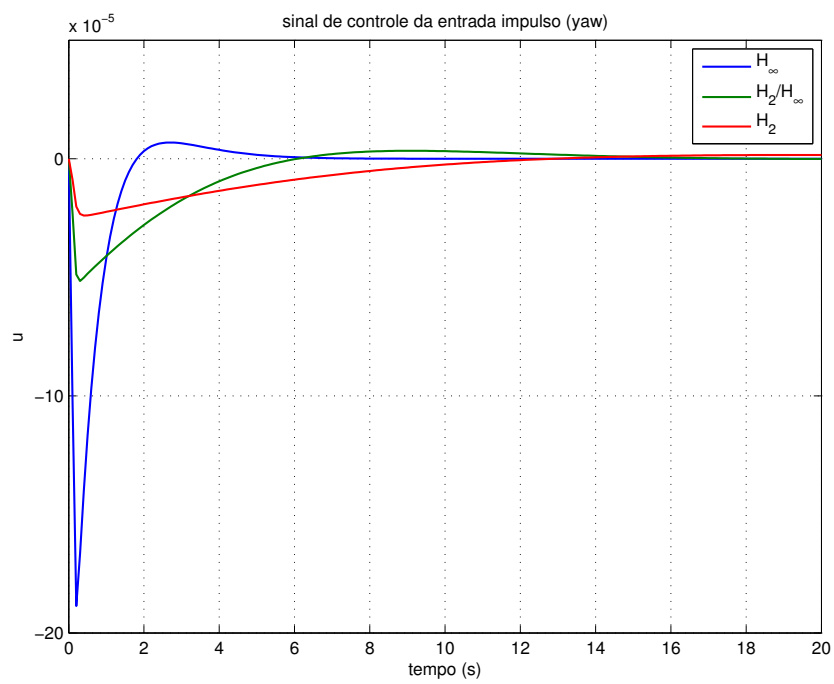


Figura 7.19 - Sinal de controle aplicado para estabilizar o ângulo de yaw referente à uma entrada impulso. Comparação dos controladores  $H_{\infty}$  ( $\gamma = 0,2$ ),  $H_2/H_{\infty}$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

## 7.5 Robustez com respeito aos torques externos

Todo veículo espacial está sujeito a pequenas perturbações no espaço, que muitas vezes são perturbações persistentes. No caso de um microsatélite de órbitas baixas as perturbações mais influentes são os torques de gradiente de gravidade, magnético e aerodinâmico. O torque magnético é cíclico e pode ser aproximado a uma senoide com diferentes frequências. O torque aerodinâmico é cumulativo e pode ser aproximado a um degrau. Baseando nos valores encontrados no segundo capítulo para os piores casos dos torques magnético (2.62) e aerodinâmico (2.64), deduz-se a seguinte expressão para o torque externo:

$$T_{ext} = \sum_k 10^{-5} \text{sen}(knt) + 3 \times 10^{-5} [\sigma(t - 1000) - \sigma(t - 4000)]. \quad (7.4)$$

De acordo com as figuras 7.20-7.22 o controlador  $H_\infty$  possui uma melhor capacidade de atenuação com respeito aos torques externos com relação ao controlador  $H_2$ , ou seja, para a atenuação dos torques externos o controlador  $H_\infty$  é o mais indicado. O controlador misto  $H_2/H_\infty$  com o valor de  $\gamma = 2$  é robusto com respeito às perturbações externas e ao mesmo tempo não satura o atuador.

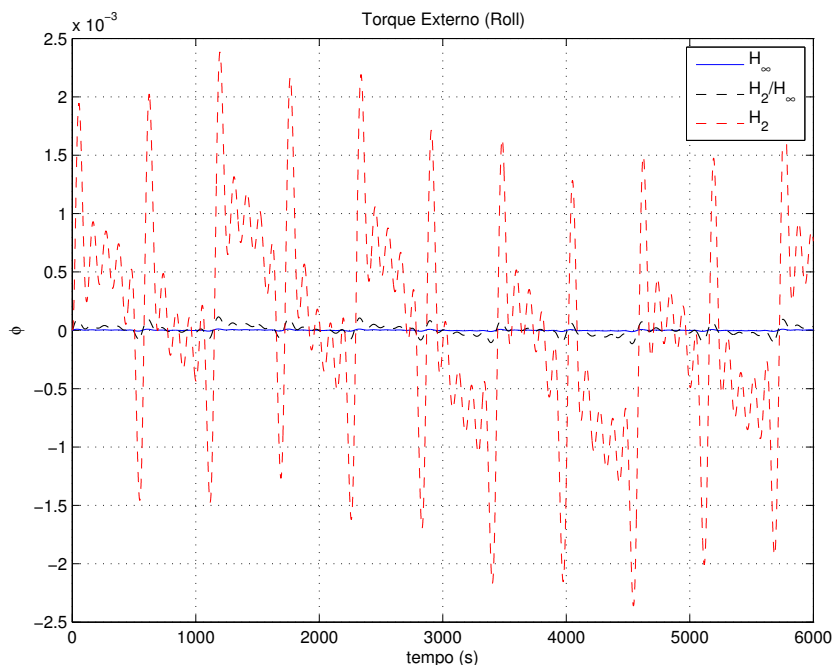


Figura 7.20 - Comportamento do ângulo de roll após uma entrada senoidal mais um degrau, que representa os torques externos. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

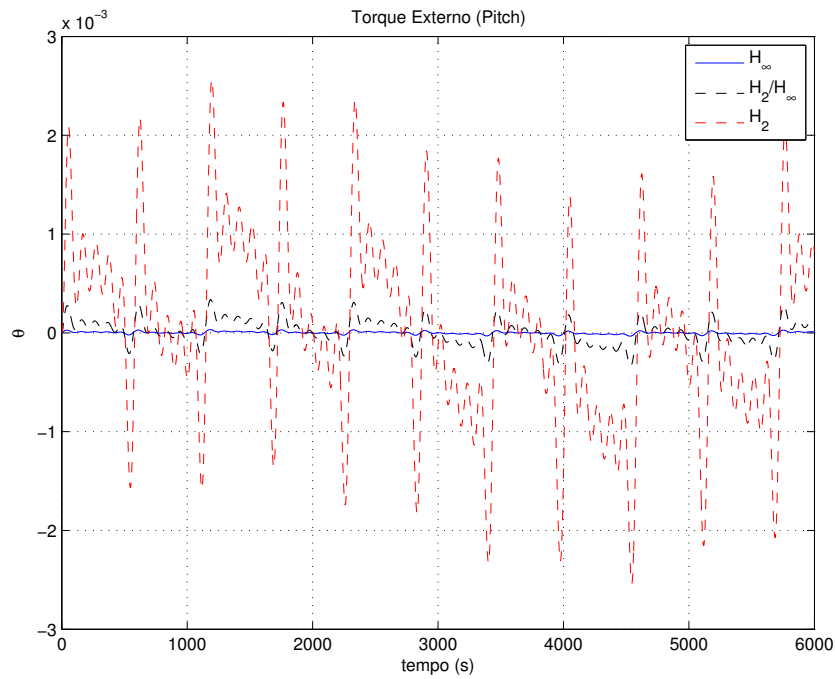


Figura 7.21 - Comportamento do ângulo de pitch após uma entrada senoidal mais um degrau, que representa os torques externos. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

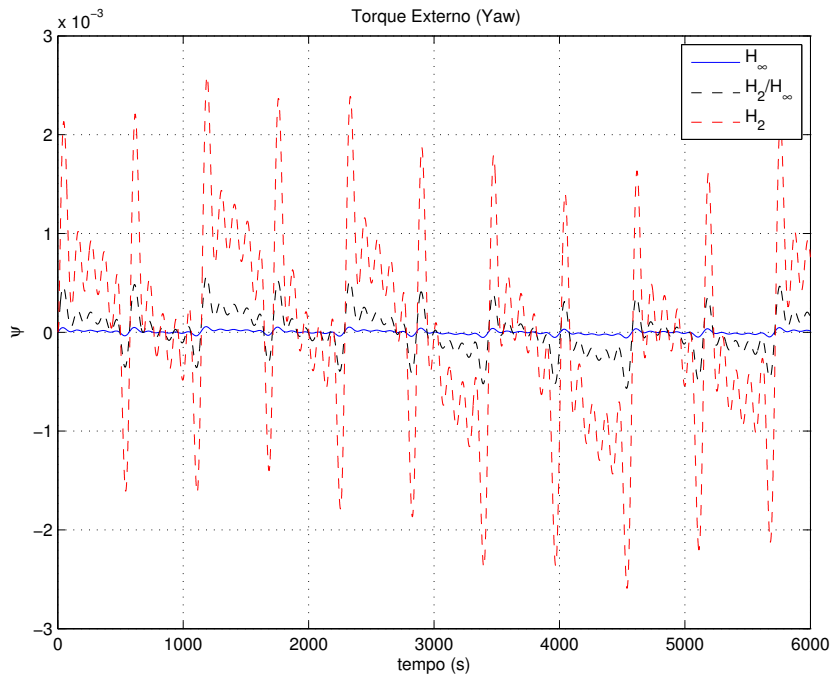


Figura 7.22 - Comportamento do ângulo de yaw após uma entrada senoidal mais um degrau, que representa os torques externos. Comparação dos controladores  $H_\infty$  ( $\gamma = 0, 2$ ),  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ) e  $H_2$  ( $\gamma = 100$ ).

## 7.6 Controlador misto $H_2/H_\infty$ com alocação de pólos

Agora será projetado um controlador misto  $H_2/H_\infty$  com alocação de pólos regional. A região de alocação de pólos será a intersecção do semi-plano  $D_1 : x \leq -0.1$  e da cônica  $D_2$  centrada na origem com ângulo interno  $\theta$ :

$$D_1 = \{z \in C : \text{Re}(z) < -\alpha\} \quad (7.5)$$

a função para  $D_1$  é

$$f_{D1} = \alpha + (z + \bar{z}) \quad (7.6)$$

$$D_2 = \{z = x + jy : x, y \in R, \text{tg}\theta < \frac{|y|}{x}\} \quad (7.7)$$

A função para  $D_2$  é

$$f_{D2}(z) = \begin{bmatrix} \text{sen}\frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) & \text{cos}\frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \\ \text{cos}\frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) & \text{sen}\frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0. \quad (7.8)$$

Essa região é mostrada na figura 7.23. A escolha da região vai depender dos requisitos do sistema, e vai variar de um sistema para outro, pois essa escolha está ligada à localização dos pólos do sistema.

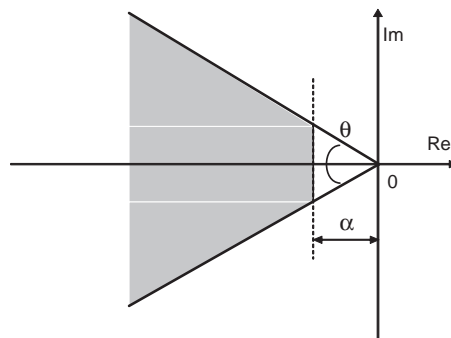


Figura 7.23 - Região de alocação de pólos ( $\alpha = -0.1$  e  $\theta = 90\pi/180$ ).

A simulação será feita para um valor de  $\gamma = 2$ . A função *hinfmix* será composta dos seguintes argumentos



$$[\text{gopt}, \text{h2opt}, \text{K}] = \text{hinfmix}(\text{P}, [3 \ 2 \ 1], [2, 0, 1, 0], \text{region})$$

sendo que o comando  $\text{region} = \text{lmireg}$  permite escolher em qual região os pólos serão colocados. No caso que está sendo estudado a região escolhida é dada pelas equações (7.5)-(7.8), nas quais  $\alpha = -0.1$  e  $\theta = 90\pi/180$ .

Pode ser observado nas figuras (7.24)-(7.26) que o controlador misto  $H_2/H_\infty$  com alocação de pólos possui um desempenho melhor do que o controlador sem alocação de pólos. Com alocação de pólos *overshoot* é menor e o sistema se estabiliza mais rapidamente, e a energia de controle é um pouco maior, porém não satura o atuador (ver figuras 7.27-7.29).

Tabela 7.4 - Pólos em malha fechada (roll/yaw)

Sem alocação de pólos	Com alocação de pólos
-0.268 + 0.248i	-0.370 - 0.104i
-0.268 - 0.248i	-0.370 - 0.104i
-0.349 + 0.350i	-0.469 + 0.212i
-0.349 - 0.350i	-0.469 - 0.212i
-15.6 + 55.2i	-37.9 + 23.2i
-15.6 - 55.2i	-37.9 - 23.2i
-13.2 + 67.0i	-42.5 + 33.7i
-13.2 - 67.0i	-42.5 - 33.7i

Os pólos em malha fechada para os ângulos de roll/yaw para o caso com alocação regional de pólos e sem alocação regional de pólos podem ser comparados na tabela 7.4. Pode ser observado que com a alocação de pólos regional, os pólos ficam mais afastados do eixo  $y$ , o que torna o sistema de controle mais eficiente.

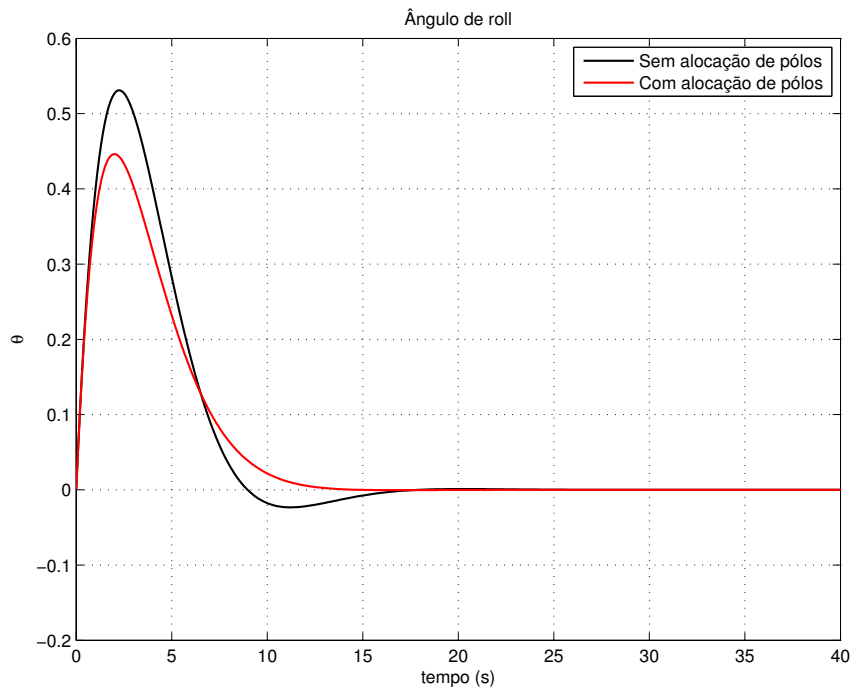


Figura 7.24 - Ângulo de roll controlado com  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos.

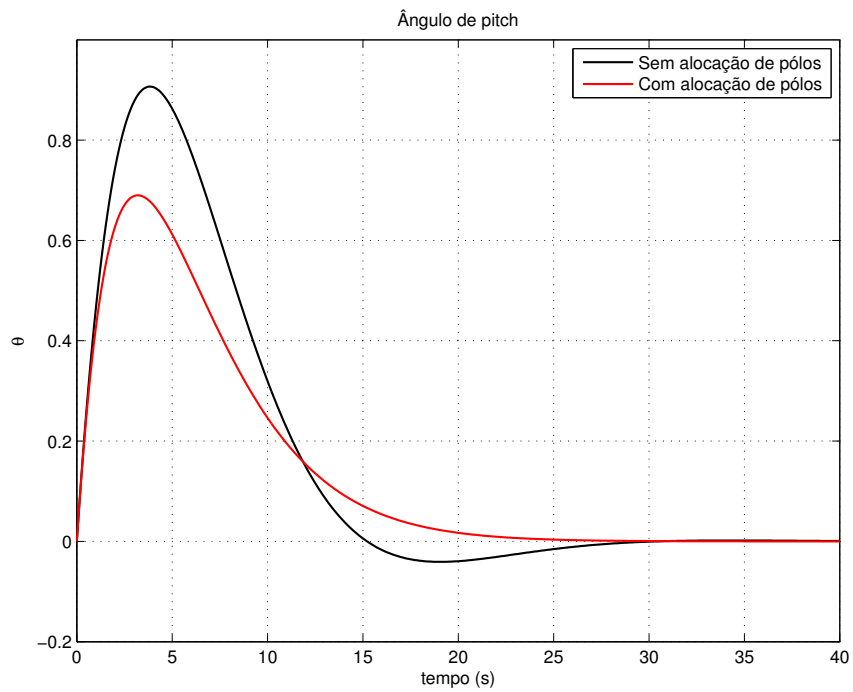


Figura 7.25 - Ângulo de pitch controlado com  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos.

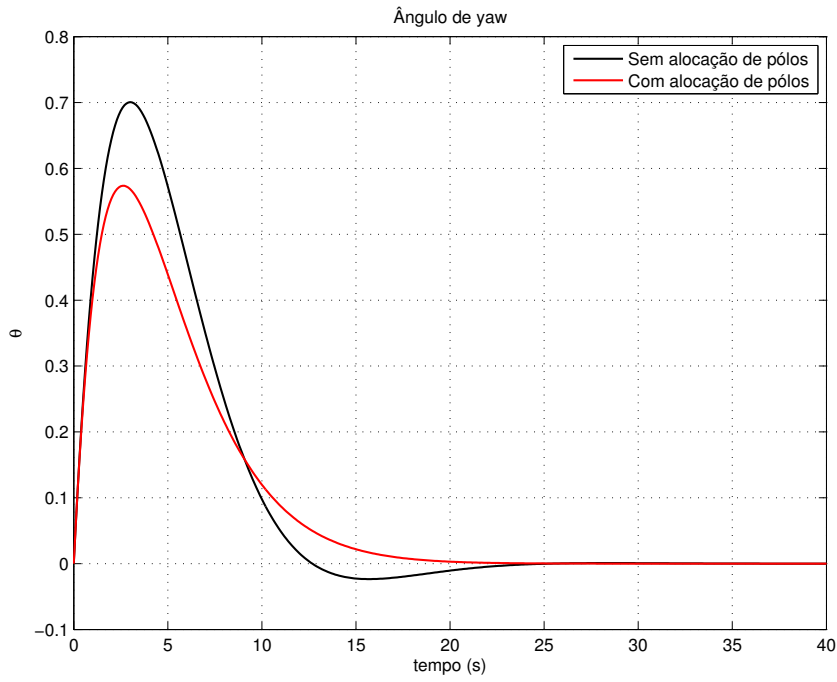


Figura 7.26 - Ângulo de yaw controlado com  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos.

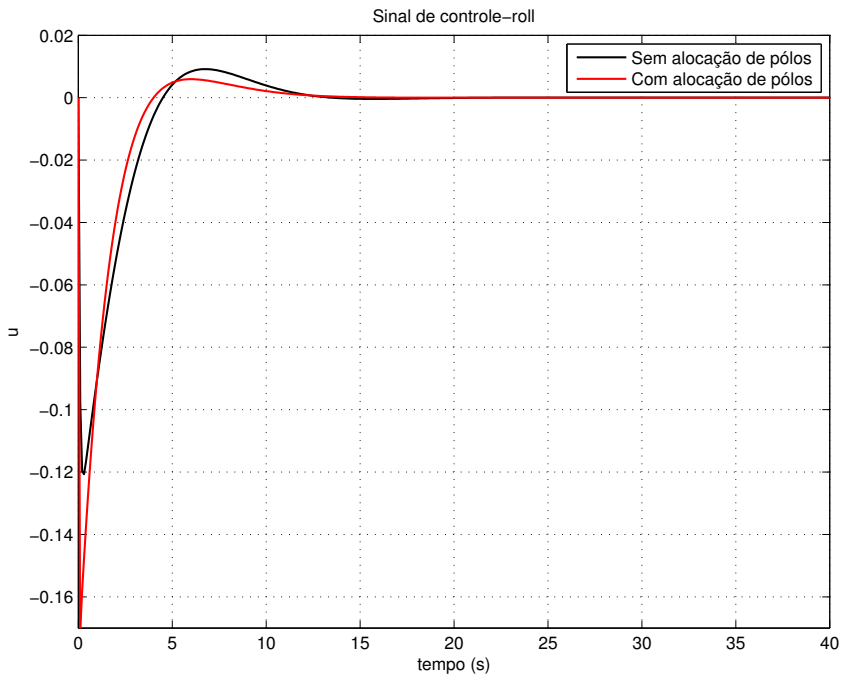


Figura 7.27 - Sinal de controle para estabilizar o ângulo de roll com o controlador  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos.

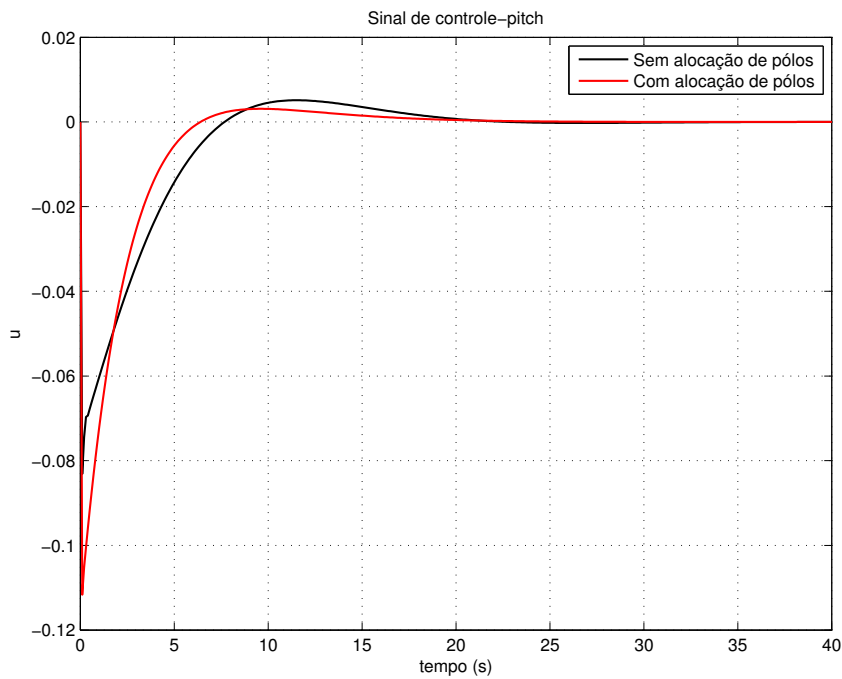


Figura 7.28 - Sinal de controle para estabilizar o ângulo de pitch com o controlador  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos.

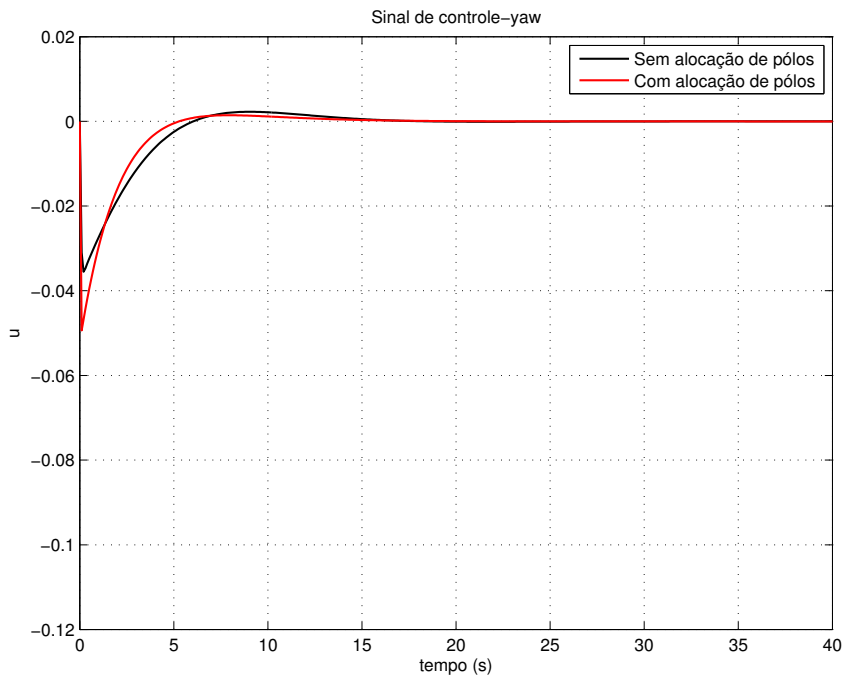


Figura 7.29 - Sinal de controle para estabilizar o ângulo de yaw com o controlador  $H_2/H_\infty$  ( $\gamma = 2$ ). Comparação do controle com alocação de pólos e sem alocação de pólos.

## 8 CONCLUSÃO

Nesta dissertação foi desenvolvido um modelo simplificado de um microssatélite na presença dos torques de gradiente de gravidade, eletromagnético e aerodinâmico. Foi desenvolvido um sistema de controle de atitude capaz de ser robusto em relação aos torques externos e às variações no momento de inércia.

O sistema de controle de atitude robusto desenvolvido neste trabalho foi baseado na filosofia do controlador  $H_2$  e  $H_\infty$ , que juntos formam o controlador misto  $H_2/H_\infty$ . O controlador misto é responsável pela minimização da norma  $H_2$  do rms correspondente a uma entrada do tipo impulso aleatório. O  $H_\infty$  fornece uma boa robustez com respeito a uma entrada senoidal e incertezas. O controlador misto  $H_2/H_\infty$  pode variar dependendo do vínculo  $\gamma$  imposto pelo  $H_\infty$ . Para um  $\gamma = \gamma_{min}$  tem-se o controlador  $H_\infty$  puro, e para  $\gamma = \gamma_{max}$  tem-se o controlador  $H_2$  puro.

Foram realizadas algumas simulações para testar o desempenho dos controladores estudados. Foram considerados os seguintes casos: resposta à condição inicial do microssatélite sujeito a variações no momento de inércia, resposta a uma entrada impulso que simula o movimento de antenas, e resposta a uma senoide mais um degrau que simula as perturbações externas tais como os torques magnético e aerodinâmico. Foi observado que o controlador  $H_\infty$  puro foi bastante robusto com respeito às incertezas no momento de inércia e os torques externos. Já o  $H_2$  obteve uma resposta muito lenta e não foi robusto com respeito às incertezas no momento de inércia e nem às perturbações externas. Com respeito ao sinal de controle, o controlador  $H_\infty$  saturou o atuador. A melhor opção foi projetar o controlador misto  $H_2/H_\infty$  para que fosse robusto com respeito às incertezas, com bom desempenho e um sinal de controle dentro das especificações, para isso foi escolhido um valor de  $\gamma$  adequado, e o valor escolhido foi  $\gamma = 2$ , no entanto dependendo das especificações pode-se escolher outro valor que melhor se encaixa no problema a ser resolvido.

Foi estudado também o controlador misto  $H_2/H_\infty$  com alocação regional de pólos. A região LMI escolhida foi a interseção de um semi-plano com uma cônica, que ficam no plano complexo. Dessa forma, a parte real dos pólos ficaram mais afastadas da origem, oferecendo uma resposta mais rápida e a parte imaginária ficou menor, fazendo o sistema mais amortecido. Com a alocação de pólos o sistema melhorou o desempenho, obtendo uma resposta mais rápida e com menor overshoot.

Finalmente destaca-se que as principais contribuições desse trabalho:

- Uma apresentação organizada de métodos que atualmente são usados para o projeto de controladores de sistemas espaciais, salientando suas vantagens e desvantagens;
- Uma apresentação detalhada da base teórica que envolve as técnicas de controle  $H_2/H_\infty$ , esclarecendo o projeto do controlador no que diz respeito a planta generalizada, o que não é encontrado facilmente na literatura;
- A programação de um conjunto de rotinas do MATLAB as quais permitem um estudo de sistemas de controle de satélites mais complexos;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERNSTEIN, D. S.; HADDAD, W. M. LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: A Riccati equation approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 3, p. 293–305, 1989. 2
- BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E., BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**, SIAM studies in applied mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. 3
- BRENDO, S.T.M. **Sensor modelling, attitude determination and control for micro-satellite**, Master thesis, Department of Engineering Cybernetics, NTNU, 2005. 5
- BROWN, R. G. **Introduction to random signal analysis and kalman filtering**, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- CEMENSKA, J. **Sensor Modeling and Kalman Filtering Applied to Satellite Attitude Determination**, Master thesis, Department of Engineering Cybernetics, NTNU, 2004.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.  $H_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996. 2, 67
- DA-WEI GU; PETKOV, P. H.; KONSTANTINOV, M. M. **Robust control Design with MATLAB**. Springer, 2005. 32
- DOYLE, J. Guaranteed margins for LQG regulators, **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 23, n. 4, p. 756-757, 1978. 52
- DOYLE, J. C.; STEIN, G. Robustness with observers, **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 24, n. 4, p. 607-61, 1979. 53, 54
- DOYLE, J. C.; B. FRANCIS; A. TANNENBAUM. **Feedback control theory**, Macmillan Publishing Company, 1992. 58
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI control toolbox**, Natick: The MathWorks, 1995. 3, 60, 67, 80
- GRASSI, M.; VETRELLA, S.; MOCCIA, A. Preliminary design of the attitude control system of a microsatellite for earth observation. **Space Technology**, v. 15, n. 4, p. 223–230, 1995. 1

GREWAL, M.S.; ANDREWS, A. P. **Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB**, John Wiley & Sons, NY, 2001. 50

KHARGONEKAR, P. P.; ROTEA, M. A. Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 36, n. 7, p. 824–837, 1991. 2

KIRK, D. E. **Optimal control theory: an introduction**, Dover Publications, New York, 2004. 47, 48, 49

KUGA, H.K. **Noções Práticas de Técnicas de Estimaco**, INPE, 2005. 50

LAHDHIRI, T.; ALOUANI, A. T. LQG/LTR Spacecraft Attitude Control, **Twenty-Fifth Southeastern Symposium on System Theory. Proceedings SSST**, p. 258-262 2

MARTINS-FILHO, L. S.; ARANTES JR., G.; SANTANA, A. C. Attitude stabilization of brazilian satellite PMM using a control strategy based on LQG theory. **7 Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications**, 2005. 2

MACIEJOWSKI, J. M. **Multivariable feedback design**, Addison-Wesley, Wokingham, 1989. 23, 27, 54

MSCI. MicroWheel 4000 (MW4000) Reaction Wheel. Disponível em: <<http://www.reactionwheel.com/products/mw-4000.html>>. Acesso em: 2013. 85

MUNCHEBERG, S.; KRISCHKE, M.; LEMKE, N. Nanosatellites and micro systems technology—capabilities, limitations and applications. **Acta Astronautica**, v. 39, n. 9–12, p. 799–808, 1996. 1

PACKARD, A. **What’s new with  $\mu$** . PhD Thesis, Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, 1988. 32

PITTELKAU, M. E. Frequency weighted LQG control of spacecraft attitude. **IEEE Trans.**, v. 1, p. 336-341, 1992 2

PYATNITSKII, E. S.; SKORODINSKII, V. I. Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem. **Syst. Control Letters**, v. 2, n. 2, p.130–135, 1982 61, 62

SAFONOV, M.G. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. **IEE Proceedings - Part D**, 129:251–256, 1982. 33



- SAHRAOUI, N. H.; BOUDJEMAI, A.; MOHAMMED, M. A. S.; ABDERRAHMANE, L. H. Pre-project of microsatellite for remote sensing and climate data collection. **Space Technology**, v. 18, n. 4-6, p.143–148, 1998. 1
- SANCHEZ-PENA, R. S.; SNAZAIER, M. **Robust systems theory and applications**. NewYork, Wiley, 1998. 74, 75, 78, 79
- SIDI, M. J. **Spacecraft dynamics control: a practical engineering approach**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997 7, 8, 18
- SKOGESTAD, S.; POSTLEHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**, John Wiley & Sons, Chichester, 2005. 23, 24, 25, 26, 27, 28, 54, 55, 58, 59, 66, 79
- SCHERER, C. W. **The Riccati inequality and state-space  $H_\infty$ -optimal control**, Ph.D. dissertation, Univ. Würzburg, Germany, 1990. 80
- SCHERER, C. W. Multiobjective  $H_2/H_\infty$  control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40,n n. 6, p. 1054–1062, 1995. 2
- SCHERER, C. W., GANINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40, n. 6, p. 1054–1062, 1997. 75, 77
- SHOW, L.L.; JUANG, J. C.; LIN, C.T.; JAN, Y.W. Spacecraft robust attitude tracking design: PID control approach, **Proceedings of the American Control Conference**, Anchorage, AK, USA, pp. 1360-1365, 2002. 2
- SUNDE, B.O. **Sensor modeling and attitude determination for micro-satellite**, Master thesis, Department of Engineering Cybernetics, NTNU, 2005. 85
- TEWARI, A. **Atmospheric and space flight dynamics: modeling and simulation with MATLAB and SIMULNK**, Birkhäuser, Boston, 2007. 5, 6, 10, 11
- TEWARI, A. **Modern control design with MATLAB and SIMULINK**, John Wiley & Sons, England. 12
- WERTZ, J. R. and LARSON, W.J. **Space mission analysis and design**, Microcosm Press, California, 1989. 1, 5, 20, 21

WILLEMSN, J. C. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. **IEEE Trans. Aut. Control**, v. 16, n. 6, p. 621–634, 1971. 61

WOLFE, S. M.; ALFRIEND, K. T.; LEONARD, B. S. A magnetic attitude control system for sunpointing satellites. **Astro-dynamics 1995—proceedings of the AAS/AIAA astrodynamics conference**. Advances in the astronomical sciences, Vol. 90, Part I (pp. 1047–1064), **American Astronautical Society Publication**, San Diego. 1

WU, B.; CAO, X.; LI, Z. (2009). Multi-objective output-feedback control for microsatellite attitude control: An LMI approach. **Acta Astronautica**, v. 64, n. 11-12 , p. 1021-1031, 2009. 80

YANGA, C.; SUN, P. Mixed  $H_2/H_\infty$  state-feedback design for microsatellite attitude control, **Control Engineering Practice**, v. 10, p. 951–970, 2005. 7, 35, 89, 90

ZHOU , K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. 2, 60, 75

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

## APÊNDICE A

### A.1 Otimização convexa

Em termos gerais, há duas propriedades básicas das funções convexas que a faz ser amplamente usada em matemática aplicada:

- *O valor máximo é encontrado em um ponto limite;*
- *Qualquer mínimo local é global. No entanto, uma função estritamente convexa admite pelo menos um mínimo.*

Para uma importante classe de problemas, conhecidos como problemas de otimização convexa, informação local é também informação global. As principais vantagens das funções convexas são:

- a) uma solução local é também uma solução global, i.e., as propriedades local-global se satisfazem mutuamente;
- b) as condições necessárias e suficientes de ótimo coincidem, e a suficiência dos multiplicadores de Lagrange é facilmente estabelecida;
- c) para métodos de otimização, é garantido que o valor da função objetivo decresce monotonicamente.

### A.2 Conjuntos Convexos

Um subconjunto  $A \subseteq R^n$  é dito convexo se

$$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in A, \tag{A.1}$$

quando  $x_1, x_2 \in A$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Geometricamente, essa definição implica que o segmento de reta que une  $x_1$  e  $x_2$  está inteiramente em  $A$ . Todo conjunto afim, em particular, o conjunto vazio e todo espaço  $R^n$  são convexas. As propriedades dos conjuntos convexas estão listadas abaixo, porém as provas não são explicitadas, podendo ser encontradas em livros referentes ao assunto.

**Teorema A.1.** *A intersecção de uma arbitrária coleção de conjuntos convexas é convexa.*

**Teorema A.2.** *Se  $A \subseteq R^n$  é um conjunto convexo, então toda translação  $A + a$  e todo múltiplo escalar  $\lambda A$  é um conjunto convexo, onde  $a \in R^n$  e  $\lambda A = \{\lambda x | x \in A\}$ .*

*Se  $A_1 \in R^n$  e  $A_2 \in R^n$  são conjuntos convexos, a sua soma e diferença  $A_1 \pm A_2$  também é um conjunto convexo, sendo*

$$A_1 \pm A_2 = \{x_1 \pm x_2 | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}. \quad (\text{A.2})$$

*Se  $A_1, \dots, A_m \in R^n$  são conjuntos convexos, a sua combinação linear  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$ , também é um conjunto convexo, sendo  $\lambda_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

**Teorema A.3.** *Se  $A$  é um conjunto convexo e  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ , então*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A. \quad (\text{A.3})$$

*Além do mais,  $A$  é convexo se e somente se (A.3) vale para todo  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ .*

**Teorema A.4.** *Seja  $B$  uma transformação de  $R^n$  para  $R^m$ . Então,  $BA$  é um conjunto convexo em  $R^m$  para todo conjunto convexo  $A \subseteq R^n$ , e  $B^{-1}A_1$  é um conjunto convexo em  $R^n$  para todo conjunto  $A_1 \subseteq R^m$ .*

**Teorema A.5.** *Seja  $A_1 \subseteq R^n$  e  $A_2 \subseteq R^m$  conjuntos convexos, respectivamente, então o produto cartesiano (soma direta)*

$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\} \quad (\text{A.4})$$

*é um conjunto convexo em  $R^{n+m}$ .*

### A.3 Funções Convexas

Seja  $A \subseteq R^n$  um conjunto convexo e  $f : A \rightarrow R$  uma função, então  $f$  é convexa se

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{A.5})$$

para todo  $x_1, x_2 \in A$ .

A função  $f$  é estritamente convexa se a inequação em (A.5) é estrita quando  $0 < \lambda < 1$  e  $x_1 \neq x_2$ .

Uma função convexa definida em um conjunto aberto é contínua no mesmo conjunto. Nos próximos teoremas, funções convexas diferenciáveis serão caracterizadas.

**Teorema A.6.** *Se  $A \subseteq R^n$  é um conjunto convexo aberto e  $f : A \rightarrow R^n$  uma*

função diferenciável em  $A$ , então  $f$  é convexa se e somente se

$$f(x_2) - f(x_1) \geq \Delta f(x_1)(x_2 - x_1) \quad (\text{A.6})$$

para todo par  $x_1, x_2 \in A$ .

Se  $f$  é convexa em  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , então haverá apenas uma derivada direcional.

**Teorema A.7.** Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo aberto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $A$ , então  $f$  é convexa se e somente se

$$(\Delta f(x_2) - \Delta f(x_1))(x_2 - x_1) \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

para todo par  $x_1, x_2 \in A$ .

Um problema de otimização convexa é dado da seguinte forma

$$\text{minimizar} \quad f(x) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{sujeito a} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.9})$$

sendo  $f$  e  $g_i$  funções convexas.

Todo mínimo local de (A.9) é um mínimo global.



## PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a sequência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.