



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-16632-TDI/1603

## FORMAS NORMAIS NO ESTUDO DA ESTABILIDADE PARA L4 NO PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL

Jorge Kennety Silva Formiga

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Rodolpho Vilhena de Moraes, e Teresinha de Jesus Stuchi, aprovada em 23 de outubro de 2009

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m19@80/2009/11.27.16.37>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

## **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-16632-TDI/1603

## FORMAS NORMAIS NO ESTUDO DA ESTABILIDADE PARA L4 NO PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL

Jorge Kennety Silva Formiga

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Rodolpho Vilhena de Moraes, e Teresinha de Jesus Stuchi, aprovada em 23 de outubro de 2009

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m19@80/2009/11.27.16.37>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Formiga, Jorge Kennety Silva.

F767f Formas Normais no estudo da estabilidade para L4 no problema fotogravitacional / Jorge Kennety Silva Formiga. – São José dos Campos : INPE, 2009.

144 p. ; (INPE-16632-TDI/1603)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.

Orientadores : Drs. Rodolpho Vilhena de Moraes, e Teresinha de Jesus Stuchi.

1. Forma Normal. 2. Estabilidade. 3. Pontos lagrangianos. 4. Sistemas hamiltonianos. 5. Problemas dos três corpos e fotogravitacional. I.Título.

CDU 629.783

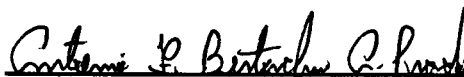
---

Copyright © 2009 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2009 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

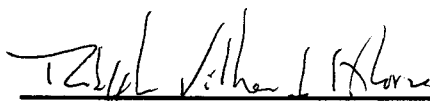
Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



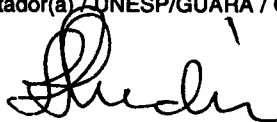
Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



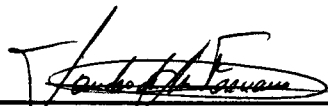
Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi



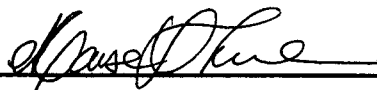
Orientador(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Dr. Sandro da Silva Fernandes



Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

Dra. Maisa de Oliveira Terra



Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

Aluno (a): Jorge Kennety Silva Formiga

São José dos Campos, 23 de outubro de 2009



*“O vento esculpe as nuvens, o tempo esculpe a alma dos homens. O vento, porém, dissipa as nuvens, enquanto o tempo jamais dissipará a alma. Sua essência permanece a mesma, intacta. É ela que define quem somos. E, quando a chama da vida deixa de brilhar e o corpo tomba, é essa a essência que ascende aos céus, unindo-se a Deus por toda a eternidade.”*

*Johannes Kepler (Harmonia do Mundo)*





*A minha pequenina filha Ísis e a minha  
grande companheira e esposa Ana Claudia.*



## **AGRADECIMENTOS**

*Ao meu Deus, pois sem ele nada disso teria acontecido.*

*A minha esposa Ana Claudia por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.*

*Ao professor Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes minha eterna gratidão pelo tempo e ensinamentos dedicados a mim.*

*À professora Dra. Teresinha de Jesus Stuchi pelas grandes contribuições nos momentos mais complicados deste trabalho.*

*Ao professor Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado por estar prontamente ajudando quando solicitado.*

*Ao professor Vandik Stefan Barbosa por ter contribuído muito com a minha formação acadêmica.*

*A todos os meus colegas do departamento pela ajuda e palavra amiga nas horas certas.*

*Ao CNPq- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e ao INPE- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais por financiar este trabalho.*



## RESUMO

O estudo da estabilidade do ponto lagrangiano  $L_4$  para o problema fotogravitacional é realizado. Primeiramente um método analítico-numérico para normalização de sistemas hamiltonianos com 2 e 3 graus de liberdade é apresentado. Em seguida escrevemos as equações do movimento na forma canônica generalizada que depois será colocada na forma normal usando o método de Lie-Hori. A análise da estabilidade do sistema será feita pelo teorema de Kovalev e Savechenko e aplicado ao estudo de estabilidade do ponto lagrangiano  $L_4$  no problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos.



# **NORMAL FORM IN STABILITY ANALYSIS OF THE L4 POINT OF PHOTOGRAVITATIONAL PROBLEM**

## **ABSTRACT**

The study of the stability of L4 point of in the photogravitational problem is accomplished. Firstly a normalization algorithm for 2 and 3 degree freedom is accomplished. The equations of motion are written in an extended canonical and then, using the Hori-Lie, method put in a normal form. The stability of the system is analyzed by the theorem of Kovalev and Savechenko be applied to the photogravitational restricted three body problem.





## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	
LISTA DE TABELAS	
1 INTRODUÇÃO.....	21
1.1 Objetivos .....	22
1.2 Motivação.....	22
1.3 Revisão bibliográfica .....	24
1.3.1 Estabilidade do movimento e forma normal .....	25
1.3.2 Problema fotogravitacional.....	29
2 SISTEMAS HAMILTONIANOS E FORMA NORMAL.....	33
2.1 Introdução .....	33
2.2 Sistema hamiltoniano .....	33
2.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade linear .....	36
2.4 Forma normal.....	39
2.4.1 Forma normal quadrática de um sistema hamiltoniano estável.. .....	39
2.4.2 Forma Normal pelo Método de Séries de Lie .....	42
3 SISTEMAS HAMILTONIANOS E FORMA NORMAL: CONSTRUÇÃO DE UMA FORMA NORMAL ANALÍTICA E ESTABILIDADE NÃO-LINEAR.....	47
3.1 Introdução .....	47
3.2 Forma normal para 2 graus de liberdade .....	48
3.2.1 Critério de estabilidade não-linear para 2 graus de liberdade.....	52
3.3 Forma normal para 3 graus de liberdade .....	54

3.4	Aplicação: Estudo da estabilidade Linear de um ponto estacionário.....	58
3.4.1	Hamiltoniana nas vizinhanças do ponto de equilíbrio .....	60
3.4.2	Estabilidade linear .....	62
3.4.3	Forma Normal .....	64
4	ESTUDO DA ESTABILIDADE NO PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL RESTRITO DOS TRÊS CORPOS, CIRCULAR E PLANO.....	67
4.1	INTRODUÇÃO .....	67
4.2	Equações do movimento .....	69
4.2.1	Pontos Lagrangianos .....	70
4.2.2	Contribuição da Radiação: Problema fotogravitacional.....	71
4.3	Equações do movimento no sistema hamiltoniano .....	73
	cuja hamiltoniana é dada por .....	74
4.4	Estabilidade linear .....	79
4.5	Resultados: Estabilidade linear .....	80
4.6	Existência de ressonância linear .....	85
4.7	Resultados: forma normal e estabilidade não-linear .....	92
4.8	Resultados Numéricos: Estabilidade e Forma normal.....	102
5	CONCLUSÃO.....	105
5.1	Perspectivas futuras.....	107
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	109
	APÊNDICE A: RESULTADOS NUMÉRICOS DA ESTABILIDADE LINEAR E NÃO LINEAR DO PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL CIRCULAR RESTRITO DOS TRÊS CORPOS.....	106
	APÊNDICE B: RESULTADOS ANALÍTICOS.....	117
	ANEXO A: TEOREMAS UTILIZADOS.....	136

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1.1-Representação geométrica das órbitas de Liapunov e Poincaré. (A) Órbita não perturbada, (B) órbita perturbada, correspondência normal e a correspondência isóchronos. ....	26
Figura 2.1-Parâmetros da estabilidade de Liapunov .....	38
Figura 3.1-Região de estabilidade linear no plano $c_{20}$ $c_{02}$ . ....	63
Figura 4.1- Sistema de coordenadas fixas (x,y) (sideral) e sistema de coordenadas girante( $x^*$ , $y^*$ ) (sinódico) para $m_1 > m_2$ . O ponto 0 é centro de massa do sistema. ....	68
Figura 4.2- Curva de velocidade zero e pontos Lagrangianos para o problema restrito dos três corpos .....	70
Figura 4.3- Região de estabilidade linear do ponto $L_4$ para $\kappa_2=1$ . ....	81
Figura 4.4- Região de estabilidade linear do ponto $L_4$ para $\kappa_1=1$ . ....	82
Figura 4.5- Região de estabilidade linear do ponto $L_4$ para $\kappa_2=0,9$ . ....	83
Figura 4.6- Região de estabilidade linear do ponto $L_4$ para $\kappa_2=0,8$ . ....	83
Figura 4.7-Região de estabilidade linear do ponto $L_4$ para $\kappa_2=0,4$ . ....	84
Figura 4.8- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação, $\kappa_2=0,1$ .....	89
Figura 4.9- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação, $\kappa_2=0,2$ .....	89
Figura 4.10- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação, $\kappa_2=0,5$ .....	90
Figura 4.11- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação, $\kappa_2=0,8$ .....	90
Figura 4.12- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação, $\kappa_2=0,8$ . ....	91
Figura 4.13- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ .....	95

Figura 4.14- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 0,9$ , $\kappa_2=1$ . .....	96
Figura 4.15- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 0,7$ e $\kappa_2 =1$ . .....	97
Figura 4.16- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 1$ e $\kappa_2 =0,9$ . .....	98
Figura 4.17- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 1$ e $\kappa_2 =0,7$ . .....	98
Figura 4.18- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 0,5$ e $\kappa_2 =0,7$ . .....	100
Figura 4.19- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 0,5$ e $\kappa_2 =0,6$ . .....	100
Figura 4.20- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 = 0,5$ e $\kappa_2 =0,5$ . .....	101
Figura 4.21- Dependência do determinante D vs $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para $\kappa_1 =0,88$ e $\kappa_2 =0,74$ . .....	102

## LISTA DE TABELAS

	<b><u>Pág.</u></b>
Tabela 4.1-Fator de redução para algumas estrelas binárias.....	72
Tabela 4.2- Valores de $\mu$ para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_1$ não emitindo radiação). .....	87
Tabela 4.3-Valores de $\mu$ para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_2$ não emitindo radiação). .....	87
Tabela 4.4-Valores de $\mu$ para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_1$ e $m_2$ emitindo radiação). .....	88
Tabela 4.5-Valores de $\mu$ para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_1$ e $m_2$ emitindo radiação). .....	88
Tabela 4.6- Coeficientes da hamiltoniana para forma normal, teste da estabilidade e frequências para diversas razões de massa $\mu$ . .....	103



## 1 INTRODUÇÃO

O desempenho de diversos sistemas dinâmicos que descrevem o comportamento temporal de fenômenos naturais ou aqueles associados, por exemplo, a dispositivos mecânicos, elétricos, etc, pode ser descrito por equações diferenciais. Sendo tais equações, na sua grande maioria, não lineares e de complexa solução analítica, pode-se, todavia, pesquisar o comportamento da solução em determinados pontos, sem a necessidade de se obter a solução geral. Pode acontecer, por exemplo, que pequenas variações nas condições iniciais produzam substanciais variações na solução e uma questão importante é encontrar que condições sob as quais pequenas variações nas condições iniciais levam a pequenas variações na solução. Para tempos arbitrariamente grandes teremos esta questão envolve a análise da estabilidade da solução.

Baseadas em teorias apresentadas por Liapunov e Poincaré, 50 definições sobre estabilidade foram apresentadas por Szebehely (1984) onde algumas delas entravam em contradição com as teorias por eles expostas.

Neste trabalho estudaremos estabilidade no sentido de Liapunov usando uma versão do teorema KAM (MOSER,1968) tal como apresentada por Kovalev e Savchenko (1975). Apresentaremos um desenvolvimento analítico para o estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas dinâmicos conservativos envolvendo a normalização de hamiltonianas (com dois e três graus de liberdade), esta baseada no método de Hori. Uma aplicação é feita para um problema ligado a pesquisas aeroespaciais, área na qual a análise da estabilidade dos movimentos translacional e rotacional de veículos espaciais, perturbados por torques externos, é de fundamental importância na análise de missões espaciais.

O interesse pela estabilidade do movimento em engenharia de satélites pode ser lembrado desde os primórdios da chamada era espacial em alguns casos como o primeiro satélite artificial da Terra, denominado Sputnik 1, que escapou

lentamente da sua órbita e o Explorer 1, o primeiro satélite artificial norte americano, cujo movimento rotacional saiu de controle antes do tempo previsto.

## 1.1 Objetivos

Os objetivos deste trabalho aqui desenvolvido são:

- Apresentar um modelo para construir de forma analítica a forma normal de sistemas hamiltonianos com 2 e 3 graus de liberdade.
- Apresentar um critério de estabilidade baseado no teorema de Arnold (1964) e Kovalev e Savchenko (1975) para o estudo da estabilidade de sistemas hamiltonianos para sistemas com 2 graus.
- Aplicar este critério ao teorema de Kovalev e Savchenko (1975) para verificar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_4$  para o problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos.

O modelo analítico aqui desenvolvido para normalizar sistemas hamiltonianos de dois ou três graus de liberdade foi baseado no método das séries de Lie. Utilizando este método desenvolvemos a mesma para sistemas com dois e três graus de liberdade. Aplicamos o resultado ao problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos no qual é estudada a estabilidade do ponto  $L_4$  para diversas razões de massa e diferentes coeficientes de radiação emitida pelos corpos primários.

## 1.2 Motivação

Em uma tese de doutorado recentemente desenvolvida no INPE (Cabette, 2006) foi estudada a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema hamiltoniano associado ao movimento rotacional de um satélite artificial da Terra quando se considera o torque devido ao gradiente de gravidade. O



método para estudar a estabilidade foi através do teorema de Kovalev-Savchenko (1975) que necessita da forma normal para sistemas hamiltonianos. No trabalho de Cabette a normalização foi feita numericamente e teve que ser repetida para todos os pontos de equilíbrio considerados, sendo este um procedimento extremamente laborioso. Tal fato motivou a elaborar um processo analítico que pudesse, a partir do fornecimento da expressão analítica de uma hamiltoniana, obter não só a expressão analítica da forma normal da hamiltoniana, mas também pontos de equilíbrio e a natureza da estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico ao qual a hamiltoniana esta associada.

A motivação para a realização de tal estudo sobre estabilidade está também reforçada no constante avanço da exploração espacial que necessita, para o êxito de suas missões, órbitas e atitudes de espaçonaves cada vez mais estáveis. Por exemplo, em determinadas manobras para correção do movimento orbital de satélites é necessário que a órbita do satélite fique estacionária com o propósito de minimizar o consumo de combustível. Abordagens sobre este tipo de órbita, conhecida como órbita congelada, é apresentada em Chobotov (1996).

Várias perturbações podem ser consideradas no estudo da estabilidade do movimento dos satélites, tanto orbital como translacional. Dentre as perturbações a serem consideradas temos: forças aerodinâmicas, perturbações gravitacionais por outros corpos, pressão de radiação solar, etc.

Regiões de estabilidade ou instabilidade do movimento orbital de satélites artificiais podem ser utilizadas também, por exemplo, para missões em que seja preciso que uma nave permaneça nas vizinhanças de uma determinada região por certo tempo.

Desde 1978 algumas agências espaciais tem realizado missões em pontos no espaço conhecido como pontos lagrangianos ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $L_5$ ) (Szebehely,

1984). Diversos estudos sobre as soluções periódicas e quase periódicas na vizinhança dos pontos lagrangianos colineares estão sendo abordado com o objetivo de transferir e manter um satélite artificial ao redor desses pontos. Segundo Corrêa (2005) a exploração espacial ISEE (International Sun-Earth Explorer) em 1978 registrou, no ponto  $L_1$ , ventos solares e raios cósmicos. A NASA enviou uma sonda para o ponto  $L_2$  em 2004 para realizar um teste tecnológico para o NGST (NextGeneration Space Telescope). A última missão realizada em 2009 foi pela GAIA (ESA) também no ponto  $L_2$  para estudar estruturas galácticas e astrometria. As futuras missões para exploração espacial em pontos lagrangianos estão previstas para 2011, 2012 e 2014. Todas estas missões serão realizadas pela Nasa.

No caso particular do ponto  $L_1$  no sistema Terra-Sol temos um lugar característico para realizar observações solares. O que é vantajoso na exploração deste ponto é que nas vizinhanças dele permite-se que o satélite fique voltado para o Sol, evitando que a Terra oculte o campo de visão e, além disso, permaneça longe de perturbações externas, dentre elas, a influência do campo magnético terrestre.

Como vimos os pontos lagrangianos ainda são de extrema importância para realizações de manobras orbitais e explorações espaciais embora uma das grandes desvantagens seja o tempo exigido na trajetória de transferência para atingir a vizinhança dos pontos lagrangianos. Isto justifica que possamos investigar de forma mais detalhada trajetórias nas vizinhanças destes pontos quando estamos considerando forças gravitacionais e não gravitacionais.

### **1.3 Revisão bibliográfica**

Nesta seção apresentaremos uma revisão breve bibliográfica da literatura envolvendo o estudo da estabilidade, forma normal e do problema fotogravitacional restrito dos três corpos. Procuraremos enfatizar alguns autores cuja contribuição é relevante para o trabalho em questão.

### 1.3.1 Estabilidade do movimento e forma normal

Os métodos e aplicações para estudo da estabilidade de sistemas de equações diferenciais tiveram uma grande trajetória começando pelo século XVIII e se perpetuando até os dias atuais. Em Szebehely (1964) encontramos uma vasta lista de referências que em sua grande maioria foram por mim consultadas. Hill (1878) apresenta um trabalho propondo usar a integral primeira para estabelecer regiões de estabilidade de um sistema conservativo, com um potencial independente do tempo. Poincaré (1892) e Liapunov (1892) contribuíram com diversas idéias fundamentais para o estudo de estabilidade apresentando uma abordagem geométrica para tal estudo. A diferença entre estas abordagens está no ponto das órbitas fiducial e perturbadas em que se aplicam os métodos. Liapunov estabelece uma correspondência isócrona e Poincaré, a correspondência normal. Isócrona em sistemas dinâmicos é caracterizado por todos os movimentos envolvidos serem completamente periódicos com um período fixo (independente das condições iniciais). Já a estabilidade apresentada por Poincaré se dá devido a utilização do vetor “normal” ao do movimento não perturbado. Esta relação pode ser verificada na Figura (1.1). Ainda nas contribuições para o estudo de estabilidade, passando pelo século XIX, temos Birkoff (1950), Kolmogorov (1954), Hagihara (1957), Duboshin, (1959), Arnold (1961), Chetaev (1961), Hahn Wolfgrang (1967), Meyer (1974); Kovalev e Savchenko (1975), Chudenko (1980), Maciejewski e Krzysztof, (1991). Kolmogorov e Arnold trabalhavam diretamente com as trajetórias usando expansões em séries de Lie, criando a primeira versão do teorema de KAM. O nome KAM é devido a Moser que em 1968 obteve os mesmo resultados trabalhando com mapeamentos de Poincaré, o “twist map”. Pode-se dizer que teorema de KAM, é um resultado sobre a estabilidade do ponto elíptico para dois graus de liberdade.

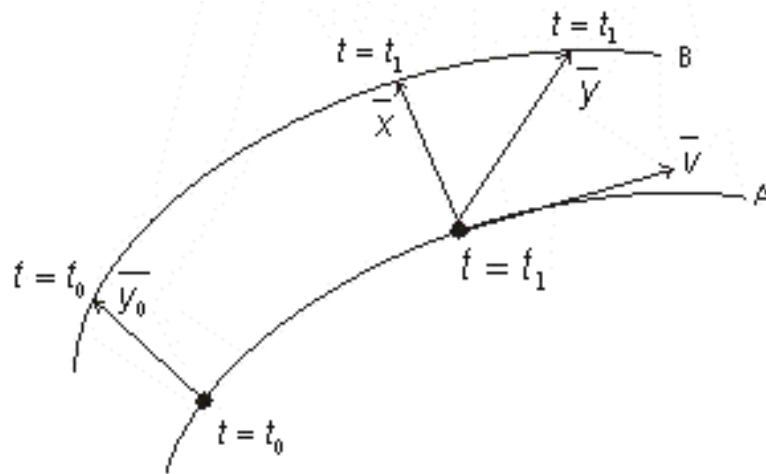


Figura 1.1-Representação geométrica das órbitas de Liapunov e Poincaré. (A) Órbita não perturbada, (B) órbita perturbada, correspondência normal e a correspondência isócronos.  
 Fonte: SZEBEHELY(1984).

Moser (1968) apresenta um estudo para análise da estabilidade de sistemas de hamiltonianos. Quando não são satisfeitos alguns critérios estabelecidos pela teoria para sistema hamiltoniano linear, a análise da estabilidade se reduz ao estudo dos coeficientes de um polinômio quadrático associado a um sistema canônico linear que depende da hamiltoniana do problema.

Condições para estabilidade da posição de equilíbrio de um sistema autônomo hamiltoniano com dois graus de liberdade envolvendo ressonância 2:1 e 3:1 é apresentado por Markeev (1968). Na ausência de ressonância, Markeev (1969) faz uma nova abordagem da teoria apresentada em 1968. Em seguida Markeev (1970) melhora os resultados apresentados por ele em 1968 com adição de mais termos na hamiltoniana envolvendo ressonância 1:1. Este estudo teve continuidade com resultados apresentados por Sokol Skii (1974), resultados estes obtidos com a aplicação o teorema de Moser no sistema reduzido. No caso de frequências do movimento rotacional autônomo com duas dimensões foram obtido por Kovalev e Chundnenko (1977) sem resolver o sistema reduzido e em seguida aplicou-se o teorema de Moser.

No caso do corpo rígido, Kovalev e Savechenko (1975) apresentam um estudo envolvendo estabilidade de rotações uniformes com a hamiltoniana expressa pelos ângulos de Euler. Neste estudo uma solução de equilíbrio é determinada, sendo representada pelo movimento de rotação em torno do eixo principal de inércia. Com a introdução de novas variáveis canônicas a hamiltoniana é desenvolvida nas vizinhanças da rotação uniforme. A análise da rotação uniforme fica então reduzida ao estudo entre os coeficientes da forma normal, obtida da hamiltoniana. Enfim, este estudo permite determinar regiões de estabilidade no plano de fase. Um estudo seguindo esta linha de pesquisa, envolvendo ressonância 4:1, foi apresentada por Kovalev e Savechenko (1977).

Chundnenko (1980) considera no seu estudo dois momentos principais de inércia iguais e o eixo de rotação coincidente com um dos eixos principais. Esta abordagem apresenta uma similaridade com o trabalho apresentado por Kovalev e Savechenko (1975). Neste estudo a hamiltoniana obtida é desenvolvida em torno de uma rotação uniforme, considerando termos até sexta ordem e em seguida reduzidos a forma normal. Uma discussão sobre os coeficientes dos polinômios permite traçar curvas e regiões de estabilidade no espaço de fase.

Bryuno (1989) apresenta um processo de normalização de sistemas hamiltonianos próximo a um círculo invariante ou a um toro. Este estudo foi desenvolvido baseado nas transformações de Birkhoff. Uma hamiltoniana na sua forma normal foi apresentada até sua quarta ordem.

Verhust (1992), ainda no estudo de sistemas hamiltonianos apresenta uma forma normal para dois graus de liberdade e realiza estudo da estabilidade próxima a um ponto de equilíbrio envolvendo ressonâncias. Utiliza um procedimento também apresentado por Birkhoff. No mesmo trabalho ele apresenta alguns pontos a serem levados em consideração quando está sendo

considerado um sistema hamiltoniano com três graus de liberdade. Neste caso, o mais complexo, é a da difusão de Arnold.

Cabral e Meyer (1999) apresentam um teorema para estudo de estabilidade de sistemas hamiltoniano na sua forma normal. Ainda no estudo de sistemas hamiltonianos na forma normal, Elipe et al.(2001), aplica o teorema de Arnold para realizar o estudo de estabilidade em sistemas com dois graus de liberdade ressonantes utilizando as variáveis de Lissajous. Costa Filho (2002) obtém um novo sistema em uma forma normal que proporciona uma melhor análise das soluções periódicas e das posições de equilíbrio do sistema considerado. Este método é interessante devido ao truncamento realizado que levaria a obtenção sistemas auxiliares semelhantes ao sistema dado.

O problema de Hill 3-D foi normalizado por Stuchi (2002) para ajudar na compreensão dos sistemas hamiltonianos 3-D. Neste trabalho é construído uma forma normal que provê um conhecimento da dinâmica associado ao caráter elíptico de pontos de equilíbrio. O ponto principal deste estudo é a redução do sistema hamiltoniano em certa vizinhança dos dois pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  (centro-sela-centro) como órbitas periódicas e toros KAM invariantes.

Vidal e Santos (2005) apresentam um estudo de estabilidade não linear para sistemas hamiltoniano considerando ressonâncias 3:1 e 4:1. Eles mostram que as condições de instabilidade no sentido de Liapunov, da posição de equilíbrio, dependem dos coeficientes da hamiltoniana. O estudo da estabilidade foi obtido utilizando o teorema apresentado por Chetaev (1961).

Elife e Moratalla (2006), baseado no teorema de Arnold, apresentam um trabalho que determina a estabilidade orbital para dois graus de liberdade, para satélites naturais em ressonância 2:1 e 3:1 com a Terra. Neste estudo, foi realizada uma normalização ordens altas e através de análise simples concluiu-

se: substituído os valores dos coeficientes harmônicos da expansão do potencial, podemos obter a estabilidade orbital de pontos estacionários.

Cabette (2006) apresenta um estudo sobre estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais. Utilizando o procedimento apresentado por Machuy (2001), foi apresentada uma forma normal da hamiltoniana até quarta ordem. Com base no teorema de Kovalev e Savchenko é verificada a estabilidade do movimento rotacional para alguns satélites modelo. Baseado no estudo apresentado por Cabette, Vilhena de Moraes et. al (2009) apresenta um estudo sobre estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais considerando perturbações devido ao torque do gradiente de gravidade usando uma formulação canônica e as variáveis de Andoyer para descrever o movimento rotacional.

### **1.3.2 Problema fotogravitacional**

Faremos uma rápida revisão da origem do problema fotogravitacional e alguns estudos realizados na mesma direção do nosso.

O problema restrito dos três corpos foi proposto no século XVII com a contribuição de Euler e Lagrange. Este último estabelece soluções de equilíbrio (pontos lagrangianos) que serão discutidas mais a diante. O estudo se estendeu pelo século XVIII com Jacobi, Hill, Poincaré e Birkoff (SZEBEHELY , 1967). O problema da condição de estabilidade dos pontos triangulares, por uma aproximação linear, foi abordado primeiramente por Gascheau em 1843 e depois por Routh em 1875 (Chandra, 2003). Exaustivos e não solucionados resultados foram obtidos na metade do século passado para o problema planar circular restrito, com base na teoria apresentada por Kolmogorov-Arnold-Moser desenvolvida por Kolmogorov (1954), Arnold (1963) e Moser (1968). O problema da estabilidade dos pontos triangulares para o caso planar circular foi descrito Markeev (1969), cujos resultados foram generalizados considerando

vários aspectos tais como: deformação dos corpos, influência das forças perturbadoras (pressão de radiação e gravitacional) aplicados ao estudo da estabilidade linear de alguns planetas do sistema solar.

No problema restrito de três corpos quando um ou ambos dos corpos primários estão emitindo radiação temos o chamado problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos.

Radzievskii (1950) formula o problema fotogravitacional restrito dos três corpos. Nesse trabalho foi considerado as interações das massas primárias e uma intensa emissão do Sol, o corpo primário central. Chernikov (1970) estende o trabalho apresentado por Radzievskii (1950) incluindo o efeito de Poynting-Robertson encontrado as equações de movimento e as soluções particulares correspondentes aos cinco pontos de libração. A instabilidade das soluções é demonstrada pelo primeiro método de Liapunov.

Scherman (1980) generaliza o problema restrito dos três corpos incluindo o efeito Poynting-Robertson e a pressão de radiação. Scherman mostra que este efeito torna os pontos  $L_4$  e  $L_5$  instáveis para um determinado período relacionado ao período de rotação das massas.

Sharma (1982) estuda a estabilidade linear dos pontos triangulares do problema restrito dos três corpos quando o mais massivo dos corpos primários está emitindo radiação. Ele mostra que a excentricidade da órbita periódica, em torno dos pontos triangulares para uma massa crítica, aumentando com o aumento do coeficiente da força de radiação.

Simmons et al. (1985) mostra uma solução completa do problema fotogravitacional restrito dos três corpos. Neste trabalho é discutida a existência e a estabilidade linear de todos os pontos de equilíbrio para diversos valores da pressão de radiação para ambos os corpos emitindo radiação e das razões de massas dos corpos primários.



Ragos e Zagouras (1988) encontram duas famílias de soluções periódicas sobre pontos fora do plano do movimento orbital dos corpos primários no problema restrito dos três corpos. A existência destes resultados foi questionada mais tarde por Todoram (1993). No seu estudo ele mostra que estas famílias não existem.

Ragos e Zagouras (1990) mostram a possibilidade de um nono ponto de libração no problema fotogravitacional. Considerando pequenas deformações de um corpo assimétrico infinitesimal, com um dos primários sendo simétrico e emitido radiação e o outro sendo assimétrico e não emitindo radiação.

Kashan (1996) estuda a existência e a estabilidade dos pontos triangulares do problema fotogravitacional elíptico restrito dos três corpos.

Neste trabalho investigaremos a estabilidade não-linear do ponto triangular  $L_4$  no problema restrito dos três corpos quando uma ou as duas massas primárias emitem radiação e o plano equatorial coincide com o plano do movimento. Observamos também que o processo que utilizamos para estudar a estabilidade das soluções no problema fotogravitacional envolve escrever a hamiltoniana na forma normal. Com tal abordagem é a primeira vez que o problema fotogravitacional foi estudado.

No Capítulo 2 serão apresentados conceitos de sistemas hamiltonianos, método de Lie-Hori e forma normal. Ainda neste capítulo será apresentado o teorema de Kovalev e Savchenko. O teorema Kovalev e Savchenko e o método para obtenção da forma normal serão fundamentais para construção do modelo analítico e do critério de estabilidade.

No capítulo 3 será apresentado o desenvolvimento analítico para se encontrar uma forma normal para dois e três graus de liberdade. Com base no teorema de Arnold será construído, utilizando os coeficientes da hamiltoniana

expandida, o determinante que garante a estabilidade não-linear dos pontos de equilíbrio a serem estudados.

No Capítulo 4, com ajuda do modelo analítico apresentado no capítulo 3, será investigado a estabilidade linear e não-linear do ponto  $L_4$  no problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos. O estudo é feito quando os corpos primários emitem radiação, quando um corpo ou nenhum deles emite radiação (problema clássico). Quando consideramos o problema clássico estamos interessados em verificar a precisão e a eficácia do modelo desenvolvido.

## 2 SISTEMAS HAMILTONIANOS E FORMA NORMAL

### 2.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma rápida revisão de mecânica clássica para situarmos os sistemas hamiltonianos e suas propriedades relevantes para nossos estudos. Discutiremos a estabilidade linear e não linear do sistema de equações hamiltonianas bem como o conceito de estabilidade de Lyapunov e forma normal. Será apresentado também um método de normalização baseado nas séries de Lie, primeiro proposto por Hori (1966), que é um método baseado em transformações canônicas na vizinhança da identidade.

No que diz respeito ao estudo da estabilidade não linear dos sistemas hamiltonianos, que é a proposta deste nosso trabalho, apresentaremos o teorema de Kovalev e Savechenko (1975) baseado em um teorema de Arnold (1961) desenvolvido para o estudo de estabilidade dos sistemas hamiltonianos.

### 2.2 Sistema hamiltoniano

Denomina-se espaço de configuração de um sistema mecânico ao conjunto das  $n$  variáveis independentes  $q_i$  obtidas após a eliminação dos vínculos holonômicos;  $n$  é também o número de graus de liberdade do sistema. O conjunto  $(q_i, dq_i/dt)$ ,  $i=1, \dots, n$ , é chamado espaço de fase. Sobre o espaço de fase define-se a função lagrangiana  $L(q, dq/dt, t)$  que para os sistemas ditos naturais é a diferença da energia cinética e potencial, ou seja

$$L(q_i, dq_i/dt, t) = T(q_i, dq_i/dt) - V(q)$$

Da extremização da ação definida como

$$S_\gamma = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, dq_i/dt, t) dt$$

onde  $\gamma(t)$  é um caminho prescrito , derivam-se as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Se então prescrevermos  $2n$  condições iniciais  $(q_i(0), dq_i(0)/dt)$ , a trajetória descrita no espaço de fase é única. Se esta trajetória puder ser determinada analiticamente o sistema é dito integrável e todas as variáveis  $q_i$  são cíclicas, ou seja não aparecem na lagrangeana. Caso não seja integrável deve-se recorrer à integração numérica ou a teorias de perturbação, ou ainda a estudos qualitativos.

Sistemas não integráveis , como os que estudaremos, podem ser mais comodamente tratados na formulação hamiltoniana. Como é bem conhecido podemos passar da formulação lagrangeana à formulação hamiltoniana por intermédio da transformação de Legendre, levando  $L(q, dq/dt, t)$  a  $H(q, p, t)$ . A função hamiltoniana é definida sobre os espaço das variáveis canonicamente conjugadas  $(q_i, p_i)$ ,  $i=1\dots n$ , onde os momentos conjugados às variáveis  $q_i$  são definidos por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, n$$

O hamiltoniano independente to tempo é simbolizado por  $H(p_i, q_i)$  onde  $p_i, q_i \in R$  e definido em termos do lagragiano,  $L(q_i, dq_i/dt)$  , como

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, dq_i/dt) \quad (2.1)$$

Pode-se mostrar que as equações hamiltonianas são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1,2,\dots,n\end{aligned}\tag{2.2}$$

Como no caso das equações de Euler-Lagrange, dadas as  $2n$  condições iniciais para as variáveis canonicamente conjugadas a solução do sistema é única. Foi provado por Liouville que se tomarmos um tubo de soluções de um sistema hamiltoniano com condições iniciais num volume  $V_0$ , este tubo se comporta como um fluido incompressível, isto é, o volume do espaço de fase é preservado ao longo do tempo. Dizemos então que o fluxo hamiltoniano preserva o volume do espaço de fase, propriedade esta que é compartilhada com outros sistemas que não são hamiltonianos.

Na verdade os sistemas hamiltonianos obedecem a uma propriedade ainda mais profunda e fundamental da qual a preservação de volume decorre. Os sistemas hamiltonianos preservam a soma das áreas projetadas,  $A_i$ , por qualquer superfície definida no espaço de fase sobre os  $n$  planos conjugados  $(q_i, p_i)$ . A esta soma de áreas dá-se o nome de área simplética. Esta propriedade confere uma estrutura geométrica ao espaço de fase hamiltoniano que deve ser preservada por qualquer transformação de variáveis para que o sistema continue sendo hamiltoniano. Estas transformações são ditas canônicas ou simpléticas. A forma normal que apresentamos neste capítulo faz uso desta propriedade e as transformações necessárias são derivadas de uma função geratriz.

Em geral não é possível resolver analiticamente um sistema hamiltoniano, mas podemos obter informações relevantes sem conhecermos a solução do sistema e mesmo sem recorrer a integrações numéricas. Tais estudos são denominados estudos qualitativos. A primeira informação que podemos obter é encontrar pontos críticos do sistema e estudar a sua estabilidade por intermédio da linearização do sistema nas suas vizinhanças.

### 2.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade linear

Como os sistemas hamiltonianos são um sistema de  $2n$  equações ordinárias de primeira ordem, do tipo

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

encontramos os pontos igualando o segundo termo da equação (2.3) a zero e resolvendo o sistema de equações analítica ou numericamente. Em seguida lineariza-se o sistema em torno da solução de equilíbrio e determina-se seus autovalores e autovetores.

Sempre podemos realizar uma translação de tal forma que a origem coincida com um ponto de equilíbrio de interesse. Expandindo-se a hamiltoniana em serie de Taylor, nas vizinhanças da origem, temos

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \dots \quad (2.4)$$

em que  $H_j$  ( $j \geq 0$ ) é um polinômio homogêneo de grau  $k$  nas variáveis  $2n$  variáveis  $(q_i, p_i)$ . Visto que a origem é um ponto de equilíbrio  $H_1=0$  e  $H_0$  é uma constante  $H_0=H(0)$ . Dessa forma escrevemos a hamiltoniana como:

O sistema linearizado então pode ser colocado na forma

$$\dot{v} = J P v \quad (2.5)$$

com  $v_i$ ,  $i=1, \dots, 2n$  (*matriz coluna*) descrevendo um ponto no espaço de fase na vizinhança da origem,  $P$  é o Hessiano avaliado na origem e  $J$  é a matriz simplética, isto é:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial H}{\partial x_1 x_2} & \vdots & \frac{\partial H}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial H}{\partial x_2 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} E_n & I_n \\ -I_n & E_n \end{pmatrix}$$

em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ ,  $E_n$  é uma matriz nula de ordem  $n$ . Dessa forma, a estabilidade linear pode ser estabelecida através dos autovalores obtidos através do  $\det(\lambda I - JP) = 0$ .

Como o sistema é hamiltoniano verifica-se que: se  $\alpha = r + is$  é autovalor, então  $-\alpha$  também o é (ARNOLD, 1983; CABRAL e MEYER, 1999). Notemos que para que a origem seja linearmente estável é necessário que os autovalores sejam imaginários puros. Esta condição de autovalores serem imaginários puros não assegura a estabilidade não-linear e tal estudo pode ser realizado através de teoremas existentes na literatura sendo que diversos deles foram baseados no teorema de Arnold (1983).

Para investigação da estabilidade não-linear, com o uso de alguns teoremas, podemos utilizar uma transformação canônica de coordenadas na vizinhança de um ponto de equilíbrio de tal forma que o a hamiltoniana fique o mais simples possível. Este método é conhecido como forma normal para sistemas hamiltonianos, uma aplicação dos trabalhos dos teoremas pioneiros de Poincaré (1812) e Birkhoff (1950).

Como o teorema que usamos se refere ao conceito de Lyapunov estável, apresentamos a seguir um pequeno resumo deste conceito antes de passarmos ao tópico de formas normais.

Se na Equação (2.3) o estado de equilíbrio é caracterizado por:





## 2.4 Forma normal

A forma normal consiste em se obter, via uma transformação polinomial de coordenadas (canônicas no caso hamiltoniano), a simplificação de um sistema dinâmico na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou órbita periódica. Este procedimento uma técnica analítica para reduzir sistemas de equações diferenciais, hamiltonianos ou não, à sua forma mais simples ou à alguma forma conveniente para o estudo que se deseja. Poincaré (1812) foi o primeiro a deduzir uma forma normal para sistemas gerais não ressonantes, caso este em que as equações se tornam totalmente lineares nas novas variáveis, seguido de Birkhoff (1927) para aplicações derivadas de sistemas hamiltonianos, ou seja aplicações no plano que preservam a área. Sempre é possível obter-se a série formal que mesmo quando não converge é de grande utilidade numérica ou para estudos de estabilidade não linear, como o caso que estudaremos neste trabalho.

### 2.4.1 Forma normal quadrática de um sistema hamiltoniano estável

Vamos supor, sem perda de generalidade, que a posição de equilíbrio de um sistema hamiltoniano com  $2n$  dimensional seja estável e que os autovalores, sejam distintos e não estejam numa *relação de ressonância*. Dizemos que os *autovalores* satisfazem uma relação de ressonância de ordem  $K$  se existir  $2n$  números  $k_i$  inteiros, diferentes de zero, para os quais

$$k_1\omega_1 + \dots + k_{2n}\omega_{2n} = 0, \quad |k_1| + \dots + |k_{2n}| = K$$

Então por uma transformação canônica linear dada pelos autovetores do sistema,  $H_2$  se torna (Verhulst, 1996)

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2) \quad (2.7)$$

Sempre que os autovalores obtidos de um sistema linear periódico forem distintos e imaginários puros, isto é  $\lambda_i = i \cdot \omega_i$ , a função hamiltoniana tem a forma (2.7).

Reformulando a Equação (2.7), obtemos

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Assumindo que as freqüências  $\omega_i$  são positivas este sistema determina um sistema com osciladores harmônico desacoplado, isto é, osciladores com direções independentes.

Notemos que a Equação (2.7) é uma constante que representa a energia do sistema, isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2) = E_0$$

e gera uma família de elipsóides. Reescrevendo a Equação (2.7), obtemos,

$$H = \sum_{i=1}^n \omega_i \tau_i = E_0$$

com  $\tau_i = \frac{1}{2}(q_i^2 + p_i^2)$  as variáveis de ação do oscilador harmônico simples que parametriza os n-toros. As variáveis canonicamente conjugadas a  $\tau_i$ ,  $\theta_i$  são dadas pela integração simples das equações

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tau_i} = \omega_i$$

e  $\omega_i$  é a frequência com que cada i-ésimo circuito do n-toro é percorrido. Nosso objetivo é saber se quando se introduz perturbações até ordem quatro se o ponto de equilíbrio permanece estável e conseqüentemente os toros da aproximação quadrática permanecem, embora deformados.

Observamos que não consideramos aqui nem os casos ressonantes e nem hamiltonianas cuja parte quadrática não seja positiva definida.

Mais precisamente a investigação sobre a estabilidade não-linear do ponto de equilíbrio do sistema hamiltoniano será feita através do teorema de Kovalev and Savchenko (KOVALEV and SAVCHENKO, 1977):

**Teorema:** Seja a hamiltoniana  $Z$  uma função analítica de coordenadas ( $q_i$ ) e momentos ( $p_i$ ) generalizados para um ponto de equilíbrio, com a forma normal até quarta ordem, expressa como:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{2} (q_i^2 + p_i^2) + \sum_{i,j=1}^2 \delta_{ij} R_i R_j + O_5, \quad (2.8)$$

com  $O_5$  indicando termos de ordem superior e

$$R_k = q_k^2 + p_k^2, k = i, j$$

O movimento é Liapunov Estável se as seguintes condições são satisfeitas:

i) Os autovalores do sistema linear reduzido, associado à hamiltoniana  $Z$ , são imaginários puros  $\pm i\omega_1$  e  $\pm i\omega_2$ ;

ii) A condição

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \quad (2.9)$$

é válida para todo  $k_1$  e  $k_2$  inteiros satisfazendo a desigualdade

$$|k_1| + |k_2| \leq 4 \quad (2.10)$$

iii) O determinante  $D^o$  deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$D^o = -\delta_{11}\omega_2^2 - 2\delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2 \neq 0 \quad (2.11)$$

em que  $\delta_{ij}$  são os coeficientes de quarta ordem da hamiltoniana Z, dada pela Equação (2.8).

Este teorema nos diz que se a reduzirmos uma hamiltoniana à forma normal até os termos de quarta ordem na ausência de ressonâncias, e se a condição dada pela Equação (2.11) for satisfeita, a existência de toros invariantes é garantida numa vizinhança suficientemente pequena da posição de equilíbrio (ARNOLD, 1961). Uma das aplicações deste teorema foi na investigação da estabilidade de sistemas canônicos aplicados a rotações uniformes de corpos rígidos (KOVALEV AND SAVCHENKO, 1975; CABETTE, 2006, VILHENA DE MORAES, ET. AL, 2009).

Veremos em seguida como se reduz uma hamiltoniana à forma normal visto que é uma técnica indispensável para a aplicação do teorema de Kovalev e Savchenko.

#### 2.4.2 Forma Normal pelo Método de Séries de Lie

Para normalizar os termos de ordem superior, utilizando o método de Lie, é conveniente que a hamiltoniana (2.7) seja expressa em variáveis complexas.

Portanto faremos uma transformação de variáveis,  $(q, p) \rightarrow (x, y)$  dada por:

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j) \quad y_j = \frac{-i}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j), j = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

onde a transformação inversa é dada por

$$q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - iy_j) \quad p_j = \frac{i}{\sqrt{2}}(x_j - iy_j), j = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

Então a nova hamiltoniana será da forma

$$H^* = \sum_{j=1}^n i\omega_j x_j y_j + \sum_{j \geq 2} H_j^*(x_j, y_j) \quad (2.14)$$

Observamos que a parte quadrática da hamiltoniana (2.14) está na sua forma normal complexa .

Expandindo a hamiltoniana (2.14) em série de Lie (Ver teorema no Anexo A.3) temos:

$$Z = H^* + \{H^*, G\} + \frac{1}{2!} \{\{H^*, G\}, G\} + \frac{1}{3!} \{\{\{H^*, G\}, G\}, G\} + \frac{1}{4!} \{\{\{\{H^*, G\}, G\}, G\}, G\} + \dots \quad (2.15)$$

Em que  $Z$  é obtida através de uma transformação canônica nas vizinhanças da identidade e a função geratriz  $G$  desta transformação também é considerada uma série de potência onde cada grau  $G_n$  é uma soma de polinômios homogêneo de grau  $n$ . Note que os termos entre  $\{.\}$  são colchetes de Poisson de ordem  $r+s-2$ , onde  $r$  e  $s$  é a ordem dos polinômios  $H$  e  $G$  respectivamente. Denotam-se os parêntesis de Poisson, como:

$$\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q}$$

De modo que a nova hamiltoniana, ordenada por grau, toma a forma, até quarta ordem:

Grau 2:  $Z_2 = H_2^*$

Grau 3:  $Z_3 = H_3^* + \{H_2^*, G_3\}$  (2.16)

Grau 4:  $Z_4 = H_4^* + \{H_3^*, G_3\} + \frac{1}{2!} \{\{H_2^*, G_3\}, G_3\} + \{H_2^*, G_4\}$

....

Como  $H_2^*$  já está em forma normal, temos que calcular a função geratriz que levará à forma normal até quarta ordem. Assim, a função  $G_n$  é escolhida de forma que possamos eliminar da hamiltoniana (2.14) os monômios nos quais  $q_i$  e  $p_i$  tenham expoentes diferentes restando apenas os monômios que carregam a ressonância intrínscica dos sistemas hamiltonianos. Isto é, estamos eliminando a perturbação  $H_3^*$  que pode ser resumida na seguinte equação

$$H_3^* = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} h_{3,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (2.17)$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ . Para eliminar os termos de grau três, consideraremos a função geratriz

$$G_3 = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} g_{3,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \quad (2.18)$$

O único colchete de Poisson da Equação (2.16), em  $Z_3$ , torna-se

$$\{H_2^*, G_3\} = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} \langle \beta - \alpha, W \rangle g_{k,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \quad (2.19)$$

onde  $\langle \alpha - \beta, W \rangle$  representa o produto interno,  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ , com  $\beta - \alpha = (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$  e  $W = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  os autovalores, imaginários puros, obtidos da parte quadrática da hamiltoniana. Portanto a função  $G_3$  procurada responsável pela eliminação do  $Z_3(x, y)$ , na Equação (2.16) é dada por

$$G_3 = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} \frac{-h_{k,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta}{\langle \beta - \alpha, W \rangle} \quad (2.20)$$

Note que  $G_3$  (Equação 2.20) fica bem definida se  $\langle \alpha - \beta, W \rangle \neq 0$ . Isto é, se se impõe a condição dos denominadores não se anularem, o que é sempre verdadeiro para os termos de terceira ordem quando se considera apenas a ressonância hamiltoniana natural.

Notemos que, o procedimento não é trivial porque a cada transformação realizada numa ordem implica na mudança dos termos de ordem superior. Além disso, encontrar uma função geratriz não é tarefa tão simples devido ao extenso desenvolvimento analítico e necessário para este estudo.

Pode-se generalizar o procedimento acima através de uma equação homológica, (SIMÓ, 1989):

$$\{H_2^*, G_k\} + Z_k = F_k \text{ para } k \geq 3 \text{ com } Z_3 = F_3$$

$$F_k = \sum_{m=1}^{k-3} \{Z_{k-m}, G_{2+m}\} + \sum_{m=1}^{k-2} H_{2+m, k-m-2}^*$$

Onde

$$H_{2+m, k-m-2}^* = \sum_{i=1}^{k-m-3} \frac{i}{k-m-2} \{H_{2+m, k-m-2-i}^*, G_{2+i}\} \quad (2.21)$$

a equação homológica para quarta ordem será

$$Z_4 = F_4 - \frac{1}{2!} \{H_2^*, G_4\} \quad (2.22)$$

Nesta expressão separamos os termos ressonantes que constituirão a forma normal de 4ª ordem; os restantes fazem parte da função geratriz  $G_4$ .

Observamos que as expressões (2.21) podem ser utilizadas até a ordem desejada. Nos casos de formas normais de alta ordem é mais conveniente desenvolver-se um sistema semi-analítico com manipuladores especializados construídos especialmente para esta tarefa (MACHUY, 2001; STUCHI, 2002). No entanto, até ordem 4 ainda é uma tarefa que se pode fazer com manipuladores comerciais tais como Mathematica e Maple.

Apresentaremos no capítulo 3 o desenvolvimento computacional utilizando o Mathematica para a determinação da forma normal para 2 e 3 graus de liberdade para qualquer sistema em função dos seu autovalores e dos coeficientes da hamiltoniana expandida. Será apresentado também o determinante para o estudo da estabilidade de Lyapunov para estes sistemas segundo o teorema de Kovalev e Savchenko.





### 3 SISTEMAS HAMILTONIANOS E FORMA NORMAL: CONSTRUÇÃO DE UMA FORMA NORMAL ANALÍTICA E ESTABILIDADE NÃO-LINEAR

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o procedimento utilizado para a transformação de sistemas hamiltonianos à sua forma normal não ressonante. Inicialmente falamos sobre diagonalização dos termos quadráticos e em seguida da forma normal dos termos de ordem superior. Implementamos computacionalmente o método de Lie para realizar a normalização destes termos. Finalmente apresentamos o critério para realizar o estudo da estabilidade não-linear, através dos coeficientes obtidos dos termos quadráticos e de grau quatro da hamiltoniana.

As etapas para a construção da forma normal são as seguintes:

- i. Expansão da hamiltoniana nas vizinhanças da origem;
- ii. Diagonalização da hamiltoniana quadrática,  $H_2$ ;
- iii. Separação dos termos de ordem 3 e 4 da hamiltoniana expandida;
- iv. Utilização do método de Lie para obter a função geratriz de ordem 3, que eliminará os termos não ressonantes/eliminará o  $H_3$ ;
- v. Utilização da função geratriz  $G_3$  para encontrar os termos de grau 4, ou seja  $F_4$ ;
- vi. Realizar a separação descrita na fórmula 2.22, obtendo-se  $H_4$  e  $G_4$ ;
- vii. Com os termos obtidos em vi para  $H_4$  e os autovalores de  $H_2$  calcular os coeficientes da forma normal;
- viii. Construir o critério de estabilidade baseado no teorema de Arnold utilizando os coeficientes obtidos no passo (vii).

Sem perda de generalidade consideraremos o desenvolvimento analítico para a obtenção da forma normal a partir da hamiltoniana nas coordenadas complexas, truncada em ordem quatro, com a parte quadrática já diagonalizada

nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável para o qual trasladamos a origem:

$$H^* = \sum_{j=1}^n i\omega_j x_j y_j + \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} h_{3,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} h_{4,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \quad (3.1)$$

Sabendo que o termo quadrático já está em forma normal, construiremos a forma normal para ordens superiores. Embora a forma normal para dois graus de liberdade pudesse ser obtida a partir da forma normal para três graus de liberdade, apresentamos ambas separadamente por razões didáticas.

### 3.2 Forma normal para 2 graus de liberdade

Para dois graus de liberdade,  $n=2$ , considerando a Equação (3.1), cuja parte quadrática é dada por

$$H_2^* = i\omega_1 x_1 y_1 + i\omega_2 x_2 y_2 \quad (3.2)$$

Os demais termos são obtidos das expressões

$$H_3^* = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} h_{3,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2} x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \quad e \quad H_4^* = \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} h_{4,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2} x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$$

com

$$\begin{aligned} H_3^* = & y_2^3 h_{3,0,0,0,3} + x_2 y_2^2 h_{3,0,0,1,2} + x_2^2 y_2 h_{3,0,0,2,1} + x_2^3 h_{3,0,0,3,0} + y_1 y_2^2 h_{3,0,1,0,2} \\ & + y_1 y_2 x_2 h_{3,0,1,1,1} + x_2^2 y_1 h_{3,0,1,2,0} + y_1^2 y_2 h_{3,0,2,0,1} \\ & + x_2 y_1^2 h_{3,0,2,1,0} + y_1^3 h_{3,0,3,0,0} + x_1 y_2^2 h_{3,1,0,0,2} + x_1 x_2 y_2 h_{3,1,0,1,1} \\ & + x_1 x_2^2 h_{3,1,0,2,0} + y_1 y_2 x_1 h_{3,1,1,0,1} + x_1 x_2 y_1 h_{3,1,1,1,0} \\ & + x_1 y_1^2 h_{3,1,2,0,0} + x_1^2 y_2 h_{3,2,0,0,1} + x_1^2 x_2 h_{3,2,0,1,0} + x_1^2 y_1 h_{3,2,1,0,0} \\ & + x_1^3 h_{3,3,0,0,0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
H_4^* = & y_2^4 h_{4,0,0,0,4} + x_2 y_2^3 h_{4,0,0,1,3} + x_2^2 y_2^2 h_{4,0,0,2,2} + y_2 x_2^3 h_{4,0,0,3,1} \\
& + x_2^4 h_{4,0,0,4,0} + y_1 y_2^3 h_{4,0,1,0,3} + y_1 y_2^2 x_2 h_{4,0,1,1,2} \\
& + y_1 y_2 x_2^2 h_{4,0,1,2,1} + y_1 x_2^3 h_{4,0,1,3,0} + y_1^2 y_2^2 h_{4,0,2,0,2} \\
& + y_1^2 y_2 x_2 h_{4,0,2,1,1} + y_1^2 x_2^2 h_{4,0,2,2,0} + y_1^3 y_2 h_{4,0,3,0,1} \\
& + y_1^3 x_2 h_{4,0,3,1,0} + y_1^4 h_{4,0,4,0,0} + y_2^3 x_1 h_{4,1,0,0,3} \\
& + y_2^2 x_1 x_2 h_{4,1,0,1,2} + y_2 x_1 x_2^2 h_{4,1,0,2,1} + x_1 x_2^3 h_{4,1,0,3,0} \\
& + y_1 y_2^2 x_1 h_{4,1,1,0,2} + y_1 y_2 x_1 x_2 h_{4,1,1,1,1} + y_1 x_1 x_2^2 h_{4,1,1,2,0} \\
& + y_1^2 y_2 x_1 h_{4,1,2,0,1} + y_1^2 x_1 x_2 h_{4,1,2,1,0} + y_1^3 x_1 h_{4,1,3,0,0} \\
& + y_2^2 x_1^2 h_{4,2,0,0,2} + y_2 x_1^2 x_2 h_{4,2,0,1,1} + x_1^2 x_2^2 h_{4,2,0,2,0} \\
& + y_1 y_2 x_1^2 h_{4,2,1,0,1} + y_1 x_1^2 x_2 h_{4,2,1,1,0} + y_1^2 x_1^2 h_{4,2,2,0,0} \\
& + y_2 x_1^3 h_{4,3,0,0,1} + x_1^3 x_2 h_{4,3,0,1,0} + y_1 x_1^3 h_{4,3,1,0,0} \\
& + x_1^4 h_{4,4,0,0,0}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Através do método apresentado na seção 2.6 determinamos a função geratriz escrita na forma:

$$\begin{aligned}
G_3 = & -\frac{(x_2^3 - 9ix_2^2 y_2 + 9x_2 y_2^2 - iy_2^3)h_{3,0,0,0,3}}{6\sqrt{2}\omega_2} - \frac{(ix_2 + y_2)^3 h_{3,0,0,1,2}}{6\sqrt{2}\omega_2} + \frac{(x_2 + iy_2)^3 h_{3,0,0,2,1}}{6\sqrt{2}\omega_2} \\
& + \frac{(-ix_2^3 + 9x_2^2 y_2 - 9ix_2 y_2^2 + y_2^3)h_{3,0,0,3,0}}{6\sqrt{2}\omega_2} \\
& + \frac{(x_1(-\frac{x_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{2ix_2 y_2}{\omega_1} + \frac{y_2^2}{-2\omega_2 + \omega_1}) + y_1(-\frac{2x_2 y_2}{\omega_1} - \frac{ix_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{iy_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}))h_{3,0,1,0,2}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(-y_1(y_2^2(\omega_1 - 2\omega_2) + x_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)) + ix_1(x_2^2(\omega_1 - 2\omega_2) + y_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)))h_{3,0,1,1,1}}{2\sqrt{2}(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \\
& + \frac{(x_1(\frac{2ix_2 y_2}{\omega_1} - \frac{y_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{x_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}) + y_1(-\frac{2x_2 y_2}{\omega_1} + \frac{ix_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} - \frac{iy_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}))h_{3,0,1,2,0}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(\frac{2ix_1 y_1(x_2 + iy_2)}{\omega_2} + x_1^2(\frac{iy_2}{2\omega_1 - \omega_2} - \frac{x_2}{2\omega_1 + \omega_2}) + y_1^2(-\frac{x_2}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{iy_2}{2\omega_1 + \omega_2}))h_{3,0,2,0,1}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(x_2(\frac{iy_1^2}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{2x_1 y_1}{\omega_2} + \frac{ix_1^2}{2\omega_1 + \omega_2}) + y_2(-\frac{2ix_1 y_1}{\omega_2} + \frac{x_1^2}{-2\omega_1 + \omega_2} - \frac{y_1^2}{2\omega_1 + \omega_2}))h_{3,0,2,1,0}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-x_1^3 - 9ix_1^2y_1 + 9x_1y_1^2 - iy_1^3)h_{3,0,3,0,0}}{6\sqrt{2}\omega_1} \\
& + \frac{(x_1(\frac{2x_2y_2}{\omega_1} - \frac{iy_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{ix_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}) + y_1(-\frac{2ix_2y_2}{\omega_1} + \frac{x_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} - \frac{y_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}))h_{3,1,0,0,2}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(-iy_1(y_2^2(\omega_1 - 2\omega_2) + x_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)) + x_1(x_2^2(\omega_1 - 2\omega_2) + y_2^2(\omega_1 + 2\omega_2)))h_{3,1,0,1,1}}{2\sqrt{2}(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \\
& + \frac{(x_1(\frac{2x_2y_2}{\omega_1} + \frac{iy_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} - \frac{ix_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}) + y_1(-\frac{2ix_2y_2}{\omega_1} - \frac{x_2^2}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{y_2^2}{\omega_1 + 2\omega_2}))h_{3,1,0,2,0}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(y_1^2(y_2(-2\omega_1 + \omega_2) - ix_2(2\omega_1 + \omega_2)) + x_1^2(ix_2(2\omega_1 - \omega_2) + y_2(2\omega_1 + \omega_2)))h_{3,1,1,0,1}}{2\sqrt{2}(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\
& + \frac{(x_1^2(\frac{iy_2}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{x_2}{2\omega_1 + \omega_2}) + y_1^2(\frac{x_2}{-2\omega_1 + \omega_2} - \frac{iy_2}{2\omega_1 + \omega_2}))h_{3,1,1,1,0}}{2\sqrt{2}} \\
& - \frac{(ix_1 + y_1)^3 h_{3,1,2,0,0}}{6\sqrt{2}\omega_1} \\
& + \frac{(x_2(\frac{y_1^2}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{2ix_1y_1}{\omega_2} + \frac{x_1^2}{2\omega_1 + \omega_2}) + y_2(-\frac{2x_1y_1}{\omega_2} + \frac{ix_1^2}{-2\omega_1 + \omega_2} - \frac{iy_1^2}{2\omega_1 + \omega_2}))h_{3,2,0,0,1}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(\frac{2x_1y_1(x_2 - iy_2)}{\omega_2} + x_1^2(\frac{y_2}{2\omega_1 - \omega_2} - \frac{ix_2}{2\omega_1 + \omega_2}) + y_1^2(\frac{ix_2}{-2\omega_1 + \omega_2} + \frac{y_2}{2\omega_1 + \omega_2}))h_{3,2,0,1,0}}{2\sqrt{2}} \\
& + \frac{(x_1 + iy_1)^3 h_{3,2,1,0,0}}{6\sqrt{2}\omega_1} + \frac{(-ix_1^3 + 9x_1^2y_1 - 9ix_1y_1^2 + y_1^3)h_{3,3,0,0,0}}{6\sqrt{2}\omega_1}
\end{aligned}$$

A Equação (3.5) é responsável pela eliminação dos termos de ordem 3 da hamiltoniana (3.1). Após a realização dos passos v e vi encontramos uma transformação de variáveis de quarta ordem  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$  que finalmente leva a hamiltoniana (3.1) à forma:

$$\text{Grau 2: } \bar{Z}_2 = i\omega_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1 + i\omega_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2$$

$$\text{Grau 3: } \bar{Z}_3 = 0 \tag{3.6}$$

$$\text{Grau 4: } \bar{Z}_4 = \bar{\delta}_{11} (\bar{x}_1 \bar{y}_1)^2 + \bar{\delta}_{12} (\bar{x}_1 \bar{y}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_2) + \bar{\delta}_{12} (\bar{x}_2 \bar{y}_2)^2$$

onde  $\overline{\delta_{ij}}$  são coeficientes reais obtidos da combinação dos  $h_{k,\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta$  ( $k=3,4$ ) com as frequências  $\omega_i$  ( $i=1,2$ ). Para o estudo da estabilidade segundo Liapunov, baseado no teorema de Kovalev e Savchenko (1975), é necessário que a Hamiltoniana esteja na forma normal real. Dessa forma, realizando uma transformação de variáveis  $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \rightarrow (q_k, p_k)$ , através da equação (3.11) obtemos a forma normal em variáveis reais

$$Z(q_1, p_1, q_2, p_2) = Z_2(q_1, p_1, q_2, p_2) + Z_4(q_1, p_1, q_2, p_2)$$

onde

$$Z_2 = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2)$$

$$Z_3 = 0, \tag{3.7}$$

$$Z_4 = \delta_{11}(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2 p_1^2) + \delta_{12}(q_1^2 q_2^2 + q_1^2 p_2^2 + p_1^2 q_2^2 + p_1^2 p_2^2) + \delta_{22}(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2 p_2^2)$$

com

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{1}{64\omega_1^3\omega_2 - 16\omega_1\omega_2^3} \{3\omega_2^3[5h_{3,0,3,0,0}^2 + h_{3,1,2,0,0}^2 + 2h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0} + h_{3,2,1,0,0}^2 + \\ & 2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} + 5h_{3,3,0,0,0}^2] - 4\omega_1^2\omega_2[15h_{3,0,3,0,0}^2 + h_{3,1,1,1,0}(h_{3,2,0,0,1} - h_{3,0,2,0,1}) + \\ & h_{3,1,1,0,1}(h_{3,0,2,1,0} - h_{3,2,0,1,0}) + 6h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0} + 3(h_{3,1,2,0,0}^2 + h_{3,2,1,0,0}^2 + 2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} + \\ & 5h_{3,3,0,0,0}^2)] + \omega_1\omega_2^2[3h_{3,0,2,0,1}^2 + 3h_{3,0,2,1,0}^2 + h_{3,1,1,0,1}^2 + h_{3,1,1,1,0}^2 + 2h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1} + \\ & 2h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0} + 3(h_{3,2,0,0,1}^2 h_{3,2,0,1,0}^2) - 2\omega_2(3h_{4,0,4,0,0} + h_{4,2,2,0,0} + 3h_{4,4,0,0,0})] - \\ & 8\omega_1^3[(h_{3,0,2,0,1} + h_{3,2,0,0,1})^2 + (h_{3,0,2,1,0} + h_{3,2,0,1,0})^2 - \omega_2(3h_{4,0,4,0,0} + h_{4,2,2,0,0} + 3h_{4,4,0,0,0})]\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} = & (16\omega_1^5\omega_2 - 68\omega_1^3\omega_2^3 + 16\omega_1\omega_2^5)^{-1} \{-4\omega_2^5[(h_{3,0,1,0,2} + h_{3,0,1,2,0})(3h_{3,0,3,0,0} + h_{3,2,1,0,0}) + \\
& (h_{3,1,0,0,2} + h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0} + 3h_{3,3,0,0,0})] - 2\omega_1^4\omega_2[4h_{3,0,1,1,1}(h_{3,1,0,0,2} - h_{3,1,0,2,0}) + \\
& h_{3,1,1,0,1}^2 - h_{3,1,1,1,0}^2 + (h_{3,0,2,0,1} - h_{3,2,0,0,1})^2 + (h_{3,0,2,1,0} - h_{3,2,0,1,0})^2 + 2h_{3,0,1,0,2} \\
& (3h_{3,0,3,0,0} - 2h_{3,1,0,1,1} + h_{3,2,1,0,0}) + 2h_{3,0,1,2,0}(3h_{3,0,3,0,0} + 2h_{3,1,0,1,1} + h_{3,2,1,0,0}) + \\
& 2(h_{3,1,0,0,2} + h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0} + 3h_{3,3,0,0,0})] + \omega_1^2\omega_2^3[(2h_{3,0,1,1,1}(h_{3,1,0,0,2} - h_{3,1,0,2,0}) + \\
& 8(h_{3,1,1,0,1}^2 + h_{3,1,1,1,0}^2) + 8(h_{3,0,2,0,1} - h_{3,2,0,0,1})^2 + 8(h_{3,0,2,1,0} - h_{3,2,0,1,0})^2 + h_{3,0,1,0,2} \\
& (51h_{3,0,3,0,0} - 2h_{3,1,0,1,1} + 17h_{3,2,1,0,0}) + h_{3,0,1,2,0}(51h_{3,0,3,0,0} + 2h_{3,1,0,1,1} + 17h_{3,2,1,0,0}) \\
& + 17(h_{3,1,0,0,2} + h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0} + 3h_{3,3,0,0,0})] + \omega_1^3\omega_2^2[8h_{3,0,1,1,1}^2 + 8(h_{3,0,1,0,2} - h_{3,0,1,2,0})^2 + \\
& 8(h_{3,1,0,1,1}^2 + (h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0})^2 + h_{3,0,2,1,0}(17h_{3,0,0,1,2} + 51h_{3,0,0,3,0} + 2h_{3,1,1,0,1}) + h_{3,0,2,0,1} \\
& (51h_{3,0,0,0,3} + 17h_{3,0,0,2,1} - 2h_{3,1,1,1,0}) + (51h_{3,0,0,0,3} + 17h_{3,0,0,2,1} + 2h_{3,1,1,1,0})h_{3,2,0,0,1} + \\
& h_{3,2,0,1,0}(17h_{3,0,0,1,2} + 51h_{3,0,0,3,0} - 2h_{3,1,1,0,1}) - 17\omega_2(h_{4,0,2,0,2} + h_{4,0,2,2,0} + h_{4,2,0,0,2} + h_{4,2,0,2,0})] - \\
& 4\omega_1^5[(3h_{3,0,0,0,3} + h_{3,0,0,2,1})(h_{3,0,2,0,1} + h_{3,2,0,0,1}) + (h_{3,0,0,1,2} + 3h_{3,0,0,3,0})(h_{3,0,2,1,0} + h_{3,2,0,1,0}) \\
& - \omega_2(h_{4,0,2,0,2} + h_{4,0,2,2,0} + h_{4,2,0,0,2} + h_{4,2,0,2,0})]\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{22} = & \frac{-1}{16\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \{\omega_1^3[15h_{3,0,0,0,3}^2 + 6h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1}^2 + 3(h_{3,0,0,1,2}^2 + h_{3,0,0,2,1}^2 + \\
& 2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0} + 5h_{3,0,0,3,0}^2) - 2\omega_2(3h_{4,0,0,0,4} + h_{4,0,0,2,2} + 3h_{4,0,0,4,0})] + \\
& \omega_1^2\omega_2[3h_{3,0,1,0,2}^2 + h_{3,0,1,1,1}^2 + 2h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0} + 3h_{3,0,1,2,0}^2 + 3h_{3,1,0,0,2}^2 + \\
& 2h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0} + 3h_{3,1,0,2,0}^2] + 4\omega_1\omega_2^2[-3(5h_{3,0,0,0,3}^2 + 2h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1} + h_{3,0,0,2,1}^2) - \\
& 3(h_{3,0,0,1,2}^2 + 2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0} + 5h_{3,0,0,3,0}^2) + 2\omega_2(3h_{4,0,0,0,4} + h_{4,0,0,2,2} + 3h_{4,0,0,4,0}) + \\
& h_{3,1,0,1,1}(h_{3,0,1,0,2} - h_{3,0,1,2,0}) + h_{3,0,1,1,1}(-h_{3,1,0,0,2} + h_{3,1,0,2,0})] - 8\omega_2^3[(h_{3,0,1,0,2} + h_{3,0,1,2,0})^2 + \\
& (h_{3,1,0,0,2} + h_{3,1,0,2,0})^2]\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Os termos  $\delta_{uv}$ , da equação (3.8), (3.9) e (3.10) são os coeficientes indispensáveis na construção da terceira condição de estabilidade não linear do teorema de Kovalev e Savchenko.

### 3.2.1 Critério de estabilidade não-linear para 2 graus de liberdade

Como já mencionamos, para a determinação do caráter de pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico hamiltoniano, bem como as regiões onde tal caráter é válido, pode-se utilizar ferramentas fundamentais existentes na literatura para este fim. Uma destas ferramentas é baseada na seguinte condição estabelecida por Arnold Sabemos que para determinação de pontos de

equilíbrio instável de um sistema dinâmico hamiltoniano, como também determinar regiões de estabilidade, pode-se utilizar ferramentas fundamentais existentes na literatura para estes fins. Uma destas ferramentas é baseada no determinante de Arnold onde

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \omega_1 \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix} = -(\delta_{11}\omega_2^2 - 2\delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2) \neq 0 \quad (3.11)$$

que podemos determinar através das equações (3.8), (3.9) e (3.10) e das frequências  $\omega_i$  da hamiltoniana (3.1) obtendo,,

$$D = \frac{1}{16(4\omega_1^5\omega_2 - 17\omega_1^3\omega_2^3 + 4\omega_1\omega_2^5)} (4\omega_1^7(15h_{3,0,0,0,3}^2 + 6h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1} + 3(h_{3,0,0,1,2}^2 + h_{3,0,0,2,1}^2 + 2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0} + 5h_{3,0,0,3,0}^2) - 2\omega_2(3h_{3,0,0,0,4} + h_{3,0,0,2,2} + 3h_{3,0,0,4,0})) + 12\omega_2^7(5h_{3,0,3,0,0}^2 + h_{3,1,2,0,0}^2 + 2h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0} + h_{3,2,1,0,0}^2 + 2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} + 5h_{3,3,0,0,0}^2) + \omega_1^4\omega_2^3(29h_{3,0,1,0,2}^2 + 63h_{3,0,1,1,1}^2 - 194h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0} + 29h_{3,0,1,2,0}^2 + 60h_{3,0,3,0,0}^2 + 29h_{3,1,0,0,2}^2 + 63h_{3,1,0,1,1}^2 - 194h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0} + 29h_{3,1,0,2,0}^2 + 4(5h_{3,1,1,1,0}(-h_{3,0,2,0,1} + h_{3,2,0,0,1}) + 102h_{3,0,0,0,3}(h_{3,0,2,0,1} + h_{3,2,0,0,1}) + 34h_{3,0,0,2,1}(h_{3,0,2,0,1} + h_{3,2,0,0,1})) + 4(5h_{3,1,1,0,1}(h_{3,0,2,1,0} - h_{3,2,0,1,0}) + 34h_{3,0,0,1,2}(h_{3,0,2,1,0} + h_{3,2,0,1,0}) + 102h_{3,0,0,3,0}(h_{3,0,2,1,0} + h_{3,2,0,1,0})) + 24h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0} + 12(h_{3,1,2,0,0}^2 + h_{3,2,1,0,0}^2 + 2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} + 5h_{3,3,0,0,0}^2) - 136\omega_2(h_{3,0,2,0,2} + h_{3,0,2,2,0} + h_{3,2,0,0,2} + h_{3,2,0,2,0})) + 4\omega_1^6\omega_2(3h_{3,0,1,0,2}^2 + h_{3,0,1,1,1}^2 + 2h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0} + 3h_{3,0,1,2,0}^2 + 3h_{3,1,0,0,2}^2 + h_{3,1,0,1,1}^2 + 2h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0} + 3h_{3,1,0,2,0}^2 - 8(3h_{3,0,0,0,3} + h_{3,0,0,2,1})(h_{3,0,2,0,1} + h_{3,2,0,0,1}) - 8(h_{3,0,0,1,2} + 3h_{3,0,0,3,0})(h_{3,0,2,1,0} + h_{3,2,0,1,0}) + 8\omega_2(h_{4,0,2,0,2} + h_{4,0,2,2,0} + h_{4,2,0,0,2} + h_{4,2,0,2,0})) + \omega_1^2\omega_2^5(-16h_{3,0,1,1,1}^2 - 8(h_{3,0,1,0,2}^2 - 6h_{3,0,1,0,2}h_{3,0,1,2,0} + h_{3,0,1,2,0}^2 - 16h_{3,1,0,1,1}^2 - 8(h_{3,1,0,0,2}^2 - 6h_{3,1,0,0,2}h_{3,1,0,2,0} + h_{3,1,0,2,0}^2) - 16(h_{3,0,2,0,1}(6h_{3,0,0,0,3} + 2h_{3,0,0,2,1} - 5h_{15,1,1,1,0}) + (6h_{3,0,0,0,3} + 2h_{3,0,0,2,1} + 5h_{3,1,1,1,0})h_{3,2,0,0,1}) - 16(h_{3,0,2,1,0}(2h_{3,0,0,1,2} + 6h_{3,0,0,3,0} + 5h_{3,1,1,0,1}) + (2h_{3,0,0,1,2} + 6h_{3,0,0,3,0} - 5h_{3,1,1,0,1})h_{3,2,0,1,0}) - 51(5h_{3,0,3,0,0}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 2h_{3,0,3,0,0}h_{3,2,1,0,0} + h_{3,2,1,0,0}^2 - 51(h_{3,1,2,0,0}^2 + 2h_{3,1,2,0,0}h_{3,3,0,0,0} + \\
& 5h_{3,3,0,0,0}^2) + 32\omega_2(h_{3,0,2,0,2} + h_{3,0,2,2,0} + h_{3,2,0,0,2} + h_{3,2,0,2,0}) - \\
& 4\omega_1\omega_2^6(-3h_{3,0,2,0,1}^2 - 3h_{3,0,2,1,0}^2 - h_{3,1,1,0,1}^2 - h_{3,1,1,1,0}^2 - 2h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1} - \\
& 2h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0} - 3(h_{3,2,0,0,1}^2 + h_{3,2,0,1,0}^2) + 8(h_{3,0,1,0,2} + \\
& h_{3,0,1,2,0})(3h_{3,0,3,0,0} + h_{3,2,1,0,0}) + 8(h_{3,1,0,0,2} + h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0} + \\
& 3h_{3,3,0,0,0}) + 2\omega_2(3h_{4,0,4,0,0} + h_{4,2,2,0,0} + 3h_{4,4,0,0,0})) + \\
& \omega_1^5\omega_2^2(-51(5h_{3,0,0,0,3}^2 + 2h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1} + h_{3,0,0,2,1}^2) - 51(h_{3,0,0,1,2} + \\
& 2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0} + 5h_{3,0,0,3,0}^2) - 8(h_{3,0,2,0,1}^2 + h_{3,0,2,1,0}^2 - 6h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1} + \\
& h_{3,2,0,0,1}^2 - 6h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0} + h_{3,2,0,1,0}^2 + 2(5h_{3,0,1,1,1}(h_{3,1,0,0,2} - h_{3,1,0,2,0}) + \\
& h_{3,1,1,0,1}^2 + h_{3,1,1,1,0}^2 + h_{3,0,1,0,2}(6h_{3,0,3,0,0} - 5h_{3,1,0,1,1} + 2h_{3,2,1,0,0}) + \\
& h_{3,0,1,2,0}(6h_{3,0,3,0,0} + 5h_{3,1,0,1,1} + 2h_{3,2,1,0,0}) + 2(h_{3,1,0,0,2} + \\
& h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0} + 3h_{3,3,0,0,0}))) + 2\omega_2(51h_{4,0,0,0,4} + 17h_{4,0,0,2,2} + \\
& 51h_{4,0,0,4,0} - 4(3h_{4,0,4,0,0} + h_{4,2,2,0,0} + 3h_{4,4,0,0,0}))) + \omega_1^3\omega_2^4(12(5h_{3,0,0,0,3}^2 + \\
& 2h_{3,0,0,0,3}h_{3,0,0,2,1} + h_{3,0,0,2,1}^2) + 12(h_{3,0,0,1,2}^2 + 2h_{3,0,0,1,2}h_{3,0,0,3,0} + \\
& 5h_{3,0,0,3,0}^2) + 29h_{3,0,2,0,1}^2 + 29h_{3,0,2,1,0}^2 + 63(h_{3,1,1,0,1}^2 + h_{3,1,1,1,0}^2) - \\
& 194h_{3,0,2,0,1}h_{3,2,0,0,1} + 29h_{3,2,0,0,1}^2 - 194h_{3,0,2,1,0}h_{3,2,0,1,0} + 29h_{3,2,0,1,0}^2 + \\
& 4h_{3,0,1,0,2}(102h_{3,0,3,0,0} - 5h_{3,1,0,1,1} + 34h_{3,2,1,0,0}) + 4h_{3,0,1,2,0}(102h_{3,0,3,0,0} + \\
& 5h_{3,1,0,1,1} + 34h_{3,2,1,0,0}) + 4(5h_{3,0,1,1,1}(h_{3,1,0,0,2} - h_{3,1,0,2,0}) + 34(h_{3,1,0,0,2} + \\
& h_{3,1,0,2,0})(h_{3,1,2,0,0} + 3h_{3,3,0,0,0})))
\end{aligned}$$

A Equação (3.12) nos permite identificar regiões de estabilidade, no sentido de Liapunov, para sistemas hamiltonianos com 2 graus de liberdade. Nos pontos onde a Equação (3.12) é igual a zero são Liapunov instáveis, pelo teorema de Arnold (Anexo A.1).

### 3.3 Forma normal para 3 graus de liberdade

Considerando a hamiltoniana (3.1), para  $n=3$ , nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio linearmente estável, e utilizando o procedimento adotado para a



forma normal geral com 2 graus, obtemos a generalização do cálculo anterior para três graus de liberdade. Sem perda de generalidade, considerando a parte quadrática de um sistema hamiltoniano com três graus de liberdade, diagonalizado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, obtemos da equação (3.1) as seguintes somas de monômios até ordem quatro:

$$H_2^* = i\omega_1 x_1 y_1 + i\omega_2 x_2 y_2 + i\omega_3 x_3 y_3$$

$$H_3^* = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = 3} h_3 x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3} \quad (3.13)$$

$$H_4^* = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = 4} h_4 x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3}$$

em que  $\omega_i$  são freqüências do movimento linearizado nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. A equação para a hamiltoniana  $H_3^*$  e  $H_4^*$  é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} H_3^*(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = & y_1^3 h_{3,3,0,0,0,0,0} + x_1^3 h_{3,0,3,0,0,0,0} + y_2^3 h_{3,0,0,3,0,0,0} + x_2^3 h_{3,0,0,0,3,0,0} \\ & + y_3^3 h_{3,0,0,0,0,3,0} + x_3^3 h_{3,0,0,0,0,0,3} + x_1 y_1^2 h_{3,2,1,0,0,0,0} + y_1^2 y_2 h_{3,2,0,1,0,0,0} \\ & + x_2 y_1^2 h_{3,2,0,0,1,0,0} + y_1^2 y_3 h_{3,2,0,0,0,1,0} + x_3 y_1^2 h_{3,2,0,0,0,0,1} + x_1^2 y_2 h_{3,0,2,1,0,0,0} \\ & + x_1^2 x_2 h_{3,0,2,0,1,0,0} + x_1^2 y_3 h_{3,0,2,0,0,1,0} + x_2^2 x_3 h_{3,0,2,0,0,0,1} + x_2^2 y_2 h_{3,0,0,2,1,0,0} \\ & + y_2^2 y_3 h_{3,0,0,2,0,1,0} + x_3 y_2^2 h_{3,0,0,2,0,0,1} + x_2^2 y_3 h_{3,0,0,0,2,1,0} + x_2^2 x_3 h_{3,0,0,0,2,0,1} \\ & + x_3 y_3^2 h_{3,0,0,0,0,2,1} + x_1^2 y_1 h_{3,1,2,0,0,0,0} + y_1 y_2^2 h_{3,1,0,2,0,0,0} + x_2^2 y_1 h_{3,1,0,0,2,0,0} \\ & + y_1 y_3^2 h_{3,1,0,0,0,2,0} + x_3^2 y_1 h_{3,1,0,0,0,0,2} + x_1 y_2^2 h_{3,0,1,2,0,0,0} + x_1 x_2^2 h_{3,0,1,0,2,0,0} \\ & + x_1 y_3^2 h_{3,0,1,0,0,2,0} + x_1 x_3^2 h_{3,0,1,0,0,0,2} + x_2^2 y_2 h_{3,0,0,1,2,0,0} + y_2 y_3^2 h_{3,0,0,1,0,2,0} \\ & + x_3^2 y_2 h_{3,0,0,1,0,0,2} + x_2 y_3^2 h_{3,0,0,0,1,2,0} + x_2 x_3^2 h_{3,0,0,0,1,0,2} + x_3^2 y_3 h_{3,0,0,0,0,1,2} \\ & + x_1 y_1 y_2 h_{3,1,1,1,0,0,0} + x_2 y_1 y_2 h_{3,1,0,1,1,0,0} + x_2 y_1 y_3 h_{3,1,0,0,1,1,0} \\ & + x_3 y_1 y_3 h_{3,1,0,0,0,1,1} + x_1 x_2 y_2 h_{3,0,1,1,1,0,0} + x_1 x_2 y_3 h_{3,0,1,0,1,1,0} \\ & + x_1 x_3 y_3 h_{3,0,1,0,0,1,1} + x_2 y_2 y_3 h_{3,0,0,1,1,1,0} + x_3 y_2 y_3 h_{3,0,0,1,0,1,1} \\ & + x_2 x_3 y_3 h_{3,0,0,0,1,1,1} + x_1 x_2 y_1 h_{3,1,1,0,1,0,0} + x_1 y_1 y_3 h_{3,1,1,0,0,1,0} \\ & + x_1 x_3 y_1 h_{3,1,1,0,0,0,1} + x_1 y_2 y_3 h_{3,0,1,1,0,1,0} + x_1 x_3 y_2 h_{3,0,1,1,0,0,1} \\ & + x_2 x_3 y_2 h_{3,0,0,1,1,0,1} + y_1 y_2 y_3 h_{3,1,0,1,0,1,0} + x_2 x_3 y_1 h_{3,1,0,0,1,0,1} \\ & + x_1 x_2 x_3 h_{3,0,1,0,1,0,1} + x_3 y_1 y_2 h_{3,1,0,1,0,0,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4^*(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) &= y_3^4 h_{0,0,0,0,0,4} + x_3 y_3^3 h_{0,0,0,0,1,3} + x_3^2 y_3^2 h_{0,0,0,0,2,2} + x_3^3 y_3 h_{0,0,0,0,3,1} \\
&+ x_3^4 h_{0,0,0,0,4,0} + y_2 y_3^3 h_{0,0,0,1,0,3} + x_3 y_2 y_3^2 h_{0,0,0,1,1,2} + x_3^2 y_2 y_3 h_{0,0,0,1,2,1} \\
&+ x_3^3 y_2 h_{0,0,0,1,3,0} + y_2^2 y_3^2 h_{0,0,0,2,0,2} + x_3 y_2^2 y_3 h_{0,0,0,2,1,1} + x_3^2 y_2^2 h_{0,0,0,2,2,0} \\
&+ y_2^3 y_3 h_{0,0,0,3,0,1} + x_3 y_2^3 h_{0,0,0,3,1,0} + y_2^4 h_{0,0,0,4,0,0} + x_2 y_3^3 h_{0,0,1,0,0,3} \\
&+ x_2 x_3 y_3^2 h_{0,0,1,0,1,2} + x_2 x_3^2 y_3 h_{0,0,1,0,2,1} + x_2 x_3^3 h_{0,0,1,0,3,0} + x_2 y_2 y_3^2 h_{0,0,1,1,0,2} \\
&+ x_2 x_3 y_2 y_3 h_{0,0,1,1,1,1} + x_2 x_3^2 y_2 h_{0,0,1,1,2,0} + x_2 y_2^2 y_3 h_{0,0,1,2,0,1} \\
&+ x_2 x_3 y_2^2 h_{0,0,1,2,1,0} + x_2 y_2^3 h_{0,0,1,3,0,0} + x_2^2 y_3^2 h_{0,0,2,0,0,2} + x_2^2 x_3 y_3 h_{0,0,2,0,1,1} \\
&+ x_2^2 x_3^2 h_{0,0,2,0,2,0} + x_2^2 y_2 y_3 h_{0,0,2,1,0,1} + x_2^2 x_3 y_2 h_{0,0,2,1,1,0} + x_2^2 y_2^2 h_{0,0,2,2,0,0} \\
&+ x_2^2 y_3 h_{0,0,3,0,0,1} + x_2^2 x_3 h_{0,0,3,0,1,0} + x_2^2 y_2 h_{0,0,3,1,0,0} + x_2^4 h_{0,0,4,0,0,0} \\
&+ y_1 y_3^3 h_{0,1,0,0,0,3} + x_3 y_1 y_3^2 h_{0,1,0,0,1,2} + x_3^2 y_1 y_3 h_{0,1,0,0,2,1} + x_3^3 y_1 h_{0,1,0,0,3,0} \\
&+ y_1 y_2 y_3^2 h_{0,1,0,1,0,2} + x_3 y_1 y_2 y_3 h_{0,1,0,1,1,1} + x_3^2 y_1 y_2 h_{0,1,0,1,2,0} \\
&+ y_1 y_2^2 y_3 h_{0,1,0,2,0,1} + x_3 y_1 y_2^2 h_{0,1,0,2,1,0} + y_1 y_2^3 h_{0,1,0,3,0,0} + x_2 y_1 y_3^2 h_{0,1,1,0,0,2} \\
&+ x_2 x_3 y_1 y_3 h_{0,1,1,0,1,1} + x_2 x_3^2 y_1 h_{0,1,1,0,2,0} + x_2 y_1 y_2 y_3 h_{0,1,1,1,0,1} \\
&+ x_2 x_3 y_1 y_2 h_{0,1,1,1,1,0} + x_2 y_1 y_2^2 h_{0,1,1,2,0,0} + x_2^2 y_1 y_3 h_{0,1,2,0,0,1} \\
&+ x_2^2 x_3 y_1 h_{0,1,2,0,1,0} + x_2^2 y_1 y_2 h_{0,1,2,1,0,0} + x_2^3 y_1 h_{0,1,3,0,0,0} + y_1^2 y_3^2 h_{0,2,0,0,0,2} \\
&+ x_3^2 y_1^2 h_{0,2,0,0,2,0} + y_1^2 y_2 y_3 h_{0,2,0,1,0,1} + x_3 y_1^2 y_2 h_{0,2,0,1,1,0} + y_1^2 y_2^2 h_{0,2,0,2,0,0} \\
&+ x_2 y_1^2 y_3 h_{0,2,1,0,0,1} + x_2 x_3 y_1^2 h_{0,2,1,0,1,0} + x_2 y_1^2 y_2 h_{0,2,1,1,0,0} + x_2^2 y_1^2 h_{0,2,2,0,0,0} \\
&+ y_1^3 y_3 h_{0,3,0,0,0,1} + x_3 y_1^3 h_{0,3,0,0,1,0} + y_1^3 y_2 h_{0,3,0,1,0,0} + x_2 y_1^3 h_{0,3,1,0,0,0} \\
&+ y_1^4 h_{0,4,0,0,0,0} + x_1 y_3^3 h_{1,0,0,0,0,3} + x_1 x_3^2 y_3 h_{1,0,0,0,2,1} + x_1 x_3^3 h_{1,0,0,0,3,0} \\
&+ x_1 y_2 y_3^2 h_{1,0,0,1,0,2} + x_1 x_3 y_2 y_3 h_{1,0,0,1,1,1} + x_1 x_3^2 y_2 h_{1,0,0,1,2,0} \\
&+ x_1 x_3^2 y_2 y_3 h_{1,0,0,1,2,1} + x_1 x_3^2 y_2 y_3^2 h_{1,0,0,1,2,2} + x_1 y_2^2 y_3 h_{1,0,0,2,0,1} \\
&+ x_1 y_2^2 y_3^2 h_{1,0,0,2,0,2} + x_1 x_3 y_2^2 h_{1,0,0,2,1,0} + x_1 y_2^3 h_{1,0,0,3,0,0} + x_1 x_2 y_3^2 h_{1,0,1,0,0,2} \\
&+ x_1 x_2 x_3 y_3 h_{1,0,1,0,1,1} + x_1 x_2 x_3^2 h_{1,0,1,0,2,0} + x_1 x_2 y_2 y_3 h_{1,0,1,1,0,1} \\
&+ x_1 x_2 x_3 y_2 h_{1,0,1,1,1,0} + x_1 x_2 y_2^2 h_{1,0,1,2,0,0} + x_1 x_2^2 y_3 h_{1,0,2,0,0,1} \\
&+ x_1 x_2^2 x_3 h_{1,0,2,0,1,0} + x_1 x_2^2 y_2 h_{1,0,2,1,0,0} + x_1 x_2^3 h_{1,0,3,0,0,0} + x_1 y_1 y_3^2 h_{1,1,0,0,0,2} \\
&+ x_1 x_3 y_1 y_3 h_{1,1,0,0,1,1} + x_1 x_3^2 y_1 h_{1,1,0,0,2,0} + x_1 y_1 y_2 y_3 h_{1,1,0,1,0,1} \\
&+ x_1 x_3 y_1 y_2 h_{1,1,0,1,1,0} + x_1 y_1 y_2^2 h_{1,1,0,2,0,0} + x_1 x_2 y_1 y_3 h_{1,1,1,0,0,1} \\
&+ x_1 x_2 y_1 y_2 h_{1,1,1,1,0,0} + x_1 x_2^2 y_1 h_{1,1,2,0,0,0} + x_1 y_1^2 y_3 h_{1,2,0,0,0,1} \\
&+ x_1 x_3 y_1^2 h_{1,2,0,0,1,0} + x_1 y_1^2 y_2 h_{1,2,0,1,0,0} + x_1 x_2 y_1^2 h_{1,2,1,0,0,0} + x_1 y_1^3 h_{1,3,0,0,0,0} \\
&+ x_1^2 y_3^2 h_{2,0,0,0,0,2} + x_1^2 x_3 y_3 h_{2,0,0,0,1,1} + x_1^2 x_3^2 h_{2,0,0,0,2,0} + x_1^2 y_2 y_3 h_{2,0,0,1,0,1} \\
&+ x_1^2 x_3 y_2 h_{2,0,0,1,1,0} + x_1^2 y_2^2 h_{2,0,0,2,0,0} + x_1^2 x_2 y_3 h_{2,0,1,0,0,1} + x_1^2 x_2 x_3 h_{2,0,1,0,1,0} \\
&+ x_1^2 x_2 y_2 h_{2,0,1,1,0,0} + x_1^2 x_2^2 h_{2,0,2,0,0,0} + x_1^2 y_1 y_3 h_{2,1,0,0,0,1} + x_1^2 x_3 y_1 h_{2,1,0,0,1,0} \\
&+ x_1^2 y_1 y_2 h_{2,1,0,1,0,0} + x_1^2 x_2 y_1 h_{2,1,1,0,0,0} + x_1^3 y_3 h_{3,0,0,0,0,1} + x_1^3 x_3 h_{3,0,0,0,1,0} \\
&+ x_1^3 y_2 h_{3,0,0,1,0,0} + x_1^3 x_2 h_{3,0,1,0,0,0} + x_1^3 y_1 h_{3,1,0,0,0,0} + x_1^4 h_{4,0,0,0,0,0}
\end{aligned}$$

Análogo ao apresentado para o caso com 2 graus de liberdade, a função geratriz  $G_3$  é a responsável pela eliminação do  $H_3$  cujos termos são todos não ressonantes, pode ser vista no Anexo (2.2). Seguindo o procedimento do início deste capítulo a forma normal para 3 graus de liberdade é escrita da seguinte forma

$$Z(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = Z_2(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) + Z_4(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3)$$

Com

$$Z_2 = \frac{1}{2} \omega_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \omega_3 (q_3^2 + p_3^2)$$

$$Z_3 = 0; \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} Z_4 = & \delta_{11} (q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2 p_1^2) + \delta_{22} (q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2 p_2^2) + \delta_{33} (q_3^4 + p_3^4 + 2q_3^2 p_3^2) \\ & + \delta_{12} (q_1^2 q_2^2 + q_1^2 p_2^2 + p_1^2 q_2^2 + p_1^2 p_2^2) + \delta_{13} (q_1^2 q_3^2 + q_1^2 p_3^2 + p_1^2 q_3^2 + p_1^2 p_3^2) \\ & + \delta_{23} (q_2^2 q_3^2 + q_2^2 p_3^2 + p_2^2 q_3^2 + p_2^2 p_3^2) \end{aligned}$$

em que  $\delta_{uv}$  são coeficientes reais obtidos da combinação dos  $h_{k,\alpha,\beta}$ , com as frequências,  $\omega_i$  ( $i=1,2,3$ ). Ver coeficientes no Anexo (B.3).

A forma normal para sistemas hamiltonianos com 3 graus de liberdade é pouco abordada pois diversos autores limitam-se ao estudo com dois graus de liberdade devido ao exaustivo desenvolvimento analítico, bem como a sua complexidade. A Difusão de Arnold, ainda não bem compreendida, pode ser outro fator limitante em estudos de estabilidade não linear para sistemas com 3 ou mais graus de liberdade. Para mais detalhes sobre estes fenômenos ver Arnold (1964) e Lega et al (2003). Mansilla (2006) mostra uma abordagem para o estudo de estabilidade com três graus de liberdade, onde utiliza uma transformação simplética e com um dos termos do  $H_4$  garante a estabilidade não-linear. Mais detalhes sobre este fenômeno ver Arnold (1964) e Lega et al. (2003).

Finalizamos o desenvolvimento de formas normais de ordem 4 com coeficientes analíticos para 2 e 3 graus de liberdade salientando que nossos desenvolvimentos podem ser aplicados à toda hamiltoniana que tenha pontos de equilíbrio estáveis, sempre que o truncamento em quarta ordem for bom o suficiente. A estabilidade não linear pode então ser facilmente verificada. A expressão geral para os coeficientes necessários à aplicação do critério baseado no determinante de Arnold é o nosso principal resultado. Faremos a seguir uma aplicação já existente na literatura para testar os nossos desenvolvimentos analíticos. No capítulo 4 será estudado o problema fotogravitacional de três corpos.

### 3.4 Aplicação: Estudo da estabilidade Linear de um ponto estacionário

Nesta seção apresentaremos uma aplicação que envolve o estudo de estabilidade não-linear de um satélite ao redor da Terra considerando-se dois harmônicos do potencial terrestre. Este desenvolvimento é uma reprodução do trabalho apresentado por Ellipe (2006) ao qual desejamos aplicar o método apresentado neste capítulo para comparar com alguns resultados apresentados por ele.

Vamos considerar o movimento de um satélite em torno do planeta Terra, num sistema sinódico, cuja origem coincide com o centro de massa da Terra e o eixo z é na direção do eixo principal de inércia do satélite. Nesta aplicação, a massa do satélite é desprezada. O satélite gira em torno do eixo z com velocidade constante  $\dot{\psi} = n$  ( $n =$  movimento médio da órbita kepleriana). Será considerada a hamiltoniana (ELLIPE, 2006):

$$F(x, y, X, Y) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \nu(xY - yX) - \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \left( \frac{r_t}{r} \right)^2 \left[ 3J_{22} \frac{x^2 - y^2}{r} - \frac{1}{2} J_2 \right] \right\} \quad (3.15)$$

em que  $\mu$  é a constante Gaussiana,  $J_2$  e  $J_{22}$  os harmônicos da Terra,  $r_t$  é o raio equatorial da Terra e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância radial do satélite ao centro da Terra.

As equações do movimento são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial X} = X + \nu y, & \dot{y} &= \frac{\partial F}{\partial Y} = Y - \nu x, \\ \dot{X} &= -\frac{\partial F}{\partial x} = \nu Y + \mu \frac{x}{r} \left\{ r^3 + 3r_t^2 [-J_{22}(3x^2 - 7y^2) + \frac{1}{2} J_2 r^2] \right\} & (3.16) \\ \dot{Y} &= -\frac{\partial F}{\partial y} = \nu X + \mu \frac{y}{r} \left\{ r^3 + 3r_t^2 [-J_{22}(7x^2 - 3y^2) + \frac{1}{2} J_2 r^2] \right\} \end{aligned}$$

Substituindo a equação  $a^3 = \mu/\nu^2$  nas Equações (3.16) e simplificando obtemos os pontos de equilíbrio

$$x = 0 \text{ e } \left(\frac{r}{a}\right)^5 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 3\tau_1 = 0 \quad (3.17)$$

ou

$$y = 0 \text{ e } \left(\frac{r}{a}\right)^5 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 3\tau_2 = 0 \quad (3.18)$$

em que  $a$  é o semi-eixo maior do satélite e

$$\tau_1 = -\frac{r_t^2}{a^2} \left( 3J_{22} + \frac{J_2}{2} \right), \quad \tau_2 = \frac{r_t^2}{a^2} \left( 3J_{22} - \frac{J_2}{2} \right). \quad (3.19)$$

Através da Equação (3.19), possui somente uma solução real positiva ( $r_1 \geq a$ ), apresentada em série de potência, partindo de  $r = a$ , sendo (Howard,1990; Elife,2006)):

$$\left(\frac{r}{a}\right) = 1 + \tau - 3\tau^2 + \frac{44}{3}\tau^3 + \mathcal{O}(\tau)^5$$

com  $\tau = \tau_2$ .

É sabido que existem outros pontos de equilíbrio, mas consideraremos apenas os pontos para  $y=0$ , isto é, o estudo do ponto de equilíbrio  $P1(\pm r_1, 0)$  para determinarmos a forma normal e o critério de estabilidade não-linear.

### 3.4.1 Hamiltoniana nas vizinhanças do ponto de equilíbrio

Para colocarmos o ponto de equilíbrio do sistema na origem do sistema, uma transformação  $\mathbf{x}(x, y, X, Y) \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(\xi, \eta, \Xi, \Psi)$  é realizada, através das equações (Elipe, 2006)

$$x = \eta + r_1, \quad X = \Psi, \quad y = -\xi, \quad Y = \nu r_1 - \Xi$$

Dessa forma a hamiltoniana pode ser escrita como

$$H(\xi, \eta, \Xi, \Psi) = \frac{1}{2}(\Xi^2 + \Psi^2) - \nu(\Psi\xi - \Xi\eta) - \frac{r_1^2}{2}\nu^2 + \mu \left\{ \frac{J_{22}r_1^2}{\rho^5} \left[ 3r_1^2 - r_1\eta - 3(\eta^2 - \xi^2) \right] + \frac{J_2r_1^2}{2\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right\} \quad (3.20)$$

em que  $\rho = \sqrt{(\eta + r_1)^2 + \xi^2}$ .

Expandindo a hamiltoniana (3.20) nas vizinhanças do ponto de equilíbrio  $P1$ , considerando até os termos de quarta ordem, obtemos

$$H(\xi, \eta, \Xi, \Psi) = H_2(\xi, \eta, \Xi, \Psi) + H_3(\xi, \eta, \Xi, \Psi) + H_4(\xi, \eta, \Xi, \Psi) \quad (3.21)$$

em que os  $H_j$  são polinômios homogêneos de ordem  $j$  com

$$H_2(\xi, \eta, \Xi, \Psi) = \frac{1}{2}(\Xi^2 + \Psi^2) - \nu(\Psi\xi + \Xi\eta) + \frac{1}{2}\nu^2(c_{20}\xi^2 + c_{02}\eta^2) \quad (3.22)$$

$$c_{20} = a^3 \left[ -\frac{2}{r_1^3} + \frac{6r_t^2}{r_1^3} \left( \mathcal{Q}_2 - 6J_{22} \right) \right]$$

$$c_{02} = a^3 \left[ \frac{1}{r_1^4} + \frac{3r_t^2}{r_1^5} \left( -\frac{J_2}{2} + 7J_{22} \right) \right].$$

$$H_3(\xi, \eta, \Xi, \Psi) = \nu^2 (c_{21} \eta \xi^2 + c_{30} \xi^3) \quad (3.23)$$

$$c_{21} = a^3 \left[ -\frac{3}{2r_1^4} + \frac{15r_t^2}{2r_1^6} \left( \frac{J_2}{2} - 7J_{22} \right) \right],$$

$$c_{30} = a^3 \left[ \frac{1}{r_1^4} + \frac{5r_t^2}{r_1^6} \left( J_2 + 6J_{22} \right) \right].$$

$$H_4(\xi, \eta, \Xi, \Psi) = \nu^2 (c_{04} \eta^4 + c_{22} \eta^2 \xi^2 + c_{40} \xi^4) \quad (3.24)$$

$$c_{04} = a^3 \left[ -\frac{3}{8r_1^5} + \frac{15r_t^2}{16r_1^7} \left( \mathcal{Q}_2 - 22J_{22} \right) \right]$$

$$c_{22} = a^3 \left[ \frac{3}{r_1^5} + \frac{45r_t^2}{4r_1^7} \left( J_2 + 14J_{22} \right) \right]$$

$$c_{40} = a^3 \left[ -\frac{1}{r_1^5} + \frac{15r_t^2}{2r_1^7} \left( \mathcal{Q}_2 - 6J_{22} \right) \right]$$

Com a determinação dos coeficientes  $c_{ij}$  da hamiltoniana expandida determinaremos os autovalores com auxílio da Hessiana e os  $\delta_{uv}$  responsáveis pela determinação do critério de estabilidade e forma normal.

### 3.4.2 Estabilidade linear

Nesta seção determinaremos os autovalores e as regiões onde ocorre a estabilidade linear do ponto P1 utilizando a Equação (3.22). Se denotarmos a matriz simplética J

$$J = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix},$$

em que  $O_2$  é a matriz nula 2x2 e  $I_2$  é a matriz identidade de ordem 2. Uma matriz A (Hessiana) é obtida da Equação (3.22), através à equação variacional

$$\dot{\zeta} = JA\zeta = B\zeta$$

em que,

$$A = \begin{pmatrix} c_{20}v^2 & 0 & 0 & -v \\ 0 & c_{02}v^2 & \omega & 0 \\ 0 & v & 1 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & v & 1 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 1 \\ -c_{20}v^2 & 0 & 0 & v \\ 0 & c_{02}v^2 & -v & 0 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico da matriz B é dado por

$$P = \lambda^4 + v^2(2 + c_{20} + c_{02}) + v^4(-1 - c_{20} - c_{02} + c_{20}c_{02})$$

cujos os autovalores são dados por



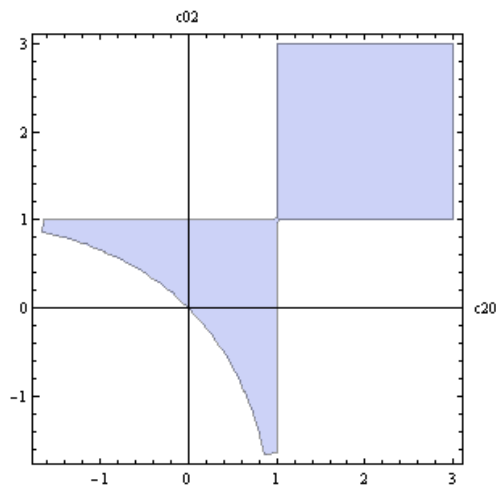
$$\lambda_1^2 = \frac{\nu^2}{2} [-(2 + c_{20} + c_{02}) + \sqrt{(c_{20} - c_{02})^2 + 8(c_{20} + c_{02})}] \quad (3.25)$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\nu^2}{2} [-(2 + c_{20} + c_{02}) - \sqrt{(c_{20} - c_{02})^2 + 8(c_{20} + c_{02})}]$$

Primeiramente, para que ocorra estabilidade linear é necessário que os autovalores sejam imaginários puros,  $\lambda_1^2, \lambda_2^2 < 0$ , como também  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Dessa forma, detectamos duas regiões onde ocorre a estabilidade linear. De fato, a origem é linearmente estável se pertencer a alguma das regiões definida pelas superfícies formadas por:

$$c_{20} = c_{02} = 1, \quad (c_{20} - c_{02})^2 + 8(c_{20} + c_{02}) = 0$$

Na região 2, formada para valores de  $c_{20} > 1, c_{02} > 1$ , temos  $c_{20} < 1, c_{02} > -1, (c_{20} - c_{02})^2 + 8(c_{20} + c_{02}) > 0$



3.1-Região de estabilidade linear no plano  $c_{20} c_{02}$ .

Na Figura (3.1) podemos observar as regiões em cor cinza onde ocorre a estabilidade lineal. Esta estabilidade pode também ser avaliada em termos

distância do satélite à Terra. Este resultado pode ser visto com mais detalhes em Ellipe (2006). Nosso objetivo aqui é utilizar os nossos resultados para a forma normal e aplicar o critério de estabilidade.

### 3.4.3 Forma Normal

Após a expansão da hamiltoniana (3.20) nas vizinhanças do ponto de equilíbrio e com as Equações obtidas (3.22), (3.23) e (3.24), podemos determinar os coeficientes  $\delta_{uv}$  necessários para calcular o determinante que quando distinto de zero garante a existência de curvas invariantes numa vizinhança suficientemente pequena da posição de equilíbrio. Comparando (3.22), (3.23) e (3.24) com a equação (3.3) e (3.4) verificamos que temos poucos monômios que são dados pelas expressões:

$$\text{Termos de } H_3^*: h_{3,2,0,1,0} = v^2 c_{21} \text{ e } h_{3,3,0,0,0} = v^2 c_{30} \quad (3.26)$$

$$\text{Termos de } H_4^*: h_{4,0,0,0,4} = v^2 c_{24}, \quad h_{4,2,0,2,0} = v^2 c_{22} \text{ e } h_{4,4,0,0,0} = v^2 c_{40}$$

Se  $\omega_i$  são as freqüências do movimento, dadas pela equação

$$-\lambda_1^2 = \omega_1^2 = -\frac{v^2}{2} \left[ -(2 + c_{20} + c_{02}) + \sqrt{(c_{20} - c_{02})^2 + 8(c_{20} + c_{02})} \right] \quad (3.27)$$

$$-\lambda_2^2 = \omega_2^2 = -\frac{v^2}{2} \left[ -(2 + c_{20} + c_{02}) - \sqrt{(c_{20} - c_{02})^2 + 8(c_{20} + c_{02})} \right]$$

Substituindo a equação (3.26) e (3.27) nas Equações (3.8), (3.9) e (3.10) obtemos

$$\delta_{11} = \frac{3}{8} c_{40} v^2$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{16} v^2 \left( 6 c_{24} + \frac{[-15c_{30}^2 \omega_1 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2) + c_{12}^2 \omega_2 (-3\omega_1^2 + 8\omega_2^2)] v^2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \right) \quad (3.28)$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{4} v^2 \left( c_{22} + \frac{2 c_{12}^2 \omega_2 v^2}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} \right)$$

Substituindo as Equações (3.28) na Equação (3.7) obtemos a forma normal da hamiltoniana (3.20), expressa por:

$$Z = \frac{1}{2} \omega_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + \delta_{11} (q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2 p_1^2) + \delta_{12} (q_1^2 q_2^2 + q_1^2 p_2^2 + p_1^2 q_2^2 + p_1^2 p_2^2) + \delta_{22} (q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2 p_2^2)$$

O determinante usado para se verificar a estabilidade não-linear é construído com auxílio das Equações (3.27) e (3.28) que substituídas na Equação (3.12) nos dá a seguinte expressão

$$D = -\frac{1}{4} v^2 [-6 c_{24} (\omega_1^2 + 8 c_{22} \omega_1 \omega_2 - 6 c_{40} \omega_2^2 + \frac{\omega_1 (15c_{30}^2 \omega_1 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2) + c_{12}^2 \omega_2 (3\omega_1^2 + 8\omega_2^2)) v^2}{\omega_2 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}] v^2 \quad (3.29)$$

É importante lembrar que o ponto P1, considerado inicialmente, será Liapunov estável se  $D \neq 0$ . Com a expressão (3.29) é possível determinar para que valores da distância (r) do corpo ao centro do planeta ocorre a instabilidade do equilíbrio P1. Um estudo mais detalhado sobre a estabilidade segundo Liapunov será abordado no caso fotogravitacional, apresentado no capítulo 4



## 4 ESTUDO DA ESTABILIDADE NO PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL RESTRITO DOS TRÊS CORPOS, CIRCULAR E PLANO

### 4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o estudo da estabilidade linear e não-linear da solução do problema fotogravitacional dos três corpos, restrito e plano, nas vizinhanças do ponto  $L_4$ .

O problema fotogravitacional é um caso particular em que se considera no problema restrito dos três corpos a influência da radiação de uma ou das duas massas dos corpos primários. Dessa forma apresentaremos de maneira bastante sucinta alguns conceitos fundamentais do problema restrito dos três corpos.

O problema dos três corpos consiste em estudar o movimento de três corpos que se atraem gravitacionalmente, considerando quaisquer condições iniciais. Este problema vem sendo estudado desde o século XVIII. Embora uma solução analítica envolvendo funções algébricas simples não tenha sido encontrada, é graças a tal estudo que várias técnicas de teoria de perturbações foram desenvolvidas (SZEBEHELY , 1984). Uma observação histórica sobre a importância de tal problema pode ser encontrada em (SIEGEL e MOSER, 1971).

Uma das simplificações do problema dos três corpos consiste considerar que um dos corpos não perturba os outros dois (chamados de primários). Com tais condições temos o chamado problema restrito dos três corpos. Se considerarmos ainda que o movimento do terceiro corpo se dá no plano do

movimento dos primários e que o movimento dos primários em torno do centro de massa seja circular teremos o problema dos três corpos circular plano.

O problema é assim simplificado, para encontrar o comportamento (posição e velocidade) do corpo de massa não considerável, a qualquer momento, no campo gravitacional gerado pelos dois outros corpos primários (os que possuem massa finita) em orbita kepleriana.

O problema pode ser esquematizado conforme a Figura 4.1. Centrado no centro e massa, o sistema fixo tem o eixo x dado pela posição dos primários no instante inicial, o sistema sinódico gira com velocidade  $n$  em relação ao sistema fixo e  $n$  é o movimento médio dos corpos primários em relação ao baricentro.

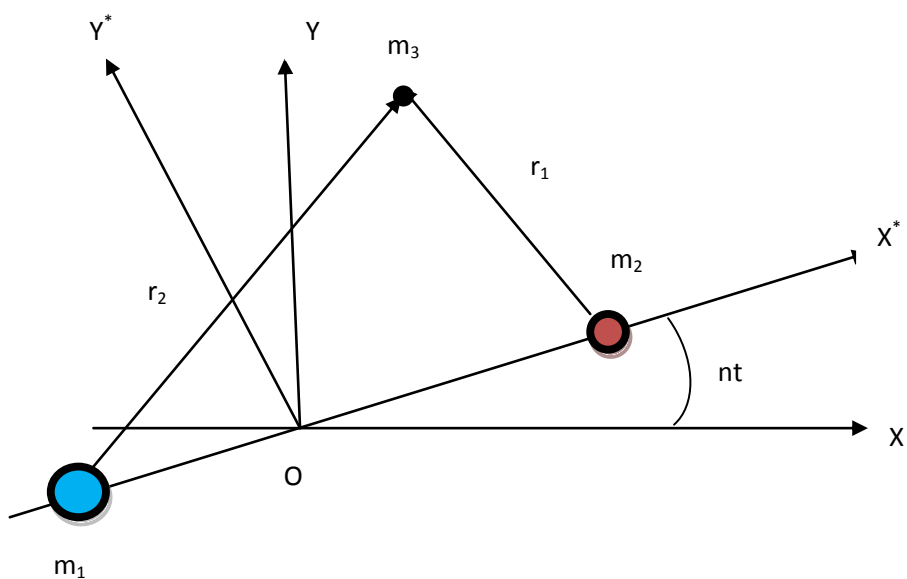


Figura 4.1- Sistema de coordenadas fixas  $(x,y)$  (sideral) e sistema de coordenadas girante  $(x^*,y^*)$  (sinódico) para  $m_1 > m_2$ . O ponto O é centro de massa do sistema.

Nesta seção apresentaremos o problema circular restrito dos três corpos quando os dois corpos massivos emitem radiação ao terceiro corpo de massa não considerável. Nesta configuração teremos dois corpos movendo-se em um movimento circular plano em torno do centro de massa deles onde a terceira

massa é pequena não afetando o movimento dos outros dois corpos. Esta configuração pode ser vista na Figura (4.1).

## 4.2 Equações do movimento

Considerando o problema planar com massas  $m_1$ ,  $m_2$  (corpos de massa finita) e  $m_3$  de massa não considerável em relação às demais massas e assumindo que  $m_1 > m_2$  definimos,

$$\mu_2 = \mu \quad e \quad \mu_1 = 1 - \mu \quad \text{com} \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} < 1/2 \quad (4.1)$$

A escolha da razão de massa é feita de modo que o movimento médio,  $n$ , seja igual a 1. Considerando o sistema sinódico, as equações do movimento são dadas por (MURRAY, 1999)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que

$$\begin{aligned} U &= \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + F(x, y) \\ F(x, y) &= \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2}$$

$n$  é o movimento médio do sistema,  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias de  $m_1$  e  $m_2$  ao corpo  $m_3$  respectivamente.

#### 4.2.1 Pontos Lagrangianos

Já observamos que o problema circular plano é um problema não integrável. Entretanto, algumas soluções particulares podem ser encontradas, como por exemplo, encontrar pontos em que a partícula tenha velocidade e aceleração nula no sistema girante. Tais pontos de equilíbrio foram inicialmente estudados por Lagrange e são conhecidos como pontos de equilíbrio de Lagrange e são denotados por  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ .

Para um caso particular, a configuração destes pontos pode ser vista na Figura 4.2. Três destes pontos que estão localizados no eixo  $x$  são chamados de pontos colineares de equilíbrio os demais são chamados de pontos triangulares por formar com os corpos primários triângulos equiláteros. Os pontos colineares são instáveis. Já os pontos triangulares são linearmente estáveis para  $\mu < 0,03852$ .

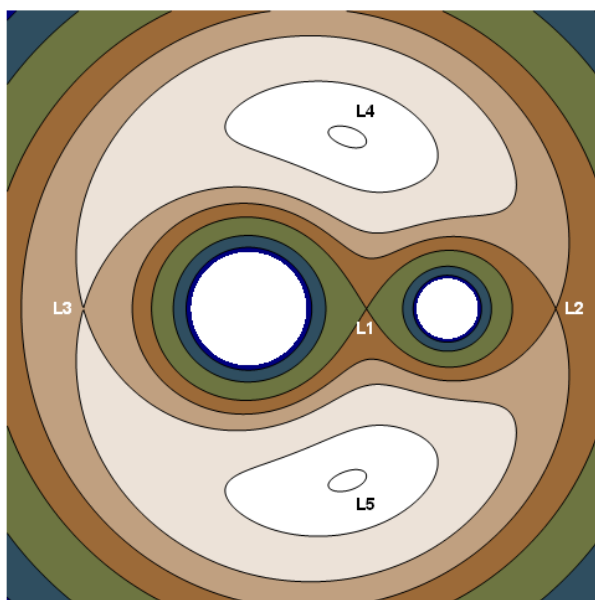


Figura 4.2- Curva de velocidade zero e pontos Lagrangianos para o problema restrito dos três corpos



O pontos  $L_4$  e  $L_5$  possuem coordenadas  $L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu_2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  e  $L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu_2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  respectivamente. Dessa forma o estudo que será desenvolvido para determinar a estabilidade do ponto  $L_4$  segue o mesmo procedimento para determinação do critério de estabilidade par  $L_5$ . Por esta configuração quando um corpo de massa não considerável encontra-se em um destes pontos este forma um triângulo eqüilátero com os corpos primários. Esta configuração é mantida no referencial inercial enquanto cada um dos corpos se movimenta em órbita circular relativamente ao centro de massa do sistema.

Os pontos Lagrangianos, no problema planar, são obtidos igualando-se a zero a Equação (4.2). Um estudo mais detalhado sobre a determinação destes pontos pode ser encontrado em Szebehely (1967) e Murray (1999).

#### **4.2.2 Contribuição da Radiação: Problema fotogravitacional**

Com base na teoria apresentada para o problema circular restrito dos três corpos será introduzida uma outra perturbação, qual seja, a pressão de radiação recebida no corpo de massa não considerável e emitida pelos corpos primários. Esta perturbação é introduzida pela constante  $k_i$  ( $i=1,2$ ), na Equação (4.3), que representa a relação entre da pressão de radiação e força gravitacional. Os corpos das massas primárias ( $m_1$  e  $m_2$ ) podem ser considerados, por exemplo, como estrelas binárias e o corpo menor como um asteróide ou ainda como sendo o Sol e a Terra (radiação refletida) e o pequeno corpo um satélite artificial. Devido à luminosidade que caracteriza o problema ele é conhecido como problema fotogravitacional restrito dos três corpos. A função potencial para este problema é dada por (CORBEN e STEHLE, 1977) e (SIMMON'S et al.,1985):

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\varphi_1(1-\mu)}{r_1} + \frac{\varphi_2\mu}{r_2} \quad (4.4)$$

$$\varphi_i = 1 - \frac{F_r}{F_g} = 1 - \frac{3L}{16\pi c G M \rho s}, \quad i = 1, 2$$

em que  $F_g$  e  $F_r$  são respectivamente a força gravitacional e a pressão de radiação das duas massas finitas,  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é massa da estrela (corpos primários),  $L$  é a luminosidade que depende da temperatura absoluta,  $s$  é a distância entre o corpo primário e a partícula,  $c$  é a velocidade da luz e  $\rho$  é a densidade uniforme das massas primárias. Estes fatores de redução  $\varphi_i$  são valores já determinados para algumas estrelas binárias como pode ser vista na Tabela (4.1).

Tabela 4.1-Fator de redução para algumas estrelas binárias

<b>Estrela</b>	$\varphi_1$	$\varphi_2$
<b><i>TY Bootis</i></b>	1	1
<b><i>Cygnus X-1</i></b>	1	0,38
<b><i>V444 Cygni</i></b>	0,96	0,81
<b><i>nu_2 Velorum</i></b>	0,99	0,83
<b><i>UU Caciopeia</i></b>	0,88	0,74

A estabilidade de solução de equilíbrio pode ser verificada como base nos diversos valores assumidos pelos fatores de redução:

- a) Se  $\varphi_i < 0$ , implica que a gravidade foi superada pela pressão de radiação (caso não realístico).
- b) Se  $\varphi_i > 0$ , implica que a pressão radiação foi superada pela gravidade;
- c) Se  $\varphi_i = 1$ , representa o problema clássico, sem emissão de radiação por ambos os corpos.

d) Se  $\varphi_i=0$ , representa o problema de 2 corpos.

Notemos que na Tabela (4.1) estão representados os fatores de redução para algumas estrelas binárias onde a intensidade da força gravitacional é maior ou igual a pressão de radiação. Neste capítulo é dada ênfase ao caso onde uma ou as duas massas primárias emitem radiação. O caso onde  $\varphi_i = 1$ , será feito estudos com finalidade de comparar os resultados do problema clássico com os já existentes na literatura apresentados por Szebehely (1967). Para o caso (a), diversos autores (SIMMON'S et al.,1985; SCHUERNAN,1980) mencionam a possibilidade de ocorrer, porém não apresentam resultados.

### 4.3 Equações do movimento no sistema hamiltoniano

Algumas hipóteses para tal estudo são feitas:

- i) Assumimos que a partícula,  $m_3$ , tem massa não considerável;
- ii) Não há flutuações na luminosidade e o efeito da sombra é desconsiderado.

Será utilizado o modelo analítico apresentado no capítulo 3 para verificar a estabilidade do ponto  $L_4$  para o problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos. Vamos considerar o sistema cartesiano baricêntrico (O,XYZ) rotacionando em torno do eixo **OZ** com a freqüência angular igual a um. O eixo **OX** é coincidente aos corpos primários  $m_1$  and  $m_2$ . O eixo **OY** é perpendicular ao eixo **OX** passando pelo centro de massa **O**. Dessa forma, consideraremos as equações do movimento nas variáveis canônicas  $(x, y, p_x, p_y)$ , dadas por (SZEBEHELY, 1967):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (4.5)$$

cuja hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x - f(q_1, q_2) \quad (4.6)$$

$$f(q_1, q_2) = \frac{\varphi_1(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\varphi_2 \mu}{r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2} \quad (4.7)$$

Em que  $q_i$  e  $p_i$  são respectivamente as coordenadas e os momentos generalizados e a razão de massa  $\mu$  é dada pela Equação (4.1);  $\varphi_1, \varphi_2$  são os fatores de redução devido a radiação dos dois copos primários e foram definidos na Equação (4.4);  $r_1, r_2$  são as distâncias do maior e menor corpo primários localizados em  $(-\mu, 0, 0)$  e  $(1 - \mu, 0, 0)$  respectivamente.

Colocando o lado direito da Equação (4.5) igual a zero, obtemos a equação:

$$p_x + y = 0, \quad p_y - x = 0$$

$$-p_y + \frac{\varphi_1(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} + \frac{\varphi_2 \mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3} = 0 \quad (4.8)$$

$$p_x + \frac{\varphi_1(1 - \mu)y}{r_1^3} + \frac{\varphi_2 \mu y}{r_2^3} = 0$$

Por conveniência faremos  $\sqrt[3]{\varphi_1} = \kappa_1$  e  $\sqrt[3]{\varphi_2} = \kappa_2$  (SCHUERNAN, 1980). A solução da Equação (4.8) é  $r_1 = \kappa_1$  e  $r_2 = \kappa_2$ . Devido a estas considerações é que se pode garantir a existência dos pontos triangulares para  $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$ . De

fato, Schermam (1980) mostra que os pontos triangulares permanecem na intersecção de círculos para  $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 1$ ,  $0 < \kappa_1 \leq 1$  e  $0 < \kappa_2 \leq 1$ .

Sendo  $L_4$  o ponto de estabilidade a ser estudado cujas coordenadas são dadas por  $(x_{L4}, y_{L4}, p_{xL4}, p_{yL4})$  temos (KUMAR e CHOUDRHY, 1987):

$$\begin{aligned} x &= x_{L4} + q_1 & p_x &= p_{xL4} + p_1 \\ y &= y_{L4} + q_2 & p_y &= p_{yL4} + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{L4} &= \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2 - 1}{2} - \mu, & y_{L4} &= \kappa_1 \kappa_2 \sqrt{b} \\ p_{yL4} &= \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2 - 1}{2} - \mu, & p_{xL4} &= -\kappa_1 \kappa_2 \sqrt{b} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$b = 1 - \left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{2\kappa_1 \kappa_2} \right)^2$$

Os pontos lagrangeanos no problema circular restrito dos três corpos permanecem os mesmos no estudo do problema fotogravitacional. O ponto triangular  $L_4$  formado com os corpos primários terá lados de comprimentos respectivamente  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  e 1. Considerando as transformações (4.9), as equações do movimento (4.5) são escritas:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.10)$$

cuja hamiltoniana é

$$\begin{aligned}
H = & (p_1 - \sqrt{b}\kappa_1\kappa_2)(q_2 + \sqrt{b}\kappa_1\kappa_2) - \frac{1}{4}(1 - 2\mu + 2p_2 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)(1 - 2\mu \\
& + 2q_1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2) \\
& - \frac{\mu\kappa_2^3}{\sqrt{(q_2 + \sqrt{b}\kappa_1\kappa_2)^2 + \frac{1}{4}(1 - 2q_1 - \kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2}} \\
& - \frac{(1 - \mu)\kappa_1^3}{\sqrt{q_2^2 + (q_1 + \frac{1}{2}(1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2))^2}} + \frac{1}{2}((p_1 - \sqrt{b}\kappa_1\kappa_2)^2 \\
& + (p_2 + \frac{1}{2}(1 - 2\mu + \kappa_1^2 - \kappa_2^2))^2)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Expandindo a Equação (4.11), nas vizinhanças do ponto de equilíbrio  $L_4$ , podemos escrever

$$H = H_2 + H_3 + H_4$$

Em que os termos separados por grau são escritos da seguinte forma:

a) Termo de ordem 2:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1q_2 - p_2q_1 + \alpha q_1^2 + \beta q_1q_2 + \gamma q_2^2 \tag{4.12}$$

$$\alpha = \left[ \frac{1}{2} - \mu - \frac{3(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2}{8\kappa_1^2} - \mu \frac{3(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2}{8\kappa_2^2} \right]$$

$$\beta = -\frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{2\kappa_1 \kappa_2} \right)} - \frac{3\kappa_1^2 \mu (\kappa_2^2 + 1 - \kappa_1^2) + 3\kappa_2^2 (1 - \mu) (\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)}{2} \right]$$

$$\gamma = -\left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1 \kappa_2} \right) \right] \left( \frac{3b\kappa_2^2 (1 - \mu) - \mu\kappa_1^2 + 3b}{2} \right)$$

b) Termo de ordem 3:

$$H_3 = h_{3,3,0,0,0} q_1^3 + h_{3,2,0,1,0} q_1^2 q_2 + h_{3,1,0,2,0} q_2^2 q_1 + h_{3,0,0,3,0} q_2^3 \quad (4.13)$$

$$h_{3,3,0,0,0} = \frac{1}{14} \left[ \frac{\mu}{\kappa_2^4} (\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2) (5(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^2 - 12\kappa_2^2) + \frac{(1-\mu)}{\kappa_1^4} (\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2) (5(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2 - 12\kappa_1^2) \right]$$

$$h_{3,2,0,1,0} = \frac{4}{9} \sqrt{\left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1 \kappa_2} \right)} \left[ \mu \kappa_1 \kappa_2^{-3} (5(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^2 - 4\kappa_2^2) + (1-\mu) \kappa_2 \kappa_1^{-3} (5(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2 - 4\kappa_1^2) \right]$$

$$h_{3,1,0,2,0} = \frac{3}{4} \left[ \frac{\mu}{\kappa_2^2} (\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2) \left( 3 \left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1 \kappa_2} \right) \kappa_1^2 - 1 \right) + \frac{(1-\mu)}{\kappa_1^2} (\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2) \left( 3 \left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1 \kappa_2} \right) \kappa_2^2 - 1 \right) \right]$$

$$h_{3,0,0,3,0} = \frac{1}{9} \sqrt{\left( \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1 \kappa_2} \right)} \left[ \mu \kappa_1 \kappa_2^{-1} (7b\kappa_2^2 - 3) + (1-\mu) \kappa_2 \kappa_1^{-1} (5b\kappa_2^2 - 3) \right]$$

c) Termo de ordem 4:

$$H_4 = h_{4,4,0,0,0} q_1^4 + h_{4,3,0,1,0} q_1^3 q_2 + h_{4,2,0,2,0} q_1^2 q_2^2 + h_{4,1,0,3,0} q_1 q_2^3 + h_{4,0,0,4,0} q_2^4 \quad (4.14)$$

$$h_{4,4,0,0,0} = -\frac{1}{9}[(1-\mu)\left(\kappa_1^{-6}(3\kappa_1^4 - \frac{15}{2}(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2 \kappa_1^2 + \frac{33}{17}(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^4\right) \\ + \mu\left(\kappa_2^{-6}(3\kappa_2^4 - \frac{15}{2}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^2 \kappa_2^2 + \frac{35}{16}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^4\right)]$$

$$h_{4,3,0,1,0} = -\frac{7}{5}\sqrt{\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)}\left[\kappa_2\kappa_1^{-3}(1-\mu)(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)\left(3 - \frac{7}{5}(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2 \kappa_1^{-1}\right) \right. \\ \left. + \mu\kappa_1\kappa_2^{-3}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)\left(3 - \frac{7}{4}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^2 \kappa_2^{-2}\right)\right]$$

$$h_{4,2,0,2,0} = \frac{4}{5}[(1-\mu)\kappa_1^{-2}\left(5\kappa_2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)\kappa_2^2 + \frac{5}{4}(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2 \kappa_1^{-2}\right) \\ - \frac{37}{5}(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)^2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)\kappa_2^{-2}\kappa_1^{-2} - 1) + \\ \mu\kappa_2^{-2}\left(5\kappa_1\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)\kappa_1^2 + \frac{5}{4}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^2 \kappa_2^{-2}\right) \\ - \frac{35}{4}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)^2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)\kappa_1^{-2}\kappa_2^{-2} - 1)]$$

$$h_{4,1,0,3,0} = -\frac{5}{4}\sqrt{\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)}\left[\kappa_2\kappa_1^{-3}(1-\mu)(\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)\left(3 - 7\kappa_2^2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)\right) \right. \\ \left. + \mu\kappa_1\kappa_2^{-3}(\kappa_1^2 - 1 - \kappa_2^2)\left(3 - 7\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)\right)\right]$$

$$h_{4,0,0,4,0} = \frac{-3}{9}\left[\left[(1-\mu)\kappa_1^{-2}\left(3 - 30\kappa_2^2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right) + 35\kappa_2^4\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)^2\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu\kappa_2^{-2}\left(3 - 30\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right) + 35\kappa_1^4\left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{4\kappa_1\kappa_2}\right)^2\right)\right]\right]$$

Os coeficientes  $h_{j,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}$  ( $j=2,3,4$ ) serão utilizados para construção da função responsável pela determinação do critério da estabilidade não-linear.



#### 4.4 Estabilidade linear

Para o estudo da estabilidade linear do ponto  $L_4$ , iremos à busca da equação característica. Restringindo a hamiltoniana somente  $H_2$  (Equação 4.12), a matriz Hessiana é dada por

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & 0 & 1 \\ \beta & 2\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\lambda^4 + 2\lambda^2(1 + \alpha + \gamma) + (1 - 2\alpha - \beta^2 - 2\gamma + 4\alpha\gamma) = 0 \quad (4.15)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão definidas na Equação (4.12). Para obter a estabilidade linear é necessário que os autovalores da equação (4.15) sejam imaginários puros. Dessa forma obtemos,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \left\{ 1 - \alpha - \gamma + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha(\beta - 2) + \gamma(\gamma + 4)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_{3,4} &= \pm \left\{ 1 - \alpha - \gamma - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha(\beta - 2) + \gamma(\gamma + 4)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Reescrevendo a Equação (4.16) com base em  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  da Equação (4.12), os autovalores podem ser expresso como

$$\lambda_{1,2} = \pm \left\{ \frac{1}{4} \left( -1 + 2\sqrt{1 - \left( 36 - \frac{9(-1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2} \right) (\mu - \mu^2)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left\{ \frac{1}{4} \left( -1 - 2 \sqrt{1 - \left( 36 - \frac{9(-1+\kappa_1^2+\kappa_2^2)^2}{\kappa_1^2\kappa_2^2} \right) (\mu - \mu^2)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Notemos que os autovalores (4.17) serão imaginários puros se, isto é:

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( 36 - \frac{9(-1+\kappa_1^2+\kappa_2^2)^2}{\kappa_1^2\kappa_2^2} \right) (1 - \mu)\mu} < 0 \quad (4.18)$$

Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as freqüências do movimento, então podemos reescrever a Equação (4.17) como:  $\lambda_{1,2}^2 = -\omega_1^2$  e  $\lambda_{3,4}^2 = -\omega_2^2$ . Faremos o estudo da estabilidade linear, para alguns casos, considerando determinados valores de  $\mu$  e fatores de redução  $\kappa_i$  utilizando a Equação (4.18).

#### 4.5 Resultados: Estabilidade linear

Com base na Equação (4.18), com a variação do fator de redução e dos valores de  $0 < \mu < 0,5$ , faremos um estudo da estabilidade linear para os casos:

- i) Os corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  não emitem radiação ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  (problema dos três corpos clássico);
- ii) O corpo de massa  $m_1$  emitindo radiação e  $m_2$  não emitindo radiação ( $\kappa_2 = 1$ );
- ii) O corpo de massa  $m_1$  não emitindo radiação ( $\kappa_1 = 1$ ) e  $m_2$  emitindo radiação;
- iii) Ambos os corpos,  $m_1$  e  $m_2$ , estão emitindo radiação ( $\kappa_i > 0, \kappa_1 + \kappa_2 > 1$ ). Este caso é conhecido também como estrelas binárias.

Para verificar a precisão do modelo faremos uma análise para  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  em que alguns resultados serão comparados com resultados apresentados por Szebehely (1967) sobre a estabilidade linear do ponto  $L_4$  no problema clássico dos 3 corpos. Estas regiões de estabilidade serão apresentadas correspondem a região destacada pela cor cinza e as demais regiões correspondem a instabilidade não-linear do ponto  $L_4$ .

Com base na Figura (4.3) onde fixamos o fator de redução  $\kappa_2=1$ , podemos observar que em  $\kappa_1=1$  a estabilidade linear para o ponto  $L_4$  ocorrerá para valores de  $\mu < 0,03852$  (ponto destacado pela circunferência). Este valor para razão de massa,  $\mu$ , corresponde a massa crítica de Routh e foi apresentado por Szebehely (1967), Simmon's et al.(1985) e outros. Esta mesma interpretação sobre a massa crítica foi observada, na Figura (4.4), quando fixamos  $\kappa_1=1$  construímos a região de estabilidade para  $0 < \kappa_2 < 1$ . Dessa forma, podemos concluir que quando ambos os corpos primários não estão emitindo radiação o ponto  $L_4$  é totalmente linearmente estável.

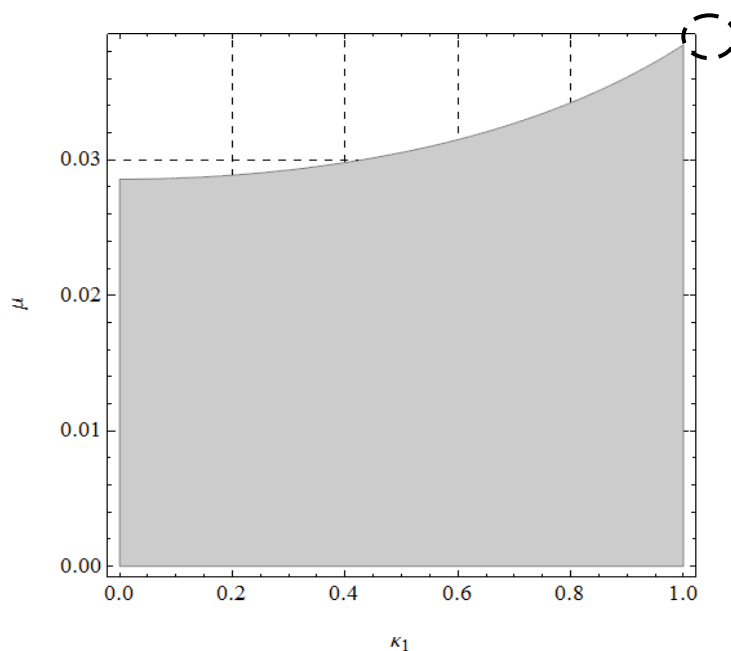


Figura 4.3- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=1$ .

Analisando a Figura (4.3) e a Figura (4.4) podemos observar que o ponto  $L_4$  também será totalmente estável quando  $\mu < 0,02854$  e um dos corpos primários está emitindo radiação. Podemos afirmar, neste caso, que é impossível existir estabilidade linear para o ponto  $L_4$  para  $\mu > 0,03852$ .

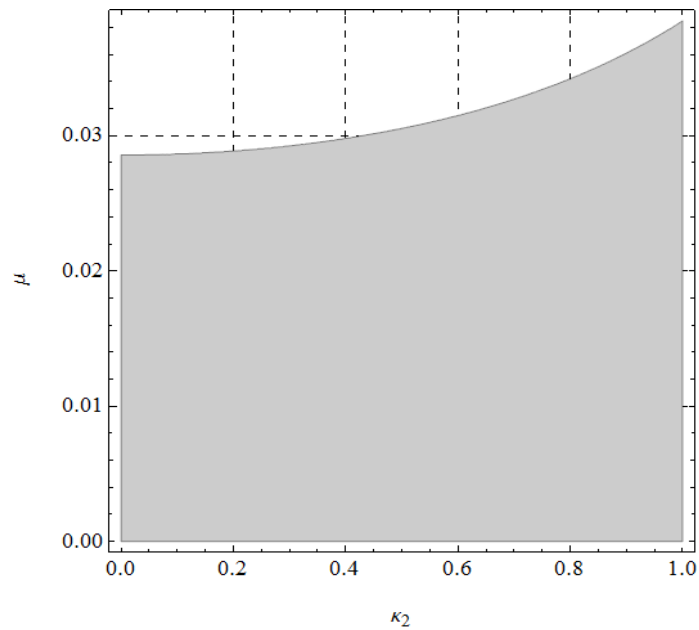


Figura 4.4- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_1=1$ .

Quando aumentamos o fator de redução, ou seja, diminuimos a radiação do corpo primário  $m_2$  aumentamos a região de estabilidade. Isto ocorre, pois quando aumentamos o fator de redução fazendo tender ao valor 1 estamos fazendo com que radiação seja igual a força gravitacional. Assim, o problema dos três corpos tende a ser o clássico onde  $L_4$  para  $\mu < 0,03852$ .

Analisando a estabilidade linear de  $L_4$  quando ambos os corpos estão emitindo radiação notamos que quando  $F_r/F_g=0,1$  (razão entre força de radiação e força gravitacional), para o corpo de maior massa, a estabilidade linear ocorre para qualquer valor de  $\mu < 0,5$  quando o corpo primário de menor massa esta emitindo uma radiação com fator de redução  $0,1 < \kappa_1 < 0,1123$ . Esta região pode ser observada na Figura (4.5).

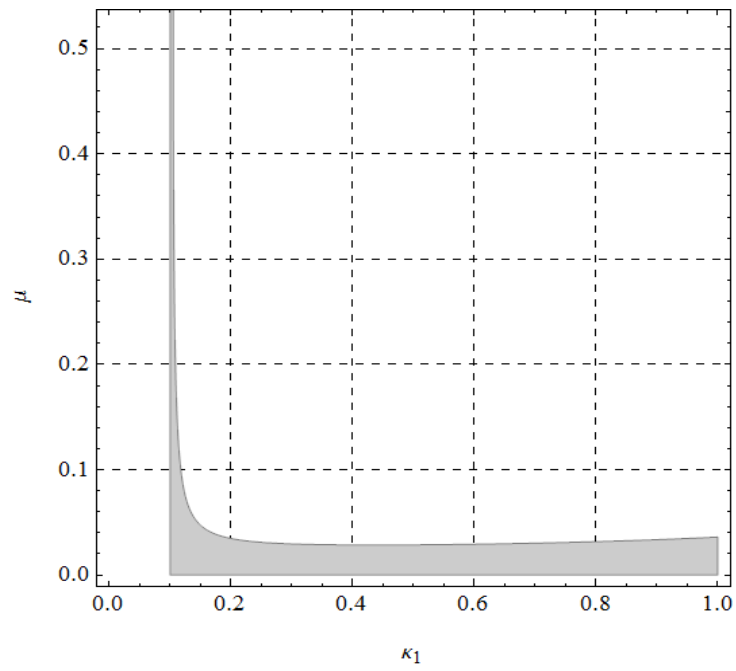


Figura 4.5- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,9$ .

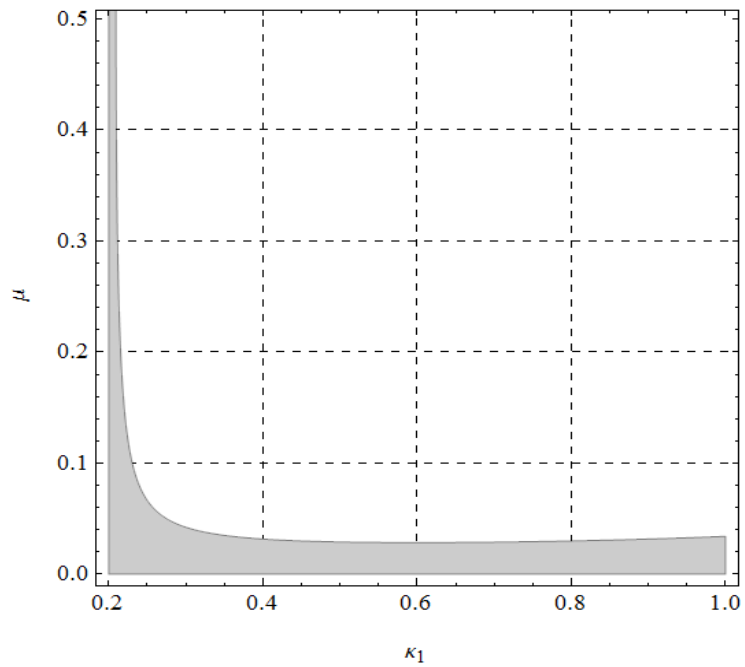


Figura 4.6- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,8$ .

Com base na Figura (4.6), considerando os dois corpos primários emitindo radiação, notamos uma total estabilidade linear para  $L_4$  quando  $0,2 < \kappa_1 < 0,2123$ ,  $\mu < 0,5$  e a radiação do corpo primário de maior massa é dado pela razão  $F_r/F_g = 0,2$  ( $\kappa_2 = 0,8$ ). Quando comparamos o intervalo do fator de redução do corpo primário  $m_1$  para o qual ocorre a estabilidade linear com  $\mu < 0,5$ , notamos que a variação sempre será de 0,123 para todas regiões. Esta variação pode ser observada na Figura (4.7) onde a razão de massa  $\mu$  assume os maiores valores em  $0,6 < \kappa_1 < 0,6123$ . Outras figuras que estão representando a estabilidade linear do ponto  $L_4$ , para diversos valores do fator de redução, podem ser observadas no Apêndice (A.1).

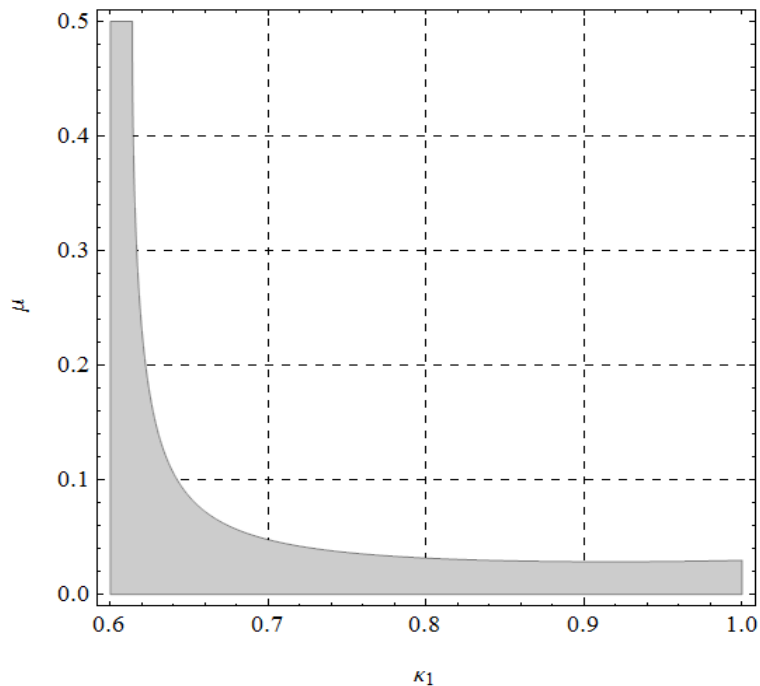


Figura 4.7-Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2 = 0,4$ .

Com a pressão de radiação envolvida determinamos os valores para  $\mu$  tal que, a estabilidade linear é estabelecida. Ainda com base nestas figuras notemos que, com diminuição do fator de redução dos corpos primários, há diminuição da região onde diversos valores para massa  $\mu$  tornam  $L_4$  estável. O aumento da área das regiões de estabilidade é mais acentuado, quando  $\kappa_1 \rightarrow 1$ , pois

neste, caso a força gravitacional em um dos corpos esta superando a sua emissão de radiação tornando assim um aumento da região de estabilidade.

Sabendo que o fator de redução está intimamente ligado pela razão entre a força da pressão de radiação e a força gravitacional é possível garantir que quando a intensidade da pressão de radiação é metade da intensidade da força gravitacional em um dos corpos primários a região de estabilidade linear reduz pela metade. De uma maneira geral observamos que para manter ainda estabilidade total para  $\mu$  considerando o aumento da radiação emitida pelo corpo primário  $m_1$ , a radiação do corpo emitida por  $m_2$  tem que ser reduzida.

Uma vez mapeadas as regiões onde o ponto  $L_4$  é linearmente estável determinaremos pontos nestas regiões onde a instabilidade não-linear ocorre. O critério estabelecido é baseado na terceira condição do teorema de Kovalev e Savchenko (1975), apresentado no capítulo 4. A região de instabilidade apresentada nesta seção terá um tratamento especial na seção posterior.

#### **4.6 Existência de ressonância linear**

Nesta seção estudaremos alguns casos para diferentes valores da razão de massa,  $\mu$ , considerando a radiação emitida pelos corpos primários com objetivo de determinar as regiões onde existe a transição de ressonância entre as frequências e verificar a influência delas na estabilidade não-linear quando adicionamos termos de grau quatro. Uma vez que a equação do problema proposto está escrita na forma normal hamiltoniana, temos duas frequências ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ) desacopladas. Dessa forma, a ressonância abordada está relacionada ao movimento das frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e não ao movimento médio dos corpos primários com o corpo de massa desprezível. Estas ressonâncias violam a condição do teorema de Arnold (1961), o qual pelo teorema de Kovalev e Savchenko (1975) é um critério para se ter instabilidade não-linear.

Considerando a Equação (4.17) cuja frequência é dada por  $\lambda_{1,2}^2 = -\omega_1^2$  e  $\lambda_{3,4}^2 = -\omega_2^2$ , os valores de  $\mu$  para determinados fatores de redução foram obtidos através:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = k, \quad k \in Z,$$

onde isolando  $\mu$ , podemos verificar algumas ressonâncias:

- Ressonância  $\omega_1 = \omega_2$ ;

$$\mu = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4\kappa_1^2\kappa_2^2}{144\kappa_1^2\kappa_2^2 - 36(-1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2}} \quad (4.19)$$

- Ressonância  $\omega_1 = 2\omega_2$ ;

$$\mu = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4\kappa_1^2\kappa_2^2}{900\kappa_1^2\kappa_2^2 - 225(-1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2}} \quad (4.20)$$

- Ressonância  $\omega_1 = 3\omega_2$ ;

$$\mu = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4\kappa_1^2\kappa_2^2}{400\kappa_1^2\kappa_2^2 - 100(-1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2}} \quad (4.21)$$

Outras ressonâncias foram detectadas cujo valor da razão de massa teve variação após a quarta casa decimal nas vizinhanças da ressonância  $\omega_1 = 3\omega_2$ . Dessa forma, realizaremos uma exploração mais detalhada destes três casos. Numericamente, valores importantes da razão de massa  $\mu$  onde ocorrem as ressonâncias tratadas anteriormente podem ser visualizados nas Tabelas (4.2) até (4.5).



Tabela 4.2- Valores de  $\mu$  para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_1$  não emitindo radiação).

Radiação da massa $m_2$ : $\kappa_1 = 1$		Ressonâncias		
		$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 = 2\omega_2$	$\omega_1 = 3\omega_2$
Variação do fator de redução referente à radiação emitida pelo corpo $m_2$ .	$\kappa_2 = 1$	0,0385209	0,0349233	0,0321444
	$\kappa_2 = 0,9$	0,0361369	0,0327702	0,0301682
	$\kappa_2 = 0,8$	0,0342412	0,0310571	0,0285955
	$\kappa_2 = 0,7$	0,0327266	0,029688	0,0273381
	$\kappa_2 = 0,6$	0,0315184	0,0285955	0,0263345
	$\kappa_2 = 0,5$	0,0305638	0,027732	0,0255412
	$\kappa_2 = 0,4$	0,0298247	0,0270634	0,0249269
	$\kappa_2 = 0,3$	0,0292741	0,0265653	0,0244692
	$\kappa_2 = 0,2$	0,0288932	0,0262206	0,0241524
	$\kappa_2 = 0,1$	0,0286693	0,0260181	0,0239662

Tabela 4.3-Valores de  $\mu$  para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_2$  não emitindo radiação).

Radiação da massa $m_2$ : $\kappa_2 = 1$		Ressonâncias		
		$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 = 2\omega_2$	$\omega_1 = 3\omega_2$
Variação do fator de redução referente à radiação emitida pelo corpo $m_1$ .	$\kappa_1 = 0,9$	0,0361369	0,0327702	0,0301682
	$\kappa_1 = 0,8$	0,0342412	0,0310571	0,0285955
	$\kappa_1 = 0,7$	0,0327266	0,029688	0,0273381
	$\kappa_1 = 0,6$	0,0315184	0,0285955	0,0263345
	$\kappa_1 = 0,5$	$\mu=0,029566$	0,027732	0,0255412
	$\kappa_1 = 0,4$	0,0298247	0,0270634	0,0249269
	$\kappa_1 = 0,3$	0,0292741	0,0265653	0,0244692
	$\kappa_1 = 0,2$	0,0288932	0,0262206	0,0241524
	$\kappa_1 = 0,1$	0,0286693	0,0260181	0,0239662

Tabela 4.4-Valores de  $\mu$  para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_1$  e  $m_2$  emitindo radiação).

Radiação da massa $m_2$ : $\kappa_2 = 0,8$		Ressonâncias		
		$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 = 2\omega_2$	$\omega_1 = 3\omega_2$
Variação do fator de redução referente à radiação emitida pelo corpo $m_1$ .	$\kappa_1 = 0,9$	0.0317949	0.0288455	0.0265642
	$\kappa_1 = 0,8$	0.0300785	0.0272931	0.0251379
	$\kappa_1 = 0,7$	0.028998	0.0263155	0.0242395
	$\kappa_1 = 0,6$	0.0285955	0.0259512	0.0239048
	$\kappa_1 = 0,5$	0.028727	0.0260703	0.0240142
	$\kappa_1 = 0,4$	0.0317949	0.0288455	0.0265642
	$\kappa_1 = 0,3$	0.0424357	0.0384567	0.0353855
	$\kappa_1 = 0,2$	Não aplicável		
	$\kappa_1 = 0,1$			

Tabela 4.5-Valores de  $\mu$  para diversas ressonâncias e fatores de redução ( $m_1$  e  $m_2$  emitindo radiação).

Radiação da massa $m_2$ : $\kappa_2 = 0,5$		Ressonâncias		
		$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 = 2\omega_2$	$\omega_1 = 3\omega_2$
Variação do fator de redução referente à radiação emitida pelo corpo $m_1$ .	$\kappa_1 = 0,9$	0,028727	0,0260703	0,0240142
	$\kappa_1 = 0,8$	0,0291636	0,0264653	0,0243772
	$\kappa_1 = 0,7$	0,0333345	0,0302375	0,0278428
	$\kappa_1 = 0,6$	0.0506672	0.0458756	0.0421835
	$\kappa_1 = 0,5$	Não aplicável		
	$\kappa_1 = 0,4$			
	$\kappa_1 = 0,3$			
	$\kappa_1 = 0,2$			
	$\kappa_1 = 0,1$			

As regiões de transição, entre as ressonâncias abordadas, podem ser observadas nas Figuras (4.8) até (4.11).

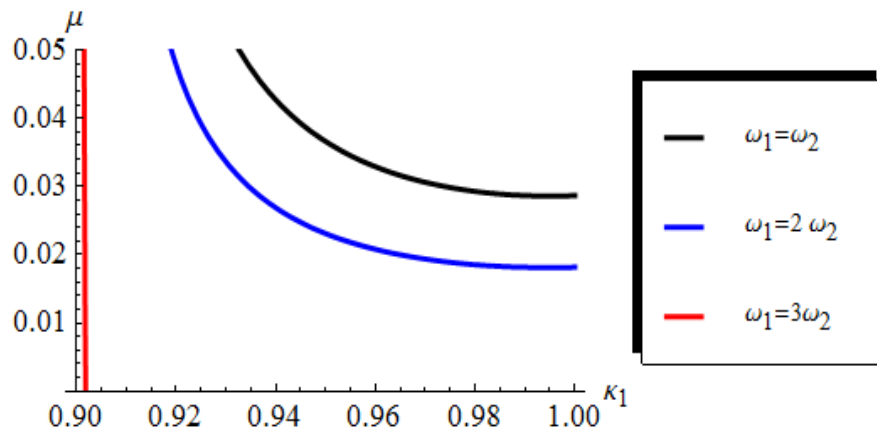


Figura 4.8- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação,  $\kappa_2=0,1$

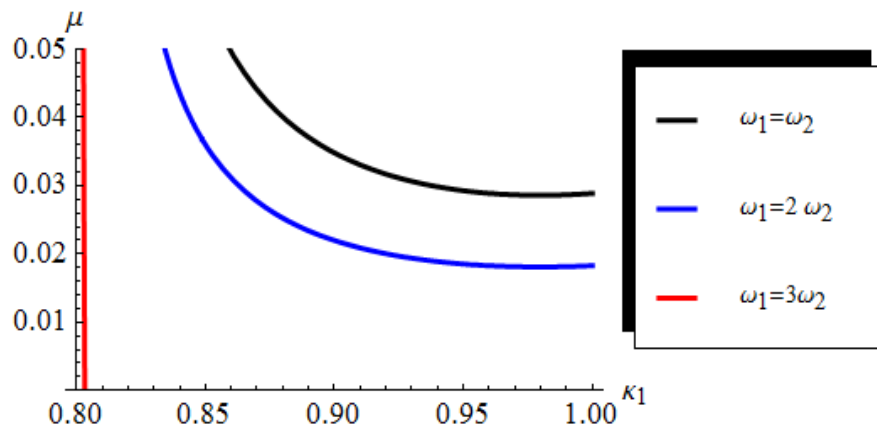


Figura 4.9- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação,  $\kappa_2=0,2$

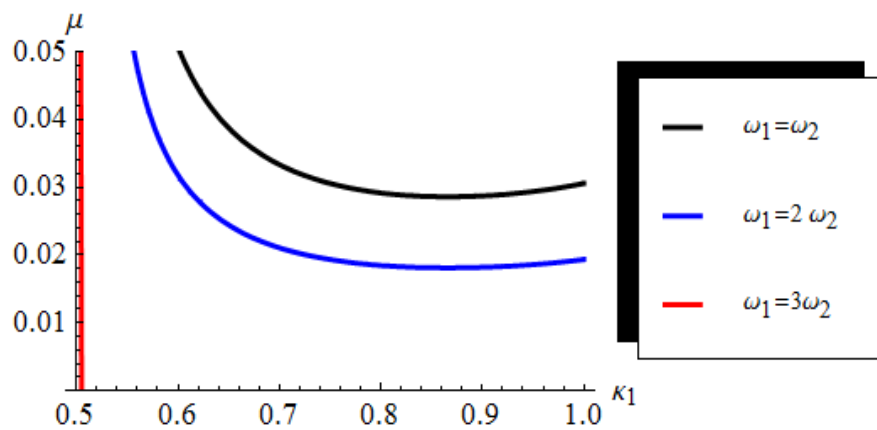


Figura 4.10- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação,  $\kappa_2=0,5$

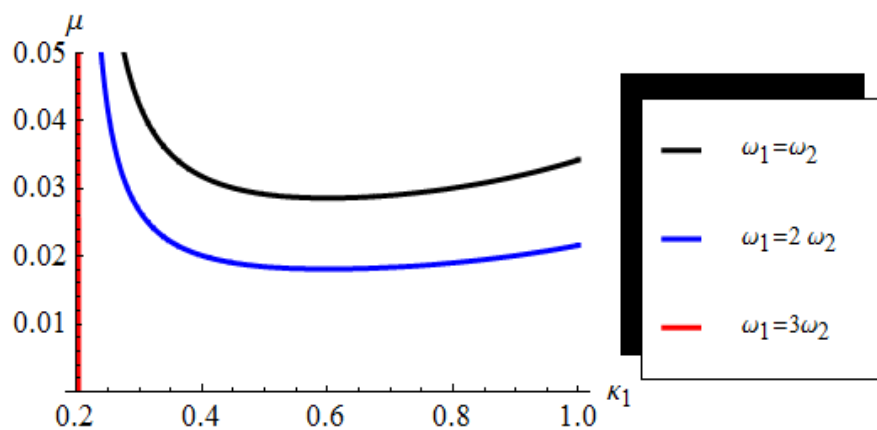


Figura 4.11- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação,  $\kappa_2=0,8$ .

Com base nas Figuras (4.8) até (4.11), observamos que quando um dos corpos primários com a razão entre a força de radiação e a força gravitacional entre  $0,5 < Fr/Fg < 0,9$  ( $0,1 < \kappa_1 < 0,5$ ) os valores de  $\mu$  ressonantes diminuem quando a radiação do outro corpo primário diminui e aumenta quando radiação é aumentada. Dessa forma, podemos afirmar que quando um dos corpos tende a não emitir radiação a razão  $\mu$  assume valores menores não ultrapassando 0,03852. É possível verificar as ressonâncias  $\omega_1 = \omega_2$  e  $\omega_1 = 3\omega_2$  limitam a região de estabilidade linear.

Já na Figura (4.12), podemos observar que a ressonância  $\omega_1=3\omega_2$  não existe quando um dos corpos tem radiação próximo a zero. Notemos que não há influência de ressonância para  $\mu < 0,018$  e que em todos os casos abordados a ressonância  $\omega_1=2\omega_2$  sempre ocorre nas vizinhanças de  $\mu \approx 0,02$ .

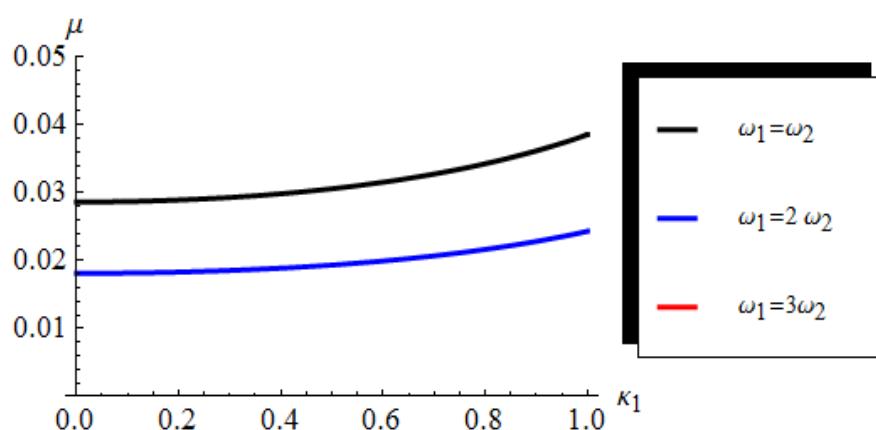


Figura 4.12- Ressonâncias quando os corpos primários emitem simultaneamente radiação,  $\kappa_2=0,8$ .

Dentre as diversas simulações realizadas, observamos que  $\mu \approx 0$  sempre na ressonância  $\omega_1=3\omega_2$  para um valor correspondente de  $\kappa_2$ . Isto é, para  $\kappa_2 = 0,5$  temos que  $\mu \approx 0$  quando  $\kappa_1 \approx 0,5$  na ressonância  $\omega_1=3\omega_2$ . Com base na Equação (4.21) temos que a ressonância  $\omega_1=3\omega_2$  sempre limitará esta regiões devido a relação  $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 1$ . Fica evidente em todas as figuras da seção 4.6 que a ressonância ocorre a partir do fator de radiação fixado para estas ressonâncias. As ressonâncias lineares abordadas aqui auxiliaram na análise da estabilidade não-linear no que diz respeito à existência de pontos instáveis ou até mesmo a destruição deles com a adição de outros termos na hamiltoniana do problema.

#### 4.7 Resultados: forma normal e estabilidade não-linear

Com auxílio dos autovalores (Equação 4.17) e os termos das Equações (4.12) até (4.14) determinamos os coeficientes  $\bar{\delta}_{uv}$ , através das Equações (3.8) até (3.10) que é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \delta_{11} \\
 &= (3(-96b(\frac{\kappa 2(-4\kappa 1^2 + 5(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)^2)}{\kappa 1^3})(1 - \mu) \\
 &+ \frac{\kappa 1(-4\kappa 2^2 + 5(1 - \kappa 1^2 + \kappa 2^2)^2)\mu}{\kappa 2^3})^2 \omega_1^3 \\
 &- 20(\frac{(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)(-12\kappa 1^2 + 5(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)^2)(1 - \mu)}{\kappa 1^4} \\
 &+ \frac{(-1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)(-12\kappa 2^2 + 5(1 - \kappa 1^2 + \kappa 2^2)^2)\mu}{\kappa 2^4})^2 \omega_1^2 \omega_2 \\
 &+ 256(-\frac{(3\kappa 1^4 + \frac{35}{16}(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)^4 - \frac{15}{2}(\kappa 1 + \kappa 1^3 - \kappa 1\kappa 2^2)^2)(1 - \mu)}{\kappa 1^6} \\
 &- \frac{(3\kappa 2^4 + \frac{35}{16}(1 - \kappa 1^2 + \kappa 2^2)^4 - \frac{15}{2}(\kappa 2 - \kappa 1^2\kappa 2 + \kappa 2^3)^2)\mu}{\kappa 2^6}) \omega_1^3 \omega_2 \\
 &+ 36b(\frac{\kappa 2(-4\kappa 1^2 + 5(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)^2)(1 - \mu)}{\kappa 1^3} \\
 &+ \frac{\kappa 1(-4\kappa 2^2 + 5(1 - \kappa 1^2 + \kappa 2^2)^2)\mu}{\kappa 2^3})^2 \omega_1 \omega_2^2 \\
 &+ 5(\frac{(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)(-12\kappa 1^2 + 5(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)^2)(1 - \mu)}{\kappa 1^4} \\
 &+ \frac{(-1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)(-12\kappa 2^2 + 5(1 - \kappa 1^2 + \kappa 2^2)^2)\mu}{\kappa 2^4})^2 \omega_2^3 \\
 &- 64(-\frac{(3\kappa 1^4 + \frac{35}{16}(1 + \kappa 1^2 - \kappa 2^2)^4 - \frac{15}{2}(\kappa 1 + \kappa 1^3 - \kappa 1\kappa 2^2)^2)(1 - \mu)}{\kappa 1^6} \\
 &- \frac{(3\kappa 2^4 + \frac{35}{16}(1 - \kappa 1^2 + \kappa 2^2)^4 - \frac{15}{2}(\kappa 2 - \kappa 1^2\kappa 2 + \kappa 2^3)^2)\mu}{\kappa 2^6}) \omega_1 \omega_2^3)) \\
 &/ (4096(4\omega_1^3 \omega_2 - \omega_1 \omega_2^3))
 \end{aligned} \tag{4.22}$$



$$\begin{aligned}
\delta_{22} = & \frac{1}{256(-\omega_1^3\omega_2 + 4\omega_1\omega_2^3)} 3(20b(\frac{\kappa_2(-3 + 5b\kappa_2^2)(-1 + \mu)}{\kappa_1} \\
& + \frac{\kappa_1(3 - 5b\kappa_1^2)\mu}{\kappa_2})^2\omega_1^3 \\
& + 9(\frac{(1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)(-1 + 5b\kappa_2^2)(-1 + \mu)}{\kappa_1^2} \\
& - \frac{(-1 + 5b\kappa_1^2)(-1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)\mu}{\kappa_2^2})^2\omega_1^2\omega_2 \\
& - 4(\frac{(3 + 5b\kappa_2^2(-6 + 7b\kappa_2^2))(-1 + \mu)}{\kappa_1^2} \\
& + \frac{(-3 + 5b\kappa_1^2(6 - 7b\kappa_1^2))\mu}{\kappa_2^2})\omega_1^3\omega_2 \\
& - 80b(\frac{\kappa_2(-3 + 5b\kappa_2^2)(-1 + \mu)}{\kappa_1} + \frac{\kappa_1(3 - 5b\kappa_1^2)\mu}{\kappa_2})^2\omega_1\omega_2^2 \\
& - 24(\frac{(1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)(-1 + 5b\kappa_2^2)(-1 + \mu)}{\kappa_1^2} \\
& - \frac{(-1 + 5b\kappa_1^2)(-1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)\mu}{\kappa_2^2})^2\omega_2^3 \\
& + 16(\frac{(3 + 5b\kappa_2^2(-6 + 7b\kappa_2^2))(-1 + \mu)}{\kappa_1^2} \\
& + \frac{(-3 + 5b\kappa_1^2(6 - 7b\kappa_1^2))\mu}{\kappa_2^2})\omega_1\omega_2^3)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

O critério de estabilidade não-linear, dado pela Equação (3.12), é determinado através da Equação (4.17) e das Equações (4.22) até (4.23). Dessa forma, a estabilidade não-linear, para o ponto  $L_4$ , fica garantida quando a função  $D \neq 0$ . A expressão analítica do determinante não será apresentada por ser extremamente extensa.

Como sabemos, o problema fotogravitacional é caracterizado pela luminosidade emitida pelos corpos primários. Dessa forma, a estabilidade não-linear a para  $L_4$  será apresentada baseada nos diferentes fatores de redução que adotaremos para os corpos primários bem como alguns dos fatores já apresentados na Tabela (4.1). Mesmo sabendo que o caso onde  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  passa a ser o problema clássico dos 3 corpos, faremos um estudo da estabilidade não-linear para comparar com resultados existentes na literatura.

Estudando separadamente os casos, temos:



a) Caso  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  (Sem emissão de radiação pelos corpos primários)

Realizando um estudo sobre a estabilidade não-linear do ponto  $L_4$ , para este caso, detectamos através da Figura (4.13) dois valores de  $\mu$  onde o ponto em estudo seja instável ( $D=0$ ). Tais valores são  $\mu=0,0349233$  e  $\mu=0,0385209$ , podem ser vistos na Tabela (4.1), e estão relacionados respectivamente com as ressonâncias 1:1 e 2:1. Sobre a ressonância linear 3:1 que aparece na Tabela (4.1), para  $\mu=0,0321444$ , notamos que ela foi destruída pelos termos de quarta ordem da hamiltoniana na forma normal. Com base nestes resultados podemos afirmar que o ponto  $L_4$  será instável apenas em duas razões de massa que estão diretamente relacionadas às ressonâncias 1:1 e 2:1. Estes resultados foram apresentados por Simmon's et al.(1985).

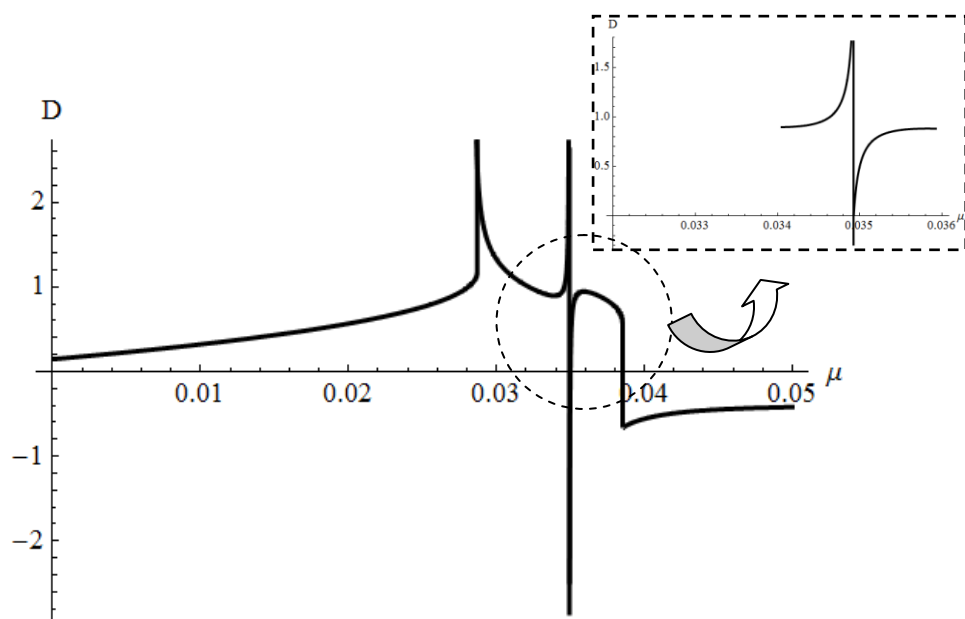


Figura 4.13- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$

a) Um dos corpos emitindo radiação

Com inclusão da radiação, porém prevalecendo a força gravitacional com maior intensidade notamos o aparecimento de alguns valores de  $\mu$  os quais tornam  $L_4$  instável.

Considerando a emissão de radiação devido ao corpo primário de menor massa, sem emissão de radiação do maior massa, uma análise da estabilidade não-linear será feita através das Figuras (4.14) e (4.15). Notamos na Figura (4.14), mesmo quando o menor corpo primário emitindo radiação cuja razão é  $Fr/Fg=0,1$ , a quantidade de valores de razão de massa que tornam  $L_4$  instável permanece o mesmo quando comparamos com o problema clássico dos três corpos. Isto nos mostra que a radiação emitida pelo corpo primário não é suficiente para o aparecimento ou destruição dos pontos de estabilidade. As instabilidades de  $L_4$  ocorrem ainda devido às ressonâncias lineares 1:1 e 2:1, porém para  $\mu=0,0361369$  e  $\mu=0,0327707$  respectivamente. Para este caso a ressonância 3:1 também foi destruída. Quando variamos a razão para  $Fr/Fg=0,3$ , notamos na Figura (4.15) o aparecimento de um valor de  $\mu=0,029842$  onde  $L_4$  é também instável além das ressonâncias existentes que ocorrem agora em  $\mu=0,029688$  e  $\mu=0,0327266$  para ressonâncias 2:1 e 1:1 respectivamente.

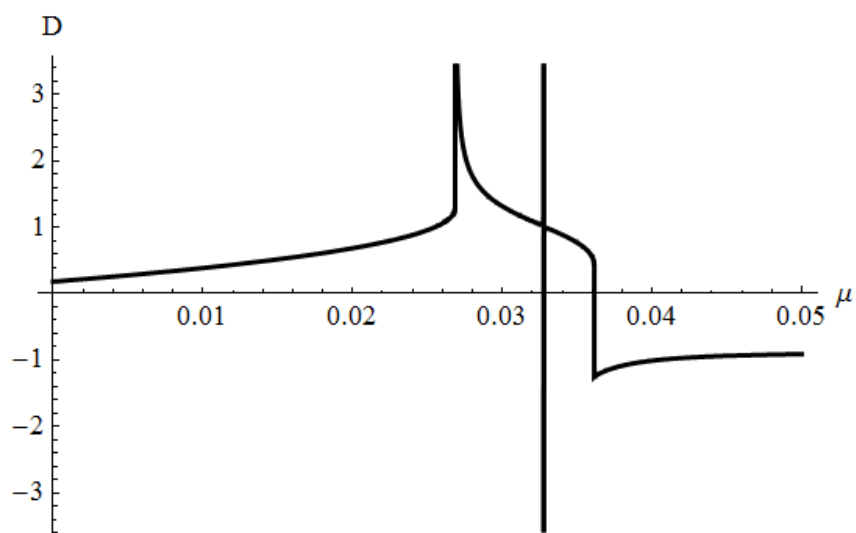


Figura 4.14- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,9$ ,  $\kappa_2=1$ .

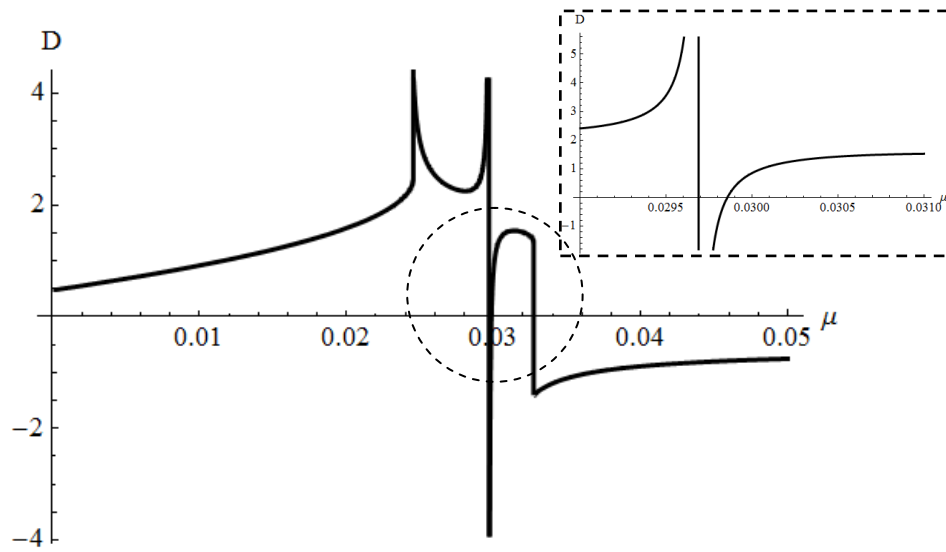


Figura 4.15- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,7$  e  $\kappa_2 = 1$ .

Dessa forma, com base nas observações feitas quando o corpo de menor massa emite radiação e desprezando a radiação do maior, notamos que dependendo da razão entre a radiação emitida e a força gravitacional deste corpo ocorrerá mais um valor de  $\mu$  em que  $L_4$  seja instável além dos valores instáveis que existem devido às ressonâncias lineares.

Continuando ainda com análise sobre a estabilidade de  $L_4$  para diferentes valores de  $\mu$  e fatores de redução e quando um dos corpos não está emitindo radiação, faremos uma abordagem atribuindo fatores de redução abordados anteriormente nas Figuras (4.14) e (4.15) onde será atribuída a radiação para o corpo de maior massa e desconsiderado a radiação do menor corpo. Essa investigação será feita com objetivo de saber se a quantidade de pontos onde  $L_4$  é instável e se as ressonâncias, nessa abordagem, permanecem ou são destruídas.

Com base na Figura (4.16), cujo fator de redução dos corpos é  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,9$ , notamos o aparecimento de mais valores de  $\mu$  que torna  $L_4$  instável ( $D=0$ ). Essa instabilidade ocorre para  $\mu=0,0164852$ ,  $\mu=0,0327702$  (ressonância 2:1),

$\mu=0,0339872$  e  $\mu=0,0361369$  (ressonância 1:1). Neste caso que a ressonância linear foi destruída quando adicionamos os termos de quarta ordem.

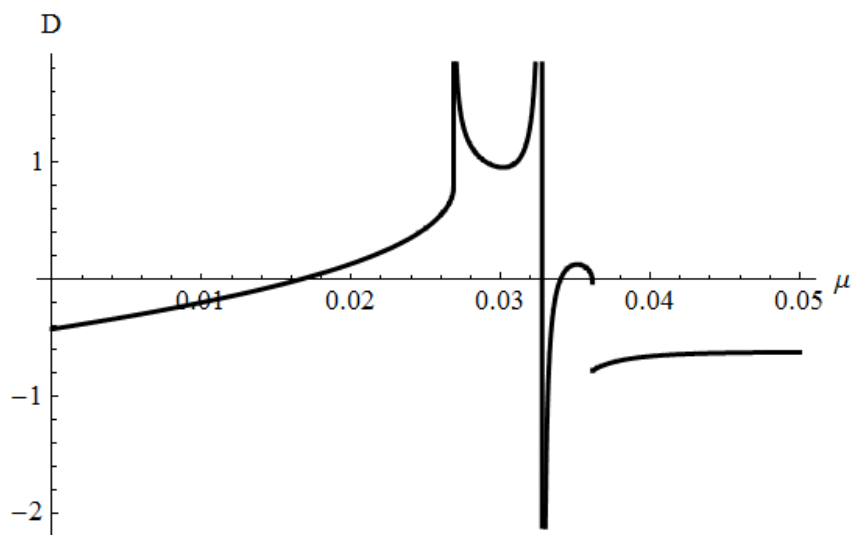


Figura 4.16- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,9$ .

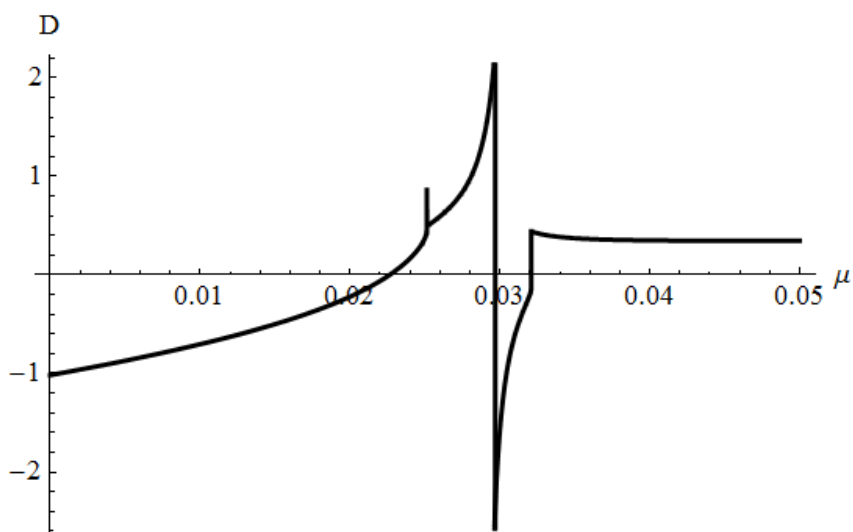


Figura 4.17- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,7$ .

Aumentando a radiação emitida pelo corpo de maior massa cuja razão entre a radiação e a força gravitacional é  $Fr/Fg=0,3$  (ver Figura (4.17)), os valores que

tornam  $L_4$  instável devido às ressonâncias 2:1 e 1:1 (respectivamente  $\mu=0,029688$  e  $\mu=0,0327266$ ) permaneceram, um foi destruído e outro foi deslocado para  $\mu=0,0224981$ . O deslocamento e a destruição dessas instabilidades são detectados quando comparamos a Figura (4.16) com (4.17).

De forma geral, devido à abordagem feita para um dos corpos não emitindo radiação e com auxílio de alguns resultados obtidos e apresentados no Apêndice (A.2) notamos que a radiação emitida pelo corpo de maior massa é responsável pelo maior dos números da razão de massa  $\mu$  onde  $L_4$  é instável ocorrendo para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,9$ . Nos demais casos a quantidade de pontos instáveis permanecem os mesmos até  $\kappa_1 = 1$  e  $0,4 < \kappa_2 < 0,9$ . Já no caso onde o corpo de menor massa está emitindo radiação, a ressonância 1:1 não contribui para instabilidade de  $L_4$  para  $0,1 < \kappa_1 < 0,4$  e  $\kappa_2 = 1$ . Estes resultados podem ser vistos no Apêndice (A.2).

#### b) Dois corpos emitindo radiação

Analisando a Figura (4.18) notamos que mesmo quando ambos os corpos primários estão emitindo radiação a ressonância 2:1 e 1:1 também são responsáveis pela instabilidade não-linear de  $L_4$ , além do ponto de instabilidade que ocorre quando  $D=0$ . Estes pontos que torna  $L_4$  instável são:  $\mu= 0,0224683$ ,  $\mu= 0,0302375$  (ressonância 2:1) e  $\mu= 0,0333345$  (ressonância 1:1) que são obtidos quando a razão entre a radiação e força gravitacional,  $F_{r1}/F_{1g}=0,5$  (menor massa) e  $F_{2r}/F_{2g}=0,3$  (maior massa). Com base na análise da estabilidade linear (Figura A.1),  $L_4$  é linearmente estável para  $0 < \mu < 0,0333345$  (ressonância 2:1) quando  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,7$  então dentro desta região podemos afirmar que só ocorre instabilidade não-linear para  $\mu= 0,0224683$  ( $D=0$ ).

Quando aumentamos a radiação emitida pelo corpo de maior massa, tal que  $F_{2r}/F_{2g}=0,4$ , notamos na Figura (4.19) que a ressonância 1:1 não é mais

responsável pela instabilidade não-linear de  $L_4$  já que a estabilidade linear ocorre, neste caso, em  $0 < \mu < 0,0458756$  e  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,6$ . Analogamente aos pontos detectados anteriormente temos uma única instabilidade não-linear, gerada por  $D=0$  ( $\mu=0,0224376$ ).

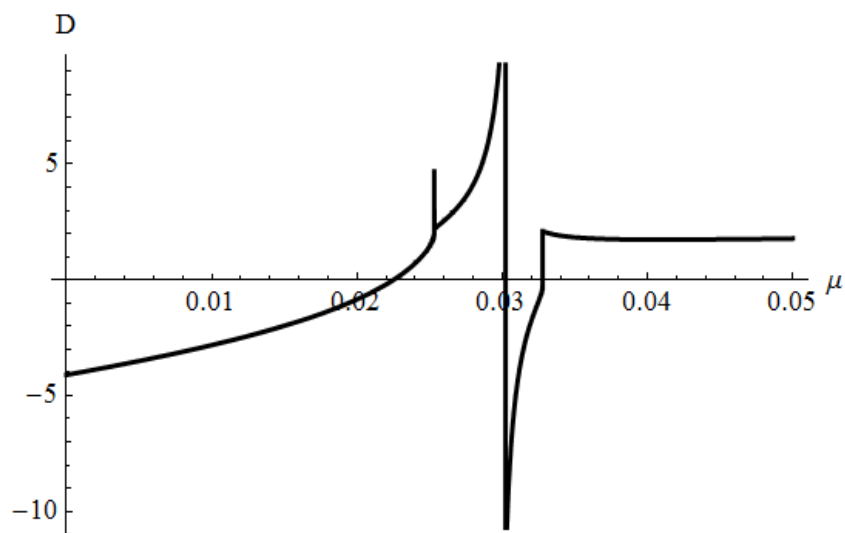


Figura 4.18- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,7$ .

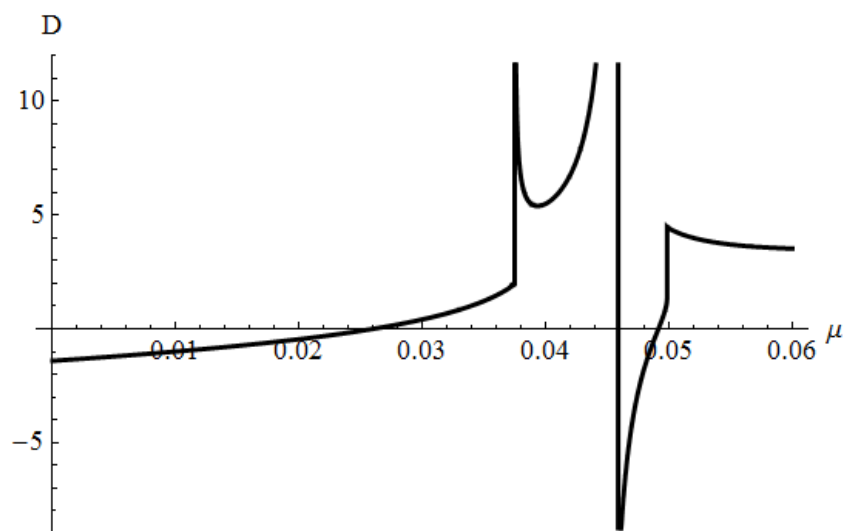


Figura 4.19- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,6$ .

Com base nas análises realizadas através das Figuras (4.18) e (4.19), devido ao aumento da radiação emitida pelo corpo de maior massa o ponto de instabilidade não-linear ocorre sempre limitado pela ressonância 2:1. Já o caso quando ambos os corpos apresentam a mesma razão entre a radiação e a força gravitacional,  $F_r/F_g=0,5$ , (Figura 4.20) não haverá instabilidade não-linear para o ponto  $L_4$  para qualquer valor de  $\mu$ .

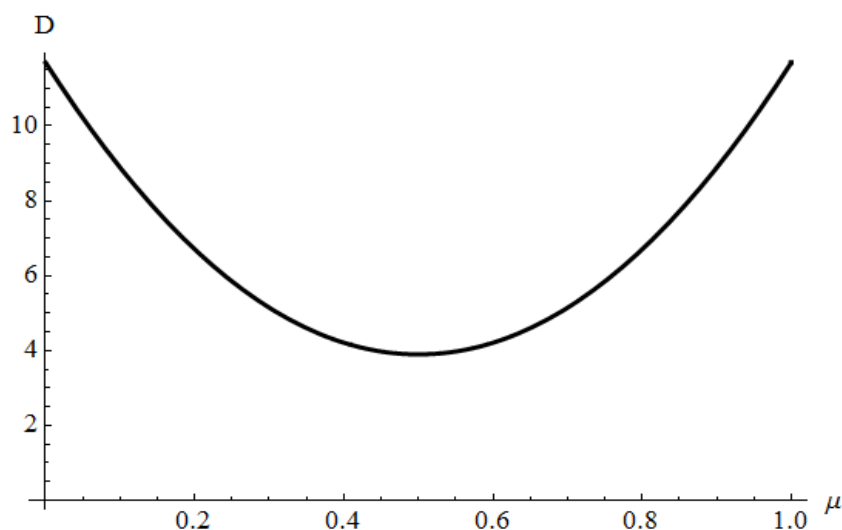


Figura 4.20- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,5$ .

Analisaremos a estabilidade não-linear da estrela binária UU caciopéia, com base no fator de redução apresentado na Tabela 4.1. Apesar de pequena a diferença entre o fator de redução entre as duas massas e da força gravitacional ser superior a radiação (Figura 4.21), neste caso, podemos afirmar que esta diferença é suficiente para a evidência de mais um ponto de instabilidade quando comparamos com os casos apresentados através das Figuras (4.18) e (4.19). Neste estudo a instabilidade do ponto  $L_4$  ocorre em  $\mu=0,0302375$  (ressonância 2:1),  $\mu=0,0225782$  e  $\mu=0,0328891$ .

Notamos que no estudo realizado, no caso em que ambos os corpos emitem radiação, a ressonância 3:1 foi destruída.

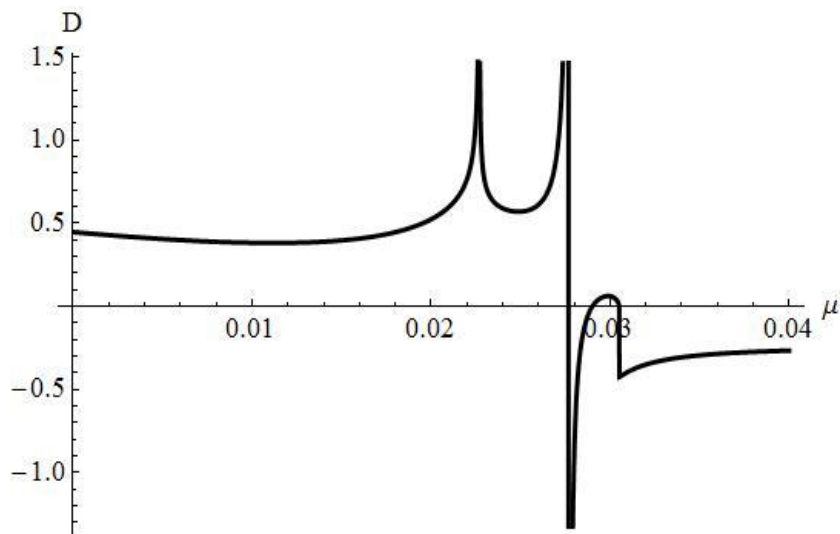


Figura 4.21- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,88$  e  $\kappa_2 = 0,74$ .

#### 4.8 Resultados Numéricos: Estabilidade e Forma normal

Alguns resultados numéricos foram obtidos com base no fator de redução  $\kappa_1 = 0,6$  e  $\kappa_2 = 0,8$  para diversos valores de  $\mu$ . Para cada valor da razão de massa foi determinado as frequências do movimento ( $\omega_i$ ), os coeficientes dos termos de grau quatro da hamiltoniana na forma normal cujo teste de estabilidade é realizado com base no teorema de Kovalev e Savchenko (1975). Estes valores podem ser vistos na Tabela (4.6).



Tabela 4.6- Coeficientes da hamiltoniana para forma normal, teste da estabilidade e frequências para diversas razões de massa  $\mu$ .

$\kappa_1 = 0,6$ e $\kappa_2 = 0,8$					
massa	Frequências	Coeficientes $Z_4$	Teste estabilidade		Determinante
$\mu$	$\omega_i$	$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$	Estabilidade Linear	Estabilidade Não-linear	D
<b>0,001</b>	0,490843 0,860771	-0,261736 -1,75474 -2,62699	Estável	Estável	0,949968
<b>0,002</b>	0,481353 0,855395	-0,27439 1,70153 -2,67302	Estável	Estável	0,942018
<b>0,003</b>	0,471502 0,849891	-0,288088 -1,64386 -2,72307	Estável	Estável	0,934075
<b>0,01</b>	0,388746 0,806922	-0,431652 -1,03445 -3,25754	Estável	Estável	0,881597
<b>0,02</b>	0,145922 0,722006	-1,8172 5,08713 -8,6287	Estável	Estável	1,17873
<b>0,03</b>	$\pm 0,511255$	0,0925806 -5,27014 -0,51333			
<b>0,04</b>	$\pm 0,508807$	0,0476769 -1,68694 -0,291382		Não se aplica	
<b>0,05</b>	$\pm 0,554465$	0,0016763 -1,55813 -0,441407			



## 5 CONCLUSÃO

Neste estudo procuramos dar ênfase à construção de um método analítico computacional para determinação de formas normais de sistemas hamiltonianos. Como visto, o método foi aplicado ao estudo do ponto de equilíbrio  $L_4$  no problema fotogravitacional circular restrito dos três corpos.

A determinação da posição e velocidade do corpo pequeno é um problema complexo e é difícil de se obter soluções analíticas, mesmo aproximadas. Quando tratamos de problemas desta natureza uma das preocupações está relacionada à estabilidade do movimento quando consideramos a radiação de um dos corpos ou até mesmo quando ambos emitem esta radiação. Então como vimos uma das aplicações deste estudo também está na grande facilidade em determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio sem a necessidade das soluções analíticas para a posição e velocidade.

Comparando os resultados obtidos, para o problema clássico dos três corpos, apresentado por vários autores, dentre eles Szebehely (1984), foi comprovada a eficácia e a precisão do método aqui apresentado. Dessa forma, o método analítico de normalização de sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade pode ser utilizado para qualquer sistema hamiltoniano de qualquer natureza e ser estendido para três graus de liberdade.

No que se refere ao estudo de estabilidade, conhecendo-se o ponto de equilíbrio a ser estudado e os coeficientes da hamiltoniana de ordem 3 e 4, a estabilidade não-linear pode ser verificada.

Para o estudo da estabilidade do ponto triangular  $L_4$  como aplicação do método desenvolvido as seguintes conclusões foram obtidas, com base na radiação emitida pelos corpos:

- i) *Apenas o corpo de menor massa emite radiação:*

- Quando a razão entre a radiação e a força gravitacional ocorre entre o intervalo  $0 < fr/fg < 0,5$  em relação ao corpo  $m_1$ , sempre existirá um valor para razão de massa no intervalo  $0,016 < \mu < 0,023$  onde o ponto  $L_4$  é instável no sentido de Liapunov ( $D=0$ ).
- A instabilidade que aparece devido à ressonância 2:1, em todos os estudos apresentados, não é eliminada com a perturbação provocada pela radiação e pela força gravitacional.
- A instabilidade de  $L_4$  devido à ressonância linear 1:1 é eliminada quando a razão entre a radiação e a força gravitacional está no intervalo  $0,1 < fr/fg \leq 0,2$ .

*iii) Apenas corpo de maior massa emite radiação:*

- Quando a razão entre a radiação e a força gravitacional está no intervalo  $0 < fr/fg < 0,5$  da massa  $m_2$ , sempre vai existir um valor para razão de massa no intervalo  $0,012 < \mu < 0,023$  em que  $L_4$  é instável no sentido de Liapunov ( $D=0$ ).
- A instabilidade que aparece devido à ressonância 2:1 não é eliminada com o efeito da radiação e da força gravitacional.
- A instabilidade de  $L_4$  devido à ressonância linear 1:1 é eliminada quando a razão entre a radiação e a força gravitacional assume valores no intervalo  $0,1 < fr/fg \leq 0,5$ .

*iv) Ambos os corpos emitindo radiação:*

- $L_4$  é totalmente estável quando a razão entre a radiação e a força gravitacional é  $fr/fg = 0,5$  simultaneamente para  $m_1$  e  $m_2$ .
- Uma pequena variação da radiação neste caso possui uma contribuição significativa na existência ou na destruição da estabilidade de  $L_4$ .
- Quando a razão entre os fatores de redução de  $m_1$  e  $m_2$  é igual a 0,45, o ponto  $L_4$  será apenas instável na ressonância 2:1.

- Quando  $fr_1/fg_1=0,5$ (menor massa) e  $fr_2/fg_2 =0,8$ (maior massa), o ponto  $L_4$  será Liapunov instável em 4 valores no intervalo  $0,0138<\mu<0,02876$  (um deles na ressonância 2:1).

O estudo apresentado para verificar o comportamento da estabilidade do ponto  $L_4$  para o caso fotogravitacional pode ser estendido para os demais pontos Lagrangianos.

### 5.1 Perspectivas futuras

Após a realização deste estudo observamos que algumas abordagens teóricas e fundamentais para o aperfeiçoamento do modelo no que se refere à precisão podem ser consideradas. Dentre elas, podemos destacar:

- Realizando um nova formulação no modelo apresentado podemos estudar a contribuição dos termos de ordem superior a 4;
- Aplicar a o modelo para o estudo do comportamento da estabilidade dos demais pontos lagrangianos;
- Introduzir no problema fotogravitacional o efeito de Poyting Robertson para o estudo da estabilidade dos pontos lagrangianos.
- Utilizando o programa e a metodologia, ambos aqui desenvolvidos, realizar o estudo da estabilidade da órbita de um satélite que esteja localizado em uma órbita congelada;
- Estudar a estabilidade do movimento de atitude de um satélite devido a pressão de radiação solar;

Lembramos que todas as aplicações citadas acima partem da determinação de pontos de equilíbrio para os quais se deseja estudar a estabilidade. Nem sempre é fácil ou mesmo possível a determinação deles. Ressaltamos que uma das contribuições importantes deste trabalho foi construir um programa que fornece, a partir do fornecimento da expressão analítica de uma hamiltoniana (para qualquer sistema hamiltoniano), os pontos equilíbrio do

sistema (quando possível), a expressão analítica para a forma normal da hamiltoniana e o comportamento da estabilidade dos pontos de equilíbrio.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNOLD, V. I. The Stability of equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case. **Soviet Mathematic**, v.2, n. 247, p. 255-257, 1961.

ARNOLD, V. I. **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations**. Berlin: Springer- Verlag, 1983. p. 334

ARNOLD, V. I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, **Sovietc. Mathematic**, v. 6, p. 581–585,1964.

BIRKHOFF, G. Dynamical systems. **American Mathematical Society Colloquium Publications**. v. IX, p. 305,1927.

BIRKHOFF, G. Collected mathematical papers. 2.ed. New York: American mathematic. society, 1950.

BRYUNO, A.D. Normalization of a hamiltonian systems near an invariant cycle or torus, **Russian Math. Surveys**, v. 44, p. 53-89,1989.

CABETTE, R. E. S. **Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais**. 2006. 232 p. (INPE-14809-TDI/1252). Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2006.

CORBEN, H.C., STEHELE, P. **Classical mechanics**. 2. ed. New York: Dover Publ, 1977.

CORRÊA, A. A. **Transferências orbitais e dinâmicas na vizinhança dos pontos lagrangianos L1 e L2**. 2005. 162 p. (INPE-14680-TDI/1161). Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2005.

CABRAL, H. E., MEYER, K. R. Stability of equilibria and fixed points of conservative systems. *Nonlinearity*, **Celestial Mechanics**, v.12, p.1351-1362, 1999.

COSTA FILHO, O. O. Uma forma normal para sistemas dinâmicos hamiltonianos. IN: I CONGRESSO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2002, Recife, **Anais...** Recife: [s.n], 2002, v.1, p.211-234.

CHANDRA, N. Stability of L4 for radiated rigid primaries in resonant cases, **Planetary and Space Science**, v. 52, p. 747-760, 2004.

CHETAEV, N. G. **Stability of motion**. 1.ed. New York: Pergamon Press, Book n. 09505, 1961.

- CHUDNENKO, A., N. On the stability of uniform rotations of a rigid body around the principal axis. **PMM U.S.S.R.**, v. 44, p. 174-179, 1980.
- CHOBOTOV, V. A. Orbital mechanics, **AIAA Journal**, v. 2, p. 123, 1996.
- DUBOSHIN, G., N. On the stability of regular motions of artificial celestial bodies. **Astronomicheskii Zhurnal**, v. 36, n. 4, p. 723-733, 1959.
- ELIPE, A., LANCHARES, V., MORATALLA, L., T. RIAGUAS. A. On the Lyapunov stability of stationary points around central body. **Nonlinear Science**, v.11, p.221-222, 2001.
- ELIPE, A. MORATALLA, L., T. On the Lyapunov stability of stationary points around central body, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.29, n. 6, p.1376-1383, 2006.
- HAMILTON, W. R. On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics. **British association report**. 1835, p. 513–518.
- HAGIAHARA, V. **Stability in celestial mechanics**. Tokyo: Kasai Publications, 1957, p. 234.
- HAHN WOLFGRANG. **Stability of motion**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967, p. 446.
- HILL, G. **Collected mathematical works**. New York: Carnegies Inst. Washington, D.C., 1978, p.1905-1907.
- HORI, G. I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, **Astronomical Society of Japan**, v. 18, n. 4, p. 287, 1966.
- HORI, G. Theory of general perturbations for non-canonical system, **Astronomical Society of Japan**, v. 23, n. 4, p. 567-587, 1971.
- KOVALEV, A. M., SAVECHENKO, A.I. Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis, **PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 650-660, 1975.
- KOVALEV, A. M., SAVECHENKO, A.I. Stability of steady-state motions of Hamiltonian systems in the presence of fourth-order resonance, **Mechanics of a Rigid Body**, v.8, n. 9, 1975.
- KOVALEV, A. M., CHUDNENKO, A., N. On the stability of the equilibrium position of a two-dimensional Hamiltonian system in the case of equal frequencies. **Dokl. Akad. Nauk Ukr SSR**, v. 1, n.11, p. 136-148, 1977.



KOLMOGOROV, A. N., In: I International Congress. Mathematica., 1954, Amsterdam, North Holland Publ. Amsterdam, **Proceedings International Congress. Mathematica**, v. 1, 315, 1957, p.527, 1954.

KUMAR, V. CHOUDHRY, R., K. On the stability of the triangular libration points for the potogravitational circular restricted problem of three bodies when both of the attracting bodies are radiating as well, **Celestial Mechanics**, v. 40, 155-170, 1987.

LIAPUNOV, A., M. **General problem of stability of motion collected Works**, 2. ed. Moscow: Leinningrad. Izd. Akad. Nauk SSSR, 1956, p. 234.

LIAPUNOV, A., M. **Stability motion**, New York and Londres: Academic Press Inc., 1966, p. 203.

MACHUY, A. L. F. **Cálculo efetivo da forma normal parcial para o problema de Hill**. 2001. 71p. Dissertação de mestrado-instituto de matemática, UFRJ-Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.

MANSILLA, J. D. Stability of hamiltonian systems with three degree of freedom and the three body problem, **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 94, p.249–269, 2006.

MARKEEV, A. P. Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance. **PMM Journal**, v. 32, n.4, 1968.

MARKEEV, A. P. On the problem the of stability of equilibrium points of the Hamiltonian systems, **PMM Journal**, v. 34, n.6, 1970.

MACIEJEWSKI, A. J., KRZYSZTOF, G. Normalization algorithms of hamiltonian near an equilibrium point, **Astrophysics and Space Science**, v. 179, p. 1-11, 1991.

MEYER, K. R. Normal forms for hamiltonian systems, **Celestial Mechanics**, v. 9, 1974, p. 517-522.

MOSER, J. K. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. **Cammunications on pure and applied mathematics**. v. 9, p. 81-114, 1958.

MOSER, J. K. Lectures on hamiltonian systems. **American Mathematical Society Providence**, v. 9, 1968.

MURRAY, C. D., DERMONT, S. F. **Solar system dynamics**. U.S.A: Cambridge University Press, 1999, p. 592.

POINCARÉ, H. **Lês methodes nouvelles de la mecanique celeste**. Paris: 1. ed, Gauthier-Villars, 1892, p. 245.

POINCARÉ, H. **Sur un theorem de geometrie**. Palermo: Rend. Del Cir. Mat., v. 33, 1912, p. 375-407.

RAGOS, O., ZAGOURAS, C. Periodic solutions about the 'out of plane' equilibrium points in the photogravitational restricted three-body problem, **Celestial Mechanics**, v. 44, n.1-2, p.135-154, 1988.

RAGOS, O., ZAGOURAS, C. Periodic solutions around the collinear lagrangian points in the photogravitational restricted three-body problem - Sun-Jupiter case, **Celestial Mechanics**, v.50, n.4, p. 325-348, 1990.

SCHUERMAN, D. W. The restricted three-body problem including radiation pressure, **Astrophysics Journal**, v.238, n.1, p. 337-342, 1980.

SHARMA, R. K. The linear stability of libration points of the photogravitational restricted three-body problem when the smaller primary is an oblate spheroid , **Astrophysics and Space Sciens**. v.135, n.2, p. 271-281, 1987.

SIEGEL, C. L., MOSER, J. K. **Curso de mecânica celeste**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbekian,1971, p.18.

SIMMONS, J. F. L., MACDONALD, A. J. C., BROWN, J. C. The restricted 3-body problem with radiation pressure, **Celestial Mechanics**, v. 35, p.145-187, 1984.

SIMÓ, C. Estabilitat de sistemes hamiltonians, **Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona**, v. 48, n. 7, p.1-38, 1989.

SOKOL SKII, A. G. On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of equal frequencies. **PMM Journal**, v.38, n.5, p.791-799,1974.

SOKOL SKII, A. G. Proof of stability of the lagrangian solutions under a critical mass relation. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**. v. 4, n.3, p. 574-581, 1978.

STUCHI, T. J. KAM tori in the center manifold of the 3-D Hill problem. **Advances in Space Dynamics**, v.2, p. 112-127, 2002.

SZEBEHELY, V. **Theory of orbits**. New York: Academic Press, 1967, p. 59-61.

SZEBEHELY, V. Review of concepts of stability, **Celestial Mechanics**, v.34, p. 49-64, 1984.

VERHUST, F. Invariant manifolds and periodic solutions of three degree of freedom hamiltonian systems, **Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics: Lecture Notes in Physics**, v. 195, p.413-422, 1983.

VERHUST, F. **Nonlinear differential equations and dynamical systems.**  
Berlin: 2. ed, Spring-Verlag, 1996, p.308.

VIDAL, C. F. S., Stability of equilibrium positions of periodic hamiltonian systems under third and fourth order resonances, **Regular and Chaotic Dynamics**, v. 10, n .1, 2005.

VILHENA DE MORAES, R., CABETTE, R. E. S., ZANARDI, M. C., STUCHI, T. J., FORMIGA, J. K. S. Attitude stability of artificial satellites subject to gravity gradient torque, **Celestial Mechanics**, v. 104, p. 337-353, 2009.

## APÊNDICE A -RESULTADOS NUMÉRICOS DA ESTABILIDADE LINEAR E NÃO LINEAR DO PROBLEMA FOTOGRAVITACIONAL CIRCULAR RESTRITO DOS TRÊS CORPOS

As Figuras (A.1), (A.2), (A.3), (A.4), (A.5) e (A.6) complementam o estudo da estabilidade linear do ponto  $L_4$ , apresentado no capítulo 4, para diversos valores do fator de redução.

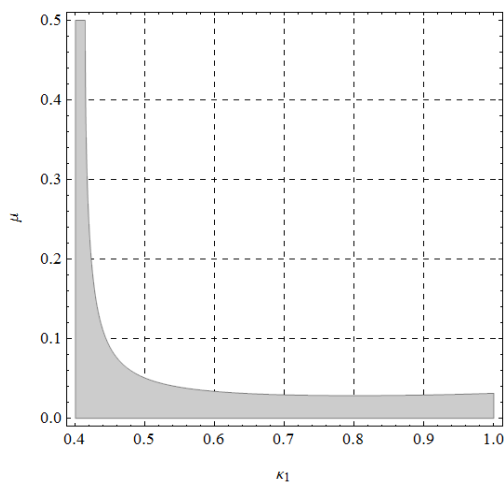


Figura A. 1- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,6$

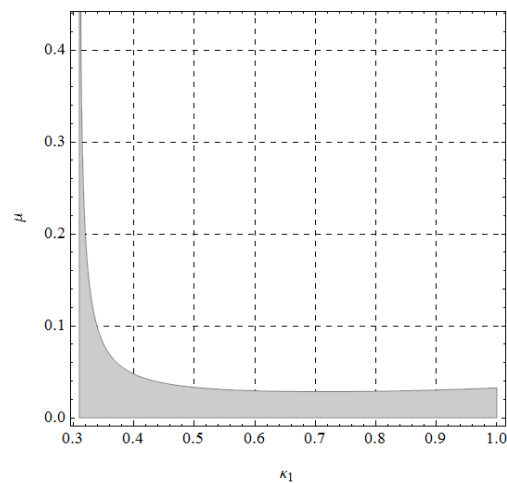


Figura A. 2-Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,7$

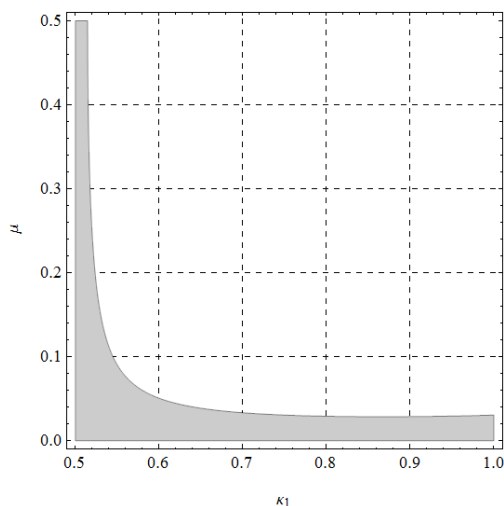


Figura A. 3- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,5$

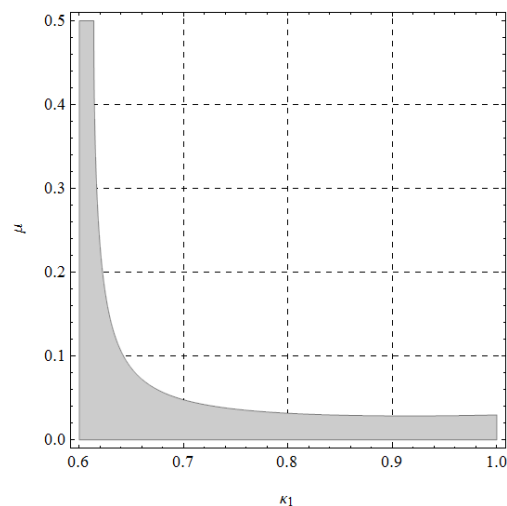


Figura A. 4- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,7$

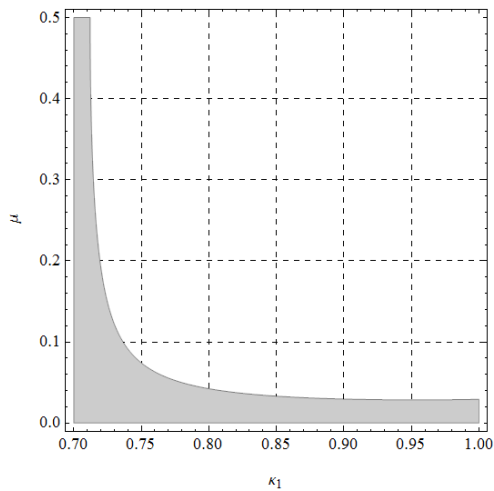


Figura A. 5- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,3$

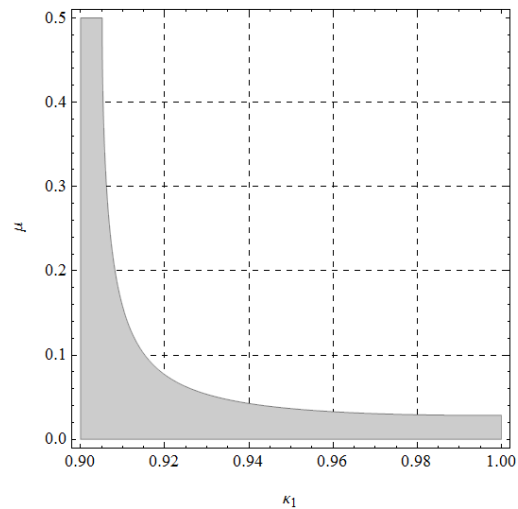


Figura A. 6- Região de estabilidade linear do ponto  $L_4$  para  $\kappa_2=0,1$

**A.2 REGIÃO DE ESTABILIDADE NÃO-LINEAR PARA DIVERSOS VALORES DO FATOR DE REDUÇÃO  $\kappa_1$  PARA  $\kappa_2 = 1$  (CORPO M1 EMITINDO RADIAÇÃO).**

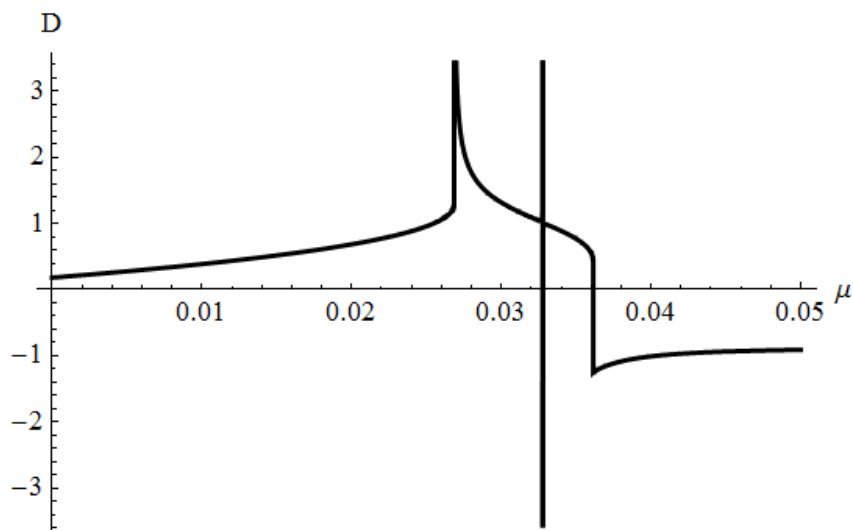


Figura A. 7- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,9$  e  $\kappa_2 = 1$ .

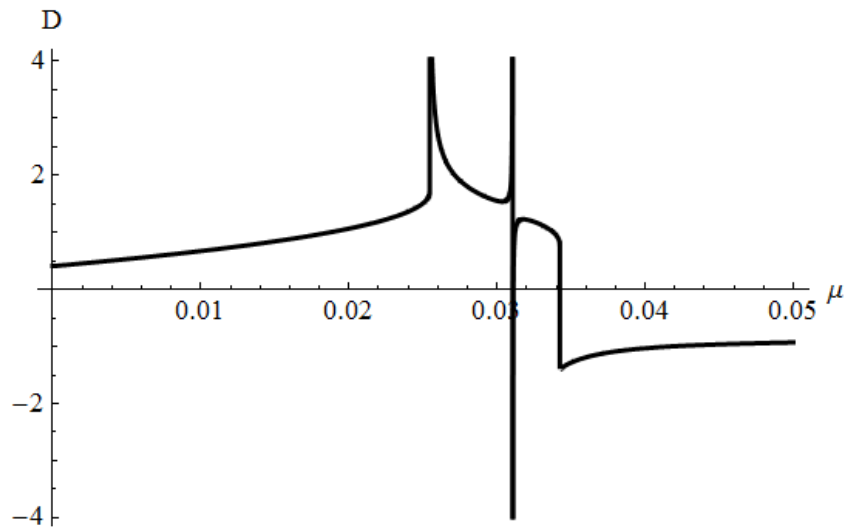


Figura A. 8- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,8$  e  $\kappa_2 = 1$ .

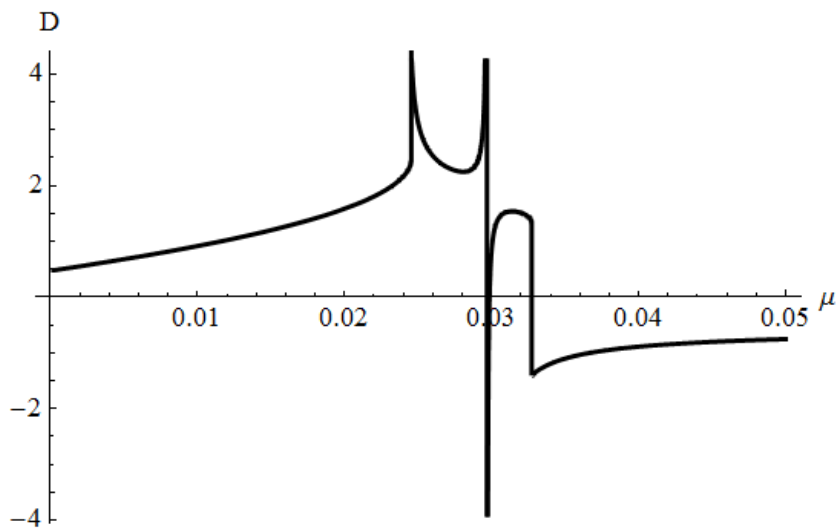


Figura A. 9- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,7$  e  $\kappa_2 = 1$ .

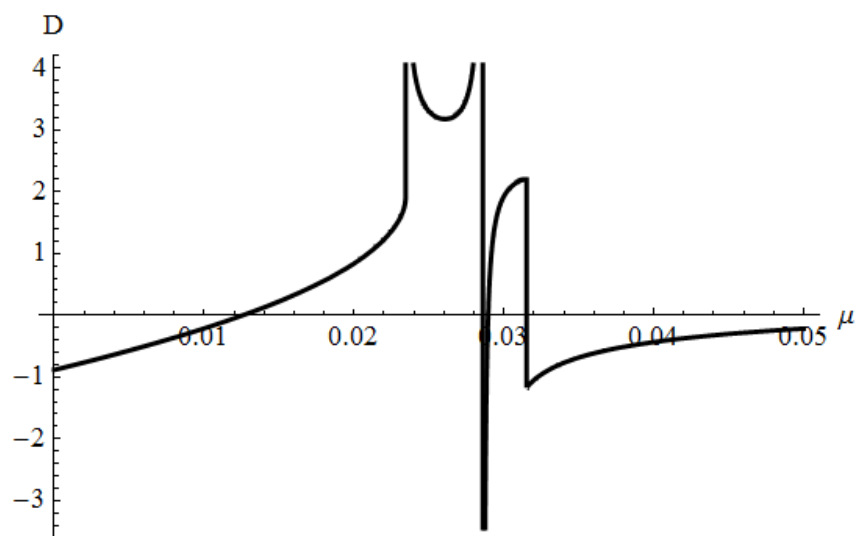


Figura A. 10- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,6$  e  $\kappa_2 = 1$ .

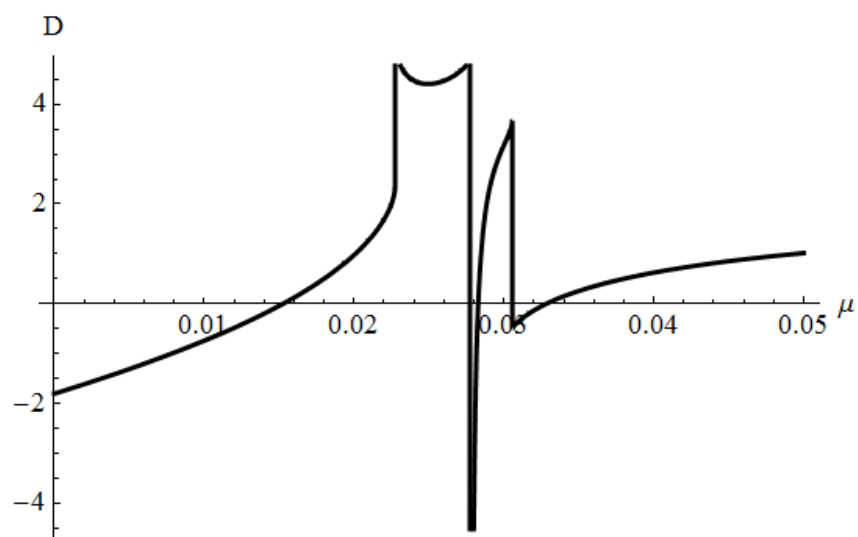


Figura A. 11- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 1$ .

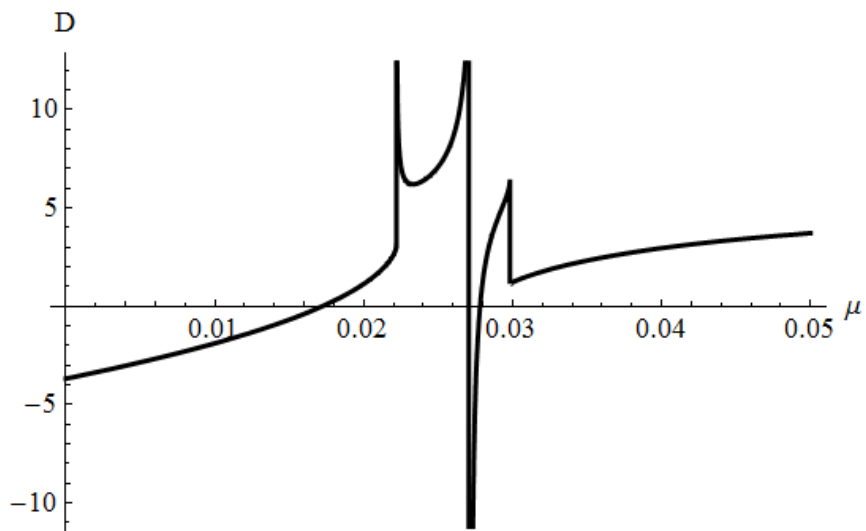


Figura A. 12- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,4$  e  $\kappa_2 = 1$ .

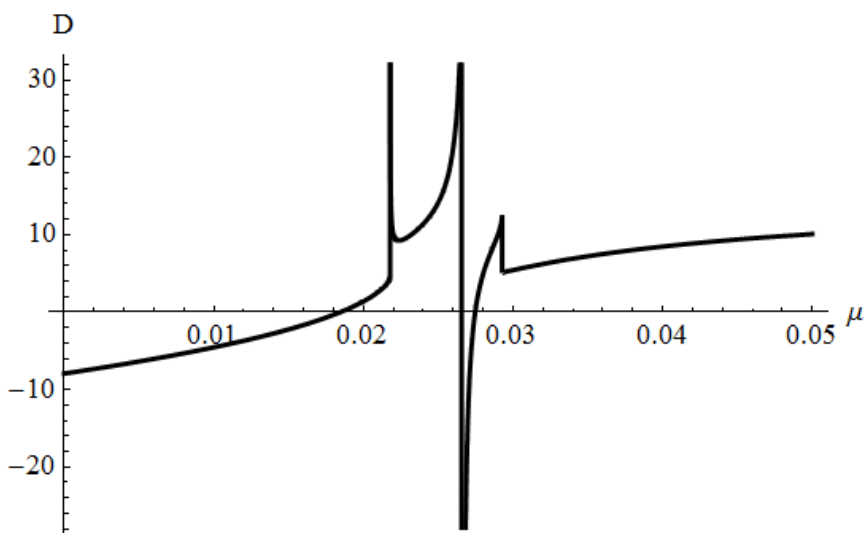


Figura A. 13- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,3$  e  $\kappa_2 = 1$ .



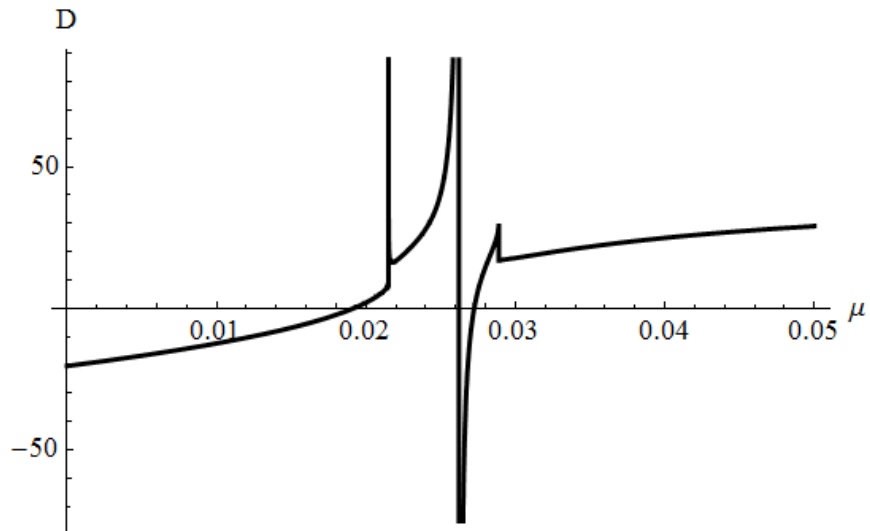


Figura A. 14- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,2$  e  $\kappa_2 = 1$ .

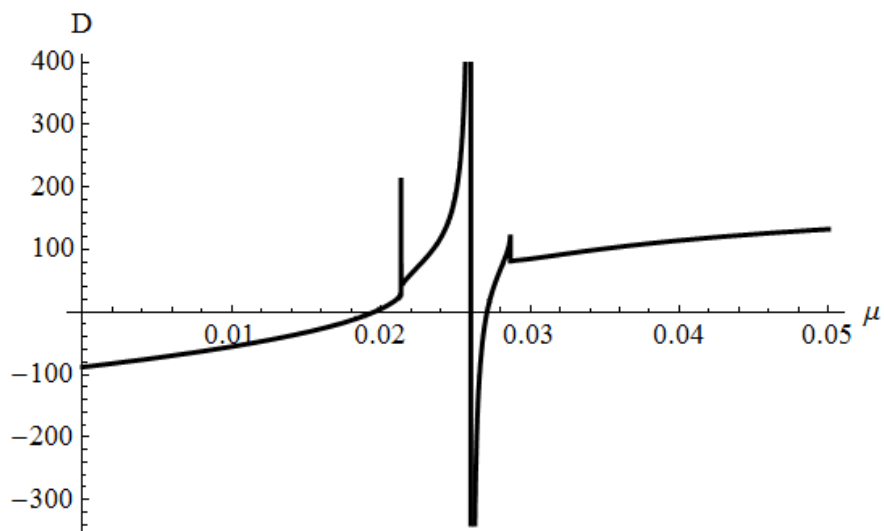


Figura A. 15- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,1$  e  $\kappa_2 = 1$ .

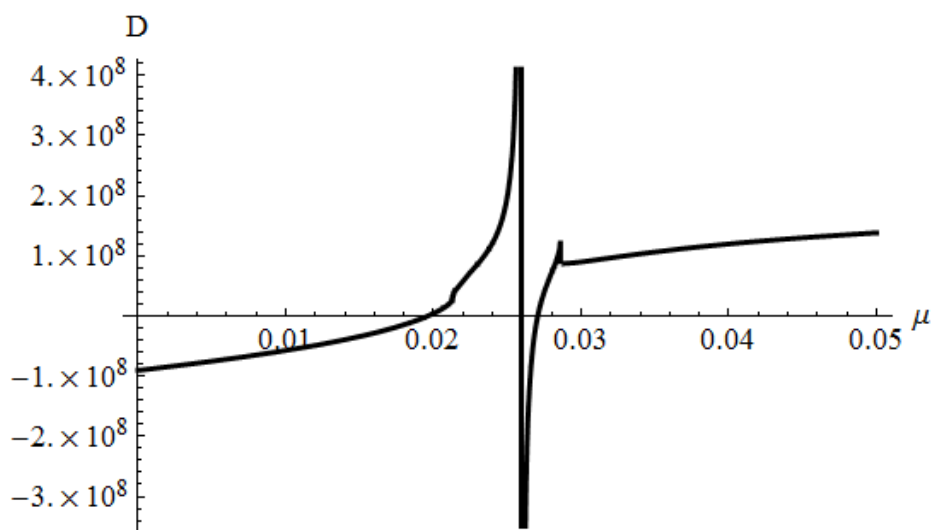


Figura A. 16- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,001$  e  $\kappa_2 = 1$ .

### A.3 REGIÃO DE ESTABILIDADE NÃO LINEAR PARA DIVERSOS VALORES DO FATOR DE REDUÇÃO $\kappa_2$ PARA $\kappa_1 = 1$ (CORPO M2 EMITINDO RADIAÇÃO)

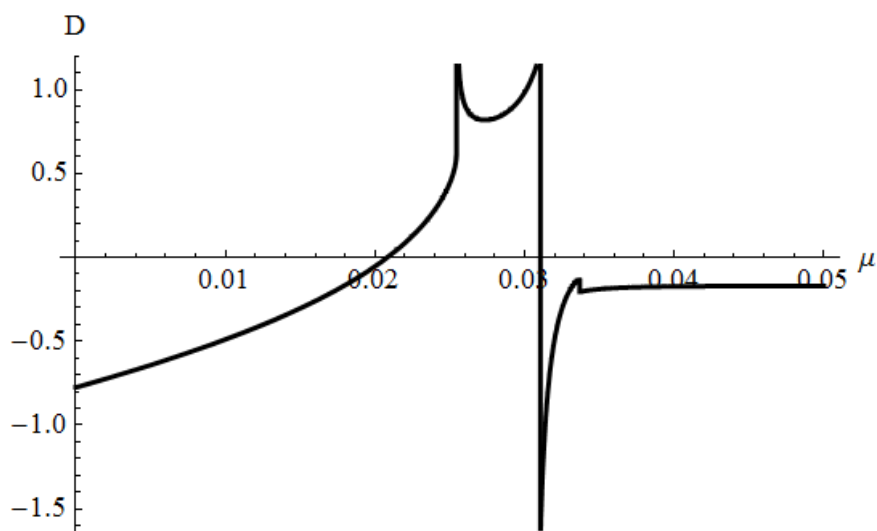


Figura A. 17- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,8$ .

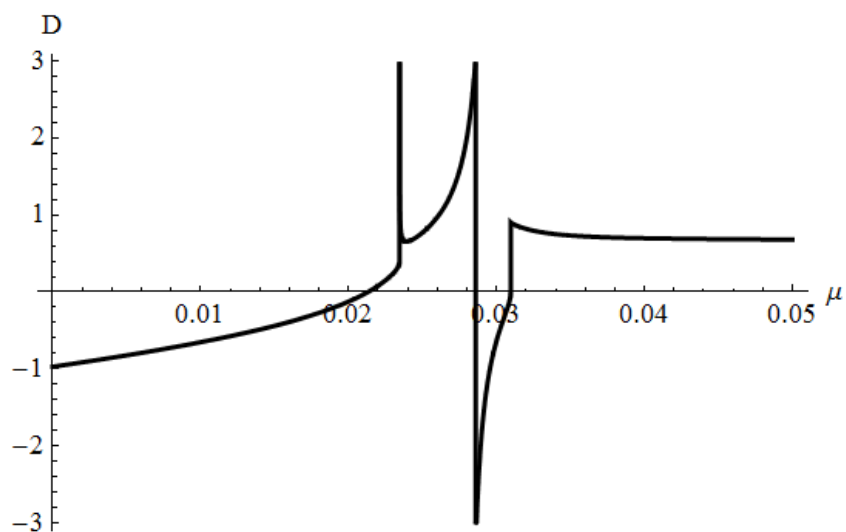


Figura A. 18- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,6$ .

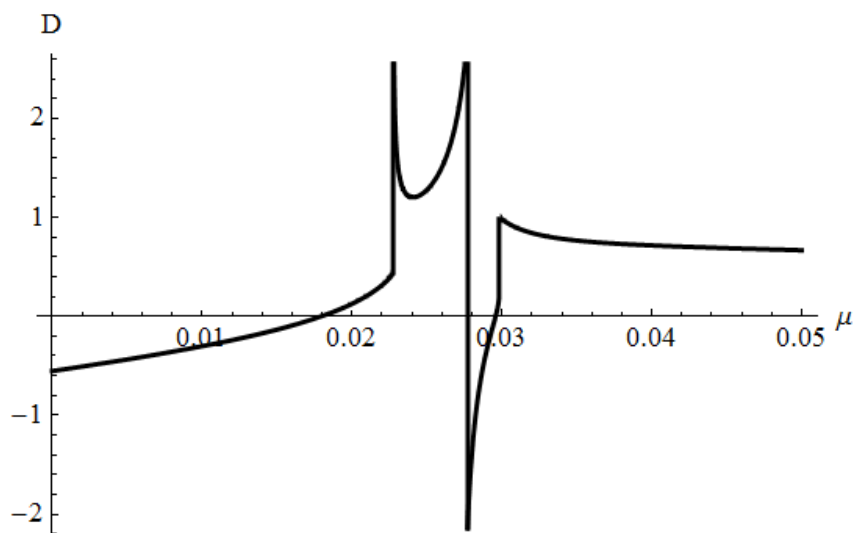


Figura A. 19- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,5$ .

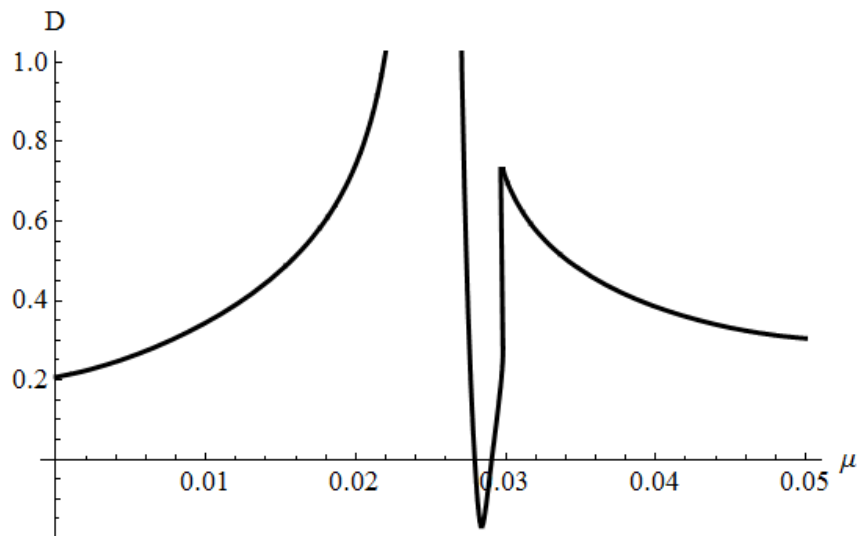


Figura A. 20- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,4$ .

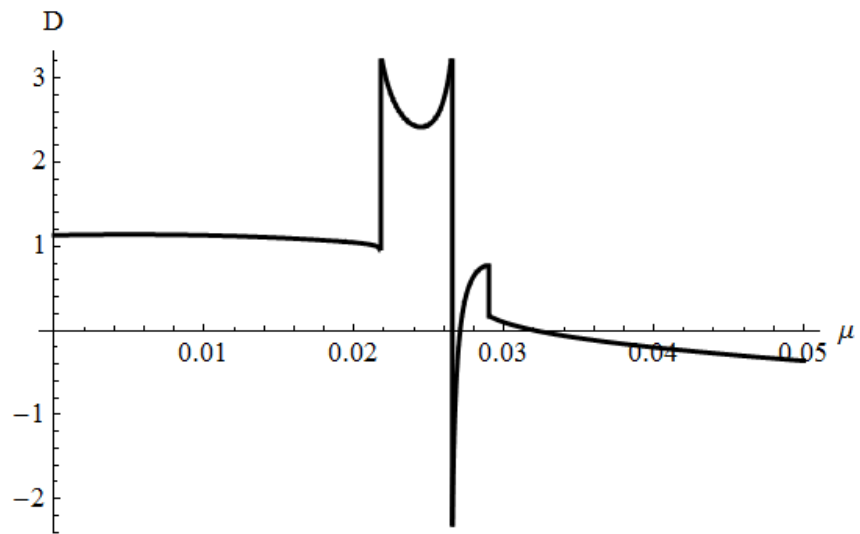


Figura A. 21- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,3$ .

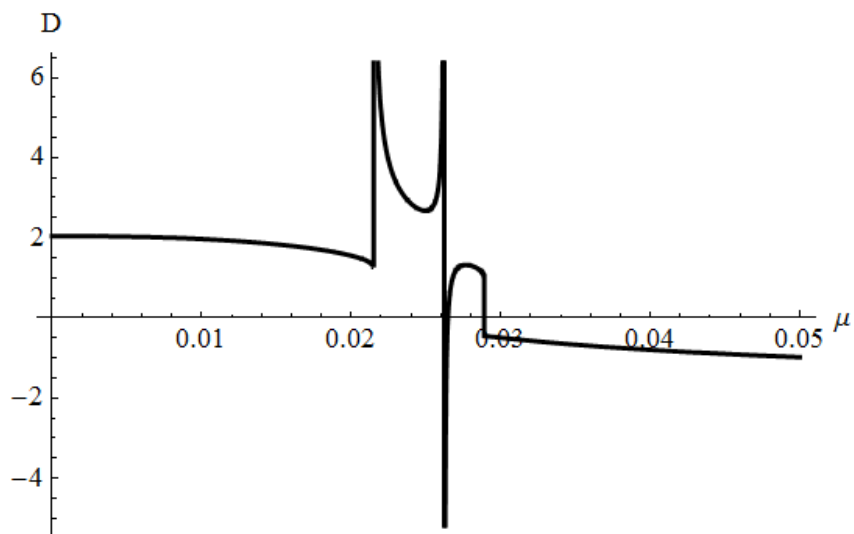


Figura A. 22- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0, 2$ .

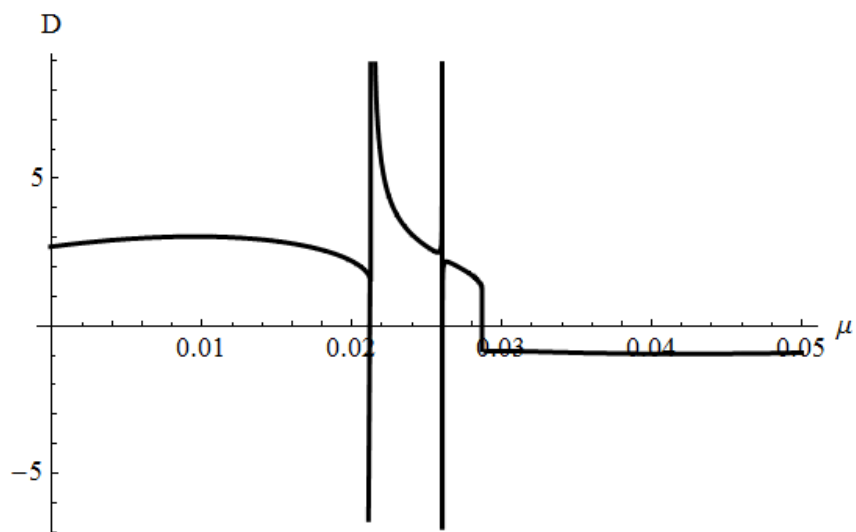


Figura A. 23- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0, 1$ .

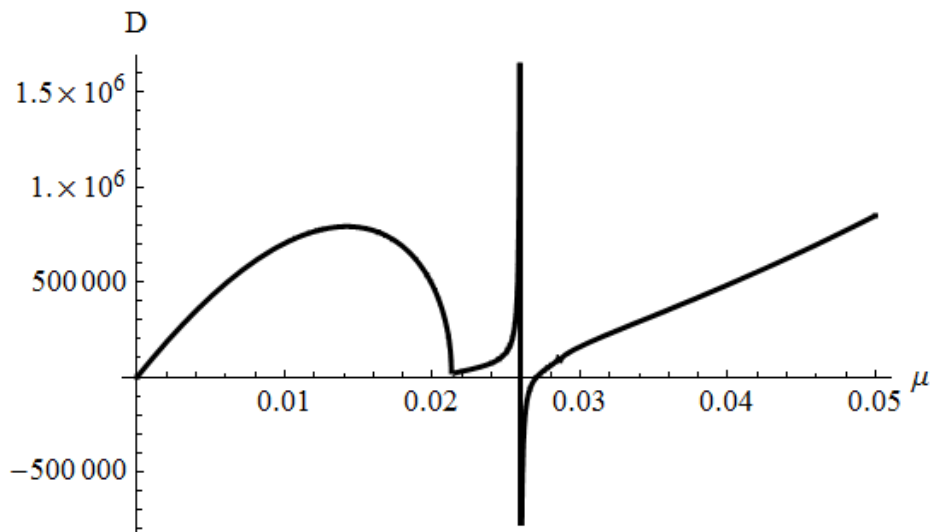


Figura A. 24- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 1$  e  $\kappa_2 = 0,001$ .

#### A.4 REGIÃO DE ESTABILIDADE NÃO LINEAR PARA DIVERSOS VALORES DO FATOR DE REDUÇÃO $\kappa_1$ e $\kappa_2$ (CORPO M1 E M2 EMITINDO RADIAÇÃO)

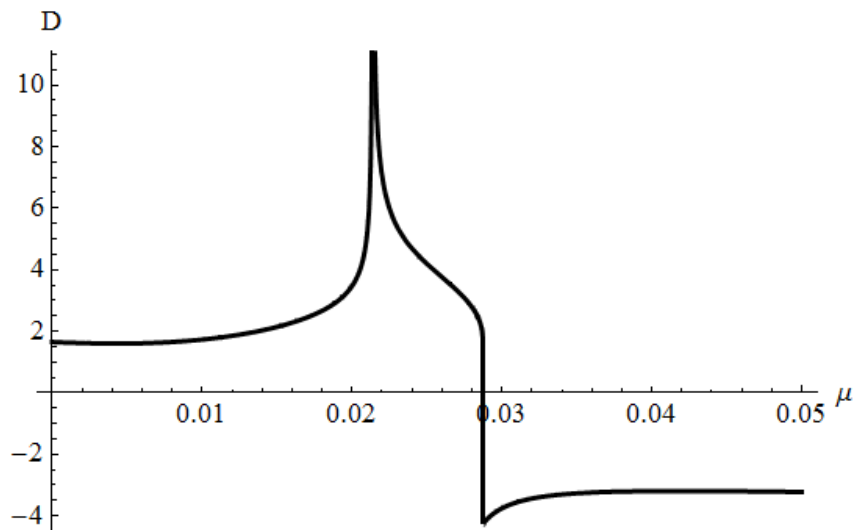


Figura A. 25- Dependência do determinante D vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,9$

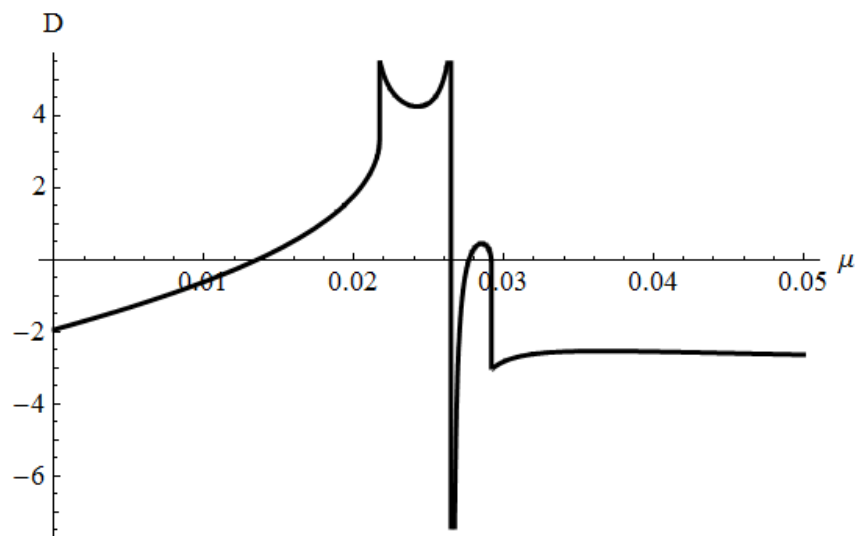


Figura A. 26- Dependência do determinante  $D$  vs  $\mu$ : análise de estabilidade não-linear para  $\kappa_1 = 0,5$  e  $\kappa_2 = 0,8$

## APÊNDICE B- RESULTADOS ANALÍTICOS

### B.1 Função geratriz para hamiltoniana com 3 graus de liberdade

$$\begin{aligned}
 G_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left( -\frac{x_1^3 h_{1,3,0,0,0,0,0}}{3\omega_1} + \frac{3i x_1^2 y_1 h_{1,3,0,0,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{3x_1 y_1^2 h_{1,3,0,0,0,0,0}}{\omega_1} + \frac{i y_1^3 h_{1,3,0,0,0,0,0}}{3\omega_1} \right. \\
 & - \frac{i x_1^3 h_{2,0,3,0,0,0,0}}{3\omega_1} + \frac{3x_1^2 y_1 h_{2,0,3,0,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{3i x_1 y_1^2 h_{2,0,3,0,0,0,0}}{\omega_1} + \frac{y_1^3 h_{2,0,3,0,0,0,0}}{3\omega_1} \\
 & - \frac{x_2^3 h_{3,0,0,3,0,0,0}}{3\omega_2} + \frac{3i x_2^2 y_2 h_{3,0,0,3,0,0,0}}{\omega_2} - \frac{3x_2 y_2^2 h_{3,0,0,3,0,0,0}}{\omega_2} + \frac{i y_2^3 h_{3,0,0,3,0,0,0}}{3\omega_2} \\
 & - \frac{i x_2^3 h_{4,0,0,0,3,0,0}}{3\omega_2} + \frac{3x_2^2 y_2 h_{4,0,0,0,3,0,0}}{\omega_2} - \frac{3i x_2 y_2^2 h_{4,0,0,0,3,0,0}}{\omega_2} + \frac{y_2^3 h_{4,0,0,0,3,0,0}}{3\omega_2} \\
 & - \frac{x_3^3 h_{5,0,0,0,0,3,0}}{3\omega_3} + \frac{3i x_3^2 y_3 h_{5,0,0,0,0,3,0}}{\omega_3} - \frac{3x_3 y_3^2 h_{5,0,0,0,0,3,0}}{\omega_3} + \frac{i y_3^3 h_{5,0,0,0,0,3,0}}{3\omega_3} \\
 & - \frac{i x_3^3 h_{6,0,0,0,0,0,3}}{3\omega_3} + \frac{3x_3^2 y_3 h_{6,0,0,0,0,0,3}}{\omega_3} - \frac{3i x_3 y_3^2 h_{6,0,0,0,0,0,3}}{\omega_3} + \frac{y_3^3 h_{6,0,0,0,0,0,3}}{3\omega_3} \\
 & + \frac{i x_1^3 h_{7,2,1,0,0,0,0}}{3\omega_1} + \frac{x_1^2 y_1 h_{7,2,1,0,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{i x_1 y_1^2 h_{7,2,1,0,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{y_1^3 h_{7,2,1,0,0,0,0}}{3\omega_1} \\
 & + \frac{x_1^2 x_2 h_{8,2,0,1,0,0,0}}{-2\omega_1 - \omega_2} + \frac{i x_1^2 y_2 h_{8,2,0,1,0,0,0}}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{2i x_1 x_2 y_1 h_{8,2,0,1,0,0,0}}{\omega_2} \\
 & - \frac{2x_1 y_1 y_2 h_{8,2,0,1,0,0,0}}{\omega_2} + \frac{x_2 y_1^2 h_{8,2,0,1,0,0,0}}{-2\omega_1 + \omega_2} + \frac{i y_1^2 y_2 h_{8,2,0,1,0,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} \\
 & + \frac{y_1^2 y_2 h_{9,2,0,0,1,0,0}}{-2\omega_1 - \omega_2} + \frac{i x_2 y_1^2 h_{9,2,0,0,1,0,0}}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{2x_1 x_2 y_1 h_{9,2,0,0,1,0,0}}{\omega_2} \\
 & - \frac{2i x_1 y_1 y_2 h_{9,2,0,0,1,0,0}}{\omega_2} + \frac{x_1^2 y_2 h_{9,2,0,0,1,0,0}}{-2\omega_1 + \omega_2} + \frac{i x_1^2 x_2 h_{9,2,0,0,1,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} \\
 & + \frac{x_1^2 x_3 h_{10,2,0,0,0,1,0}}{-2\omega_1 - \omega_3} + \frac{i x_1^2 y_3 h_{10,2,0,0,0,1,0}}{2\omega_1 - \omega_3} + \frac{2i x_1 x_3 y_1 h_{10,2,0,0,0,1,0}}{\omega_3} \\
 & - \frac{2x_1 y_1 y_3 h_{10,2,0,0,0,1,0}}{\omega_3} + \frac{x_3 y_1^2 h_{10,2,0,0,0,1,0}}{-2\omega_1 + \omega_3} + \frac{i y_1^2 y_3 h_{10,2,0,0,0,1,0}}{2\omega_1 + \omega_3} \\
 & + \frac{y_1^2 y_3 h_{11,2,0,0,0,0,1}}{-2\omega_1 - \omega_3} + \frac{i x_3 y_1^2 h_{11,2,0,0,0,0,1}}{2\omega_1 - \omega_3} + \frac{2x_1 x_3 y_1 h_{11,2,0,0,0,0,1}}{\omega_3} \\
 & - \frac{2i x_1 y_1 y_3 h_{11,2,0,0,0,0,1}}{\omega_3} + \frac{x_1^2 y_3 h_{11,2,0,0,0,0,1}}{-2\omega_1 + \omega_3} + \frac{i x_1^2 x_3 h_{11,2,0,0,0,0,1}}{2\omega_1 + \omega_3} \\
 & + \frac{i y_1^2 y_2 h_{12,0,2,1,0,0,0}}{-2\omega_1 - \omega_2} +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{x_2 y_1^2 h_{12,0,2,1,0,0,0}}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{2i x_1 x_2 y_1 h_{12,0,2,1,0,0,0}}{\omega_2} - \frac{2x_1 y_1 y_2 h_{12,0,2,1,0,0,0}}{\omega_2} + \frac{i x_1^2 y_2 h_{12,0,2,1,0,0,0}}{-2\omega_1 + \omega_2} \\
& + \frac{x_1^2 x_2 h_{12,0,2,1,0,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{i x_1^2 x_2 h_{13,0,2,0,1,0,0}}{-2\omega_1 - \omega_2} + \frac{x_1^2 y_2 h_{13,0,2,0,1,0,0}}{2\omega_1 - \omega_2} \\
& + \frac{2x_1 x_2 y_1 h_{13,0,2,0,1,0,0}}{\omega_2} - \frac{2i x_1 y_1 y_2 h_{13,0,2,0,1,0,0}}{\omega_2} + \frac{i x_2 y_1^2 h_{13,0,2,0,1,0,0}}{-2\omega_1 + \omega_2} \\
& + \frac{y_1^2 y_2 h_{13,0,2,0,1,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{x_3 y_1^2 h_{14,0,2,0,0,1,0}}{2\omega_1 - \omega_3} + \frac{2i x_1 x_3 y_1 h_{14,0,2,0,0,1,0}}{\omega_3} \\
& - \frac{2x_1 y_1 y_3 h_{14,0,2,0,0,1,0}}{\omega_3} + \frac{i x_1^2 y_3 h_{14,0,2,0,0,1,0}}{-2\omega_1 + \omega_3} + \frac{x_1^2 x_3 h_{14,0,2,0,0,1,0}}{2\omega_1 + \omega_3} \\
& - \frac{i y_1^2 y_3 h_{14,0,2,0,0,1,0}}{2\omega_1 + \omega_3} + \frac{i x_1^2 x_3 h_{15,0,2,0,0,0,1}}{-2\omega_1 - \omega_3} + \frac{x_1^2 y_3 h_{15,0,2,0,0,0,1}}{2\omega_1 - \omega_3} \\
& + \frac{2x_1 x_3 y_1 h_{15,0,2,0,0,0,1}}{\omega_3} - \frac{2i x_1 y_1 y_3 h_{15,0,2,0,0,0,1}}{\omega_3} + \frac{i x_3 y_1^2 h_{15,0,2,0,0,0,1}}{-2\omega_1 + \omega_3} \\
& + \frac{y_1^2 y_3 h_{15,0,2,0,0,0,1}}{2\omega_1 + \omega_3} + \frac{i x_2^3 h_{16,0,0,2,1,0,0}}{3\omega_2} + \frac{x_2^2 y_2 h_{16,0,0,2,1,0,0}}{\omega_2} - \frac{i x_2 y_2^2 h_{16,0,0,2,1,0,0}}{\omega_2} \\
& - \frac{y_2^3 h_{16,0,0,2,1,0,0}}{3\omega_2} + \frac{x_2^2 x_3 h_{17,0,0,2,0,1,0}}{-2\omega_2 - \omega_3} + \frac{i x_2^2 y_3 h_{17,0,0,2,0,1,0}}{2\omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{2i x_2 x_3 y_2 h_{17,0,0,2,0,1,0}}{\omega_3} - \frac{2x_2 y_2 y_3 h_{17,0,0,2,0,1,0}}{\omega_3} + \frac{x_3 y_2^2 h_{17,0,0,2,0,1,0}}{-2\omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{i y_2^2 y_3 h_{17,0,0,2,0,1,0}}{2\omega_2 + \omega_3} + \frac{y_2^2 y_3 h_{18,0,0,2,0,0,1}}{-2\omega_2 - \omega_3} + \frac{i x_3 y_2^2 h_{18,0,0,2,0,0,1}}{2\omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{2x_2 x_3 y_2 h_{18,0,0,2,0,0,1}}{\omega_3} - \frac{2i x_2 y_2 y_3 h_{18,0,0,2,0,0,1}}{\omega_3} + \frac{x_2^2 y_3 h_{18,0,0,2,0,0,1}}{-2\omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{i x_2^2 x_3 h_{18,0,0,2,0,0,1}}{2\omega_2 + \omega_3} + \frac{x_3 y_2^2 h_{19,0,0,0,2,1,0}}{2\omega_2 - \omega_3} + \frac{2i x_2 x_3 y_2 h_{19,0,0,0,2,1,0}}{\omega_3} \\
& - \frac{2x_2 y_2 y_3 h_{19,0,0,0,2,1,0}}{\omega_3} + \frac{i x_2^2 y_3 h_{19,0,0,0,2,1,0}}{-2\omega_2 + \omega_3} + \frac{x_2^2 x_3 h_{19,0,0,0,2,1,0}}{2\omega_2 + \omega_3} \\
& - \frac{i y_2^2 y_3 h_{19,0,0,0,2,1,0}}{2\omega_2 + \omega_3} + \frac{i x_2^2 x_3 h_{20,0,0,0,2,0,1}}{-2\omega_2 - \omega_3} + \frac{x_2^2 y_3 h_{20,0,0,0,2,0,1}}{2\omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{2x_2 x_3 y_2 h_{20,0,0,0,2,0,1}}{\omega_3} - \frac{2i x_2 y_2 y_3 h_{20,0,0,0,2,0,1}}{\omega_3} + \frac{i x_3 y_2^2 h_{20,0,0,0,2,0,1}}{-2\omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{y_2^2 y_3 h_{20,0,0,0,2,0,1}}{2\omega_2 + \omega_3} + \frac{i x_3^3 h_{21,0,0,0,0,2,1}}{3\omega_3} + \frac{x_3^2 y_3 h_{21,0,0,0,0,2,1}}{\omega_3} - \frac{i x_3 y_3^2 h_{21,0,0,0,0,2,1}}{\omega_3} \\
& - \frac{y_3^3 h_{21,0,0,0,0,2,1}}{3\omega_3} + \frac{x_1^3 h_{22,1,2,0,0,0,0}}{3\omega_1} + \frac{i x_1^2 y_1 h_{22,1,2,0,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{x_1 y_1^2 h_{22,1,2,0,0,0,0}}{\omega_1} \\
& - \frac{i y_1^3 h_{22,1,2,0,0,0,0}}{3\omega_1} + \frac{2i x_1 x_2 y_2 h_{23,1,0,2,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{2x_2 y_1 y_2 h_{23,1,0,2,0,0,0}}{\omega_1} \\
& + \frac{x_1 x_2^2 h_{23,1,0,2,0,0,0}}{-\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{x_1 y_2^2 h_{23,1,0,2,0,0,0}}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{i x_2^2 y_1 h_{23,1,0,2,0,0,0}}{-\omega_1 + 2\omega_2} \\
& + \frac{i y_1 y_2^2 h_{23,1,0,2,0,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{2i x_1 x_2 y_2 h_{24,1,0,0,2,0,0}}{\omega_1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2x_2y_1y_2h_{24,1,0,0,2,0,0}}{\omega_1} + \frac{iix_2^2y_1h_{24,1,0,0,2,0,0}}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{x_1y_2^2h_{24,1,0,0,2,0,0}}{-\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{x_1x_2^2h_{24,1,0,0,2,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} \\
& - \frac{iix_1y_1y_2^2h_{24,1,0,0,2,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{2iix_1x_3y_3h_{25,1,0,0,0,2,0}}{\omega_1} - \frac{2x_3y_1y_3h_{25,1,0,0,0,2,0}}{\omega_1} \\
& + \frac{x_1x_3^2h_{25,1,0,0,0,2,0}}{-\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{iix_3^2y_1h_{25,1,0,0,0,2,0}}{-\omega_1 + 2\omega_3} - \frac{x_1y_3^2h_{25,1,0,0,0,2,0}}{-\omega_1 + 2\omega_3} \\
& + \frac{iix_1y_3^2h_{25,1,0,0,0,2,0}}{\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{2iix_1x_3y_3h_{26,1,0,0,0,0,2}}{\omega_1} - \frac{2x_3y_1y_3h_{26,1,0,0,0,0,2}}{\omega_1} \\
& + \frac{iix_1y_3^2h_{26,1,0,0,0,0,2}}{-\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{iix_3^2y_1h_{26,1,0,0,0,0,2}}{\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{x_1y_3^2h_{26,1,0,0,0,0,2}}{-\omega_1 + 2\omega_3} \\
& + \frac{x_1x_3^2h_{26,1,0,0,0,0,2}}{\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{2x_1x_2y_2h_{27,0,1,2,0,0,0}}{\omega_1} - \frac{2iix_2y_1y_2h_{27,0,1,2,0,0,0}}{\omega_1} \\
& + \frac{y_1y_2^2h_{27,0,1,2,0,0,0}}{-\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{x_2^2y_1h_{27,0,1,2,0,0,0}}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{iix_1y_2^2h_{27,0,1,2,0,0,0}}{-\omega_1 + 2\omega_2} \\
& + \frac{iix_1x_2^2h_{27,0,1,2,0,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{2x_1x_2y_2h_{28,0,1,0,2,0,0}}{\omega_1} - \frac{2iix_2y_1y_2h_{28,0,1,0,2,0,0}}{\omega_1} \\
& + \frac{iix_1x_2^2h_{28,0,1,0,2,0,0}}{-\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{iix_1y_2^2h_{28,0,1,0,2,0,0}}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{x_2^2y_1h_{28,0,1,0,2,0,0}}{-\omega_1 + 2\omega_2} \\
& + \frac{y_1y_2^2h_{28,0,1,0,2,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{2x_1x_3y_3h_{29,0,1,0,0,2,0}}{\omega_1} - \frac{2iix_3y_1y_3h_{29,0,1,0,0,2,0}}{\omega_1} \\
& + \frac{y_1y_3^2h_{29,0,1,0,0,2,0}}{-\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{x_3^2y_1h_{29,0,1,0,0,2,0}}{\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{iix_1y_3^2h_{29,0,1,0,0,2,0}}{-\omega_1 + 2\omega_3} \\
& + \frac{iix_1x_3^2h_{29,0,1,0,0,2,0}}{\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{2x_1x_3y_3h_{30,0,1,0,0,0,2}}{\omega_1} - \frac{2iix_3y_1y_3h_{30,0,1,0,0,0,2}}{\omega_1} \\
& + \frac{iix_1y_3^2h_{30,0,1,0,0,0,2}}{\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{x_3^2y_1h_{30,0,1,0,0,0,2}}{-\omega_1 + 2\omega_3} - \frac{iix_1x_3^2h_{30,0,1,0,0,0,2}}{\omega_1 + 2\omega_3} \\
& + \frac{y_1y_3^2h_{30,0,1,0,0,0,2}}{\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{x_2^2h_{31,0,0,1,2,0,0}}{3\omega_2} + \frac{iix_2^2y_2h_{31,0,0,1,2,0,0}}{\omega_2} - \frac{x_2y_2^2h_{31,0,0,1,2,0,0}}{\omega_2} \\
& - \frac{iix_2^3h_{31,0,0,1,2,0,0}}{3\omega_2} + \frac{2iix_2x_3y_3h_{32,0,0,1,0,2,0}}{\omega_2} - \frac{2x_3y_2y_3h_{32,0,0,1,0,2,0}}{\omega_2} \\
& + \frac{x_2x_3^2h_{32,0,0,1,0,2,0}}{-\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{x_2y_3^2h_{32,0,0,1,0,2,0}}{\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{iix_3^2y_2h_{32,0,0,1,0,2,0}}{-\omega_2 + 2\omega_3} \\
& + \frac{iix_2y_3^2h_{32,0,0,1,0,2,0}}{\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{2iix_2x_3y_3h_{33,0,0,1,0,0,2}}{\omega_2} - \frac{2x_3y_2y_3h_{33,0,0,1,0,0,2}}{\omega_2} \\
& + \frac{iix_2y_3^2h_{33,0,0,1,0,0,2}}{-\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{iix_3^2y_2h_{33,0,0,1,0,0,2}}{\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{x_2y_3^2h_{33,0,0,1,0,0,2}}{-\omega_2 + 2\omega_3} \\
& + \frac{x_2x_3^2h_{33,0,0,1,0,0,2}}{\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{2x_2x_3y_3h_{34,0,0,0,1,2,0}}{\omega_2} - \frac{2iix_3y_2y_3h_{34,0,0,0,1,2,0}}{\omega_2} \\
& + \frac{y_2y_3^2h_{34,0,0,0,1,2,0}}{-\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{x_3^2y_2h_{34,0,0,0,1,2,0}}{\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{iix_2y_3^2h_{34,0,0,0,1,2,0}}{-\omega_2 + 2\omega_3} \\
& + \frac{iix_2x_3^2h_{34,0,0,0,1,2,0}}{\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{2x_2x_3y_3h_{35,0,0,0,1,0,2}}{\omega_2} - \frac{2iix_3y_2y_3h_{35,0,0,0,1,0,2}}{\omega_2} \\
& + \frac{iix_2x_3^2h_{35,0,0,0,1,0,2}}{-\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{iix_2y_3^2h_{35,0,0,0,1,0,2}}{\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{x_3^2y_2h_{35,0,0,0,1,0,2}}{-\omega_2 + 2\omega_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y_2 y_3^2 h_{35,0,0,0,1,0,2}}{\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{x_3^3 h_{36,0,0,0,0,1,2}}{3\omega_3} + \frac{i x_3^2 y_3 h_{36,0,0,0,0,1,2}}{\omega_3} - \frac{x_3 y_3^2 h_{36,0,0,0,0,1,2}}{\omega_3} \\
& - \frac{i y_3^3 h_{36,0,0,0,0,1,2}}{3\omega_3} + \frac{y_1^2 y_2 h_{37,1,1,1,0,0,0}}{-2\omega_1 - \omega_2} + \frac{x_1^2 y_2 h_{37,1,1,1,0,0,0}}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{i x_2 y_1^2 h_{37,1,1,1,0,0,0}}{-2\omega_1 + \omega_2} \\
& + \frac{i x_1^2 x_2 h_{37,1,1,1,0,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{y_1 y_2^2 h_{38,1,0,1,1,0,0}}{-\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{i x_1 y_2^2 h_{38,1,0,1,1,0,0}}{\omega_1 - 2\omega_2} \\
& + \frac{x_2^2 y_1 h_{38,1,0,1,1,0,0}}{-\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{i x_1 x_2^2 h_{38,1,0,1,1,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{y_1 y_2 y_3 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{i x_1 y_2 y_3 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_1 x_3 y_2 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_1 x_2 y_3 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{i x_3 y_1 y_2 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{i x_2 y_1 y_3 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_2 x_3 y_1 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{i x_1 x_2 x_3 h_{39,1,0,0,1,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{y_1 y_3^2 h_{40,1,0,0,0,1,1}}{-\omega_1 - 2\omega_3} + \frac{i x_1 y_3^2 h_{40,1,0,0,0,1,1}}{\omega_1 - 2\omega_3} \\
& + \frac{x_3^2 y_1 h_{40,1,0,0,0,1,1}}{-\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{i x_1 x_3^2 h_{40,1,0,0,0,1,1}}{\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{i y_1 y_2^2 h_{41,0,1,1,1,0,0}}{-\omega_1 - 2\omega_2} \\
& + \frac{x_1 y_2^2 h_{41,0,1,1,1,0,0}}{\omega_1 - 2\omega_2} + \frac{i x_2^2 y_1 h_{41,0,1,1,1,0,0}}{-\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{x_1 x_2^2 h_{41,0,1,1,1,0,0}}{\omega_1 + 2\omega_2} \\
& + \frac{i y_1 y_2 y_3 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_1 y_2 y_3 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_2 y_1 y_3 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{x_3 y_1 y_2 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{i x_1 x_2 y_3 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{i x_1 x_3 y_2 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{i x_2 x_3 y_1 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1 x_2 x_3 h_{42,0,1,0,1,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1 y_3^2 h_{43,0,1,0,0,1,1}}{\omega_1 - 2\omega_3} \\
& + \frac{i x_3^2 y_1 h_{43,0,1,0,0,1,1}}{-\omega_1 + 2\omega_3} + \frac{x_1 x_3^2 h_{43,0,1,0,0,1,1}}{\omega_1 + 2\omega_3} - \frac{i y_1 y_3^2 h_{43,0,1,0,0,1,1}}{\omega_1 + 2\omega_3} \\
& + \frac{y_2^2 y_3 h_{44,0,0,1,1,1,0}}{-2\omega_2 - \omega_3} + \frac{x_2^2 y_3 h_{44,0,0,1,1,1,0}}{2\omega_2 - \omega_3} + \frac{i x_3 y_2^2 h_{44,0,0,1,1,1,0}}{-2\omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{i x_2^2 x_3 h_{44,0,0,1,1,1,0}}{2\omega_2 + \omega_3} + \frac{y_2 y_3^2 h_{45,0,0,1,0,1,1}}{-\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{i x_2 y_3^2 h_{45,0,0,1,0,1,1}}{\omega_2 - 2\omega_3} \\
& + \frac{x_3^2 y_2 h_{45,0,0,1,0,1,1}}{-\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{i x_2 x_3^2 h_{45,0,0,1,0,1,1}}{\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{i y_2 y_3^2 h_{46,0,0,0,1,1,1}}{-\omega_2 - 2\omega_3} \\
& + \frac{x_2 y_3^2 h_{46,0,0,0,1,1,1}}{\omega_2 - 2\omega_3} + \frac{i x_3^2 y_2 h_{46,0,0,0,1,1,1}}{-\omega_2 + 2\omega_3} + \frac{x_2 x_3^2 h_{46,0,0,0,1,1,1}}{\omega_2 + 2\omega_3} \\
& + \frac{i x_1^2 y_2 h_{47,1,1,0,1,0,0}}{2\omega_1 - \omega_2} + \frac{x_2 y_1^2 h_{47,1,1,0,1,0,0}}{-2\omega_1 + \omega_2} + \frac{x_1^2 x_2 h_{47,1,1,0,1,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} \\
& - \frac{i y_1^2 y_2 h_{47,1,1,0,1,0,0}}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{y_1^2 y_3 h_{48,1,1,0,0,1,0}}{-2\omega_1 - \omega_3} + \frac{x_1^2 y_3 h_{48,1,1,0,0,1,0}}{2\omega_1 - \omega_3} \\
& + \frac{i x_3 y_1^2 h_{48,1,1,0,0,1,0}}{-2\omega_1 + \omega_3} + \frac{i x_1^2 x_3 h_{48,1,1,0,0,1,0}}{2\omega_1 + \omega_3} + \frac{i x_1^2 y_3 h_{49,1,1,0,0,0,1}}{2\omega_1 - \omega_3} \\
& + \frac{x_3 y_1^2 h_{49,1,1,0,0,0,1}}{-2\omega_1 + \omega_3} + \frac{x_1^2 x_3 h_{49,1,1,0,0,0,1}}{2\omega_1 + \omega_3} - \frac{i y_1^2 y_3 h_{49,1,1,0,0,0,1}}{2\omega_1 + \omega_3} \\
& + \frac{y_1 y_2 y_3 h_{50,0,1,1,0,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_2 x_3 y_2 h_{50,0,1,1,0,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{i x_2 y_1 y_3 h_{50,0,1,1,0,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{x_1 x_2 y_3 h_{50,0,1,1,0,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{i x_3 y_1 y_2 h_{50,0,1,1,0,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1 x_3 y_2 h_{50,0,1,1,0,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{I}x_1y_2y_3h_{50,0,1,1,0,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1x_2x_3h_{50,0,1,1,0,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1y_2y_3h_{51,0,1,1,0,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1x_3y_2h_{51,0,1,1,0,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_1x_2y_3h_{51,0,1,1,0,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_3y_1y_2h_{51,0,1,1,0,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_2y_1y_3h_{51,0,1,1,0,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_2x_3y_1h_{51,0,1,1,0,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1x_2x_3h_{51,0,1,1,0,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} - \frac{\mathbb{I}y_1y_2y_3h_{51,0,1,1,0,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}y_2^2y_3h_{52,0,0,1,1,0,1}}{-2\omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_2^2y_3h_{52,0,0,1,1,0,1}}{2\omega_2 - \omega_3} + \frac{x_3y_2^2h_{52,0,0,1,1,0,1}}{-2\omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{x_2^2x_3h_{52,0,0,1,1,0,1}}{2\omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1x_2x_3h_{53,1,0,1,0,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_1y_2y_3h_{53,1,0,1,0,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{x_2y_1y_3h_{53,1,0,1,0,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1x_2y_3h_{53,1,0,1,0,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_3y_1y_2h_{53,1,0,1,0,1,0}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_1x_3y_2h_{53,1,0,1,0,1,0}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_2x_3y_1h_{53,1,0,1,0,1,0}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{\mathbb{I}y_1y_2y_3h_{53,1,0,1,0,1,0}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}y_1y_2y_3h_{54,1,0,0,1,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_2x_3y_1h_{54,1,0,0,1,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_2y_1y_3h_{54,1,0,0,1,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_1x_2y_3h_{54,1,0,0,1,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_3y_1y_2h_{54,1,0,0,1,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1x_3y_2h_{54,1,0,0,1,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{x_1y_2y_3h_{54,1,0,0,1,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1x_2x_3h_{54,1,0,0,1,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1x_2x_3h_{55,0,1,0,1,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_1y_2y_3h_{55,0,1,0,1,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_2y_1y_3h_{55,0,1,0,1,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_1x_2y_3h_{55,0,1,0,1,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_3y_1y_2h_{55,0,1,0,1,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_1x_3y_2h_{55,0,1,0,1,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_2x_3y_1h_{55,0,1,0,1,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{y_1y_2y_3h_{55,0,1,0,1,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{y_1y_2y_3h_{56,1,0,1,0,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1y_2y_3h_{56,1,0,1,0,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} \\
& + \frac{\mathbb{I}x_2y_1y_3h_{56,1,0,1,0,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_3y_1y_2h_{56,1,0,1,0,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + \frac{x_1x_2y_3h_{56,1,0,1,0,0,1}}{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} \\
& + \frac{x_1x_3y_2h_{56,1,0,1,0,0,1}}{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + \frac{x_2x_3y_1h_{56,1,0,1,0,0,1}}{-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} + \frac{\mathbb{I}x_1x_2x_3h_{56,1,0,1,0,0,1}}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}
\end{aligned}$$

### B.3 Coeficientes da hamiltoniana, Z4, na forma normal para três graus de liberdade

$$\begin{aligned}
\delta_{11}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= -h_{3,3,0,0,0,0,0} \left( \frac{3h_{3,1,2,0,0,0,0}}{8\omega_1} \right) + \frac{3}{8} (h_{4,0,4,0,0,0,0} + h_{4,4,0,0,0,0,0}) \\
&- \frac{15}{16\omega_1} (h_{3,3,0,0,0,0,0}^2 + h_{3,0,3,0,0,0,0}^2) + h_{3,0,3,0,0,0,0} \left( -\frac{3h_{3,2,1,0,0,0,0}}{8\omega_1} \right) \\
&- \frac{3}{16\omega_1} h_{3,2,1,0,0,0,0}^2 + (h_{3,2,0,1,0,0,0}^2 + h_{3,2,0,0,1,0,0}^2 + h_{3,2,0,0,0,1,0}^2 \\
&+ h_{3,2,0,0,0,0,1}^2) \left( \frac{-8\omega_1^2 + 3\omega_2^2}{64\omega_1^2\omega_2 - 16\omega_3^2} \right) + h_{3,0,2,1,0,0,0} \left( \frac{-2\omega_1\omega_2 h_{47,1,1,0,1,0,0}}{32\omega_1^2\omega_2 - 8\omega_3^3} \right) \\
&+ h_{3,2,0,0,0,1,0} \left( \frac{(-8\omega_1^2 + \omega_3^2)h_{3,0,2,0,0,1,0} + 2\omega_1\omega_3 h_{3,1,1,0,0,0,1}}{32\omega_1^2\omega_3 - 8\omega_3^3} \right) \\
&+ h_{9,2,0,0,1,0,0} \left( \frac{(-8\omega_1^2 + \omega_2^2)h_{3,0,2,0,1,0,0} - 2\omega_1\omega_2 h_{3,1,1,1,0,0,0}}{32\omega_1^2\omega_2 - 8\omega_2^3} \right) \\
&- h_{1,3,0,0,0,0,0} \left( \frac{3h_{22,1,2,0,0,0,0}}{8\omega_1} \right) \\
&+ h_{3,2,0,1,0,0,0} \left( \frac{(-8\omega_1^2 + \omega_2^2)h_{3,0,2,1,0,0,0} + 2\omega_1\omega_2 h_{3,1,1,0,1,0,0}}{32\omega_1^2\omega_2 - 8\omega_2^3} \right) \\
&+ h_{3,2,0,0,0,0,1} \left( \frac{(-8\omega_1^2 + \omega_3^2)h_{3,0,2,0,0,0,1} - 2\omega_1\omega_3 h_{3,1,1,0,0,1,0}}{32\omega_1^2\omega_3 - 8\omega_3^3} \right) \\
&+ h_{3,0,2,0,1,0,0} \left( \frac{2\omega_1\omega_2 h_{3,1,1,1,0,0,0}}{32\omega_1^2\omega_2 - 8\omega_2^3} \right) - h_{3,0,2,0,0,1,0} \left( \frac{2\omega_1\omega_3 h_{49,1,1,0,0,0,1}}{32\omega_1^2\omega_3 - 8\omega_3^3} \right) \\
&+ (h_{3,0,2,0,0,1,0}^2 + h_{3,0,2,0,0,0,1}^2) \left( \frac{-8\omega_1^2 + 3\omega_3^2}{64\omega_1^2\omega_3 - 16\omega_3^3} \right) \\
&+ h_{3,0,2,0,0,0,1} \left( \frac{2\omega_1\omega_3 h_{3,1,1,0,0,1,0}}{32\omega_1^2\omega_3 - 8\omega_3^3} \right) - \left( \frac{3}{16\omega_1} \right) h_{3,1,2,0,0,0,0}^2 \\
&+ \left( \frac{\omega_2}{64\omega_1^2 - 16\omega_2^2} \right) (h_{3,1,1,1,0,0,0}^2 + h_{3,1,1,0,1,0,0}^2) + (h_{3,1,1,0,0,0,1}^2 \\
&+ h_{3,1,1,0,0,1,0}^2) \left( \frac{\omega_3}{64\omega_1^2 - 16\omega_3^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{22}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\
&= \frac{3}{8}(h_{4,0,0,0,4,0,0} + h_{4,0,0,4,0,0,0}) + \frac{1}{8}h_{4,0,0,2,2,0,0} \\
&+ -\frac{3h_{3,0,0,1,2,0,0}}{8\omega_2}h_{3,0,0,3,0,0,0} - \frac{3h_{3,0,0,1,2,0,0}}{8\omega_2}h_{3,0,0,3,0,0,0}^2 \\
&- \frac{15}{16\omega_2}(h_{3,0,0,3,0,0,0}^2 + h_{3,0,0,0,3,0,0}^2) - \frac{3h_{3,0,0,2,1,0,0}}{8\omega_2}h_{3,0,0,0,3,0,0} \\
&- \frac{3}{16\omega_2}h_{3,0,0,2,1,0,0}^2 \\
&+ h_{3,0,0,2,0,1,0}\left(\frac{(-8\omega_2^2 + \omega_3^2)h_{3,0,0,0,2,1,0} + 2\omega_2\omega_3h_{3,0,0,1,1,0,1}}{32\omega_2^2\omega_3 - 8\omega_3^3}\right) \\
&+ (h_{3,0,0,2,0,1,0}^2 + h_{3,0,0,2,0,0,1}^2 + h_{3,0,0,0,2,1,0}^2 \\
&+ h_{3,0,0,0,2,0,1}^2)\left(\frac{-8\omega_2^2 + 3\omega_3^2}{64\omega_2^2\omega_3 - 16\omega_3^3}\right) \\
&+ h_{18,0,0,2,0,0,1}\left(\frac{(-8\omega_2^2 + \omega_3^2)h_{3,0,0,0,2,0,1} - 2\omega_2\omega_3h_{3,0,0,1,1,1,0}}{32\omega_2^2\omega_3 - 8\omega_3^3}\right) \\
&+ h_{3,0,0,0,2,1,0}\left(\frac{-2\omega_2\omega_3h_{3,0,0,1,1,0,1}}{32\omega_2^2\omega_3 - 8\omega_3^3}\right) + h_{3,0,0,0,2,0,1}\left(\frac{2\omega_2\omega_3h_{3,0,0,1,1,1,0}}{32\omega_2^2\omega_3 - 8\omega_3^3}\right) \\
&+ (h_{3,1,0,2,0,0,0}^2 + h_{3,1,0,0,2,0,0}^2 + h_{27,0,1,2,0,0,0}^2 \\
&+ h_{3,0,1,0,2,0,0}^2)\left(\frac{-3\omega_1^2 + 8\omega_2^2}{16(\omega_1^3 - 4\omega_1\omega_2^2)}\right) \\
&+ h_{3,1,0,2,0,0,0}\left(-\frac{(\omega_1^2 - 8\omega_2^2)h_{3,1,0,0,2,0,0} + 2\omega_1\omega_2h_{3,0,1,1,1,0,0}}{8(\omega_1^3 - 4\omega_1\omega_2^2)}\right) \\
&+ h_{3,1,0,0,2,0,0}\left(\frac{\omega_1\omega_2h_{3,0,1,1,1,0,0}}{4(\omega_1^3 - 4\omega_1\omega_2^2)}\right) \\
&+ h_{3,0,1,2,0,0,0}\left(\frac{-(\omega_1^2 - 8\omega_2^2)h_{3,0,1,0,2,0,0} + 2\omega_1\omega_2h_{3,1,0,1,1,0,0}}{8(\omega_1^3 - 4\omega_1\omega_2^2)}\right) \\
&+ h_{3,0,1,0,2,0,0}\left(-\frac{\omega_1\omega_2h_{3,1,0,1,1,0,0}}{4(\omega_1^3 - 4\omega_1\omega_2^2)}\right) - \frac{3}{16\omega_2}h_{3,0,0,1,2,0,0}^2 \\
&- \frac{\omega_1}{16(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)}(h_{3,1,0,1,1,0,0}^2 + h_{3,0,1,1,1,0,0}^2) \\
&+ \frac{\omega_3}{64\omega_2^2 - 16\omega_3^2}(h_{3,0,0,1,1,1,0}^2 + h_{3,0,0,1,1,0,1}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{33}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & (6\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{0,0,0,0,0,4} - 24\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{0,0,0,0,0,4} - 24\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{0,0,0,0,0,4} \\
& + 96\omega_1\omega_2\omega_3^5h_{0,0,0,0,0,4} + 2\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{0,0,0,0,2,2} - 8\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{0,0,0,0,2,2} \\
& - 8\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{0,0,0,0,2,2} + 32\omega_1\omega_2\omega_3^5h_{0,0,0,0,2,2} + 6\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{0,0,0,0,4,0} \\
& - 24\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{0,0,0,0,4,0} - 24\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{0,0,0,0,4,0} + 96\omega_1\omega_2\omega_3^5h_{0,0,0,0,4,0} \\
& + 2p_1q_2\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{1,0,0,1,2,2} - 8p_1q_2\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{1,0,0,1,2,2} \\
& - 8p_1q_2\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{1,0,0,1,2,2} + 32p_1q_2\omega_1\omega_2\omega_3^5h_{1,0,0,1,2,2} \\
& + 2p_1^2q_1\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{2,1,0,0,2,2} - 8p_1^2q_1\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{2,1,0,0,2,2} \\
& - 8p_1^2q_1\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{2,1,0,0,2,2} + 32p_1^2q_1\omega_1\omega_2\omega_3^5h_{2,1,0,0,2,2} \\
& - 15\omega_1^3\omega_2^3h_{5,0,0,0,0,3,0}^2 + 60\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{5,0,0,0,0,3,0}^2 + 60\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{5,0,0,0,0,3,0}^2 \\
& - 240\omega_1\omega_2\omega_3^4h_{5,0,0,0,0,3,0}^2 - 15\omega_1^3\omega_2^3h_{6,0,0,0,0,0,3}^2 + 60\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{6,0,0,0,0,0,3}^2 \\
& + 60\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{6,0,0,0,0,0,3}^2 - 240\omega_1\omega_2\omega_3^4h_{6,0,0,0,0,0,3}^2 \\
& - 6\omega_1^3\omega_2^3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{21,0,0,0,0,2,1} + 24\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& + 24\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{21,0,0,0,0,2,1} - 96\omega_1\omega_2\omega_3^4h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& - 3\omega_1^3\omega_2^3h_{21,0,0,0,0,2,1}^2 + 12\omega_1^3\omega_2\omega_3^3h_{21,0,0,0,0,2,1}^2 + 12\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{21,0,0,0,0,2,1}^2 \\
& - 48\omega_1\omega_2\omega_3^4h_{21,0,0,0,0,2,1}^2 - 3\omega_1^2\omega_2^3\omega_3h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 + 12\omega_1^2\omega_2\omega_3^3h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 \\
& + 8\omega_2^3\omega_3^3h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 - 32\omega_2\omega_3^5h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 \\
& - 2\omega_1^2\omega_2^3\omega_3h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 8\omega_1^2\omega_2\omega_3^3h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 16\omega_2^3\omega_3^3h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} - 64\omega_2\omega_3^5h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& - 3\omega_1^2\omega_2^3\omega_3h_{26,1,0,0,0,0,2}^2 + 12\omega_1^2\omega_2\omega_3^3h_{26,1,0,0,0,0,2}^2 + 8\omega_2^3\omega_3^3h_{26,1,0,0,0,0,2}^2 \\
& - 32\omega_2\omega_3^5h_{26,1,0,0,0,0,2}^2 - 3\omega_1^2\omega_2^3\omega_3h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 + 12\omega_1^2\omega_2\omega_3^3h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 \\
& + 8\omega_2^3\omega_3^3h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 - 32\omega_2\omega_3^5h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 \\
& - 2\omega_1^2\omega_2^3\omega_3h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 8\omega_1^2\omega_2\omega_3^3h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 16\omega_2^3\omega_3^3h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} - 64\omega_2\omega_3^5h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& - 3\omega_1^2\omega_2^3\omega_3h_{30,0,1,0,0,0,2}^2 + 12\omega_1^2\omega_2\omega_3^3h_{30,0,1,0,0,0,2}^2 + 8\omega_2^3\omega_3^3h_{30,0,1,0,0,0,2}^2 \\
& - 32\omega_2\omega_3^5h_{30,0,1,0,0,0,2}^2 - 3\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 + 8\omega_1^3\omega_3^3h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 \\
& + 12\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 - 32\omega_1\omega_3^5h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 \\
& - 2\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 16\omega_1^3\omega_3^3h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 8\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} - 64\omega_1\omega_3^5h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& - 3\omega_1^3\omega_2^3\omega_3h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 + 8\omega_1^3\omega_3^3h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 + 12\omega_1\omega_2^3\omega_3^3h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 \\
& - 32\omega_1\omega_3^5h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_1^3 \omega_2^2 \omega_3 h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 + 8\omega_1^3 \omega_3^3 h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 + 12\omega_1 \omega_2^2 \omega_3^3 h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 - 32\omega_1 \omega_3^5 h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 \\
& - 2\omega_1^3 \omega_2^2 \omega_3 h_{34,0,0,0,1,2,0} h_{35,0,0,0,1,0,2} + 16\omega_1^3 \omega_3^3 h_{34,0,0,0,1,2,0} h_{35,0,0,0,1,0,2} \\
& + 8\omega_1 \omega_2^2 \omega_3^3 h_{34,0,0,0,1,2,0} h_{35,0,0,0,1,0,2} - 64\omega_1 \omega_3^5 h_{34,0,0,0,1,2,0} h_{35,0,0,0,1,0,2} \\
& - 3\omega_1^3 \omega_2^2 \omega_3 h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 + 8\omega_1^3 \omega_3^3 h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 + 12\omega_1 \omega_2^2 \omega_3^3 h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 \\
& - 32\omega_1 \omega_3^5 h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 - 6\omega_1^3 \omega_2^2 h_{5,0,0,0,0,3,0} h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& + 24\omega_1^3 \omega_2 \omega_3^2 h_{5,0,0,0,0,3,0} h_{36,0,0,0,0,1,2} + 24\omega_1 \omega_2^3 \omega_3^2 h_{5,0,0,0,0,3,0} h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& - 96\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{5,0,0,0,0,3,0} h_{36,0,0,0,0,1,2} - 3\omega_1^3 \omega_2^3 h_{36,0,0,0,0,1,2}^2 \\
& + 12\omega_1^3 \omega_2 \omega_3^2 h_{36,0,0,0,0,1,2}^2 + 12\omega_1 \omega_2^3 \omega_3^2 h_{36,0,0,0,0,1,2}^2 - 48\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{36,0,0,0,0,1,2}^2 \\
& + 4\omega_1 \omega_2^3 \omega_3^2 h_{29,0,1,0,0,2,0} h_{40,1,0,0,0,1,1} - 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{29,0,1,0,0,2,0} h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 4\omega_1 \omega_2^3 \omega_3^2 h_{30,0,1,0,0,0,2} h_{40,1,0,0,0,1,1} + 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{30,0,1,0,0,0,2} h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - \omega_1^2 \omega_2^3 \omega_3 h_{40,1,0,0,0,1,1}^2 + 4\omega_1^2 \omega_2 \omega_3^3 h_{40,1,0,0,0,1,1}^2 \\
& - 4\omega_1 \omega_2^3 \omega_3^2 h_{25,1,0,0,0,2,0} h_{43,0,1,0,0,1,1} + 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{25,1,0,0,0,2,0} h_{43,0,1,0,0,1,1} \\
& + 4\omega_1 \omega_2^3 \omega_3^2 h_{26,1,0,0,0,0,2} h_{43,0,1,0,0,1,1} - 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{26,1,0,0,0,0,2} h_{43,0,1,0,0,1,1} \\
& - \omega_1^2 \omega_2^3 \omega_3 h_{43,0,1,0,0,1,1}^2 + 4\omega_1^2 \omega_2 \omega_3^3 h_{43,0,1,0,0,1,1}^2 \\
& + 4\omega_1^3 \omega_2 \omega_3^2 h_{34,0,0,0,1,2,0} h_{45,0,0,1,0,1,1} - 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{34,0,0,0,1,2,0} h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& - 4\omega_1^3 \omega_2 \omega_3^2 h_{35,0,0,0,1,0,2} h_{45,0,0,1,0,1,1} + 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{35,0,0,0,1,0,2} h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& - \omega_1^3 \omega_2^2 \omega_3 h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 + 4\omega_1 \omega_2^2 \omega_3^3 h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 \\
& - 4\omega_1^3 \omega_2 \omega_3^2 h_{32,0,0,1,0,2,0} h_{46,0,0,0,1,1,1} + 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{32,0,0,1,0,2,0} h_{46,0,0,0,1,1,1} \\
& + 4\omega_1^3 \omega_2 \omega_3^2 h_{33,0,0,1,0,0,2} h_{46,0,0,0,1,1,1} - 16\omega_1 \omega_2 \omega_3^4 h_{33,0,0,1,0,0,2} h_{46,0,0,0,1,1,1} \\
& - \omega_1^3 \omega_2^2 \omega_3 h_{46,0,0,0,1,1,1}^2 + 4\omega_1 \omega_2^2 \omega_3^3 h_{46,0,0,0,1,1,1}^2) / (16\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - 2\omega_3) (\omega_2 \\
& - 2\omega_3) \omega_3 (\omega_1 + 2\omega_3) (\omega_2 + 2\omega_3))
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\delta_{12}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & (8\omega_1^9\omega_2\omega_3h_{0,2,0,2,0,0} - 50\omega_1^7\omega_2^3\omega_3h_{0,2,0,2,0,0} + 84\omega_1^5\omega_2^5\omega_3h_{0,2,0,2,0,0} \\
& - 50\omega_1^3\omega_2^7\omega_3h_{0,2,0,2,0,0} + 8\omega_1\omega_2^9\omega_3h_{0,2,0,2,0,0} - 16\omega_1^7\omega_2\omega_3^3h_{0,2,0,2,0,0} \\
& + 52\omega_1^5\omega_2^3\omega_3^3h_{0,2,0,2,0,0} + 52\omega_1^3\omega_2^5\omega_3^3h_{0,2,0,2,0,0} - 16\omega_1\omega_2^7\omega_3^3h_{0,2,0,2,0,0} \\
& + 8\omega_1^5\omega_2\omega_3^5h_{0,2,0,2,0,0} - 34\omega_1^3\omega_2^3\omega_3^5h_{0,2,0,2,0,0} + 8\omega_1\omega_2^5\omega_3^5h_{0,2,0,2,0,0} \\
& + 8\omega_1^9\omega_2\omega_3h_{0,2,2,0,0,0} - 50\omega_1^7\omega_2^3\omega_3h_{0,2,2,0,0,0} + 84\omega_1^5\omega_2^5\omega_3h_{0,2,2,0,0,0} \\
& - 50\omega_1^3\omega_2^7\omega_3h_{0,2,2,0,0,0} + 8\omega_1\omega_2^9\omega_3h_{0,2,2,0,0,0} - 16\omega_1^7\omega_2\omega_3^3h_{0,2,2,0,0,0} \\
& + 52\omega_1^5\omega_2^3\omega_3^3h_{0,2,2,0,0,0} + 52\omega_1^3\omega_2^5\omega_3^3h_{0,2,2,0,0,0} - 16\omega_1\omega_2^7\omega_3^3h_{0,2,2,0,0,0} \\
& + 8\omega_1^5\omega_2\omega_3^5h_{0,2,2,0,0,0} - 34\omega_1^3\omega_2^3\omega_3^5h_{0,2,2,0,0,0} + 8\omega_1\omega_2^5\omega_3^5h_{0,2,2,0,0,0} \\
& + 8\omega_1^9\omega_2\omega_3h_{2,0,0,2,0,0} - 50\omega_1^7\omega_2^3\omega_3h_{2,0,0,2,0,0} + 84\omega_1^5\omega_2^5\omega_3h_{2,0,0,2,0,0} \\
& - 50\omega_1^3\omega_2^7\omega_3h_{2,0,0,2,0,0} + 8\omega_1\omega_2^9\omega_3h_{2,0,0,2,0,0} - 16\omega_1^7\omega_2\omega_3^3h_{2,0,0,2,0,0} \\
& + 52\omega_1^5\omega_2^3\omega_3^3h_{2,0,0,2,0,0} + 52\omega_1^3\omega_2^5\omega_3^3h_{2,0,0,2,0,0} - 16\omega_1\omega_2^7\omega_3^3h_{2,0,0,2,0,0} \\
& + 8\omega_1^5\omega_2\omega_3^5h_{2,0,0,2,0,0} - 34\omega_1^3\omega_2^3\omega_3^5h_{2,0,0,2,0,0} + 8\omega_1\omega_2^5\omega_3^5h_{2,0,0,2,0,0} \\
& + 8\omega_1^9\omega_2\omega_3h_{2,0,2,0,0,0} - 50\omega_1^7\omega_2^3\omega_3h_{2,0,2,0,0,0} + 84\omega_1^5\omega_2^5\omega_3h_{2,0,2,0,0,0} \\
& - 50\omega_1^3\omega_2^7\omega_3h_{2,0,2,0,0,0} + 8\omega_1\omega_2^9\omega_3h_{2,0,2,0,0,0} - 16\omega_1^7\omega_2\omega_3^3h_{2,0,2,0,0,0} \\
& + 52\omega_1^5\omega_2^3\omega_3^3h_{2,0,2,0,0,0} + 52\omega_1^3\omega_2^5\omega_3^3h_{2,0,2,0,0,0} - 16\omega_1\omega_2^7\omega_3^3h_{2,0,2,0,0,0} \\
& + 8\omega_1^5\omega_2\omega_3^5h_{2,0,2,0,0,0} - 34\omega_1^3\omega_2^3\omega_3^5h_{2,0,2,0,0,0} + 8\omega_1\omega_2^5\omega_3^5h_{2,0,2,0,0,0} \\
& - 24\omega_1^9\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} + 150\omega_1^7\omega_2^2\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} \\
& - 252\omega_1^5\omega_2^4\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} + 150\omega_1^3\omega_2^6\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} \\
& - 24\omega_1\omega_2^8\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} + 48\omega_1^7\omega_3^3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} \\
& - 156\omega_1^5\omega_2^2\omega_3^3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} - 156\omega_1^3\omega_2^4\omega_3^3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} \\
& + 48\omega_1\omega_2^6\omega_3^3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} - 24\omega_1^5\omega_3^5h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} \\
& + 102\omega_1^3\omega_2^2\omega_3^5h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} - 24\omega_1\omega_2^4\omega_3^5h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{8,2,0,1,0,0,0} \\
& - 4\omega_1^8\omega_2\omega_3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 + 24\omega_1^6\omega_2^3\omega_3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 - 36\omega_1^4\omega_2^5\omega_3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 \\
& + 16\omega_1^2\omega_2^7\omega_3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 + 8\omega_1^6\omega_2\omega_3^3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 - 24\omega_1^4\omega_2^3\omega_3^3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 \\
& - 32\omega_1^2\omega_2^5\omega_3^3h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 - 4\omega_1^4\omega_2\omega_3^5h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 + 16\omega_1^2\omega_2^3\omega_3^5h_{8,2,0,1,0,0,0}^2 \\
& - 24\omega_1^9\omega_3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} + 150\omega_1^7\omega_2^2\omega_3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& - 252\omega_1^5\omega_2^4\omega_3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} + 150\omega_1^3\omega_2^6\omega_3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& - 24\omega_1\omega_2^8\omega_3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} + 48\omega_1^7\omega_3^3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& - 156\omega_1^5\omega_2^2\omega_3^3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} - 156\omega_1^3\omega_2^4\omega_3^3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& + 48\omega_1\omega_2^6\omega_3^3h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} - 24\omega_1^5\omega_3^5h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& + 102\omega_1^3\omega_2^2\omega_3^5h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} - 24\omega_1\omega_2^4\omega_3^5h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& - 4\omega_1^8\omega_2\omega_3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 + 24\omega_1^6\omega_2^3\omega_3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 - 36\omega_1^4\omega_2^5\omega_3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 \\
& + 16\omega_1^2\omega_2^7\omega_3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 + 8\omega_1^6\omega_2\omega_3^3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 - 24\omega_1^4\omega_2^3\omega_3^3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 \\
& - 32\omega_1^2\omega_2^5\omega_3^3h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 - 4\omega_1^4\omega_2\omega_3^5h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 + 16\omega_1^2\omega_2^3\omega_3^5h_{9,2,0,0,1,0,0}^2 \\
& - 24\omega_1^9\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{12,0,2,1,0,0,0} + 150\omega_1^7\omega_2^2\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{12,0,2,1,0,0,0} \\
& - 252\omega_1^5\omega_2^4\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{12,0,2,1,0,0,0} + 150\omega_1^3\omega_2^6\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{12,0,2,1,0,0,0} \\
& - 24\omega_1\omega_2^8\omega_3h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{12,0,2,1,0,0,0} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{23} = & (-2\omega_2\omega_3(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2(4\omega_2^4 - 17\omega_2^2\omega_3^2 + 4\omega_3^4)(h_{23,1,0,2,0,0,0}(h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + h_{26,1,0,0,0,0,2}) + h_{24,1,0,0,2,0,0}(h_{25,1,0,0,0,2,0} + h_{26,1,0,0,0,0,2}) + (h_{27,0,1,2,0,0,0} \\
& + h_{28,0,1,0,2,0,0})(h_{29,0,1,0,0,2,0} + h_{30,0,1,0,0,0,2})) \\
& + 2\omega_1^5(-4\omega_3^5(3h_{3,0,0,3,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& + h_{31,0,0,1,2,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + (3h_{4,0,0,0,3,0,0} \\
& + h_{16,0,0,2,1,0,0})(h_{34,0,0,0,1,2,0} + h_{35,0,0,0,1,0,2})) + 4\omega_2^5(\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} \\
& + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} + h_{0,0,2,0,2,0} + h_{1,0,0,2,0,2}) - 3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} \\
& - 3h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} + h_{19,0,0,0,2,1,0}) - 3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} \\
& - h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& - h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} - h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2}) \\
& + 2\omega_2\omega_3^4(2\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} + h_{0,0,2,0,2,0} + p1h_{1,0,0,2,0,2}) \\
& - 6h_{5,0,0,0,0,3,0}h_{17,0,0,2,0,1,0} - 6h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} \\
& - 6h_{5,0,0,0,0,3,0}h_{19,0,0,0,2,1,0} - 6h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} \\
& - 2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - 2h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 \\
& + 2h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} - h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 - h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 \\
& + 2h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} - h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 - 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& - 2h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} - 4h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} \\
& + 4h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} - h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 - h_{46,0,0,0,1,1,1}^2 \\
& + 4h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} - 4h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1}) \\
& + \omega_2^3\omega_3^2(-17\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} + h_{0,0,2,0,2,0} \\
& + p1h_{1,0,0,2,0,2}) + 51h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} + 51h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} \\
& + h_{19,0,0,0,2,1,0}) + 51h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} + 17h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& + 17h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} + 8h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 - 16h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 8h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 + 8h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 - 16h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + 8h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 \\
& + 17h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} + 17h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& + 2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} - 2h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} + 8h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 \\
& + 8h_{46,0,0,0,1,1,1}^2 - 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} + 2h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1}) \\
& - 2\omega_2^4\omega_3(h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,0,2,1,0} \\
& + h_{19,0,0,0,2,1,0}^2 - 2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,0,2,0,1} + h_{20,0,0,0,2,0,1}^2 \\
& + 6h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 2h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& + 6h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 2h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 6h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 2h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} \\
& + 6h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + 2h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 \\
& + 4h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} - 4h_{35,0,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& - 4h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,0,1,1,1} + 4h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,0,1,1,1} + h_{52,0,0,1,1,0,1}^2) \\
& + \omega_2^2\omega_3^3(8h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + 8h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 16h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,0,2,1,0} \\
& + 8h_{19,0,0,0,2,1,0}^2 - 16h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,0,2,0,1} + 8h_{20,0,0,0,2,0,1}^2 \\
& + 51h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 17h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& + 51h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 17h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 51h_{4,0,0,0,3,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 17h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2h_{24,1,0,0,2,0,0}(h_{25,1,0,0,0,2,0} + h_{26,1,0,0,0,2,0}) + 2h_{27,0,1,2,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& \quad + 2h_{28,0,1,0,2,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 2h_{27,0,1,2,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& \quad + 2h_{28,0,1,0,2,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + h_{39,1,0,0,1,1,0}^2 + h_{42,0,1,0,1,1,0}^2 + h_{50,0,1,1,0,1,0}^2 \\
& \quad + h_{51,0,1,1,0,0,1}^2 + h_{53,1,0,1,0,1,0}^2 + h_{54,1,0,0,1,0,1}^2 + h_{55,0,1,0,1,0,1}^2 + h_{56,1,0,1,0,0,1}^2 \\
& \quad + 2\omega_1(\omega_2^2 - \omega_3^2)(4\omega_3^7(3h_{3,0,0,3,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& \quad + h_{31,0,0,1,2,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + (3h_{4,0,0,3,0,0} \\
& \quad + h_{16,0,0,2,1,0,0})(h_{34,0,0,0,1,2,0} + h_{35,0,0,0,1,0,2})) + 4\omega_2^7(\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} \\
& \quad + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} + h_{0,0,2,0,2,0} + p1h_{1,0,0,2,0,2}) \\
& \quad - 3h_{6,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} - 3h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} + h_{19,0,0,0,2,1,0}) \\
& \quad - 3h_{6,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} - h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& \quad - h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& \quad - h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2}) + \omega_2^3\omega_3^4(21\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} \\
& \quad + h_{0,0,2,0,2,0} + p1h_{1,0,0,2,0,2}) - 63h_{6,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} \\
& \quad - 63h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} + h_{19,0,0,0,2,1,0}) - 63h_{6,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} \\
& \quad - 21h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - 21h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - 10h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 \\
& \quad + 20h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} - 10h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 - 10h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 \\
& \quad + 20h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} - 10h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 - 21h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& \quad - 21h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} - 10h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} \\
& \quad + 10h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} - 10h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 - 10h_{46,0,0,0,1,1,1}^2 \\
& \quad + 10h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} - 10h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} \\
& \quad + 17h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{53,1,0,1,0,1,0} - 17h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& \quad + 17h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} - 17h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& \quad + 2\omega_2\omega_3^6(-2\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} + h_{0,0,2,0,2,0} \\
& \quad + p1h_{1,0,0,2,0,2}) + 6h_{6,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} + 6h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} \\
& \quad + h_{19,0,0,0,2,1,0}) + 6h_{6,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} + 2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& \quad + 2h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} + h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 - 2h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& \quad + h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 + h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 - 2h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 \\
& \quad + 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} + 2h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& \quad + 4h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} - 4h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} + h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 \\
& \quad + h_{46,0,0,0,1,1,1}^2 - 4h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} + 4h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} \\
& \quad - 2h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{53,1,0,1,0,1,0} + 2h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& \quad - 2h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} + 2h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& \quad + \omega_2^5\omega_3^2(-21\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,0,2} + h_{0,0,2,0,2,0} \\
& \quad + p1h_{1,0,0,2,0,2}) + 63h_{6,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} + 63h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} \\
& \quad + h_{19,0,0,0,2,1,0}) + 63h_{6,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,0,2,0,1} + 21h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& \quad + 21h_{20,0,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} + 8h_{32,0,0,1,0,2,0}^2 - 16h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& \quad + 8h_{33,0,0,1,0,0,2}^2 + 8h_{34,0,0,0,1,2,0}^2 - 16h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + 8h_{35,0,0,0,1,0,2}^2 \\
& \quad + 21h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} + 21h_{19,0,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} - 2h_{20,0,0,2,0,1}h_{44,0,0,1,1,1,0} + 8h_{45,0,0,1,0,1,1}^2 + 8h_{46,0,0,0,1,1,1}^2 \\
& \quad - 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} + 2h_{19,0,0,2,1,0}h_{52,0,0,1,1,0,1} \\
& \quad - 4h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{53,1,0,1,0,1,0} + 4h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& \quad - 4h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} + 4h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& \quad + \omega_2^4\omega_3^3(10h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + 10h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 20h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,0,2,1,0} \\
& \quad + 10h_{19,0,0,2,1,0}^2 - 20h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,2,0,1} + 10h_{20,0,0,2,0,1}^2 \\
& \quad + 63h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 21h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& \quad + 63h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 21h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& \quad + 63h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{34,0,0,1,2,0} + 21h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,1,2,0} \\
& \quad + 63h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{35,0,0,1,0,2} + 21h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,1,0,2} + 10h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 \\
& \quad + 10h_{34,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} - 10h_{35,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& \quad - 10h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,1,1,1} + 10h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,1,1,1} \\
& \quad + 17h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + 10h_{52,0,0,1,1,0,1}^2 - 17h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& \quad + 17h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - 17h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& \quad - \omega_2^2\omega_3^5(8h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + 8h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 16h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,0,2,1,0} \\
& \quad + 8h_{19,0,0,2,1,0}^2 - 16h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,2,0,1} + 8h_{20,0,0,2,0,1}^2 \\
& \quad + 63h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 21h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& \quad + 63h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 21h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& \quad + 63h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{34,0,0,1,2,0} + 21h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,1,2,0} \\
& \quad + 63h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{35,0,0,1,0,2} + 21h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,1,0,2} + 8h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 \\
& \quad + 2h_{34,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} - 2h_{35,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& \quad - 2h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,1,1,1} + 2h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,1,1,1} \\
& \quad + 4h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + 8h_{52,0,0,1,1,0,1}^2 - 4h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& \quad + 4h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - 4h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& \quad - 2\omega_2^6\omega_3(h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,0,2,1,0} \\
& \quad + h_{19,0,0,2,1,0}^2 - 2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,2,0,1} + h_{20,0,0,2,0,1}^2 \\
& \quad + 6h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 2h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& \quad + 6h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 2h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& \quad + 6h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{34,0,0,1,2,0} + 2h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,1,2,0} \\
& \quad + 6h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{35,0,0,1,0,2} + 2h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,1,0,2} + h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 \\
& \quad + 4h_{34,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} - 4h_{35,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& \quad - 4h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,1,1,1} + 4h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,1,1,1} \\
& \quad + 2h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + h_{52,0,0,1,1,0,1}^2 - 2h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& \quad + 2h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - 2h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& \quad - 2\omega_1^3(-8\omega_3^7(3h_{3,0,0,3,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& \quad + h_{31,0,0,1,2,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + (3h_{4,0,0,3,0,0} \\
& \quad + h_{16,0,0,2,1,0,0})(h_{34,0,0,1,2,0} + h_{35,0,0,1,0,2})) + 8\omega_2^7(\omega_3(h_{0,0,0,2,0,2} \\
& \quad + h_{0,0,0,2,2,0} + h_{0,0,2,0,2,0} + h_{0,0,2,0,2,0} + p1h_{1,0,0,2,0,2}) \\
& \quad - 3h_{6,0,0,0,0,3}h_{18,0,0,2,0,0,1} - 3h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{17,0,0,2,0,1,0} + h_{19,0,0,0,2,1,0}) \\
& \quad - 3h_{6,0,0,0,0,3}h_{20,0,0,2,0,1} - h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& \quad - h_{20,0,0,2,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{36,0,0,0,0,1,2} \\
& \quad - h_{19,0,0,2,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_2^4 \omega_3^3 (12h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + 12h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 24h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,2,1,0} + 12h_{19,0,0,2,1,0}^2 \\
& - 24h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,2,0,1} + 12h_{20,0,0,2,0,1}^2 + 78h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& + 26h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 78h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 26h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 78h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} \\
& + 26h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 78h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} \\
& + 26h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + 12h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 - 12h_{34,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& + 12h_{35,0,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} + 12h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,0,1,1,1} \\
& - 12h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,0,1,1,1} + 17h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + 12h_{52,0,0,1,1,0,1}^2 \\
& - 17h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} + 17h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& - 17h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) - 4\omega_2^6 \omega_3 (h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 + h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 \\
& - 2h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,2,1,0} + h_{19,0,0,2,1,0}^2 - 2h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,2,0,1} \\
& + h_{20,0,0,2,0,1}^2 + 6h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 2h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& + 6h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 2h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 6h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 2h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} \\
& + 6h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + 2h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 \\
& + 4h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} - 4h_{35,0,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& - 4h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,0,1,1,1} + 4h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,0,1,1,1} \\
& + h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + h_{52,0,0,1,1,0,1}^2 - h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& + h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) + 2\omega_2^2 \omega_3^5 (8h_{17,0,0,2,0,1,0}^2 \\
& + 8h_{18,0,0,2,0,0,1}^2 - 16h_{17,0,0,2,0,1,0}h_{19,0,0,2,1,0} + 8h_{19,0,0,2,1,0}^2 \\
& - 16h_{18,0,0,2,0,0,1}h_{20,0,0,2,0,1} + 8h_{20,0,0,2,0,1}^2 + 39h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} \\
& + 13h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{32,0,0,1,0,2,0} + 39h_{3,0,0,3,0,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} \\
& + 13h_{31,0,0,1,2,0,0}h_{33,0,0,1,0,0,2} + 39h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} \\
& + 13h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 39h_{4,0,0,3,0,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} \\
& + 13h_{16,0,0,2,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + 8h_{44,0,0,1,1,1,0}^2 + 2h_{34,0,0,0,1,2,0}h_{45,0,0,1,0,1,1} \\
& - 2h_{35,0,0,0,1,0,2}h_{45,0,0,1,0,1,1} - 2h_{32,0,0,1,0,2,0}h_{46,0,0,0,1,1,1} \\
& + 2h_{33,0,0,1,0,0,2}h_{46,0,0,0,1,1,1} - 2h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + 8h_{52,0,0,1,1,0,1}^2 \\
& + 2h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} - 2h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& + 2h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1})) + \omega_1^2 \omega_2 \omega_3 (4\omega_2^4 - 17\omega_2^2 \omega_3^2 \\
& + 4\omega_3^4) (-4\omega_2 \omega_3 (h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{51,0,1,1,0,0,1} - h_{53,1,0,1,0,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& - h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} + h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& + \omega_2^2 (4h_{23,1,0,2,0,0,0} (h_{25,1,0,0,0,2,0} + h_{26,1,0,0,0,2,0}) + 4h_{24,1,0,0,2,0,0} (h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + h_{26,1,0,0,0,2,0}) + 4h_{27,0,1,2,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 4h_{28,0,1,0,2,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 4h_{27,0,1,2,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 4h_{28,0,1,0,2,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + h_{39,1,0,0,1,1,0}^2 \\
& + h_{42,0,1,0,1,1,0}^2 + h_{50,0,1,1,0,1,0}^2 + h_{51,0,1,1,0,0,1}^2 + h_{53,1,0,1,0,1,0}^2 + h_{54,1,0,0,1,0,1}^2 \\
& + h_{55,0,1,0,1,0,1}^2 + h_{56,1,0,1,0,0,1}^2) + \omega_3^2 (4h_{23,1,0,2,0,0,0} (h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + h_{26,1,0,0,0,2,0}) + 4h_{24,1,0,0,2,0,0} (h_{25,1,0,0,0,2,0} + h_{26,1,0,0,0,2,0}) \\
& + 4h_{27,0,1,2,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 4h_{28,0,1,0,2,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 4h_{27,0,1,2,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 4h_{28,0,1,0,2,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + h_{39,1,0,0,1,1,0}^2 \\
& + h_{42,0,1,0,1,1,0}^2 + h_{50,0,1,1,0,1,0}^2 + h_{51,0,1,1,0,0,1}^2 + h_{53,1,0,1,0,1,0}^2 + h_{54,1,0,0,1,0,1}^2 \\
& + h_{55,0,1,0,1,0,1}^2 + h_{56,1,0,1,0,0,1}^2) \Big) \Big) (8\omega_1 \omega_3 (4\omega_2^5 - 17\omega_2^3 \omega_3^2 + 4\omega_2 \omega_3^4) (\omega_1^4 \\
& + (\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 - 2\omega_1^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{13} = & (-8\omega_2\omega_3^5(\omega_2^2 - \omega_3^2)^2(3h_{1,3,0,0,0,0}(h_{25,1,0,0,0,2,0} + h_{26,1,0,0,0,0,2}) \\
& + h_{22,1,2,0,0,0,0}(h_{25,1,0,0,0,2,0} + h_{26,1,0,0,0,0,2}) + (3h_{2,0,3,0,0,0,0} \\
& + h_{7,2,1,0,0,0,0})(h_{29,0,1,0,0,2,0} + h_{30,0,1,0,0,0,2})) \\
& + 8\omega_1^9(-\omega_3(h_{8,2,0,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& + h_{12,0,2,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + (h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& + h_{13,0,2,0,1,0,0})(h_{34,0,0,0,1,2,0} + h_{35,0,0,0,1,0,2})) + \omega_2(\omega_3(h_{0,2,0,0,0,2,0} + h_{0,2,0,0,2,0} \\
& + h_{2,0,0,0,0,2} + h_{2,0,0,0,2,0}) - 3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{11,2,0,0,0,0,1} \\
& - 3h_{5,0,0,0,0,3,0}(h_{10,2,0,0,0,1,0} + h_{14,0,2,0,0,1,0}) - 3h_{6,0,0,0,0,0,3}h_{15,0,2,0,0,0,1} \\
& - h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} - h_{15,0,2,0,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1} \\
& - h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2} - h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,0,1,2})) \\
& - 4\omega_1^8\omega_2\omega_3(h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 + h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 2h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} \\
& + h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 - 2h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 \\
& + 6h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 2h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + 6h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 2h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 6h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 2h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 6h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 2h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 4h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} - 4h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 4h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 4h_{26,1,0,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 \\
& + h_{49,1,1,0,0,0,1}^2 + 2h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} - 2h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& + 2h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - 2h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& - 2\omega_1^4\omega_2\omega_3(2\omega_2^4(h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 + h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 2h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} \\
& + h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 - 2h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 \\
& + 6h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 2h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + 6h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 2h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 6h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 2h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 6h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 2h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 4h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} - 4h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 4h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 4h_{26,1,0,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 \\
& + h_{49,1,1,0,0,0,1}^2) + 34\omega_2\omega_3^3(h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{53,1,0,1,0,1,0} - h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& + h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} - h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) + \omega_2^2\omega_3^2(12h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 \\
& + 12h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 24h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} + 12h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 \\
& - 24h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + 12h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 + 78h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + 26h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 78h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 26h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 78h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 26h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 78h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,2,0} \\
& + 26h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} - 12h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& + 12h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} + 12h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} \\
& - 12h_{26,1,0,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 12h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 + 12h_{49,1,1,0,0,0,1}^2 \\
& + 17h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} - 17h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& + 17h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - 17h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& + 3\omega_3^4(6h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 + 6h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 12h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} \\
& + 6h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 - 12h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + 6h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 \\
& + 42h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 14h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2h_{22,1,2,0,0,0}h_{25,1,0,0,2,0} + 6h_{1,3,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,2} + 2h_{22,1,2,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,2} \\
& + 6h_{2,0,3,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 2h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 6h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 2h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 4h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} - 4h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 4h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 4h_{26,1,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 \\
& + h_{49,1,1,0,0,0,1}^2 + h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} - h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& + h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& + 2\omega_1^2\omega_2\omega_3^3(\omega_2^4(8h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 + 8h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 16h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} \\
& + 8h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 - 16h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + 8h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 \\
& + 51h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 17h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + 51h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 17h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 51h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 17h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 51h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 17h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 2h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} - 2h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 2h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 2h_{26,1,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 8h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 \\
& + 8h_{49,1,1,0,0,0,1}^2) + 8\omega_2\omega_3^3(h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{53,1,0,1,0,1,0} - h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& + h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} - h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) + \omega_3^4(8h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 \\
& + 8h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 16h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} + 8h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 \\
& - 16h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + 8h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 + 75h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + 25h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 75h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 25h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 75h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 25h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 75h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 25h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 2h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 2h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} - 2h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} \\
& + 2h_{26,1,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 8h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 + 8h_{49,1,1,0,0,0,1}^2 \\
& + 4h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} - 4h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& + 4h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} - 4h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& - 2\omega_2^2\omega_3^2(8h_{10,2,0,0,0,1,0}^2 + 8h_{11,2,0,0,0,0,1}^2 - 16h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} \\
& + 8h_{14,0,2,0,0,1,0}^2 - 16h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{15,0,2,0,0,0,1} + 8h_{15,0,2,0,0,0,1}^2 \\
& + 39h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} + 13h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{25,1,0,0,0,2,0} \\
& + 39h_{1,3,0,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} + 13h_{22,1,2,0,0,0,0}h_{26,1,0,0,0,0,2} \\
& + 39h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} + 13h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{29,0,1,0,0,2,0} \\
& + 39h_{2,0,3,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} + 13h_{7,2,1,0,0,0,0}h_{30,0,1,0,0,0,2} \\
& + 2h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{40,1,0,0,0,1,1} - 2h_{30,0,1,0,0,0,2}h_{40,1,0,0,0,1,1} \\
& - 2h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 2h_{26,1,0,0,0,2}h_{43,0,1,0,0,1,1} + 8h_{48,1,1,0,0,1,0}^2 \\
& + 8h_{49,1,1,0,0,0,1}^2 - 2h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{50,0,1,1,0,1,0} + 2h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{53,1,0,1,0,1,0} \\
& - 2h_{51,0,1,1,0,0,1}h_{54,1,0,0,1,0,1} + 2h_{55,0,1,0,1,0,1}h_{56,1,0,1,0,0,1})) + 4\omega_1\omega_3^4(\omega_2^2 \\
& - \omega_3^2)(2\omega_3^3(h_{8,2,0,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& + h_{12,0,2,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + (h_{9,2,0,0,1,0,0} \\
& + h_{13,0,2,0,1,0,0})(h_{34,0,0,0,1,2,0} + h_{35,0,0,0,1,0,2})) + \omega_2^3(2\omega_3(h_{0,2,0,0,0,2} \\
& + h_{0,2,0,0,2,0} + h_{2,0,0,0,0,2} + h_{2,0,0,0,2,0}) - 6h_{5,0,0,0,0,3,0}h_{10,2,0,0,0,1,0} \\
& - 6h_{6,0,0,0,0,3}h_{11,2,0,0,0,0,1} - 6h_{3,0,0,0,0,3,0}h_{14,0,2,0,0,1,0} \\
& - 6h_{6,0,0,0,0,3}h_{15,0,2,0,0,0,1} - 2h_{11,2,0,0,0,0,1}h_{21,0,0,0,0,2,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -51h_{6,0,0,0,0,3}h_{15,0,2,0,0,1} - 17h_{11,2,0,0,0,1}h_{21,0,0,0,2,1} - 17h_{15,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,2,1} \\
& - 8h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 + 16h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,2} - 8h_{26,1,0,0,0,2}^2 - 8h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 \\
& + 16h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,2} - 8h_{30,0,1,0,0,2}^2 - 17h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,1,2} \\
& - 17h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,1,2} - 8h_{40,1,0,0,0,1,1}^2 - 8h_{43,0,1,0,0,1,1}^2 \\
& - 2h_{11,2,0,0,0,1}h_{48,1,1,0,0,1,0} + 2h_{15,0,2,0,0,1}h_{48,1,1,0,0,1,0} \\
& + 2h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{49,1,1,0,0,0,1} - 2h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{49,1,1,0,0,0,1}) \\
& + 2\omega_2^3\omega_3^2(26\omega_3(h_{0,2,0,0,0,2} + h_{2,0,0,0,2,0} + h_{2,0,0,0,2} + h_{2,0,0,0,2,0})) \\
& - 78h_{6,0,0,0,0,3}h_{11,2,0,0,0,1} - 78h_{5,0,0,0,3,0}(h_{10,2,0,0,0,1,0} + h_{14,0,2,0,0,1,0}) \\
& - 78h_{6,0,0,0,0,3}h_{15,0,2,0,0,1} - 26h_{11,2,0,0,0,1}h_{21,0,0,0,2,1} \\
& - 26h_{15,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,2,1} - 12h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 + 24h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,2} \\
& - 12h_{26,1,0,0,0,2}^2 - 12h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 + 24h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,2} \\
& - 12h_{30,0,1,0,0,2}^2 - 26h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,1,2} - 26h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,1,2} \\
& - 12h_{40,1,0,0,0,1,1}^2 - 12h_{43,0,1,0,0,1,1}^2 + 12h_{11,2,0,0,0,1}h_{48,1,1,0,0,1,0} \\
& - 12h_{15,0,2,0,0,1}h_{48,1,1,0,0,1,0} - 12h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{49,1,1,0,0,0,1} \\
& + 12h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{49,1,1,0,0,0,1} - 17h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{51,0,1,1,0,0,1} \\
& + 17h_{53,1,0,1,0,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} + 17h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} \\
& - 17h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) + 2\omega_2\omega_3^4(-25\omega_3(h_{0,2,0,0,0,2} + h_{2,0,0,0,2,0} \\
& + h_{2,0,0,0,2} + h_{2,0,0,0,2,0})) + 75h_{6,0,0,0,0,3}h_{11,2,0,0,0,1} \\
& + 75h_{5,0,0,0,3,0}(h_{10,2,0,0,0,1,0} + h_{14,0,2,0,0,1,0}) + 75h_{6,0,0,0,0,3}h_{15,0,2,0,0,1} \\
& + 25h_{11,2,0,0,0,1}h_{21,0,0,0,2,1} + 25h_{15,0,2,0,0,1}h_{21,0,0,0,2,1} + 12h_{25,1,0,0,0,2,0}^2 \\
& - 24h_{25,1,0,0,0,2,0}h_{26,1,0,0,0,2} + 12h_{26,1,0,0,0,2}^2 + 12h_{29,0,1,0,0,2,0}^2 \\
& - 24h_{29,0,1,0,0,2,0}h_{30,0,1,0,0,2} + 12h_{30,0,1,0,0,2}^2 + 25h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,1,2} \\
& + 25h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{36,0,0,0,1,2} + 12h_{40,1,0,0,0,1,1}^2 + 12h_{43,0,1,0,0,1,1}^2 \\
& + 18h_{11,2,0,0,0,1}h_{48,1,1,0,0,1,0} - 18h_{15,0,2,0,0,1}h_{48,1,1,0,0,1,0} \\
& - 18h_{10,2,0,0,0,1,0}h_{49,1,1,0,0,0,1} + 18h_{14,0,2,0,0,1,0}h_{49,1,1,0,0,0,1} \\
& + 21h_{42,0,1,0,1,1,0}h_{51,0,1,1,0,0,1} - 21h_{53,1,0,1,0,1,0}h_{54,1,0,0,1,0,1} \\
& - 21h_{50,0,1,1,0,1,0}h_{55,0,1,0,1,0,1} + 21h_{39,1,0,0,1,1,0}h_{56,1,0,1,0,0,1}) \\
& + 17\omega_2^4\omega_3(2h_{8,2,0,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& + 2h_{12,0,2,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + 2h_{9,2,0,0,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} \\
& + 2h_{13,0,2,0,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 2h_{9,2,0,0,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} \\
& + 2h_{13,0,2,0,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + h_{39,1,0,0,1,1,0}^2 + h_{42,0,1,0,1,1,0}^2 + h_{50,0,1,1,0,1,0}^2 \\
& + h_{51,0,1,1,0,0,1}^2 + h_{53,1,0,1,0,1,0}^2 + h_{54,1,0,0,1,0,1}^2 + h_{55,0,1,0,1,0,1}^2 + h_{56,1,0,1,0,0,1}^2) \\
& - 13\omega_2^2\omega_3^3(4h_{8,2,0,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) \\
& + 4h_{12,0,2,1,0,0,0}(h_{32,0,0,1,0,2,0} + h_{33,0,0,1,0,0,2}) + 4h_{9,2,0,0,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} \\
& + 4h_{13,0,2,0,1,0,0}h_{34,0,0,0,1,2,0} + 4h_{9,2,0,0,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} \\
& + 4h_{13,0,2,0,1,0,0}h_{35,0,0,0,1,0,2} + h_{39,1,0,0,1,1,0}^2 + h_{42,0,1,0,1,1,0}^2 + h_{50,0,1,1,0,1,0}^2 \\
& + h_{51,0,1,1,0,0,1}^2 + h_{53,1,0,1,0,1,0}^2 + h_{54,1,0,0,1,0,1}^2 + h_{55,0,1,0,1,0,1}^2 \\
& + h_{56,1,0,1,0,0,1}^2))/(8\omega_2\omega_3(4\omega_1^5 - 17\omega_1^3\omega_2^2 + 4\omega_1\omega_3^4)(\omega_1^4 + (\omega_2^2 - \omega_3^2)^2 \\
& - 2\omega_1^2(\omega_2^2 + \omega_3^2)))
\end{aligned}$$



## ANEXO A- TEOREMAS UTILIZADOS

Nesta seção apresentaremos alguns teoremas fundamentais para o estudo da estabilidade das soluções de equilíbrio.

### A.1 Teorema da estabilidade de Liapunov (Método direto)

Teorema: Seja  $V$  uma função real das variáveis reais  $t, x_1, \dots, x_n$  sujeita as condições

$$\sum_d x_d^2 \leq H \text{ e } t \geq t_0$$

onde  $t_0$  e  $H$  são constantes, com  $H$  não nulo. Assumindo que esta função é contínua e nula quando  $x_d=0$ . Se nas equações diferenciais do movimento perturbado é possível determinar o sinal função  $V$ , a derivada de  $V$  cujo sinal seja oposto ao do sinal definido por  $V$  ou identicamente zero, então o movimento não perturbado é estável. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Chetaev (1961).

### A.2 Teorema de Arnold

Limitando os termos da Hamiltoniana até quarta ordem e eliminando os termos não ressonantes com 2 graus de liberdade, significa:

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \text{ para } |k_1| + |k_2| \leq 4 \text{ ou se } \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| \neq \frac{p}{q} \text{ com } p, q = 1, 2, 3, 4.$$

Para vizinhança do equilíbrio linearmente estável, temos na forma normal (MOSER, 1968),

$$H = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\omega_\nu}{2} R_\nu + \sum_{\nu, \mu=1}^2 \delta_{\nu\mu} R_\nu R_\mu + \mathcal{G}_5$$

em que  $R_\nu = x_\nu^2 + y_\nu^2$  e  $\mathcal{G}_5$  é uma série contendo termos até quinta ordem.

Dessa forma segue o *teorema de Arnold* (1961): se para um sistema dado hamiltoniana H, o determinante

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \omega_1 \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix} = -(\delta_{11}\omega_2^2 - 2\delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2) \neq 0$$

então  $x=y=0$  é um ponto de equilíbrio estável para o sistema.

### A.3 Teorema de Lie em transformações canônicas

Seja  $\xi_j, \eta_j$  um conjunto de  $2n$  variáveis e  $f(\xi, \eta), S(\xi, \eta)$  seja funções arbitrárias de  $\xi_j$  e  $\eta_j$ . Define-se operadores  $D_s^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) por:

$$D_s^0 f = f \tag{A.1}$$

$$D_s^1 f = \{f, S\} \tag{A.2}$$

$$D_s^{n-1} f = D_s^{n-1} \{f, S\} \tag{A.3}$$

para  $n \geq 2$ , onde  $\{f, S\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x}$ , representa os parêntesis de

Poisson.

Segundo o teorema de Lie se o conjunto de  $2n$  variáveis de  $x_j$  e  $y_j$  definidas pela equação (HORI,1966):

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_s^n f(\xi, \eta) \tag{A.4}$$

é canônica se a série da equação (A.4) converge, sendo  $\varepsilon$  um pequeno parâmetro independente de  $\xi_j$  e  $\eta_j$ .