9º Workshop em Engenharia e Tecnologia Espaciais
15 e 16 de Agosto de 2018

Efeitos Viscosos e Compressíveis no Estudo de Estabilidade de Jatos Coaxiais

Jhonatan Andres Aguirre Manco [1], Marcio Teixeira de Mendonca [2].

[1] Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Aluno de Doutorado do curso Combustão e Propulsão-PCP.

[2]Instituto de Aeronáutica e Espaço,
Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial, São José dos Campos, SP, Brasil

jhonatan@lcp.inpe.br

Resumo. *O desempenho de câmaras de combustão de motores foguete depende da interação entre a chama, o campo acústico e o campo hidrodinâmico. Perturbações acústicas, na forma de ondas de pressão, e Hidrodinâmicas, em forma de vórtices, provocam alterações na frente de chama. Estas alterações resultam em oscilações na liberação de calor, as quais por sua vez, excitam o campo acústico e o hidrodinâmico levando a um processo de autoexcitação de perturbações que, ao entrarem em ressonância com as frequências naturais do combustor podem provocar a sua destruição. Com vistas a melhor entender os processos que ocorrem em câmaras de combustão de motores foguetes, o presente trabalho pretende mostrar a relação entre perturbações acústicas, térmicas e hidrodinâmicas presentes no escoamento de jatos coaxiais. Serão estudados os parâmetros associados com o desenvolvimento das perturbações, tais como o número de Mach, o número de Reynolds e as razões de velocidade. Para tanto, os modos acústicos e hidrodinâmicos da equação de Euler para o escoamento base, dado por jatos coaxiais, serão investigados resolvendo-se as equações de estabilidade de Rayleigh, derivadas assumindo-se solução linear, local por modos normais. Além de usar a simulação numérica direta para resolver as equações de Navier-Stokes para jatos coaxias, usando esquemas de diferenças finitas de alta ordem.*

Palavras-chave: Jatos coaxiais, Estabilidade Hidrodinâmica, Simulação numérica Direta

Introdução

Uma análise de estabilidade linear em jatos coaxiais compressíveis foi realizada recentemente por [Perrault-Joncas and Maslowe 2008] utilizando um modelo não viscoso com perfis de velocidade e temperatura contínuos. Este estudo investigou diversos fatores que influenciam a estabilidade de jatos coaxiais, tais como o efeito da compressibilidade, das razões de velocidade e das espessuras de vorticidade. Mais recentemente, [Gloor et al. 2013] publicaram um estudo de características de estabilidade e acústica de jatos compressíveis coaxiais e estudaram o efeito do número de Mach, do número de Reynolds, da espessura de quantidade de movimento e a razão de velocidades e temperaturas entre os jatos interno e externo. [Gloor et al. 2013] enfatizaram a importância dos modos acústicos, os quais estão associados ao fenômeno de ruído de jatos. O estudo permite o melhor entendimento das interações entre os modos de Kelvin-Helmhotz e os modos acústicos. Porém, o modelo utilizado pelos autores não utilizaram uma implementação rigorosa de condições de contorno não reflexivas a fim de garantir que modos espúrios estejam presentes na solução.

No trabalho de [Gloor et al. 2013], um aspecto importante é a interação entre os modos acústicos e a instabilidade hidrodinâmica, que se torna relevante em escoamentos transônicos e supersônicos. Desde o trabalho de [Lees and Lin 1946], diversos trabalhos identificam a relevância da interação entre os modos acústicos hidrodinâmicos na estabilidade do escoamento. O trabalho pioneiro de [Lees and Lin 1946] apresenta a versão compressível das equações de estabilidade de Rayleigh e serviu de base para estender os teoremas de Rayleigh e Fjörtoft para o caso compressível. Os modos acústicos identificados por [Lees and Lin 1946] foram descritos sistematicamente por [Mack 1963] para camada limite supersônica.

Deseja-se nesta pesquisa investigar as características de propagação de modos acústicos e hidrodinâmicos quando se tem fortes gradientes de temperatura e velocidade e diferentes números de Reynolds.

Metodologia

Assumindo que o jato coaxial é formado por um fluido continuo, seu comportamento pode ser modelado pelas equações de Navier-Stokes em coordenadas radiais.

Equações de Navier-Stokes

As equações de conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia, na forma adimensional para escoamento compressível de gases perfeitos, sem geração de calor, sem forças de volume e sem reações químicas são dadas por

$$\frac{D\tilde{\rho}}{D\tilde{t}} + \tilde{\rho}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} = 0, \tag{1}$$

$$\tilde{\rho}\frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{D\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tag{2}$$

e

$$\tilde{\rho}\frac{D\tilde{E}}{D\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{p}\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{RePr}\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{k}\tilde{\nabla}\tilde{T}), \tag{3}$$

com

$$D\alpha/D\tilde{t} = \partial\alpha/\partial\tilde{t} + \tilde{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\nabla}\alpha,$$

onde $\tilde{\rho}$ é a massa específica $\tilde{\mathbf{u}}$ é o vetor velocidade, $\tilde{Y}_i$ é a fração mássica da espécie i, e $\tilde{E}$ é a energia total.

Os parâmetros $\tilde{k}$ e $\tilde{\mu}$ representam os coeficientes de transporte de calor e quantidade de movimento e são função da temperatura $\tilde{T}$ O tensor de tensões na sua forma dimensional $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ é definido para gases newtonianos como

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\mu}\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{I}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}})^T\right). \tag{4}$$

O operador $\tilde{\nabla}$ em coordenadas cilíndricas $(r\mathbf{e}_r, \theta\mathbf{e}_\theta, z\mathbf{e}_z)$ resulta para um escalar a ou um vetor

vector $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{e}_r + \alpha_2\mathbf{e}_\theta + \alpha_3\mathbf{e}_z$ e escalar α

$$\tilde{\nabla}\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\tilde{r}}\mathbf{e}_r + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\alpha}{\partial\tilde{\theta}}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\alpha}{\partial\tilde{z}}\mathbf{e}_z \tag{5}$$

e

$$\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\tilde{r}}\left[\frac{\partial(\tilde{r}\alpha_1)}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\tilde{\theta}} + \frac{\partial(\tilde{r}\alpha_3)}{\partial\tilde{z}}\right]. \tag{6}$$

Equações de Estabilidade Linear

As equações de estabilidade linear são obtidas a partir das equações da linearização das equações de Navier-Stokes, assumindo-se que o escoamento base é paralelo

$$\bar{\mathbf{u}} = [0, 0, \bar{w}(r)] \tag{7}$$

Combinando-se a equação da conservação da massa, da quantidade de movimento e da pressão, obtém-se a equação de Rayleigh para escoamento compressível na sua forma final

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}t}\left(\left(\frac{\bar{D}}{\bar{D}t}\right)^2 - \bar{a}^2\nabla^2\right)p' - \bar{a}^2\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\frac{\bar{D}}{\bar{D}t} + 2\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right)\frac{\partial^2 p'}{\partial z\partial r} = 0 \tag{8}$$

Solução Modal

Dadas a equações para as perturbações, busca-se soluções locais por modos normais assumindo-se que as perturbações se comportam como ondas com amplitude que depende apenas da direção radial, frequência ω, número de onda k na direção longitudinal e n na direção azimutal.

$$p'(r,\theta,z,t) = \Re\left\{\hat{p}(r)e^{[i(kz+n\theta-\omega t)]} + \hat{p}^*(r)e^{[i(k^*z+n^*\theta-\omega^*t)]}\right\} \tag{9}$$

onde "*" representa o complexo conjugado. Para uma análise espacial, $k = k_r + ik_i$ são o número de onda e a taxa de amplificação espacial. A amplitude complexa $\hat{p}$ contempla a amplitude da perturbação e informação de fase da onda.

Substituindo-se esta proposta na equação da pressão, resulta um problema de autovalor dado pela equação diferencial ordinária.

$$\frac{d^2\hat{p}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + 2\frac{1}{(\bar{w}-c)}\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dr}\right)\frac{d\hat{p}}{dr} + \left(M_c^2 - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2\right)\right)\hat{p} = 0, \tag{10}$$

onde $c = \omega/k$ é a velocidade de fase da perturbação e $M_c^2 = (c-W)^2/a^2$ é o número de Mach convectivo.

As condições de contorno para a equação 10 podem ser obtidas se considera-se que o jato coaxial é uniforme no centro e no infinito, o que significa que os gradientes de velocidade e temperatura do escoamento base podem ser eliminados da equação.

Para $r \to 0$ a equação 10 toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2\hat{p}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\hat{p}}{dr} + \left(n_0 - \frac{n^2}{r^2}\right)\hat{p} = 0, \tag{11}$$

onde $n_0 = \sqrt{k^2 - Mc^2}$ e o Mach convectivo é medido em referencia ao jato interior cuja velocidade é W_0 e a velocidade do som é dada por a_0.

Esta equação pode ser reconhecida como uma equação diferencial de Bessel, cuja solução geral é dada por:

$$\hat{p} = AJ_n(n_0 r) + BY_n(n_0 r), \tag{12}$$

onde J_n e Y_n são as funções de Bessel primeira e segunda especie de ordem n, respectivamente.

Como a pressão deve ter um limite no centro do jato, imediatamente o coeficiente B pode ser considerado como zero, já que a função de Bessel de segunda especie é descontinua no começo. Assim a a condição de contorno no centro do jato fica expressada por

$$\hat{p} = AJ_n(n_0 r). \tag{13}$$

De igual forma quando $r \to \infty$ a equação 10 pode ser escrita como:

$$\hat{p} = BH_n(n_e i r). \tag{14}$$

onde H_n é a funções de Bessel de segunda especie modificada de ordem n_e. $n_e = \sqrt{Mc^2 - k^2}$.

Problema de Autovalor

A equação de pressão 10 pode ser escrita como um problema de autovalor generalizado para o parâmetro k,

$$\begin{bmatrix} -L_{q_1} & -L_{q_2} & -L_p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \hat{p} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \hat{p} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

o que representa um estudo espacial de instabilidade e onde $D = d/dr$. Onde

$$q_1 = k\hat{p} \qquad q_2 = kq_1 \tag{16}$$

$$R_1 = \bar{w} - \bar{w}^3/\bar{a}^2 \tag{17}$$

$$L_{q_2} = 3\omega(\bar{w})^2/\bar{a}^2 - \omega \tag{18}$$

$$L_{q_1} = \bar{w}D^2 - \frac{1}{r}\bar{w}D + 2\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)D - 3\omega^2\bar{w}/\bar{a}^2 - \omega\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dr} + \bar{w}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dr} + \bar{w}\frac{n^2}{r^2} \tag{19}$$

$$L_p = \frac{1}{r}\omega D + \omega D^2 + \omega^3/\bar{a}^2 - \omega\frac{n^2}{r^2} \tag{20}$$

O problema final de autovalor linear que pode ser usado para o estudo de instabilidade de um jato coaxial fica expressado sucintamente por

$$\mathbf{L}\hat{\mathbf{q}} = k\mathbf{R}\hat{\mathbf{q}}, \tag{21}$$

junto com as condições de contorno:

$$\hat{p} = AJ_n(n_i r). \tag{22}$$

e

$$\hat{p} = BH_n(n_e i r). \tag{23}$$

Este sistema de equações será resolvido usando o método de matrizes compostas.

A solução da equação acima fornece o espectro de frequências, números de onda e taxas de amplificação das perturbações suportadas pelo escoamento base. Tal espectro contempla modos hidrodinâmicos, acústicos e entrópicos do sistema.

Resultados e Discussão

O escoamento base escolhido para representar os jatos coaxiais é do tipo tangente hiperbólica e podem ser vistos na figura1. Este tipo de escoamento representa dois jatos a uma determinada velocidade sendo expelidos no ambiente quase parado.

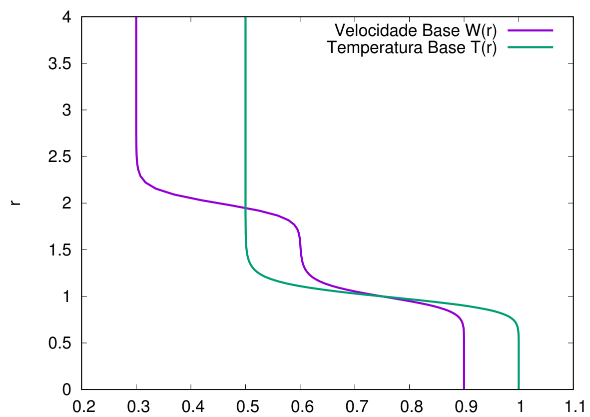

Figure 1. Escomento base que representa o jato coaxial

Ao perturbar este tipo de escomento base, a equação de Rayleight e a equação de Orr-Sommerfeld, usada para escomentos viscosos, oferecem as seguintes soluções para diferentes números de Reynolds.

Um Reynolds infinito é representado pela curva amarela, que é a solução para equação de Rayleight obtida a partir das equações de Euler. Esta curva apresenta dois tipos de comportamentos, um para baixas frequências $\omega < 2.5$, e um comportamento diferente para as altas frequências. Cada um destes comportamentos devem-se a forma como os jatos coaxiais são criados. A primeira interface entre os dois jatos para diferente velocidade é represetado pelas altas frequências, enquanto a interface entre o segundo jato e o ambiente é representado pelas baixas frequências. O efeito da compressibilidade pode ser visto pelas taxas de amplificação menores da interface dos jatos, desempenhando um papel estabilizante no problema.

Com o aumento do número de Reynolds as taxas de amplificação das duas interfaces diminuem, mostrando como era esperado, que o aumento da viscosidade tenha um papel estabilizador, verificado na figura 2 .

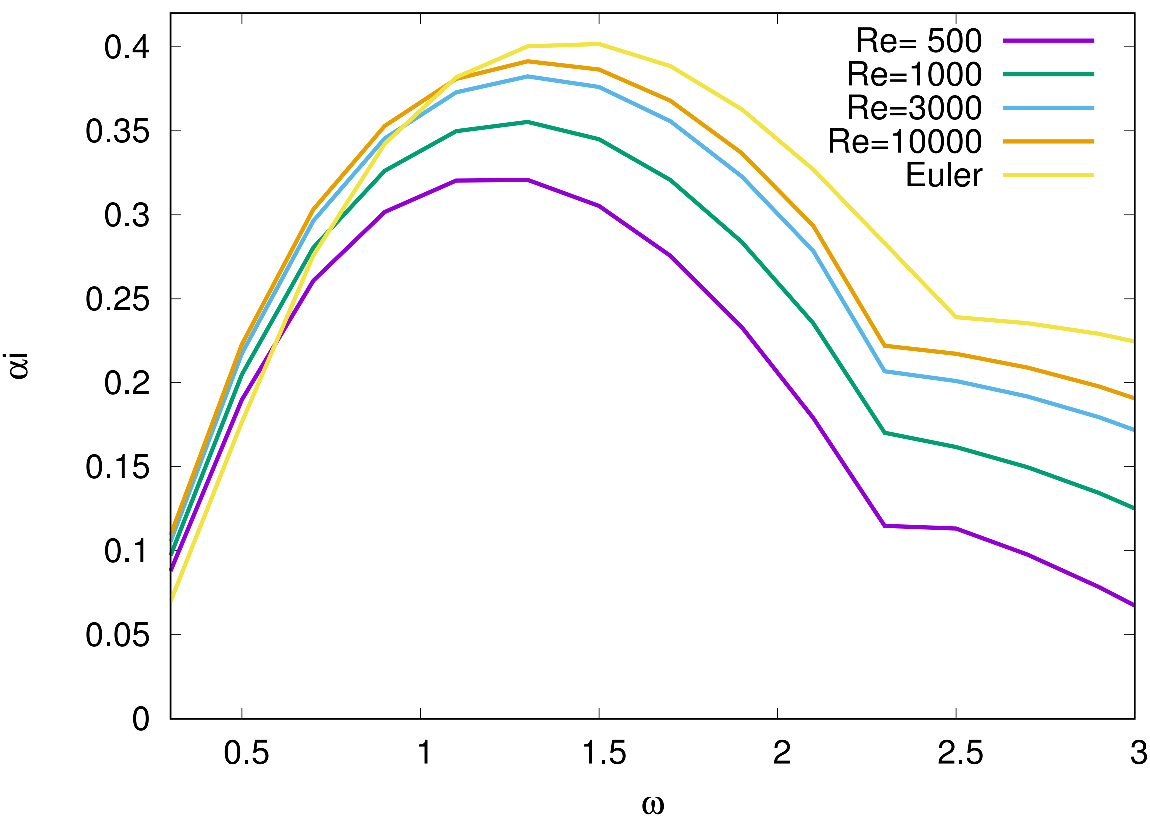

Figure 2. Taxas de amplificação, solução para equação linear das perturbações para um escoamento base do tipo jatos coaxiais

Gráficamente e com ajuda da simulação numérica direta pode-se ver o comportamento das instabilidades nos jatos coaxiais, figura 3. Como na interface do jato exterior e o ambiente os vórtices são muito maiores que a interface interna, e como mudam com a frequência de excitação. Também pode ser visto que os vórtices das duas interfaces podem interagir entre elas quando as taxas de amplificação são suficientemente grandes.

Conclusão

O estudo de estabilidade para jatos coaxiais foi realizado usando um modelo linear para a equação de Rayleight, e um modelo não linear para resolver as equações de Navier-Stokes. Mostrando os efeitos da compressibilidade e da viscosidade na formação das perturbações de Kelvin-Helmholtz. Este estudo evidenciou que a maior velocidade das correntes dos jatos apresenta taxas de amplificação menores, levando a formacão de menores vórtices.

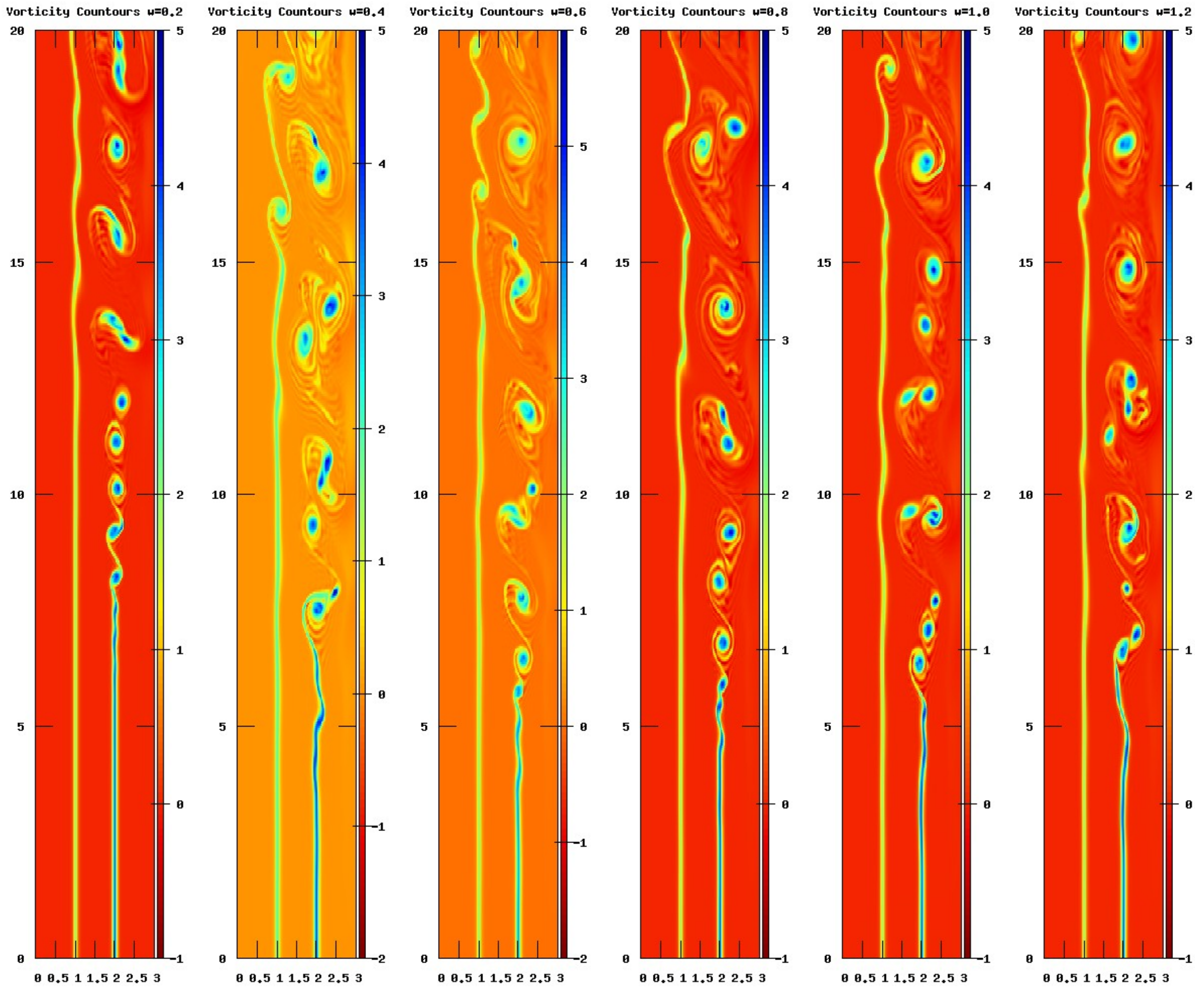

Figure 3. Contornos de vorticidade para diferentes frequências, solução para equação de Navier-Stokes para um escoamento base do tipo jato coaxial

O mesmo comportamento ocorre quando a viscosidade do fluido aumenta. Portanto, o aumento das velocidades e da viscosidade diminuiria a mistura dos gases numa câmara de combustão de um motor foguete. Sendo estes fatores importantes para serem considerados em um otimizado projeto de uma câmara de combustão.

Agradecimentos: *Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)*

References

[Gill 1965] Gill, A. E. (1965). On the inviscid instability of the laminar mixing of two parallel streams of a compressible fluid. *Physics of Fluids*, 8:1428–1430.

[Gloor et al. 2013] Gloor, M., Obrist, D., and Kleiser, L. (2013). Linear stability and acoustic characteristics of compressible, viscous, subsonic coaxial jet flow. *Physics of Fluids*, 25(8).

[Lees and Lin 1946] Lees, L. and Lin, C. C. (1946). Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. Technical Note NACA TN-1115, National Advisory Committee for Aeronautics– NACA, Washington.

[Mack 1963] Mack, L. M. (1963). The stability of the compressible laminar boundary layer according to a direct numerical solution. *In Space Programs Summary*, 37-24:271–274.

[Mack 1990] Mack, L. M. (1990). On the inviscid acoustic-mode instability of supersonic shear flows - Part 1: Two-dimensional waves. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2(2):97–123.

[Perrault-Joncas and Maslowe 2008] Perrault-Joncas, D. and Maslowe, S. A. (2008). Linear stability of a compressible coaxial jet with continuous velocity and temperature profiles. *Physics of Fluids*, 20(7):1–10.

[Tam and Hu 1989] Tam, C. K. W. and Hu, F. Q. (1989). The instability and acoustic wave modes of supersonic mixing layers inside a rectangular channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 203:51âĂŞ76.