



EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE: UM BREVE ESTUDO DE MANOBRAS EVASIVAS EM ÓRBITAS BAIXAS

Arthur Alex Felipe Barbosa Moreno¹, Helio Koiti Kuga²,
Antonio Fernando Bertachini De Almeida Prado³

¹Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Aluno de Mestrado do curso de Controle e Mecânica Celeste - CMC.

²Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Divisão de Mecânica Espacial e Controle

³Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Divisão de Mecânica Espacial e Controle

arthurallex.1993@gmail.com

Resumo. *Objetos espaciais à deriva podem desenvolver altas velocidades capazes de arruinar a operação de satélites ou outros veículos espaciais e por em risco vidas humanas quando colidem. Nesse trabalho, um modelo foi utilizado com base nos trabalhos seminais de Clohessy-Wiltshire (1960). Estas equações constroem o movimento relativo entre dois corpos e tem sua utilidade para manobras de Rendezvous como também manobras de evasão. No mais, o movimento relativo foi descrito e simulado para situações sem propulsão e com propulsão com vários fatores de potência com algumas ressalvas tecnológicas e de implementação apontando uma relação inversa entre o fator de potência e as distâncias relativas.*

Palavras-chave: detritos espaciais; modelagem e simulação; manobras evasivas.

1. Introdução

Os detritos espaciais em órbitas baixas são grandes ameaças para satélites ativos e tem sido de grande preocupação para as agências espaciais e comunidade científica no mundo. A grande quantidade destes objetos em órbita baixa (*Low-Earth Orbit*, LEO) aumenta o risco de colisões entre si e com objetos operantes no espaço, os quais são difíceis de serem evitados e podem potencialmente gerar outros milhares de detritos em cada colisão, criando colisões secundárias (JESUS et al., 2012). Esse problema tem sido estudado a fundo e acredita-se que a população de detritos pode ter alcançado, ou pode até estar acima, do limite previsto pelo síndrome de Kessler (ROSSI et al., 2009). Consequentemente, os trabalhos recentes mostram que existem métodos para contornar essa situação, na tentativa de manter um ambiente espacial sustentável. Contudo, dados numéricos atualizados revelam que, no futuro, mesmo com medidas de mitigação, a região LEO se encontra numa situação em que a população de detritos espaciais irá continuar crescendo, mesmo se todos os futuros lançamentos forem suspensos (ESA, 2021). Nesse caso, métodos de remoção ativa de detritos devem ser aplicados para controlar o aumento dessa população (PINHEIRO, 2018).



Deste modo, um estudo sobre manobras evasivas para os veículos espaciais é crucial, diante das inúmeras possibilidades de colisões, apenas com um único detrito como também secundariamente com nuvens de detritos espaciais provindas de colisões anteriores. As manobras orbitais são de fundamental importância para o sucesso de uma missão espacial. Todo veículo operacional deve ser programado para realizar manobras ao longo do tempo, tendo como definição uma mudança na sua posição e na sua velocidade. Contudo, essa variação de órbita pode ser realizada por sistemas de propulsão, e assim realizando uma alteração da: posição, velocidade e massa do veículo espacial, nos estados inicial e final.

Uma manobra evasiva pode ser realizada de duas formas: Através da atuação do sistema propulsor, o qual exige consumo de combustível, tal que o referido sistema controla a direção da queima para se escapar da colisão em curso; através de manobras de swing-by em torno de corpos celeste massivos que transfere energia gravitacional ao outro corpo. Porém, neste trabalho será visto apenas o primeiro como em (PINHEIRO, 2018) (OLIVEIRA, 2016) (SANTANA, 2018) (JESUS et al., 2012).

As equações de (CLOHESSY; WILTSHIRE, 1960) descrevem o movimento relativo entre dois objetos próximos que estão sob a ação da gravidade de um corpo, por exemplo a Terra. O estudo dessas equações permitiu a aplicação de manobras de *Rendezvous*, a saber, encontro entre dois veículos espaciais com velocidade relativa próxima a zero. Para que ocorra esse tipo de manobra, é necessário que um dos corpos seja o veículo de controle, o qual servirá de referência, e o outro o veículo o interceptador (PINHEIRO, 2018). Assim, o veículo de controle capta o movimento do veículo interceptador, por meio de um sensor, e calcula a quantidade de combustível necessário para a realização da manobra de encontro entre eles, chamada manobra de “*Rendezvous*”. Assim, é possível chegarmos ao objetivo que necessitamos neste trabalho. Seja o veículo interceptador um detrito espacial, e o foco neste momento consiste em realizar o inverso de uma manobra de “*Rendezvous*”, ou seja, uma evasão frente à possibilidade de colisão entre o veículo e o detrito.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: seção 2 constrói a formulação do problema de aproximação de dois corpos de maneira inversa; seção 3 demonstra como obter o conjunto de condições iniciais de colisão a partir de trabalhos relacionados. seção 4 são apresentadas as soluções para manobras evasivas sendo penalizadas pelo decaimento exponencial de massa provocadas pela queima de combustível; seção 5 a implementação do comentado na seção 4; finalmente a seção 6 condensando o principal resultado.

2. Formulação do Problema

As equações de (CLOHESSY; WILTSHIRE, 1960) podem ser usadas em manobras evasivas a partir das equações de *Rendezvous* como mencionado anteriormente.

A Fig. 1 apresenta o referencial com coordenadas (x, y, z) centrado no veículo espacial, que realiza movimento circular uniforme em relação à Terra. Os vetores \vec{R}_0 e \vec{R} são respectivamente os vetores posição, respectivamente, posição do detrito espacial e do veículo, medidos a partir do referencial ECI (*Earth Centhered Inertial*) (X, Y, Z) com origem no centro na Terra. O vetor posição em relativa ao referencial girante é dado por \vec{r} . Assim, o movimento relativo entre os vetores \vec{R}_0 e \vec{R} apresenta a seguinte equação no ECI (JESUS et al., 2012):

$$\ddot{\vec{R}}_0 = \ddot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}, \quad (1)$$

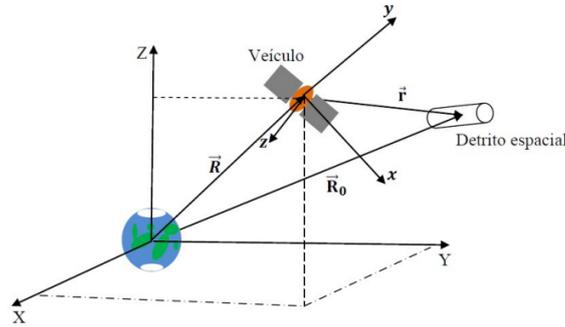


Figura 1. Fonte: (PINHEIRO, 2018)

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do veículo. O termo $2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ é a aceleração de Coriolis e o termo $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ corresponde à aceleração centrípeta. Como a órbita do referencial girante é circular e $\vec{\omega} = \omega \hat{k} = cte$, é possível escrever a partir da (1):

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}, \quad (2)$$

Os vetores posição \vec{r} , velocidade \vec{v}_{rel} e aceleração \vec{a}_{rel} do detrito espacial em relação ao veículo são dadas:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (3)$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (4)$$

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (5)$$

A partir da 2ª Lei de Newton, as equações do veículo e detrito podem ser obtidas, consequentemente após linearizações e aproximações as equações para a posição relativa \vec{r} . Logo, para o veículo:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu\vec{R}}{|\vec{R}|^3} - \vec{f} \quad (6)$$

onde \vec{f} é o vetor força de propulsão por unidade de massa Para o detrito

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = \frac{-\mu(\vec{R} + \vec{r})}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} - \vec{f} \quad (7)$$

Expandindo em série de Taylor o termo gravitacional, obtemos:

$$|(\vec{R} + \vec{r})^{-3}| = \left| \frac{1}{(\vec{R})^3} - \frac{3\mu(\vec{R} \cdot \vec{r})\vec{R}}{(\vec{R})^5} + \vec{f} \right| \quad (8)$$

Escrevendo $\omega = \mu/R^3$, temos:

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r} + 3\omega^2y\hat{j} + \vec{f} \quad (9)$$



Substituindo as eq. (3), (4), (5) e (9) em (2), finalmente chegamos nas equações de Clohessy-Wiltshire:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = f_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = f_y \\ \ddot{z} + \omega^2z = f_z \end{cases} \quad (10)$$

3. Conjunto de Condições Iniciais de Colisões - CCIC

Sem propulsão, o veículo (ou satélite) está sujeito apenas a força gravitacional terrestre.

$$f_x = f_y = f_z = 0 \quad (11)$$

Assim, a posição relativa, \vec{r} , do satélite em relação ao detrito espacial, tem como solução a partir do conjunto de EDOs ¹ homogêneas de 2ª ordem da Eq. (11).

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 6y_0 \right) \sin\omega t - \frac{2\dot{y}_0}{\omega} \cos\omega t + \\ & + (6\omega y_0 - 3\dot{x}_0)t + \left(x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 \right) \cos\omega t + \frac{y_0}{\omega t} \sin\omega t + \\ & + \left(4y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$z(t) = z_0 \cos\omega t + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin\omega t \quad (14)$$

onde x_0 , y_0 e z_0 são componentes da posição inicial relativa e \dot{x}_0 , \dot{y}_0 e \dot{z}_0 componentes da velocidade inicial relativa. As equações acima apresentam a situação de veículo e detrito em colisão, ou seja $x(t_c) = y(t_c) = z(t_c) = 0 \Rightarrow |\vec{r}(t_c)| = 0$. Logo, podemos isolar e estabelecer um conjunto de velocidades relativas iniciais para as quais o sistema entrará em colisão. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = & \frac{[6y_0(\sin\omega t_c - \omega t_c) - x_0]\omega \sin\omega t_c}{(4\sin\omega t_c - 3\omega t_c)\sin\omega t_c + 4[1 - \cos\omega t_c]^2} + \\ & + \frac{2\omega y_0[4 - 3\cos\omega t_c](1 - \cos\omega t_c)}{(4\sin\omega t_c - 3\omega t_c)\sin\omega t_c + 4[1 - \cos\omega t_c]^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{y}_0 = \frac{2\dot{x}_0[1 - \cos\omega t_c] - \omega y_0[4 - 3\cos\omega t_c]}{\sin\omega t_c} \quad (16)$$

$$\dot{z}_0 = -\frac{z_0\omega \cos\omega t_c}{\sin\omega t_c} \quad (17)$$

Assim, para qualquer valor de t_c maior do que 0 pode ser construído um conjunto de trajetórias com velocidades iniciais relativas para colisão. Dado as limitações tecnológicas impostas na

¹Equações Diferenciais Ordinárias



dinâmica de um satélite foram excluídos algumas possibilidades, como (OLIVEIRA, 2016), (PINHEIRO, 2018) e (JESUS; SOUSA, 2014). Para saber a minúcia por trás da estratégia de CCIC, vide (JESUS et al., 2012).

4. Manobras Evasivas com Decaimento Exponencial da massa de combustível

No caso não homogêneo, ou seja para $f_x = f_y = f_z \neq 0$, as equações de Clohessy-Wiltshire (CLOHESSY; WILTSHIRE, 1960) sofre algumas mudanças. A equação de Tsiolkovsky fornece o arcabouço teórico abaixo, uma vez que busca explicar o empuxo provocado pela variação de massa (combustível + veículo) advindas da queima do combustível e velocidade relativa entre os estados pré e pós consumo de combustível. Assim,

$$\vec{f} = \frac{-1}{M(t)} \vec{v}_e \frac{dM(t)}{dt} = -\vec{v}_e \frac{dM(t)}{dt} \quad (18)$$

Onde \vec{v}_e denota a velocidade de exaustão dos gases e $M(t)$ denota a massa total do veículo, incluindo a massa do combustível que obedece a seguinte função

$$M(t) = m_0(\chi + e^{\gamma t}) \quad (19)$$

ou seja, considera-se um decaimento exponencial para a massa de combustível. A manobra evasiva se dá a partir de parâmetros que dependem da tecnologia do sistema propulsor, como o fator de potência do propulsor γ , medido em unidades de frequência, e o fator de massa χ , que é a razão entre a massa do corpo do veículo pela massa inicial de combustível a bordo. No mesmo sentido dos trabalhos de (JESUS et al., 2012), (JESUS; SOUSA, 2014), (OLIVEIRA, 2016), (PINHEIRO, 2018), (SANTANA, 2018) encontraram as equações a partir da solução das Eq. (10) e (18). Assim, temos, após o acionamento do propulsor as componentes de \vec{f} no referencial que gira iguais em todos os instantes, Então, a solução analítica para \vec{r} é computada numericamente a partir das equações abaixo (10):

$$x(t) = 2A \sin(\omega t) - 2B \cos(\omega t) + Et + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-n\gamma t} + G \quad (20)$$

$$y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\gamma t} + D \quad (21)$$

$$z(t) = H \cos(\omega t) + I \sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} J_n e^{-n\gamma t} \quad (22)$$



$$A = \frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 + \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2v_{ex}}{\omega} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \right) \quad (23)$$

$$B = \frac{\dot{y}_0}{\omega} + \frac{v_{ey}}{\omega} \ln \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2v_{ex}n\gamma}{\omega^2} + \frac{v_{ey}}{\omega} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \right) \quad (24)$$

$$E = 6\omega y_0 - 3\dot{x}_0 - 3v_{ex} \quad (25)$$

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{4v_{ex}}{n\gamma} + \frac{2v_{ey}}{\omega} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \right) - \frac{v_{ex}}{n\gamma} \quad (26)$$

$$G = \frac{2\dot{y}_0}{\omega} + x_0 + \frac{2v_{ey}}{\omega} \ln \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \frac{3v_{ex}}{\omega} \quad (27)$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(v_{ex} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \right) \quad (28)$$

$$D = 4y_0 - \frac{2x_0}{\omega} - \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) \quad (29)$$

$$H = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v_{ez} \gamma}{\chi^n \omega^2} \frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \quad (30)$$

$$I = \frac{\dot{z}_0}{\omega} - \frac{v_{ez}}{\omega} \ln \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \chi^2 \omega} v_{ez} \left(\frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \right) \quad (31)$$

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n \omega} v_{ez} \left(\frac{1}{1 + \frac{n^2\gamma^2}{\omega^2}} \right) \quad (32)$$

5. Implementação do Problema de Manobras Evasivas

O trabalho de (JESUS et al., 2012) aponta CCIC, ou seja o estudo das Possibilidades de Colisões, para uma altitude $h = 220km$ e $r_0 = 3km$, a ocorrência majoritária das velocidades relativas no intervalo de 0 a $1km/s$. Contudo, as colisões com velocidades relativas de módulo muito próximas de zero podem não gerar dano relevante ao veículo. Como também não foi encontrado condições iniciais que fornecessem velocidades relativas de colisão dentro do intervalo de 8.5 a $20km/s$.

Nos trabalhos de (JESUS; SOUSA, 2014) (JESUS et al., 2012) sugerem uma maior atenção a condição com o valor que o módulo de \vec{r} pode assumir, porque o seu valor máximo não pode ser muito pequeno para favorecer à condição de *Rendezvous*, e nem sequer grande a ponto de fazer a razão $\frac{r}{R} \rightarrow 1$, logo essa razão seria significativamente suficiente para inviabilizar a aproximação da Eq. (8), gerando o termo dependente de tal razão não negligível. No mais, afetaria bruscamente a precisão do modelo linear.

Este trabalho se dá de forma semi-analítica, ou seja as equações foram encontradas analiticamente baseado nos trabalhos de (JESUS et al., 2012), porém os cálculos de propagação trajetória

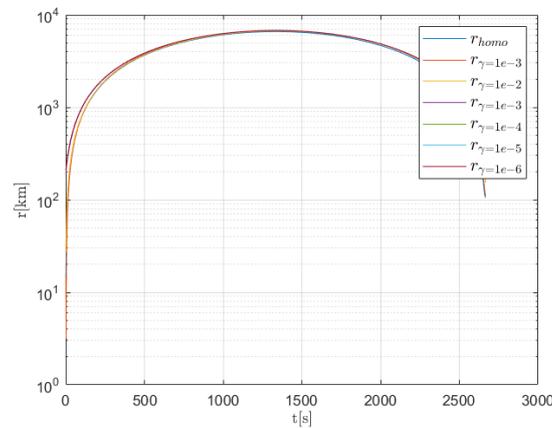


Figura 2. Variação de posição relativa $|\vec{r}|$ mediante variação da potência do Propulsor, γ . Fonte: Autor.

e séries infinitas foram calculadas numericamente, com ajuda de um notebook (Intel Core I7 Quad Core, 8Gb de RAM, HD 500Gb ROM) com um software de computação numérica (Matlab).

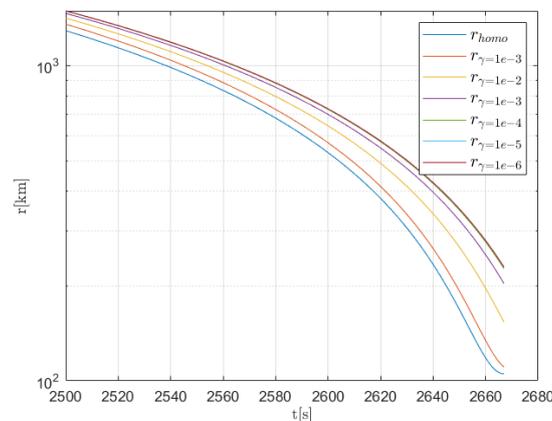


Figura 3. Zoom nos segundos finais da variação de posição relativa $|\vec{r}|$ mediante variação da potência do Propulsor, γ . Fonte: Autor.

As CCIC são as mesmas usadas por (PINHEIRO, 2018) e (JESUS; SOUSA, 2014) $\vec{v}_e = 3km/s$, $\chi = 10$, $h = 220km$, $t_c = 2667s$, $|r_0| = 3km$ e $|v_0| = 7.76km/s$ e a trajetória do módulo de \vec{r} é mostrada na Fig.2. É possível notar que quanto menor o fator de potência do satélite maior a distância relativa no tempo que teria da colisão com apenas um detrito, supostamente na solução da eq. homogênea, denotado pela r_{homo} , dado uma relação de massa combustível/veículo de 10%, como mostra a Fig.3.

6. Conclusões

Foi proposta a solução das equações de Clohessy-Wiltshire focando em órbitas LEO, considerando a solução sem propulsão e com propulsão com decaimento exponencial de massa. Para isso foi utilizado uma variação de fatores de potência de propulsão do veículo, e *a posteriori* verificação da posição relativa final. Ou seja foi possível demonstrar aplicações práticas de potência para diferentes propelentes (fator de potência).



Por fim, trabalhos futuros poderão considerar: a modelagem do arrasto atmosférico dado a baixa altitude; uma visão do ponto de vista de controle ótimo, gerando funcionais que visem melhorar o consumo quando são incluídos outros detritos; e principalmente avaliar questões de erros associados aos integradores numéricos para não gerar condições iniciais de colisões para cada órbita.

Agradecimentos: *O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).*

Referências

- CLOHESSY, W. H.; WILTSHIRE, R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, ARC, v. 27, n. 9, p. 653–659, 1960.
- ESA. *Space debris by the numbers*. 2021. Disponível em: (https://www.esa.int/Safety/_Security/Space/_Debris/Space/_debris/_by/_the/_numbers).
- JESUS, A. D. C. et al. Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2012, n. 12, p. 15, 2012.
- JESUS, A. D. C.; SOUSA, R. R. Processing optimized for symmetry in the problem of evasive maneuvers. *Computational and Applied Mathematics*, v. 49, n. 9, p. 521–534, 2014.
- OLIVEIRA, E. M. *Manobras Evasivas Subótimas em LEO Sujeitas à Força de Arrasto Atmosférico e a Colisões Com Detritos Espaciais*. [S.l.]: UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana, 2016. 125f p.
- PINHEIRO, E. C. *Equação de Clohessy-Wiltshire: modelo linear nas manobras evasivas de veículos espaciais*. [S.l.]: UNIFESP, 2018. 95f p.
- ROSSI, A. et al. The new space debris mitigation (sdm 4.0) long term evolution code. In: *in Proceedings of the 5th European Conference on Space Debris*. [S.l.: s.n.], 2009.
- SANTANA, J. d. J. *Soluções de EDO e Simulações Numéricas para Dinâmica Relativa Colisional entre Veículos Operacionais e Detritos Espaciais*. [S.l.]: UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana, 2018. 103f p.