

## **Aplicação da *Theory of Functional Connections* (TFC) em problemas da Mecânica Celeste**

**Guilherme Afonso Siqueli<sup>1</sup>, Allan Kardec de Almeida Junior<sup>2</sup>,  
Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil  
Aluno de Doutorado do curso de Mecânica Espacial e Controle - CMC.

guilherme.siqueli@inpe.br

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil

---

**Resumo.** *Este trabalho apresenta o conceito de Teoria das Conexões Funcionais (Theory of Functional Connections - TFC), recém desenvolvida e suas potenciais aplicações em problemas da mecânica celeste, em especial casos envolvendo o problema circular restrito dos três corpos (PCR3C). O PCR3C é muito utilizado em mecânica celeste e apresenta uma literatura bastante desenvolvida, sendo portanto um bom candidato a ser explorado como exemplo de aplicação futura. Trata-se de um modelo que considera um corpo de massa desprezível em relação aos outros corpos envolvidos, orbitando um corpo chamado primário e um corpo perturbador também é considerado na dinâmica do sistema. A TFC é um método de interpolação funcional, que pode ser utilizado para gerar solução de equações diferenciais. Este trabalho apresenta o conceito de solução de equações diferenciais que representam a dinâmica do PCR3C através da TFC.*

---

**Palavras-chave:** Teoria das Conexões Funcionais, TFC, Problema circular restrito dos três corpos, PCR3C.

### **1. Introdução**

A Teoria das Conexões funcionais recentemente desenvolvida por Daniele Mortari, é uma forma de interpolação funcional, com diversas aplicações, dentre elas a solução de equações diferenciais. Os modelos utilizados em mecânica celeste, são descritos em geral por equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e não homogêneas (KOPAL;LYTTLETON,1963; KUGA, 2012).

Estas equações que representam a dinâmica do sistema não apresentam solução analítica, exceto em casos em que para se ter uma ideia do efeito de determinada perturbação, por exemplo, se faz diversas simplificações e aproximações no modelo de forma a conseguir obter uma solução analítica ou semi-analítica.

No caso em que se consideram as equações no seu estado natural, sem demasiadas simplificações e aproximações para obtenção de soluções analíticas, se faz uso de técnicas para

obtenção de soluções aproximadas, como por exemplo o recurso de integração numérica. A integração numérica proporciona uma solução aproximada, não exata, podendo respeitar uma determinada precisão especificada.

A técnica da Teoria das Conexões Funcionais apresenta um grande potencial na solução de equações diferenciais, como será mostrado adiante. É possível através desta técnica obter expressões analíticas, com erro nulo em determinados pontos especificados dentro do intervalo de integração obtido (MORTARI, 2017b)

O método também é robusto no sentido de ser aplicável tanto a problemas de valor inicial como problemas de valores de contorno. Nos problemas de mecânica celeste o problema de valor inicial se caracteriza pela definição de um raio vetor no instante inicial e uma velocidade no instante inicial e como resultado, obtenção dos valores de  $r(t)$  e  $v(t)$  para todo  $t$  entre  $t_0$  e  $t_f$  (onde  $t_0$  é o instante inicial de integração e  $t_f$  o instante final). Já o problema de valor de contorno se caracteriza pela definição de um raio vetor no instante inicial e no final.

Este trabalho tem como objetivo explorar a aplicação da TFC em problemas da mecânica celeste, como por exemplo, através do PCR3C. Este modelo representa a dinâmica de um corpo de massa desprezível em torno de um primário e um corpo perturbador. Através da modelagem do sistema, obtém-se equações diferenciais de segunda ordem, cuja solução semi-analítica, aproximada, pode ser obtida através do método da TFC. Neste caso a solução seria discretizada em  $N$  pontos, e a solução em cada um destes  $N$  pontos é exata. Já em intervalos de tempo diferentes destes  $N$  pontos escolhidos, a solução é aproximada, uma vez que se trata de uma interpolação funcional.

## 2. Metodologia

A Teoria das conexões funcionais é uma técnica de interpolação funcional. Basicamente, ao invés de se interpolar pontos, se interpolam funções através da especificação de uma expressão de vínculo (MORTARI, 2017; MORTARI; LEAKE, 2019). Suponha, por exemplo, uma expressão da forma apresentada na equação 1, a relação  $y(x) = y_0$  quando  $x = x_0$ , qualquer que seja a expressão  $p(x)$ .

$$y(x) = p(x)(x - x_0) + y_0 \quad (1)$$

A expressão de vínculo apresentada na expressão 1 é uma das muitas formas possíveis de se fazer interpolação funcional de pontos. Para mais exemplos, favor consultar Mortari (2017a) e Johnsthor e Mortari (2018).

Outra aplicação possível da TFC é a solução de equações diferenciais (MORTARI, 2017b). A seguir apresenta-se o método passo-a-passo. Na próxima seção são apresentados três exemplos de aplicação.

Passo 1) Escrever a Equação Diferencial (ED) e identificar seus termos. Identificar se é ordinária ou parcial, linear ou não linear, homogênea ou não.

Passo 2.a) Definir o intervalo de avaliação da ED,  $[t_0, t_f]$ .

Passo 2.b) Fazer uma transformação de tempo de forma que o intervalo esteja entre -1 e 1 (nova variável "x") Isso é necessário para utilizar funções como polinômios de Schebchevy por exemplo.

Passo 3) A solução pode ser apresentada como na equação 2.

$$y(x) = g(x) + \sum_{k=1}^n \xi_k p_k(x) \quad (2)$$

Passo 4) Aplicar os vínculos e obter as expressões  $\eta_k$

Passo 5) Obter  $y(x)$ , substituindo os  $\eta_k$  na equação 2

Passo 6) Escrever a ED e a equação de vínculo em função da nova variável "x".

Passo 7) Derivar a expressão de vínculo (obter a primeira e segunda derivada) e substituir na ED em função de "x".

Passo 8) Descrever o sistema na forma apresentada na equação 3 e resolver para  $\xi$  utilizando por exemplo o método de mínimos quadrados (MORTARI, 2018).

$$g(x) = \xi^T h(x) \quad (3)$$

A seção 3.1 apresenta um exemplo de Problema de Valor Inicial e a seção 3.2 apresenta um Problema de Valor de Contorno como exemplo.

A seguir apresenta-se o problema circular restrito dos três corpos (PCR3C), que será objeto de estudo e aplicação da TFC em trabalhos futuros.

No PCR3C um corpo de massa  $m_3$  que orbita um primário de massa  $m_1$  e um corpo perturbador de massa  $m_2$ , é sujeito à aceleração dada pela equação 4

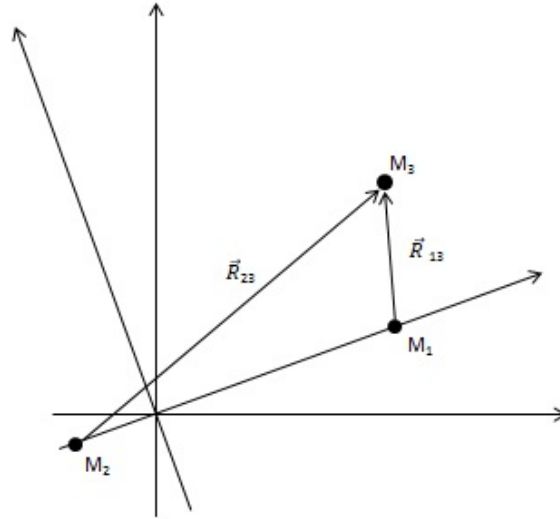
$$\ddot{\vec{r}}_3 = - \left( \frac{\mu_1}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} + \frac{\mu_2}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} \right) \quad (4)$$

em que  $r$  é o vetor posição em relação a origem do sistema de coordenadas,  $\mu_1$  é a constante gravitacional do primeiro primário,  $\mu_2$  é a constante gravitacional do segundo primário,  $r_{13}$  e  $r_{23}$  são os vetores posição em relação ao primeiro e segundo primário respectivamente. A massa  $m_3$  é desprezível em relação as massas  $m_1$  e  $m_2$ . Os vetores posição são dados por:

$$\begin{aligned} r_{13}^2 &= (x + a^*)^2 + y^2 + z^2 \\ r_{23}^2 &= (x - b^*)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $a^*$  e  $b^*$  são das distância entre o primário e o baricentro e o segundo primário e o baricentro, respectivamente. Os sistemas inercial e local são ilustrados na Figura 1.

As equações para o PRC3C (KOPAL,1963), considerando a aceleração devido ao segundo harmônico ( $J_2$ ), são apresentadas no sistema de equações 6:



**Figura 1. Sistema de coordenadas no problema dos três corpos (Inercial e Local)**

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{s_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{s_2^3} - \frac{1}{2}\mu J_2 r_p^2 \left( -\frac{15xz^2}{r^7} + \frac{3x}{r^5} \right) \\ -2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{s_1^3} + \frac{\mu y}{s_2^3} - \frac{1}{2}\mu J_2 r_p^2 \left( -\frac{15yz^2}{r^7} + \frac{3y}{r^5} \right) \\ -\frac{(1-\mu)z}{s_1^3} + \frac{\mu z}{s_2^3} - \frac{1}{2}\mu J_2 r_p^2 \left( -\frac{15z^3}{r^7} + \frac{9z}{r^5} \right) \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que  $\mu$  é dado pela relação entre a massa  $m_2$  e a soma das massas  $m_1$  e  $m_2$ ,  $s_1$  é o raio vetor entre o corpo perturbador (de massa  $m_1$ ) e o corpo de massa  $m_3$ ,  $s_2$  é o raio vetor entre o primário (de massa  $m_2$ ) e o corpo de massa  $m_3$ . A modelagem dos efeitos perturbativos se dá apenas em relação ao primário.

Este modelo descreve o movimento de um corpo de massa  $m_3$  orbitando dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente, sendo que estes dois descrevem uma órbita circular em torno do baricentro do sistema. Para efeitos de simplificação a massa  $m_3$  é desprezível perante as demais.

Observa-se que é possível utilizar a mesma metodologia (TFC), para resolver o problema descrito pelo conjunto de equações 6, utilizando contudo o método de mínimos quadrados não-linear, uma vez que a TFC abrange quaisquer tipos de ED.

### 3. Resultados e Discussão

Na seção Resultados e Discussão são apresentados alguns exemplos de forma a demonstrar a aplicação da TFC, utilizando a metodologia apresentada na seção 2.

#### 3.1. Exemplo de Problema de Valor Inicial resolvido com TFC

Esta seção apresentará um exemplo de problema de valor inicial e a aplicação da TFC para sua solução.

Passo 1) Seja a equação diferencial da forma apresentada na equação 7

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 0 \quad (7)$$

para as condições iniciais  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0)=1$ .

Este exemplo é considerado pois é fácil obter a solução analítica através da equação característica  $r^2 + 5r + 6 = 0$ . A solução é dada pela expressão 8

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \quad (8)$$

Passo 2.a) Define-se, por exemplo o intervalo de integração de 0 a 5 segundos.

Passo 2.b) Uma transformação conforme a expressão 9, proporciona um novo intervalo de integração na nova variável  $x$  de -1 a 1.

$$x = -1 + \frac{2}{5}t \quad (9)$$

Passo 3 e 4) Assume-se uma expressão de vínculo conforme a equação 10

$$\begin{aligned} y(x) &= g(x) + \eta_1 p_1(x) + \eta_2 p_2(x) \\ y'(x) &= g'(x) + \eta_1 p_1'(x) + \eta_2 p_2'(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando as condições iniciais e resolvendo o sistema para  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , considerando  $P_1(x) = 1$  e  $P_2(x) = x$ , obtém-se então:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 - g(-1) - \dot{g}(-1) \\ \eta_2 &= 1 - \dot{g}(-1) \end{aligned} \quad (11)$$

Portanto a equação de vínculo 10 (Passo 5), toma a forma da equação 12:

$$y(x) = g(x) + [1 - g(-1) - \dot{g}(-1)] + [1 - \dot{g}(-1)]x \quad (12)$$

Derivando a expressão 12 temos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= g'(x) + 1 - \dot{g}(-1) \\ y''(x) &= g''(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Escrevendo a equação diferencial em função da nova variável  $x$ , tem-se a expressão 14:

$$c^2 y''(x) + 5c y'(x) + 6y(x) = 0 \quad (14)$$

e finalmente, escrevendo o sistema na forma  $A(x)\xi = b(x)$ , tem-se

$$a_{ij}(x) = c^2 h_j''(x_i) + 5c h_j'(x_i) + 6h_j(x_i) - 6h_j(-1) - (5c + 6 + 6x_i)h_j'(-1)$$

$$b_i = -5c - 6 - 6x_i \quad (15)$$

Aqui vale ressaltar alguns pontos específicos sobre a matriz  $A_{mn}(x)$ . A quantidade de colunas da matriz  $A$  é a quantidade de polinômios considerados na aproximação da solução analítica (polinômios de Schebchevy por exemplo). Já o número de linhas representa a quantidade de pontos em que o intervalo  $[-1, 1]$  é descritizado. A solução encontrada interpola todos estes pontos e apresentam solução com erro 0 em cada um deles.

### 3.2. Exemplo de Problema de Valor de Contorno resolvido com TFC

Esta seção apresentará outro exemplo, desta vez um problema de valor de contorno e a aplicação da TFC. Considera-se a mesma equação diferencial que o exemplo anterior (equação 7).

Neste caso as condições de contorno são  $y(0) = 0$  e  $y(1)=1$ .

A solução é da forma da equação 16

$$y(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{e^{-2} - e^{-3}} \quad (16)$$

Passo 2.a) Define-se, por exemplo o intervalo de integração de 0 a 1 segundos.

Passo 2.b) Uma transformação conforme a expressão 17, proporciona um novo intervalo de integração na nova variável  $x$  de -1 a 1.

$$x = -1 + 2t \quad (17)$$

Passo 3 e 4) Assume-se uma expressão de vínculo conforme a expressão 18

$$y(x) = g(x) + \eta_1 p_1(x) + \eta_2 p_2(x) \quad (18)$$

Aplicando as condições de contorno e resolvendo o sistema para  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , considerando  $P_1(x) = 1$  e  $P_2(x) = x$ , obtém-se então:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} [1 - g(-1) - g(1)]$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} [1 + g(-1) - g(1)] \quad (19)$$

Portanto a equação de vínculo 18 (Passo 5), toma a forma da equação 20:

$$y(x) = g(x) + \frac{1}{2} [1 - g(-1) - g(1)] + \frac{1}{2} [1 + g(-1) - g(1)] x \quad (20)$$

Derivando a expressão 20 temos:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= g'(x) + \frac{1}{2} [1 + g(-1) - g(1)] \\
 y''(x) &= g''(x)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Escrevendo a equação diferencial em função da nova variável  $x$ , tem-se a mesma expressão que a equação 14. Finalmente, escrevendo o sistema na forma  $A(x)\xi = b(x)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 a_{ij}(x) &= c^2 h_j''(x_i) + 5c h_j'(x_i) + 6h_j(x_i) + \frac{5}{2} c h_j(-1) \\
 &- 3h_j(-1) + 3x h_j(-1) - \frac{5}{2} c h_j(1) - 3h_j(1) - 3x h_j(1) \\
 b_i &= -\frac{5}{2} c - 3 - 3x_i
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Novamente, observa-se que a expressão obtida anteriormente pode ser discretizada em tantos pontos quanto necessário/desejado, utilizando tantos polinômios quanto desejado, contudo que o número de pontos se superior ou igual ao número de polinômios, ou seja ( $N \geq m$ ).

Os próximos passos deste trabalho são aplicar a técnica da TFC no PCR3C conforme apresentado na seção anterior e comparar com as soluções obtidas numericamente, verificando assim sua eficácia, precisão e robustez.

Identifica-se uma série de potenciais aplicações da TFC nos problemas de mecânica celeste como por exemplo, simulação de problemas circulares ou elípticos no problema restrito dos três corpos, simulação de captura gravitacional, cálculo de manobras orbitais otimizadas, entre outros.

#### 4. Conclusão

Este trabalho apresentou a Teoria das Conexões Funcionais e alguns exemplos de aplicação direta. Apresentou também o problema circular restrito dos três corpos (PCR3C) em Mecânica Celeste e algumas potenciais aplicações do método. Em trabalhos futuros, buscar-se-á explorar alguns destas potenciais aplicações, avaliando assim a abrangência e utilidade do método na área de Mecânica Celeste.

**Agradecimentos:** *O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, sem bolsa ou apoio financeiro.*

#### 5. Referências

JOHNSTON, H.; MORTARI, D. "Linear Differential Equations Subject to Relative, Integral, and Infinite Con-straints," *Astrodynamics Specialist Conference 2018*, 167, AAS 18-273, pp. 3107-3121, Snowbird, UT, August 19-23, 2018;

KOPAL, Z.; LYTTLETON, R. A. On the elliptic case of the restricted problem of three bodies and the remote history of the earth-moon system. *Icarus*, v. 1, n. 1-6, p. 455–458, 1963.

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. *Introdução à Mecânica Orbital*. 2012.

MORTARI, D. "The Theory of Connections: Connecting Points," *Mathematics* 2017, 5(4), 57;

MORTARI, D.; LEAKE, C. "The Multivariate Theory of Connections," *Mathematics* 2019, 7(3), 296;

MORTARI, D. "Least-Squares Solution of Linear Differential Equations," *Mathematics* 2017, 5(4), 48;