



Ministério da  
**Ciência e Tecnologia**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/02.09.14.07-TDI

## MODELO PARA SIMULAÇÃO DE TRÂNSITOS DE PLANETAS COM LUAS E ANÉIS

Luis Ricardo Moretto Tusnski

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós Graduação em Astrofísica, orientada pela Dra. Adriana Benetti Marques Válio, aprovada em 18 de fevereiro de 2011

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3963R88>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

## **PUBLICADO POR :**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr<sup>a</sup> Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant'Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência e Tecnologia**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/02.09.14.07-TDI

## MODELO PARA SIMULAÇÃO DE TRÂNSITOS DE PLANETAS COM LUAS E ANÉIS

Luis Ricardo Moretto Tusnski

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós Graduação em Astrofísica, orientada pela Dra. Adriana Benetti Marques Válio, aprovada em 18 de fevereiro de 2011

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3963R88>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Tusnski, Luis Ricardo Moretto.

T871m    Modelo para Simulação de trânsitos de planetas com luas e anéis / Luis Ricardo Moretto Tusnski. – São José dos Campos : INPE, 2011.

xxii+89 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2011/02.09.14.07-TDI)

Dissertação (Mestrado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2011.

Orientadora : Dra. Adriana Benetti Marques Válio.

1. Exoplanetas. 2. Exoluas. 3. Fotometria. 4. Corot. 5. Kepler.  
I.Título.

CDU 521.83

---

Copyright © 2011 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2011 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em  
Astrofísica

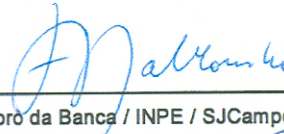
Dra. Cláudia Vilega Rodrigues



---

Presidente / INPE / SJC Campos - SP

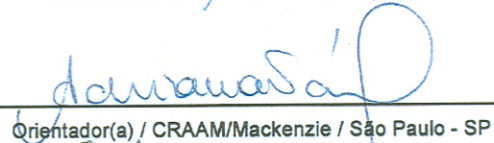
Dr. Francisco José Jablonski



---

Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dra. Adriana Benetti Marques Válio



---

Orientador(a) / CRAAM/Mackenzie / São Paulo - SP

Dr. Othon Cabo Winter



---

Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): Luis Ricardo Moretto Tusnski

São José dos Campos, 18 de fevereiro de 2011



*“There are countless suns and countless earths all rotating around their suns in exactly the same way as the seven planets of our system. We see only the suns because they are the largest bodies and are luminous, but their planets remain invisible to us because they are smaller and non-luminous. The countless worlds in the universe are no worse and no less inhabited than our Earth”.*

GIORDANO BRUNO  
em “On the Infinite Universe and Worlds”, 1584





*A meus pais Norberto e Izabel,  
a meu irmão Luis Fernando  
e a minha noiva Daniele.*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço o apoio e incentivo de meus pais, meu irmão, minha noiva, meus amigos e colegas que colaboraram para a execução deste trabalho. Em particular, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro, à minha orientadora, Adriana, que me incentivou e me encorajou desde o início e sempre se dispôs a me ajudar quando necessário. Agradeço também às agências nacionais e estrangeiras que colaboraram com a minha formação, através de cursos e eventos: DAS/INPE, Escola de Engenharia da UNESP, NASA Exoplanet Science Institute (NExSci) e Sociedade Astronômica Brasileira (SAB). Por fim, deixo meu sincero agradecimento a todas as pessoas que colaboraram direta ou indiretamente com esta pesquisa.



## RESUMO

Desde a descoberta dos primeiros planetas extrassolares, os pesquisadores têm procurado selecionar os que são mais adequados para o surgimento e desenvolvimento da vida, usando o conceito de zona habitável. Porém, a grande maioria dos planetas descobertos até hoje são gasosos, excluindo sua habitabilidade. Recentemente, foi sugerida a possibilidade de que tais planetas gasosos possuam luas: se o planeta estiver na zona habitável, a lua também será habitável. Assim, neste trabalho apresentamos um modelo para simulação de trânsitos planetários, considerando a presença de luas e anéis em órbita do planeta. O modelo foi desenvolvido em IDL. A órbita da lua ao redor do planeta é considerada coplanar com a órbita planetária, e ambas são circulares. Os demais parâmetros físicos e orbitais da estrela, do planeta, da lua e dos anéis são ajustáveis. Pode-se acrescentar também manchas na superfície da estrela e simular quantos trânsitos sejam desejados. O resultado da simulação é a curva de luz de tais eventos. Pode-se acrescentar ruído às curvas de luz, de modo a obter curvas semelhantes às obtidas pelos telescópios espaciais CoRoT e Kepler. O objetivo é determinar se é possível localizar luas ou anéis planetários em órbitas de exoplanetas usando fotometria. Mostra-se que é possível detectar luas com raios de pelo menos  $1,3 R_{\oplus}$  com o CoRoT e  $0,3 R_{\oplus}$  com o Kepler. Também são considerados os efeitos de variação temporal, causados pela posição e pelo movimento do planeta em relação ao centro de massa do sistema planeta-lua.



# MODEL OF TRANSIT SIMULATION OF PLANETS WITH MOONS AND RINGS

## ABSTRACT

Since the first exoplanet discoveries, researchers have tried to select those most adequate for life to begin and evolve, using the concept of habitable zone. However, most of the discovered planets so far are gas giants, precluding their habitability. Recently, it was proposed that if these planets have moons, these moons may be habitable. In this work we present a model for planetary transit simulation considering the presence of moons and planetary rings around the planet. The model was developed in IDL. Moon and planetary orbits are coplanar, and both are circular. The other physical and orbital parameters of the star, the planet, the moon and the ring can be adjusted in each simulation. It is possible to add spots to the surface of the star, and to simulate as many successive transits as wanted. The result of the simulation is the light curve. It is also possible to add white noise to the light curves, in order to produce curves similar to those obtained by the CoRoT and Kepler space telescopes. The objective is to determine if these events are detectable or not using photometry. Using this model, we show that it is possible to detect moons with radii as little as  $1.3 R_{\oplus}$  with CoRoT and  $0.3 R_{\oplus}$  with Kepler. Timing variations are also considered, caused by the planet position and movement with respect to the planet-moon barycenter.





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Um planeta em órbita de uma estrela descreve uma trajetória elíptica. . . . .	6
2.2 Exemplo da Segunda Lei de Kepler, ou Lei das Áreas. . . . .	7
2.3 Atração gravitacional entre dois corpos. . . . .	8
2.4 Imagens obtidas com coronografia. (a) Imagem do Sol obtida com o coronógrafo a bordo do satélite SOHO. (b) Imagem do exoplaneta Fomalhaut b obtida com o coronógrafo do Telescópio Espacial Hubble. . . . .	11
2.5 Imagens diretas de exoplanetas. (a) 2M1207 b, obtidas com ótica adaptativa no ESO. (b) HR 8799 b, obtidas com ótica adaptativa no infravermelho nos telescópios Keck e Gemini. . . . .	12
2.6 Astrometria. . . . .	14
2.7 Posição prevista do Sol em função do tempo, devido à influência dos planetas do Sistema Solar. . . . .	15
2.8 Velocidade radial, medida pelo efeito Doppler-Fizeau. . . . .	17
2.9 Medidas das velocidades radiais de 51 Peg. . . . .	19
2.10 Evento de microlente gravitacional. . . . .	21
2.11 Modelo e curva de luz de um trânsito planetário. . . . .	22
2.12 Geometria de um trânsito planetário. . . . .	22
2.13 Geometria de um trânsito planetário. . . . .	23
2.14 (a) Curva de luz de HD 209458b, obtida a partir do solo. (b) Curva de luz do mesmo planeta, obtida pelo Telescópio Espacial Hubble. . . . .	25
2.15 Telescópio Espacial CoRoT. . . . .	27
2.16 Missão Kepler. . . . .	27
2.17 Comparação entre os métodos de detecção de exoplanetas. . . . .	28
2.18 Distribuição de períodos de exoplanetas. . . . .	32
2.19 Geometria de um trânsito planetário. . . . .	38
3.1 Imagem da estrela com escurecimento de limbo. . . . .	44
3.2 Trânsito de um planeta sem lua diante da estrela. . . . .	45
3.3 Simulação de trânsito de dois planetas. <b>(a)</b> HD 209458b. <b>(b)</b> CoRoT-2b. . . . .	46
3.4 Trânsito de um planeta com uma lua diante da estrela. . . . .	46
3.5 Curvas de luz de um planeta com uma lua: <b>(a)</b> $P_l = 5$ dias e $\varphi = 0^\circ$ ; <b>(b)</b> $P_l = 2$ dias e $\varphi = 60^\circ$ . . . . .	47
3.6 Trânsito de um planeta com anéis diante da estrela. . . . .	48

3.7	Trânsito de Saturno em frente de uma estrela igual ao Sol. <b>(a)</b> Anéis planetários com as mesmas dimensões dos anéis de Saturno. <b>(b)</b> Anéis aumentados em 50% em relação aos anéis de Saturno. . . . .	48
3.8	Trânsito de um planeta com uma lua diante da estrela. . . . .	49
3.9	Curvas de luz de trânsitos planetários com manchas na estrela. <b>(a)</b> Planeta HD 209458b. <b>(b)</b> Planeta CoRoT-2b. . . . .	50
3.10	Curvas de luz de um Júpiter Quente com uma lua. <b>(a)</b> Uma mancha na estrela. <b>(b)</b> 4 manchas na estrela. . . . .	50
3.11	Curva de luz de um planeta com uma lua gerada para três trânsitos consecutivos. . . . .	51
4.1	Ajuste de curvas para o trânsito de um planeta. <b>(a)</b> HD 209458b. <b>(b)</b> CoRoT-2b. . . . .	54
4.2	Ajuste de curvas para o trânsito de um planeta com uma lua, considerando o nível de ruído do CoRoT. . . . .	55
4.3	Trânsito de Saturno, ajustado sem considerar os anéis. <b>(a)</b> CoRoT. <b>(b)</b> Kepler. . . . .	57
4.4	Trânsito de Saturno, ajustado considerando a presença dos anéis. . . . .	58
4.5	Medidas do instante central e da duração de um trânsito planetário. . . . .	60
4.6	Medidas dos efeitos TTV (linha cheia) e TDV (linha pontilhada) em 25 trânsitos consecutivos, em uma simulação de dados do Kepler. . . . .	61
A.1	Um planeta em órbita de uma estrela. Ao mesmo tempo que a estrela atrai gravitacionalmente o planeta, este também atrai a estrela. . . . .	74
A.2	Órbita elíptica de um planeta ao redor da estrela. . . . .	81
A.3	A área infinitesimal percorrida pelo planeta pode ser aproximada por um triângulo de altura $r$ e base $r\Delta\theta$ . . . . .	81
A.4	Lei das Áreas: as duas áreas hachuradas são percorridas pelo raio vetor do planeta em tempos iguais. . . . .	83
A.5	Vetores posição do planeta e da estrela a partir do Centro de Massa. . . . .	85

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Resultados dos ajustes das simulações dos trânsitos de HD 209458b e CoRoT-2b, considerando o ruído do CoRoT. . . . .	54
4.2 Resultados dos ajustes das simulações dos trânsitos de HD 209458b e CoRoT-2b, considerando o ruído do Kepler. . . . .	55
4.3 Resultados dos ajustes da simulação de um trânsito de um planeta com uma lua, obtidos para o ajuste de 5 trânsitos. . . . .	56
4.4 Resultados dos ajustes das simulações do trânsito de Saturno, considerando apenas a presença do planeta. . . . .	57
4.5 Resultados obtidos no ajuste de uma simulação do trânsito de um planeta idêntico a Saturno observado pelo Kepler. . . . .	58



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	– semi-eixo maior da órbita planetária
$a_p$	– semi-eixo orbital do planeta no sistema de coordenadas do CM
$a_*$	– semi-eixo orbital da estrela no sistema de coordenadas do CM
$a_{mc}$	– semi-eixo orbital máximo da lua com órbita circular
$a_{max}$	– semi-eixo orbital máximo da a lua
$arcsec$	– segundo de arco
$B$	– linha de base do interferômetro
$c$	– velocidade da luz
$CM$	– centro de massa
$D$	– diâmetro do telescópio
$d$	– limite de Roche
$e$	– excentricidade orbital do planeta
$e_l$	– excentricidade orbital da lua
$G$	– Constante Gravitacional Universal ( $G = 6.6730 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ )
$i$	– ângulo de inclinação orbital
$k_{2P}$	– Número de Love
$m_l$	– massa da lua
$M_J$	– massa de Júpiter ( $M_J = 1.89 \times 10^{30}$ g)
$m_p$	– massa planetária
$m_*$	– massa da estrela
$M_{\oplus}$	– massa da Terra ( $M_{\oplus} = 5.974 \times 10^{24}$ g)
$M_{\odot}$	– massa do Sol ( $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g)
$m_{max}$	– massa máxima da lua em uma órbita estável
$mas$	– milissegundo de arco
$P$	– período orbital do planeta
$\mathcal{P}$	– probabilidade de trânsito
$P_l$	– período da lua
$pc$	– parsec ( $1pc = 3.0856 \times 10^{16}m$ )
$Q_p$	– parâmetro de dissipação de maré
$\vec{r}$	– posição do planeta em relação à estrela
$\vec{r}_p$	– posição do planeta no sistema de coordenadas do CM
$\vec{r}_*$	– posição da estrela no sistema de coordenadas do CM
$R_H$	– raio da esfera de Hill
$R_J$	– raio de Júpiter ( $R_J = 7.149 \times 10^9$ cm)
$r_l$	– raio da lua
$R_p$	– raio planetário
$R_{\oplus}$	– raio da Terra ( $R_{\oplus} = 6.378 \times 10^8$ cm)
$R_{\odot}$	– raio do Sol ( $R_{\odot} = 6.960 \times 10^{10}$ cm)

$V_r$	–	velocidade radial da estrela
$\alpha$	–	raio do disco de Airy
$\lambda$	–	comprimento de onda
$\mu as$	–	microsegundo de arco
$\rho_l$	–	densidade da lua
$\rho_p$	–	densidade do planeta
$\tau$	–	tempo de trânsito planetário
$\theta$	–	posição angular do planeta medida a partir do periastro

# SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 EXOPLANETAS</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Dinâmica de Sistemas Planetários . . . . .	5
2.1.1 Primeira Lei de Kepler . . . . .	6
2.1.2 Segunda Lei de Kepler . . . . .	7
2.1.3 Terceira Lei de Kepler . . . . .	7
2.1.4 Lei da Gravitação Universal . . . . .	8
2.1.5 Coordenadas do Centro de Massa . . . . .	9
2.2 Métodos de Detecção de Exoplanetas . . . . .	10
2.2.1 Detecção Direta . . . . .	10
2.2.2 Detecção Indireta . . . . .	14
2.3 Trânsitos Planetários . . . . .	21
2.3.1 O Telescópio Espacial CoRoT . . . . .	26
2.3.2 A Missão Kepler . . . . .	26
2.4 Comparação entre os métodos . . . . .	27
2.5 Teoria de Formação Planetária . . . . .	28
2.5.1 A Formação da Estrela . . . . .	29
2.5.2 O Disco Protoplanetário . . . . .	29
2.5.3 Formação de Planetas Rochosos . . . . .	30
2.5.4 Formação de Planetas Gasosos . . . . .	30
2.5.5 Formação de Luas e Anéis . . . . .	31
2.5.6 O Processo de Migração Planetária . . . . .	32
2.6 Exoluas . . . . .	33
2.6.1 Limites Orbitais: Esfera de Hill e Limite de Roche . . . . .	33
2.6.2 Limites Orbitais: Simulações Numéricas . . . . .	35
2.6.3 Efeitos de Variação Temporal . . . . .	36
2.6.4 Aquecimento Interno . . . . .	41
2.6.5 As Luas do Sistema Solar . . . . .	41
2.7 Anéis Planetários . . . . .	42

<b>3 O MODELO</b> . . . . .	<b>43</b>
3.1 Introdução . . . . .	43
3.2 Estrela e Escurecimento de Limbo . . . . .	43
3.3 Parâmetros Estelares . . . . .	44
3.4 Parâmetros Planetários . . . . .	45
3.5 Parâmetros Lunares . . . . .	45
3.6 Parâmetros de Anéis . . . . .	47
3.7 Manchas Estelares . . . . .	48
3.8 Trânsitos Consecutivos . . . . .	49
<b>4 DETECÇÃO DE LUAS E ANÉIS PLANETÁRIOS</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1 Resolução Temporal e Precisão Fotométrica . . . . .	53
4.2 Os Algoritmos de Ajuste de Curvas . . . . .	53
4.3 Detecção de Planetas . . . . .	54
4.4 Detecção de Luas . . . . .	55
4.5 Detecção de Anéis Planetários . . . . .	56
4.6 Limites de Detecção . . . . .	58
4.7 Medidas de Variações Temporais . . . . .	59
<b>5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA DAS LEIS DE KEPLER.</b> . . . . .	<b>73</b>
A.1 Equação do Movimento . . . . .	73
A.2 Conservação da Energia Total . . . . .	74
A.3 Conservação do Momento Angular . . . . .	75
A.4 Primeira Lei de Kepler . . . . .	76
A.5 Segunda Lei de Kepler . . . . .	80
A.6 Terceira Lei de Kepler . . . . .	82
A.7 Velocidade Angular . . . . .	84
A.8 Coordenadas do Centro de Massa . . . . .	84



## 1 INTRODUÇÃO

A existência de planetas distantes, ao redor de outras estrelas além do Sol, é uma questão da Astronomia que apareceu em diferentes momentos ao longo da história da ciência. As primeiras especulações de que se tem notícia partiram dos cientistas e filósofos gregos, principalmente Epicuro (341 aC - 270 aC) e Aristóteles (384 aC - 322 aC), que criaram o conceito de pluralidade de mundos: ao redor de cada estrela do céu haveria planetas, sendo alguns deles iguais à Terra. Pouco depois, Lucrécio (99 aC - 55 aC), filósofo romano, posicionou-se da mesma forma, defendendo a existência de tais mundos.

Na Idade Média essa questão também foi motivo de debate entre teólogos, filósofos e cientistas. Alberto Magno (1193-1206), Tomás de Aquino (1225-1274) e Guilherme de Ockham (1285-1347) também argumentaram a favor da existência de outros planetas. Mas o maior defensor dos infinitos mundos apareceu no século XVI, em Giordano Bruno (1548-1600), principalmente em suas obras *De l'infinito universo et mundi* (1584) e *De immenso et innumerabilibus* (1591).

A partir do século XV, as descobertas de Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630) e Isaac Newton (1643 -1727) revolucionaram a ciência, notadamente a Física e a Astronomia. A partir da descoberta das luas de Júpiter, manchas solares e montanhas e crateras na Lua, a ciência tomou coragem de questionar a própria origem dos corpos celestes. Surgiram assim as primeiras teorias de formação planetária. René Descartes (1596-1650), Bouvier de Fontenelle (1657-1757), Christian Huygens (1629-1695), Immanuel Kant (1724 - 1804) e Pierre Simon de Laplace (1749-1827) foram alguns dos cientistas dos séculos XVII a XIX que contribuíram para o tema.

Porém as primeiras buscas reais por tais planetas ocorreram somente no século XX, com as novas tecnologias. A primeira técnica utilizada foi a astrometria, baseada no movimento da estrela causado pela atração gravitacional do planeta. Monitorando a posição da estrela em relação ao fundo de estrelas fixo, os cientistas esperavam detectar o seu movimento ao redor do centro de massa, conforme a Terceira Lei de Newton. Essa técnica já havia sido utilizada com sucesso na descoberta da companheira de Sirius, na metade do século XIX, por Friedrich Bessel (1784-1846), mais tarde identificada como uma anã branca. Devido às limitações técnicas e instrumentais, só foram feitas descobertas de companheiras de massa estelar, que não poderiam

ser planetas.

No início da década de 1990, [Wolszczan e Frail \(1992\)](#) fizeram uma descoberta excitante. Por medições precisas nos pulsos emitidos pelo pulsar PSR 1257+12, os pesquisadores verificaram que a fase do pulso oscilava, o que só poderia ser explicado se o pulsar realizasse um movimento oscilatório ao redor de um ponto próximo ao centro. Esse movimento seria causado pela presença de um sistema planetário em sua órbita. Medições e cálculos foram feitos, e indicaram a presença de dois planetas, com massas de 2,8 e 3,4  $M_{\oplus}$ , com períodos respectivamente de 98,2 e 66,6 dias. No mesmo artigo, os autores indicam a provável existência de um terceiro corpo, com massa menor do que os dois primeiros. A existência de tais planetas em órbita de pulsares não pode ser totalmente explicada.

Desde 1977, o astrônomo suíço Michael Mayor procurava por planetas utilizando velocidades radiais ([OLLIVIER et al., 2009](#)), técnica baseada na medição da velocidade da estrela na direção da Terra. Essa técnica baseia-se no movimento da estrela ao redor do centro de massa do sistema estrela-planeta, tal como a astrometria, conforme veremos adiante. Ao mesmo tempo, outros grupos começaram a realizar buscas utilizando a mesma técnica, como os grupos de G. Marcy e P. Butler nos Estados Unidos e B. Campbell no Canadá. Em 1995, [Mayor e Queloz \(1995\)](#) anunciaram a descoberta de um planeta ao redor da estrela 51 Pegasus, que recebeu o nome de *51 Peg b*. Era o primeiro exoplaneta ao redor de uma estrela semelhante ao Sol. O que surpreendeu a comunidade científica foi a proximidade deste planeta com a estrela: a distância é tão pequena que o planeta completa uma órbita a cada 4 dias.

Quinze anos se passaram desde então, e atualmente já são conhecidos 519 exoplanetas<sup>1</sup>. Técnicas novas de procura surgiram desde então. Verificou-se que os exoplanetas existem em uma grande variedade de características ([UDRY; SANTOS, 2007](#)). Enquanto que alguns planetas descobertos possuem período tão curto quanto 0,79 dias ([HEBB et al., 2009](#)), outros completam uma órbita a cada 876 anos ([KALAS et al., 2008](#)). Existem planetas tão massivos quanto quinze vezes a massa de Júpiter ([UDRY et al., 2002](#)), e outros cuja massa é comparável à da Lua ([WOLSZCZAN; FRAIL, 1992](#)). Alguns possuem órbita bastante elíptica ([NAEF et al., 2001](#)), e outros estão em sistemas multiplanetários ([BUTLER et al., 1999](#); [MCARTHUR et al., 2004](#)).

---

<sup>1</sup>De acordo com a *Enciclopédia dos Planetas Extrassolares*, disponível no site [www.exoplanet.eu](http://www.exoplanet.eu), em 20 de Janeiro de 2011.

Agora que a existência de planetas fora do Sistema Solar está bem estabelecida, a ciência se aproxima de outra questão fundamental: existe vida em algum desses planetas? Para tentar responder a essa pergunta, primeiro seleciona-se dentre todos os planetas os mais prováveis para que a vida surja e se desenvolva. Surgiu assim o conceito de *zona habitável*: a região ao redor da estrela na qual um planeta com condições atmosféricas favoráveis possa manter água em sua superfície no estado líquido (HUANG, 1959; HART, 1978; KASTING et al., 1993; SELSIS et al., 2007). Devido a um viés observacional, a grande maioria dos planetas descobertos são gigantes gasosos, muito próximos da estrela. Portanto, outra possibilidade de locais habitáveis foi sugerida (SARTORETTI; SCHNEIDER, 1999): se algum desses planetas gasosos estiver na zona habitável e possuir luas, então tais luas também serão habitáveis. Ida et al. (1997) sugeriram um modelo simples de formação de luas por acreção, indicando que tais satélites podem ser bastante comuns. Porém, devido ao seu tamanho reduzido em relação aos planetas, a detecção de luas é mais complicada do que a de planetas.

Algumas formas de detecção de luas já foram sugeridas. Sartoretti e Schneider (1999) sugeriram o uso de trânsitos planetários, que permitiriam a detecção da lua pela assinatura deixada na curva de luz dos planetas. Han e Han (2002) estudaram a possibilidade de detecção usando eventos de microlentes gravitacionais. Williams e Knacke (2004) demonstraram que é possível detectar luas em órbita de gigantes gasosos na zona habitável usando espectroscopia na banda 1,5 - 5  $\mu\text{m}$ . Holman e Murray (2005), Kipping (2009a), Kipping (2009b) sugerem a detecção de luas pelos efeitos que causam no movimento do planeta, detectáveis através de medidas precisas no tempo e na duração dos trânsitos planetários: são os efeitos de *variação no tempo do trânsito* e *variação na duração do trânsito*. Campanella et al. (2010) apresentam um modelo para detecção de exoluas usando essas variações temporais. Através de simulações, concluem que o Kepler tem fotometria capaz de detectar luas de no mínimo 0,2  $R_{\oplus}$ . Szabó et al. (2006) utilizam simulações para estudar a detectabilidade de exoluas também baseados nos efeitos de variação temporal, e concluem que exoluas em órbita de planetas terrestres são detectáveis pelo Kepler. Simon et al. (2007) estudam a forma de se calcular o raio, a massa e a densidade da lua a partir das variações temporais. Simon et al. (2009) e Simon et al. (2010) utilizam fotometria em conjunto com o efeito Rossiter-McLaughlin, medido através das velocidades radiais. Esse efeito permite calcular o raio da lua, e, em alguns casos, também os parâmetros orbitais. Caso a presença da lua seja detectada também por trânsitos, pode-se também calcular o ângulo de inclinação orbital da lua. Szabo et al.

(2010) apresentam uma forma simples de detectar exoluas, usando também curvas de luz. Para isso, é necessário que seja observado um número grande de trânsitos planetários. Sobrepondo-se os trânsitos e ajustando com o trânsito de um planeta, restam os resíduos originados das assinaturas fotométricas das luas. Essa técnica não permite obter parâmetros da lua, mas é um forte indicador de sua existência.

Neste trabalho, propomos a utilização de um modelo computacional para estudar a detectabilidade de exoluas utilizando o método dos trânsitos planetários, baseado nas deformações que a presença das luas causa nas curvas de luz. O modelo simula a passagem de um planeta diante da estrela hospedeira. A cada instante do trânsito, com intervalos definidos pelo usuário, uma parte da superfície da estrela é coberta pelo planeta e por sua lua. Estimando a luminosidade total do sistema, o modelo produz a curva de luz de tais eventos. O modelo também leva em consideração o efeito de manchas na superfície da estrela. O mesmo modelo também simula o trânsito de planetas com anéis em seu redor. Espera-se com isso determinar a detectabilidade de exoluas e anéis e definir limites de detecção. Em um trabalho futuro, pretendemos analisar dados obtidos pelos telescópios espaciais CoRoT e Kepler utilizando o método desenvolvido com esse modelo.

No capítulo 2, estudaremos alguns conceitos iniciais, desde Leis de Kepler, formação planetária e métodos de detecção de exoplanetas. No capítulo 3, abordaremos o modelo em si, apresentando alguns resultados de simulações, enquanto o capítulo 4 mostra como o modelo pode ser utilizado para estudar a detectabilidade, acrescentando ruído gaussiano às curvas geradas e recuperando os parâmetros originais com os algoritmos Pikaia e Amoeba. Apresentaremos também a forma como determinamos os limites de detectabilidade de luas e anéis planetários. Finalmente, as conclusões e perspectivas são discutidas no capítulo 5.

## 2 EXOPLANETAS

Neste capítulo, abordamos algumas definições e conceitos iniciais, partindo do estudo das Leis de Kepler, que regem o movimento de planetas em órbita de suas estrelas hospedeiras e também de luas em órbita de planetas. Neste capítulo não damos tanta ênfase à demonstração matemática destas leis, que poderá ser encontrada no apêndice A. A seguir, discutimos brevemente os métodos de detecção de exoplanetas, e por fim apresentaremos alguns conceitos referentes a luas e anéis planetários.

### 2.1 Dinâmica de Sistemas Planetários

Johannes Kepler (1571-1630) foi um cientista alemão, que fez importantes contribuições para o estudo do movimento dos astros. Kepler era fascinado pelo movimento dos planetas. Tentou explicar, entre outras questões, as distâncias de cada planeta em relação ao Sol, usando os cinco sólidos perfeitos de Platão. Mas seu principal estudo foi acerca do movimento retrógrado dos planetas. Os cientistas da época conseguiam explicar esse movimento com relativa precisão usando epiciclos: cada planeta se movia em órbita circular ao redor de um ponto imaginário, e este ponto se movia em órbita também circular ao redor da Terra. Com o passar do tempo, conforme melhorava a precisão das medidas, os sistemas ficavam mais e mais complexos, com mais circunferências.

Foi somente através da análise de dados obtidos por Tycho Brahe (1546-1601), que Kepler conseguiu resolver definitivamente o problema, mostrando que o movimento dos planetas segue leis matemáticas relativamente simples. Durante mais de 20 anos, Brahe mediu as posições dos planetas do Sistema Solar com tal precisão que continuam válidas ainda hoje. Após sua morte, Kepler usou essas medidas para estudar as órbitas dos planetas, abandonando, por fim, o paradigma das órbitas circulares, mostrando que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos.

Atualmente, sabemos que as mesmas leis que regem o movimento dos planetas servem para todos os corpos celestes: cometas, planetas, estrelas, e outros. A grande revolução trazida por Kepler se deve ao fato de que ele considerava, como Nicolau Copérnico, que a Terra se move, ao invés do Sol. Isso desafiava toda a Astronomia da época, fortemente influenciada pelas teorias de Aristóteles. Além disso, ele utilizou órbitas elípticas, ao invés dos epiciclos, e também afirmou que a velocidade dos

planetas variava de acordo com sua posição na órbita.

### 2.1.1 Primeira Lei de Kepler

Inicialmente, consideramos um planeta de massa  $m_p$  se movendo ao redor de uma estrela de massa  $m_*$ , como na figura 2.1. O sistema de coordenadas é fixado no centro da estrela,  $r$  é o raio que une o planeta à estrela, e  $\theta$  é o ângulo.

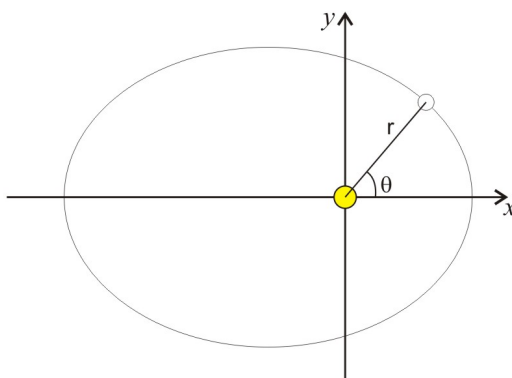


Figura 2.1 - Um planeta em órbita de uma estrela descreve uma trajetória elíptica.

A Primeira Lei de Kepler, também conhecida como *Lei das Órbitas*, estabelece que a trajetória descrita pelo planeta é dada pela equação:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (2.1)$$

onde  $r$  e  $\theta$  especificam a posição do planeta,  $e$  representa a excentricidade da órbita e  $a$  representa o semi-eixo maior. Essa equação é uma das soluções das seções cônicas, válida para curvas fechadas. Órbitas elípticas ocorrem para  $0 < e < 1$ , e órbitas circulares para  $e = 0$ .

Outras soluções do sistema são possíveis, resultando em órbitas abertas: *parábolas* e *hipérboles*. Estas são descritas por movimentos não cíclicos, como de cometas. Nesses casos, temos  $e = 1$  ou  $e > 1$ , respectivamente, para parábolas e hipérboles.

Em todos os casos, o Sol ocupa um dos focos da trajetória, e não o centro.

### 2.1.2 Segunda Lei de Kepler

A Segunda Lei de Kepler é também conhecida como *Lei das Áreas*. Ela afirma que o raio que une o planeta à estrela varre áreas iguais em tempos iguais. Por exemplo, se considerarmos que as duas áreas hachuradas na figura 2.2 são iguais, elas são varridas pelo raio vetor do planeta em tempos iguais.

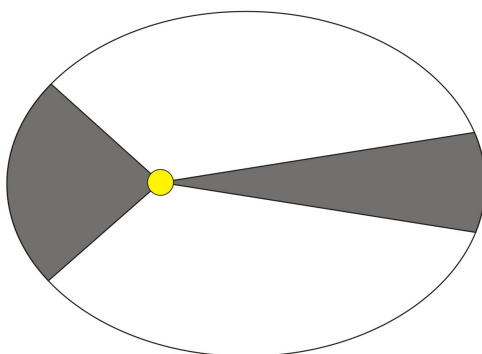


Figura 2.2 - Exemplo da Segunda Lei de Kepler, ou Lei das Áreas.

A Lei das Áreas é uma consequência da conservação do momento angular. Devido a essa conservação, o planeta se move mais rapidamente quando se encontra no ponto mais próximo ao Sol, e mais lentamente quando se encontra na posição oposta.

### 2.1.3 Terceira Lei de Kepler

Depois de descobrir suas duas primeiras Leis, Johannes Kepler se dedicou a explorar a conexão entre os raios e períodos orbitais dos planetas do Sistema Solar. Kepler já havia investigado essa relação anteriormente, sem sucesso, usando os 5 sólidos perfeitos de Platão. A partir dos dados de Tycho Brahe, Kepler finalmente descobriu sua Terceira Lei, que ficou conhecida como *Lei Harmônica*: o quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do raio orbital médio (equação 2.2):

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_* + m_p)} a^3 . \quad (2.2)$$

Para chegar a essa descoberta, Kepler levou 10 anos, desde a formulação da Lei das Áreas. Kepler estava familiarizado com as idéias de Galileu sobre inércia e movimento

acelerado, mas não as aplicou ao seu próprio trabalho. Ao contrário, Kepler pensava, como Aristóteles, que uma força agindo sobre um corpo em movimento tinha sempre a direção do movimento. Por outro lado, Galileu também não dava muito crédito ao trabalho de Kepler, e preferia acreditar que os planetas descreviam trajetórias circulares. A síntese desses dois trabalhos só veio anos mais tarde, com os trabalhos de Isaac Newton.

#### 2.1.4 Lei da Gravitação Universal

A Lei da Gravitação Universal foi formulada por Isaac Newton e apresentada em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687. Ela afirma que dois corpos quaisquer se atraem mutuamente, e que a intensidade dessa atração depende do produto de suas massas e do inverso do quadrado da distância entre eles, como vemos na figura 2.3.

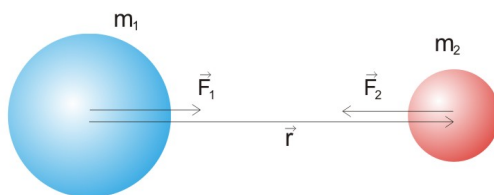


Figura 2.3 - Atração gravitacional entre dois corpos.

Matematicamente, a Lei da Gravitação Universal é expressa pela equação:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (2.3)$$

onde  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  são as forças que agem sobre os corpos 1 e 2, respectivamente,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos dois corpos,  $r$  é a distância entre eles, e  $G$  é a Constante da Gravitação Universal, cujo valor foi medido pela primeira vez por Henry Cavendish (1731 - 1810), em 1798.

As Leis de Kepler, como já mencionamos, explicam o movimento dos planetas ao redor do Sol, sem, porém, explicar a natureza desse movimento. A Lei da Gravitação Universal explica que os planetas orbitam o Sol por interagirem gravitacionalmente com ele.



A equação 2.3 tem grandes implicações nos métodos de detecção de exoplanetas, como veremos mais adiante. Ela mostra que, para uma determinada massa estelar, quanto maior for a massa planetária e menor a distância do planeta à estrela, maiores são os efeitos que o planeta causa na estrela. Por isso, a maior parte dos planetas detectados são classificados como *Júpiters Quentes*, planetas gigantes gasosos muito próximos da estrela.

### 2.1.5 Coordenadas do Centro de Massa

Uma consequência útil das Leis de Kepler ocorre quando fazemos uma mudança de coordenadas para o Centro de Massa. Na seção 2.1.1, dissemos que o sistema de coordenadas tem sua origem no centro da estrela, e o planeta descreve órbitas elípticas com excentricidade  $e$ .

Porém, em alguns casos não se pode observar diretamente o planeta. Portanto, precisamos estudar o movimento dos dois corpos ao redor do centro de massa. Assim, tanto o planeta quanto a estrela descrevem órbitas elípticas com a mesma excentricidade  $e$ . E mais, o semi-eixo orbital  $a$  pode ser obtido pelo semi-eixo do movimento individual da estrela e do planeta:

$$a_* + a_p = a , \tag{2.4}$$

sendo que os semi-eixos da estrela e do planeta são dados, respectivamente, por:

$$a_* = \frac{m_p a}{m_* + m_p} \text{ e} \tag{2.5}$$

$$a_p = \frac{m_* a}{m_* + m_p} . \tag{2.6}$$

Podemos também escrever equações de movimento independentes para o planeta e para a estrela:

$$r_* = \frac{a_*(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)} \text{ e} \tag{2.7}$$

$$r_p = \frac{a_p(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)} . \tag{2.8}$$

Essas propriedades são importantes para estudo de exoplanetas, uma vez que a grande maioria deles não são visíveis diretamente: a partir das medidas do movi-

mento da estrela, podemos inferir as propriedades do planeta. Esse fato é especialmente importante nos métodos de detecção de planetas, como veremos adiante.

## 2.2 Métodos de Detecção de Exoplanetas

Devido a uma série de fatos, como tamanho reduzido, grande distância da Terra, baixo contraste com a estrela, baixa temperatura e outros, exoplanetas são muito difíceis de serem detectados. Apesar dessas dificuldades, uma série de técnicas de detecção e determinação de parâmetros físicos e orbitais de exoplanetas foi desenvolvida nos últimos anos.

Costuma-se dividir as técnicas de detecção em dois grupos: *detecção direta* e *detecção indireta*. Aqui citamos algumas delas, sem muitos detalhes. Vamos apenas nos aprofundar um pouco mais na técnica dos trânsitos planetários, na qual esse trabalho se baseia.

### 2.2.1 Detecção Direta

A expressão *detecção direta* de exoplanetas significa detectar fótons provenientes diretamente do exoplaneta, e não os efeitos deste sobre a estrela. Devido principalmente ao baixo contraste do planeta em relação à estrela (cerca de 1 bilionésimo no visível, e 1 milionésimo no infravermelho médio) e pequena separação angular (0,1 segundo de arco para um planeta idêntico à Terra a 10 pc de distância), essa forma de detecção é muito complicada, embora já tenha produzido alguns resultados.

Uma das possibilidades é usando *coronografia*. De maneira simplificada, um coronógrafo é um instrumento desenvolvido para estudar a coroa solar, filtrando e eliminando a luz emitida pela estrela. Dessa forma, a coroa da estrela e também objetos próximos se tornam visíveis. O primeiro coronógrafo foi criado por Bernard Lyot (1897-1952), embora hoje existam variações no seu dispositivo criadas por outros pesquisadores.

A figura 2.4 mostra dois exemplos de imagens obtidas com coronografia. A figura 2.4(a) mostra uma imagem obtida por coronografia do Sol pelo satélite SOHO. Nessa figura, a circunferência branca no centro representa o disco solar, e os dois riscos brancos na parte inferior são cometas em trajetória de colisão com o Sol, invisíveis sem o coronógrafo. Um planeta descoberto usando esta técnica (KALAS et al., 2008) pode ser visto na figura 2.4(b), obtida usando o coronógrafo do Telescópio Espacial

Hubble para tornar o disco de poeira em torno da estrela *Fomalhaut* mais visível. Em duas imagens obtidas em 2004 e 2006, o planeta Fomalhaut b se torna evidente. Este planeta está a cerca de 115 UA da estrela, embebido no disco de poeira, o que indica que é um planeta jovem. O ponto branco no centro indica a posição da estrela, e a elipse representa o tamanho da órbita de Netuno, para comparação.

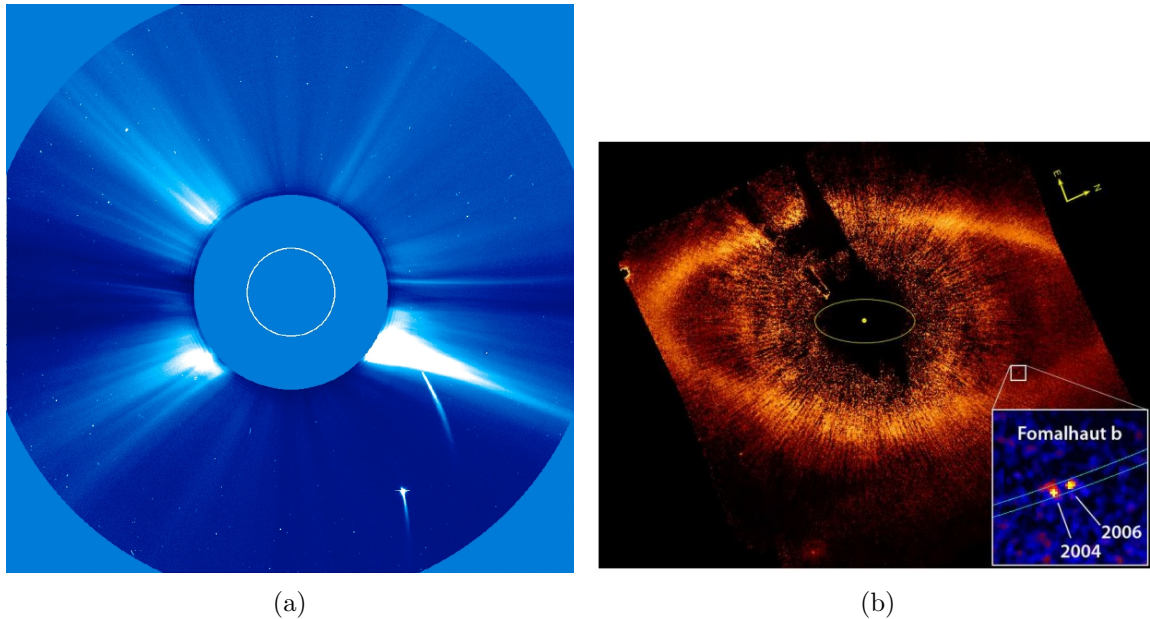


Figura 2.4 - Imagens obtidas com coronagrafia. (a) Imagem do Sol obtida com o coronógrafo a bordo do satélite SOHO. (b) Imagem do exoplaneta Fomalhaut b obtida com o coronógrafo do Telescópio Espacial Hubble.

Outra técnica de observação que visa melhorar a qualidade das imagens é a *ótica adaptativa*. Uma das dificuldades da obtenção de imagens a partir da superfície da Terra é a atmosfera. A turbulência atmosférica (causada, por exemplo, por gradientes de temperatura, ou por movimento de massas de ar causado por ventos, etc) acaba deformando ou movendo a fonte observada de várias formas (esse efeito é chamado de *seeing*). Para compensar essa distorção, na ótica adaptativa, junto com a fonte observada, observa-se uma outra fonte conhecida. Pelas distorções da fonte conhecida, um sistema computacional pode compensar os efeitos sobre a fonte observada, corrigindo os efeitos em tempo real através da deformação do espelho secundário do telescópio, produzindo imagens mais limpas e menos afetadas pela atmosfera.

Com isso, conseguem-se imagens com resolução suficiente para identificar separada-

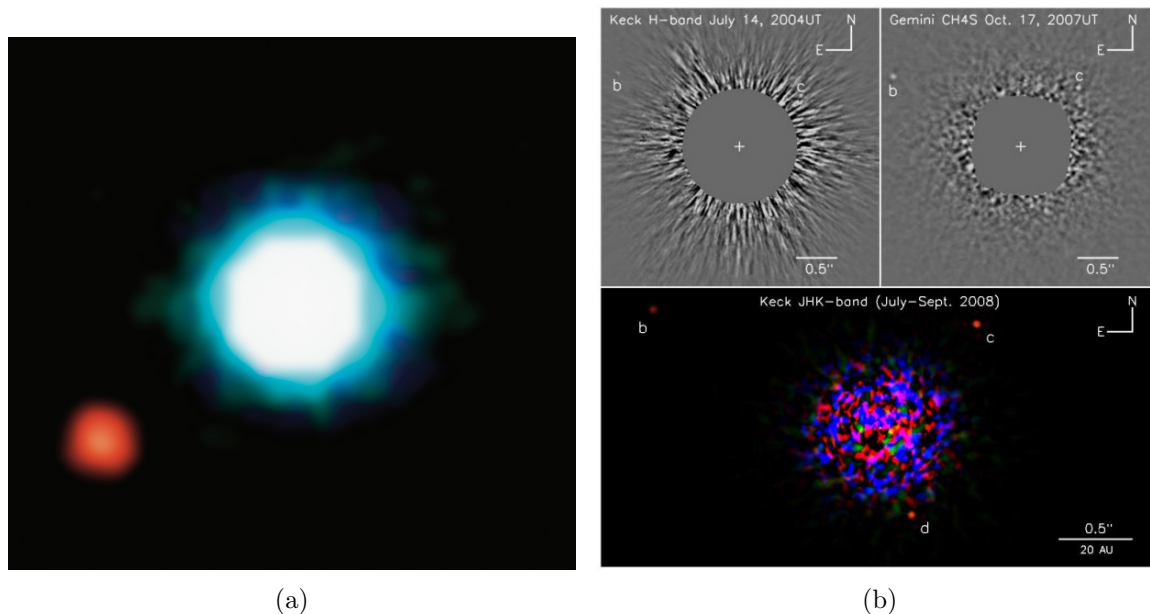


Figura 2.5 - Imagens diretas de exoplanetas. (a) 2M1207 b, obtidas com ótica adaptativa no ESO. (b) HR 8799 b, obtidas com ótica adaptativa no infravermelho nos telescópios Keck e Gemini.

mente o planeta e sua estrela hospedeira nos casos de sistemas planetários próximos e com grande separação angular entre a estrela e o planeta. A figura 2.5 mostra duas imagens de exoplanetas obtidas com essa técnica. A figura 2.5(a), obtida pelo ESO, mostra o planeta 2M1207 b, e foi a primeira imagem de um exoplaneta obtida (CHAUVIN et al., 2005). A figura 2.5(b) mostra imagens do sistema formado por 3 planetas em órbita de HR 8799 obtidas pelo Keck e pelo Gemini (MAROIS et al., 2008).

A *interferometria* é uma técnica que se baseia no princípio da interferência em feixes de luz. Dividindo-se o feixe captado pelo telescópio em dois ou captando-o por mais de um telescópio simultaneamente, pode-se fazer com que cada feixe siga caminhos óticos diferentes. Dessa maneira, ajustando adequadamente a distância em cada caminho, pode-se usar interferência construtiva ou destrutiva para obter informações sobre a fonte.

Na realidade, o termo *interferometria* não se resume a uma técnica específica, mas a uma família de técnicas baseadas no mesmo princípio, mas com diferenças entre si, como interferometria de amplitude, interferometria de speckle, interferometria de

anulação, e outras. Esta última é uma das mais usadas na detecção de exoplanetas, e consiste em captar os feixes separadamente e recombiná-los em oposição de fase, de modo a anular o sinal produzido pela estrela, restando apenas o sinal do planeta.

A grande vantagem do uso da interferometria sobre o uso de um único telescópio é a resolução angular. Em ambos os casos, a resolução máxima que pode ser alcançada depende do raio do disco de Airy, que, para um único telescópio é calculada por:

$$\alpha = \frac{1.22\lambda}{D}, \quad (2.9)$$

e, no caso da interferometria:

$$\alpha = \frac{1.22\lambda}{B}, \quad (2.10)$$

sendo  $\lambda$  o comprimento de onda observado,  $D$  o diâmetro do telescópio e  $B$  a linha de base (distância entre os telescópios). A linha de base pode alcançar valores muito maiores do que o diâmetro de um telescópio, portanto a interferometria pode atingir resoluções muito melhores.

Por fim, uma outra possibilidade de detecção direta, ao invés de obter imagens no visível, é detectar os exoplanetas por rádio. Sabe-se que na faixa do rádio o contraste entre planeta e estrela é menor do que no visível. Mesmo assim, é da ordem de um milionésimo, o que tornaria essa técnica pouco utilizável. Porém, no caso dos planetas que possuem campo magnético forte, espera-se que seja possível detectar a *emissão auroral*, ou seja, a interação entre partículas carregadas oriundas da estrela e o campo magnético planetário, semelhante às auroras boreal e austral na Terra.

Essas emissões tem duração curta (de 30 a 300 ms para os planetas do Sistema Solar) e espectro relativamente uniforme e largo (de 20 kHz a 40 MHz, aproximadamente). O fluxo típico é da ordem de 0,4 a 400 Jy. Dois fatores complicam o uso dessa técnica, o fundo de rádio da Via-Láctea e as emissões de rádio provenientes da própria Terra.

Atualmente, o maior radiotelescópio que trabalha nos comprimentos de onda adequados para localizar exoplanetas é o UTR-2 (Ukrainian T-Shaped Radio Telescope, 2nd Modification), mantido pela Academia Ucrâniana de Ciências, próximo à cidade de Kharkiv. Ele teria condições de localizar Júpiter a 0,2 pc de distância da Terra, o que é muito pouco (Proxima Centauri, a estrela mais próxima do Sol, está a 1,3 pc de distância). Porém, [Zarka et al. \(1997\)](#) demonstraram que Júpiteres Quentes possuem uma emissão auroral muito maior, devido à proximidade com a estrela.

Neste caso, o UTR-2 seria capaz de detectá-los a até 25 pc, o que torna a técnica muito mais promissora.

### 2.2.2 Detecção Indireta

A influência que o planeta exerce sobre a estrela pode ser percebida de duas maneiras: pelo movimento da estrela ou pela fotometria. A influência no movimento da estrela pode ser medida por *astrometria*, *velocidade radial* e *período de pulsares*. Já no caso da fotometria, pode-se medir por *trânsitos planetários* e por *microlentes gravitacionais*.

Já vimos que, ao mesmo tempo que uma estrela exerce atração gravitacional sobre um planeta, este também atrai a estrela. O resultado é que o planeta e a estrela descrevem movimentos ao redor do centro de massa comum, com trajetórias dadas pela Primeira Lei de Kepler, equação 2.1. O método da *astrometria* consiste em monitorar a posição da estrela com alta precisão, a fim de medir esse deslocamento causado pela presença de um planeta próximo (figura 2.6).

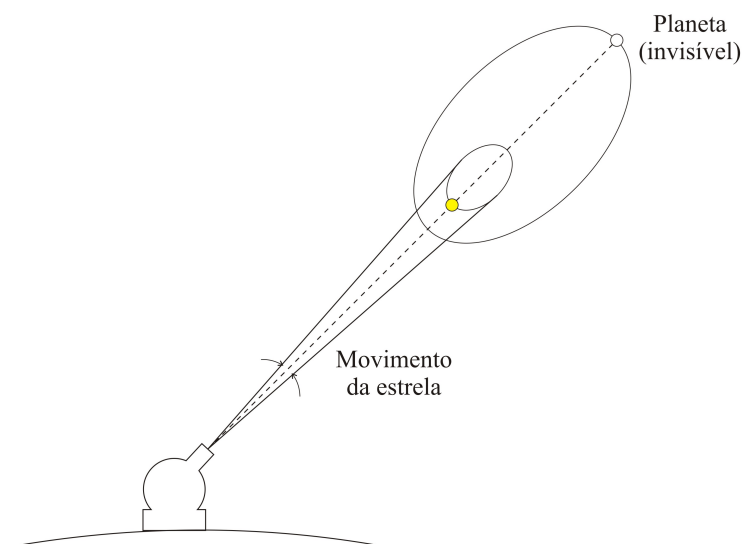


Figura 2.6 - Astrometria.

A figura 2.7 mostra como seria detectado o movimento do Sol ao longo dos anos, como observado à distância de 10 parsec perpendicular ao plano da eclíptica, devido

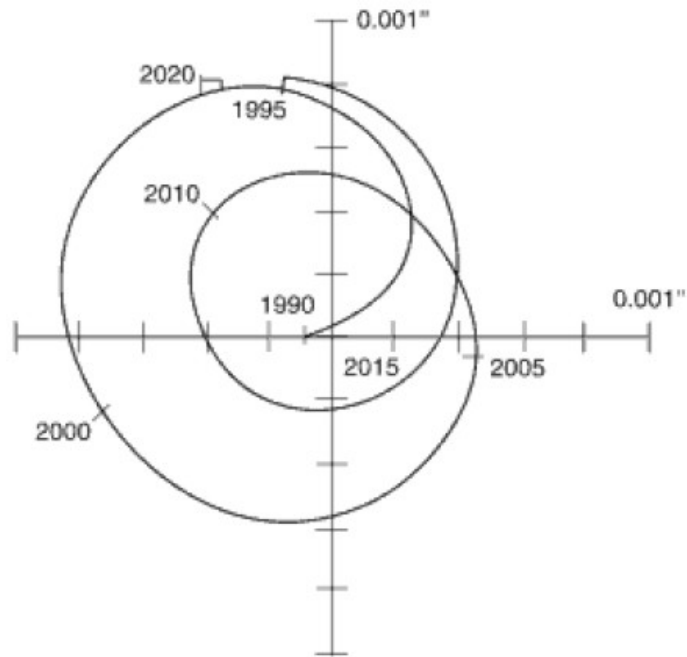


Figura 2.7 - Posição prevista do Sol em função do tempo, devido à influência dos planetas do Sistema Solar.

à influência dos planetas do Sistema Solar. A atração gravitacional dominante é a dos planetas gasosos, apesar da distância.

Já vimos que o centro de massa do sistema estrela-planeta é definido por:

$$m_* a_* = m_p a_p , \quad (2.11)$$

sendo que os semi-eixos orbitais da estrela e do planeta são definidos, respectivamente, por:

$$a_* = \frac{m_p a}{m_* + m_p} \text{ e} \quad (2.12)$$

$$a_p = \frac{m_* a}{m_* + m_p} . \quad (2.13)$$

Além destas equações, temos também a Terceira Lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_* + m_p)} a^3 , \quad (2.14)$$

onde  $a = a_* + a_p$ .

Nas equações 2.11 a 2.14, temos cinco grandezas: os semi-eixos orbitais da estrela e do planeta ( $a_*$  e  $a_p$ ), as massas da estrela e do planeta ( $m_*$  e  $m_p$ ) e o período ( $P$ ). Se pudermos determinar três, podemos calcular as demais. Por exemplo, se for possível medir diretamente os dois semi-eixos e o período orbital, então encontramos as massas. Por outro lado, o planeta não é visível, o que torna a determinação de  $a_p$  muito complicada. Uma forma de contornar esse problema seria estimando a massa estelar usando espectroscopia e modelos de evolução estelar, por exemplo. Nesse caso, seriam medidos o período, o semi-eixo e a massa da estrela, e conseqüentemente calculamos a massa e o semi-eixo planetários.

Também precisamos levar em conta que o movimento observado não é a órbita real da estrela, mas sim a projeção desta sobre o plano do céu. São necessárias, portanto, mais informações, como o ângulo de inclinação orbital, para se reconstruir a órbita e determinar as grandezas desconhecidas.

A precisão necessária é outro fator limitante. No melhor dos casos, a posição da estrela varia na ordem de mas (milissegundos de arco). Quanto mais massivo e mais distante o planeta estiver da estrela, maior será a amplitude do movimento desta, portanto maiores as chances de detecção. Porém, ao mesmo tempo, quanto mais distante o planeta estiver, mais tempo de observação será necessário para se medir uma órbita completa.

Astrometria pode também ser aplicada não na detecção de exoplanetas, mas na determinação de parâmetros de sistemas planetários detectados com outras técnicas. Citamos o exemplo do companheiro da estrela *Rho Corona Borealis*, inicialmente detectado por velocidade radial e identificado como um planeta (NOYES et al., 1997) com massa mínima de 1.1  $M_J$ . Veremos adiante que o método das velocidades radiais permite apenas determinar o limite inferior para a massa planetária. Posteriormente, por astrometria, foi possível medir a massa da companheira, agora corretamente identificada como uma estrela de baixa massa (REFFERT; QUIRRENBACH, 2011). No mesmo artigo, existem outros planetas identificados como estrelas de baixa massa ou anãs marrons, que destacam a importância da astrometria como técnica complementar às velocidades radiais.

A astrometria foi um dos primeiros métodos propostos para procura por exoplanetas. Após muitos anos de tentativas, apenas um planeta foi descoberto por astrometria: VB 10b (PRAVDO; SHAKLAN, 2009). Por isso, a astrometria acabou perdendo um



pouco de adeptos, sem porém deixar de ser utilizada. Hoje existem vários grupos procurando por exoplanetas por medições astrométricas, e existem boas perspectivas para o futuro, com uso de interferometria e observações feitas a partir do espaço, que podem aumentar muito a precisão das medidas. O Telescópio Espacial Hubble, por exemplo, possui três sensores astrométricos que funcionam por interferometria: são os *Fine Guidance Sensors*. Dois deles são utilizados para o apontamento do telescópio, e o outro pode ser utilizado para obter medidas astrométricas. Para o futuro, a missão SIM, da NASA, prevista para entrar em órbita por volta de 2015, deve alcançar a precisão de 1 microssegundo de arco ( $\mu\text{as}$ ), o que permitirá a detecção de centenas de planetas por astrometria.

Baseado no mesmo princípio, existe o método das *velocidades radiais*. A diferença é que, ao invés de se monitorar a posição da estrela, utiliza-se o efeito Doppler-Fizeau para medir a velocidade da estrela ao longo da linha de visada (figura 2.8): com a estrela em movimento em relação à Terra, o espectro é deslocado de uma quantidade proporcional à velocidade da fonte. Se a fonte se desloca em direção à Terra, a radiação é desviada em direção ao azul (comprimentos de onda menores); se o deslocamento for no sentido contrário, o desvio ocorre para o vermelho (comprimentos de onda maiores).

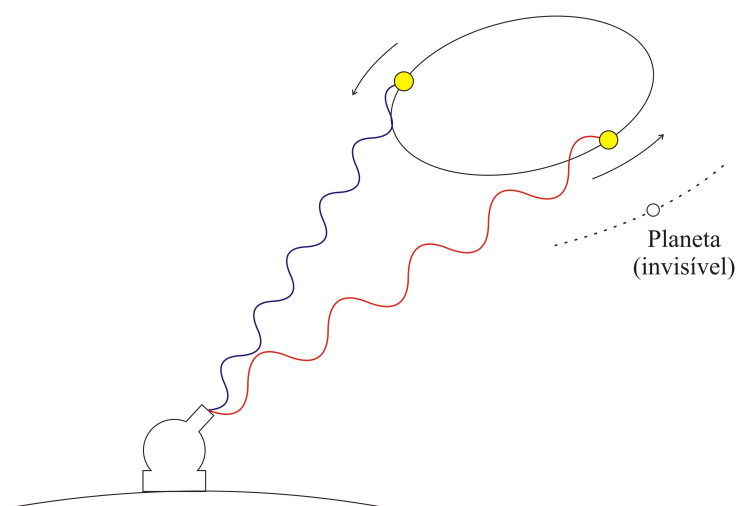


Figura 2.8 - Velocidade radial, medida pelo efeito Doppler-Fizeau.

Christian Doppler (1803-1853) percebeu que a frequência de uma onda emitida por uma fonte em movimento em relação ao observador seria detectada alterada em relação ao seu valor original. Esse efeito é uma consequência do movimento relativo entre a fonte e o observador. Poucos anos depois, esse efeito foi demonstrado experimentalmente por Buys Ballot (1817-1890), usando ondas sonoras. Posteriormente, Hippolyte Fizeau (1819-1896) descobriu independentemente o mesmo efeito, estudando ondas eletromagnéticas.

O efeito Doppler, como ficou conhecido, estabelece que a frequência  $f$  observada de uma fonte é dada por:

$$f = \left( \frac{v + v_{obs}}{v + v_s} \right) f_s, \quad (2.15)$$

onde  $f_s$  é a frequência emitida pela fonte,  $v$  é a velocidade da onda no meio,  $v_{obs}$  é a velocidade do receptor em relação ao meio (positiva se o receptor se move em direção à fonte) e  $v_s$  é a velocidade da fonte em relação ao meio (positiva se a fonte se afasta do observador).

No caso de ondas eletromagnéticas, e também considerando que a velocidade da fonte é muito menor do que a velocidade da luz, a variação na frequência é dada por:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V_r}{c}, \quad (2.16)$$

onde  $V_r$  é a velocidade radial da estrela, ou seja, a velocidade da estrela ao longo da linha de visada. Com essa equação, medindo-se o deslocamento das linhas espectrais ( $\Delta\lambda$ ), pode-se calcular a velocidade da estrela ao longo da linha de visada.

Se a estrela possuir um planeta em órbita, a sua velocidade radial oscilará com semi-amplitude  $K$ :

$$K = \frac{2\pi}{P} \frac{a_* \sin i}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.17)$$

A partir da variação da velocidade, pode-se obter o período e a excentricidade do movimento da estrela. Com isso, utilizando a Terceira Lei de Kepler, pode-se determinar o produto da massa planetária pelo seno do ângulo de inclinação orbital:

$$m_p \sin i = \left( \frac{P}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} K m_*^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.18)$$

O método das velocidades radiais possui a limitação de não fornecer a massa planetária, mas o produto  $m_p \sin i$ . Esse produto indica um limite inferior para a massa planetária. Se a inclinação orbital for determinada por outro método, como o dos trânsitos, então pode-se encontrar a massa do planeta.

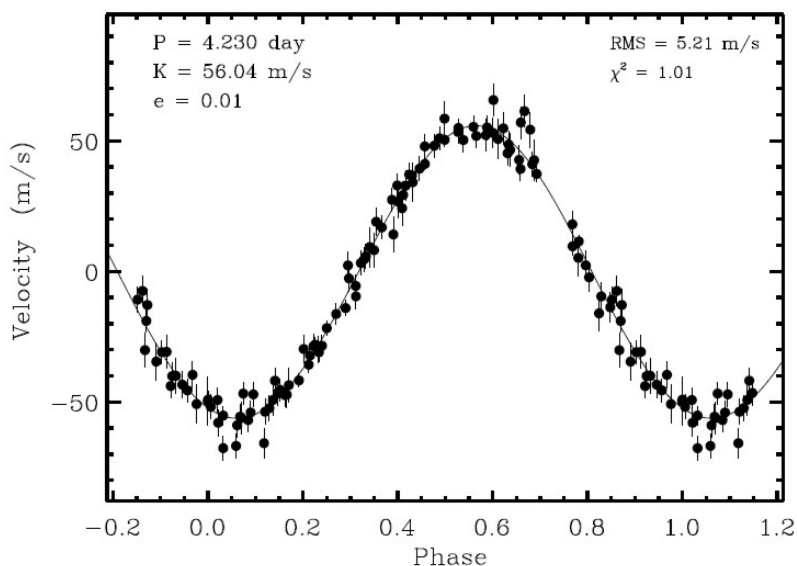


Figura 2.9 - Medidas das velocidades radiais de 51 Peg.  
 Fonte: Mayor e Queloz (1995).

A figura 2.9 mostra as medidas de velocidades radiais da estrela *51 Peg*, que levaram à descoberta do primeiro exoplaneta descoberto ao redor de uma estrela semelhante ao Sol. O período orbital do planeta é obtido da variação periódica da velocidade, enquanto que a amplitude da variação fornece o limite inferior da massa. Nesse caso, o período é de  $P = 4,23$  dias, e a amplitude da variação é de  $56,04 m/s$ , o que resulta em uma massa de  $m \sin i = 0,468 M_J$ .

Outra forma de detecção indireta é baseada no período de pulsares, que são estrelas de nêutrons, remanescentes de explosões em supernovas. Eles emitem radiação eletromagnética na forma de um cone ao redor do seu eixo magnético. Como são corpos compactos que possuem grande momento angular, sua rotação é muito rápida. O pulso detectado na Terra possui, portanto, período de oscilação muito pequeno, geralmente da ordem de segundos ou milissegundos. Quando o pulsar possui um ou mais planetas em órbita, ele descreve movimento ao redor do centro de massa. Entre

um pulso e outro, a distância do pulsar até à Terra varia, causando variações na fase do pulso detectado na Terra. Esse método é muito preciso, e permite a detecção de planetas com massa tão pequena quanto a Lua. Foi utilizando essa técnica que, no início da década de 1990, [Wolszczan e Frail \(1992\)](#) descobriram dois planetas, e provavelmente um terceiro, ao redor do pulsar PSR 1257+12, como mencionamos na Introdução.

Existem dois cenários principais para a existência de planetas ao redor de pulsares. O primeiro consiste na sobrevivência de planetas pré-existentes à supernova. Contudo, [Podsiadlowski \(1995\)](#) ressalta que, embora possível, esse cenário exige que uma série de condições especiais seja satisfeita, o que torna a probabilidade muito baixa. Particularmente para o caso do pulsar PSR 1257+12, os planetas apresentam características orbitais que praticamente descartam esse cenário. A outra possibilidade é a formação de planetas após a supernova, a partir do material ejetado. A descoberta de um disco protoplanetário ao redor do pulsar 4U 0142+61 ([WANG et al., 2006](#)) parece favorecer essa hipótese. Além desses dois cenários, existem outras possibilidades, como aponta [Podsiadlowski \(1993\)](#), como, por exemplo, a captura de um planeta por um pulsar.

Existe também a possibilidade de detecção de planetas por *lentes gravitacionais*. Este é um efeito previsto na Teoria da Relatividade Geral, de Albert Einstein (1879-1955), que introduz o conceito de equivalência entre matéria e energia, com a consequência de que fótons, os *quanta* de energia eletromagnética, são sujeitos à atração gravitacional. Assim, quando um objeto de massa  $M$  (lente) passa na linha entre o observador e um objeto sendo observado, muitos dos fótons que foram emitidos em outras direções sofrem uma deflexão dada por:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 r} = \frac{2R_S}{r} \quad (2.19)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $r$  é a distância dos fótons ao objeto massivo e  $R_S$  é o Raio de Schwarzschild do objeto.

Se a lente for suficientemente massiva, como uma galáxia, então  $\alpha$  será maior do que a resolução do instrumento usado para a observação, e a fonte observada aparecerá multiplicada. Por outro lado, se a fonte for menos massiva, como uma estrela, então  $\alpha$  será menor do que a resolução do instrumento, e a multiplicação da fonte não será observada, embora ela aconteça. O que ocorre nesse caso é que o brilho da

fonte é observado temporariamente amplificado. O primeiro caso recebe o nome de *microlente*, e o segundo, *macrolente gravitacional*.

O método de busca de planetas usando microlentes gravitacionais consiste em monitorar constantemente o brilho das estrelas. Quando um objeto cruza a linha de visada, o brilho dessas estrelas aumenta, e se pode construir uma curva de amplificação. No caso em que a lente possui um ou mais planetas em sua órbita, esses planetas deixam assinaturas na curva de amplificação, que se originam no momento em que eles entram em alinhamento com o observador e a fonte, tornando-se eles também lentes, ou melhor, microlentes gravitacionais. Um exemplo desses pode ser visto na figura 2.10.

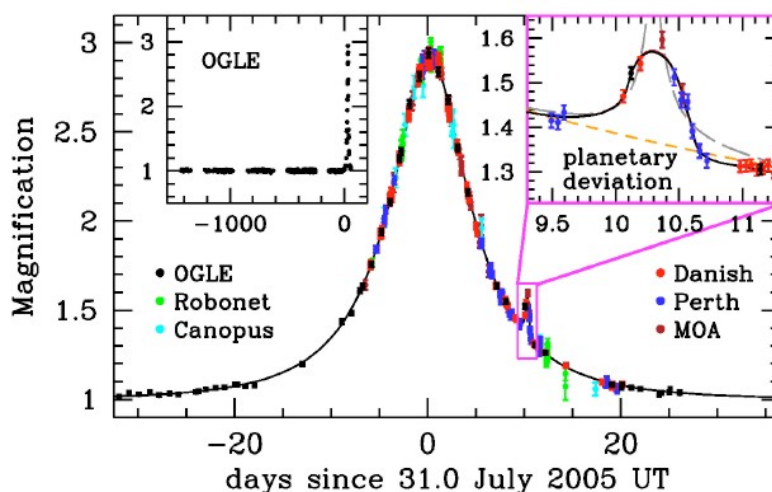


Figura 2.10 - Evento de microlente gravitacional.  
Fonte: Beaulieu et al. (2006).

Esse método é extremamente sensível, e permite a detecção tanto de planetas gigantes de até 3 vezes a massa de Júpiter quanto de planetas pequenos com massa comparável à da Terra. Porém não é adequado para planetas muito próximos à estrela central, sendo melhor usado para planetas afastados de suas estrelas por algumas unidades astronômicas.

### 2.3 Trânsitos Planetários

O método de detecção no qual nosso trabalho se baseia é o dos *trânsitos planetários*. Este é útil nos casos em que o sistema é visto de perfil da Terra. Nesse caso, o planeta passa diante da estrela, diminuindo seu brilho aparente (figura 2.11). Monitorando constantemente a luminosidade da estrela, pode-se descobrir planetas em sua órbita. A diminuição relativa do brilho causada pelo trânsito planetário permite a medição do raio do planeta com uma boa aproximação, e a duração e periodicidade dos trânsitos permite detectar o período, e portanto, a distância do planeta até a estrela.

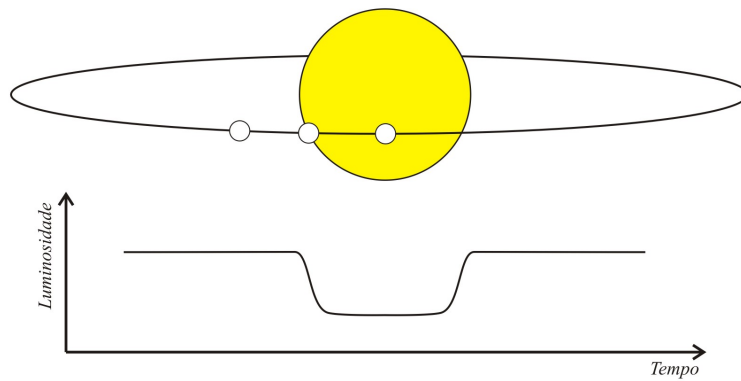


Figura 2.11 - Modelo e curva de luz de um trânsito planetário.

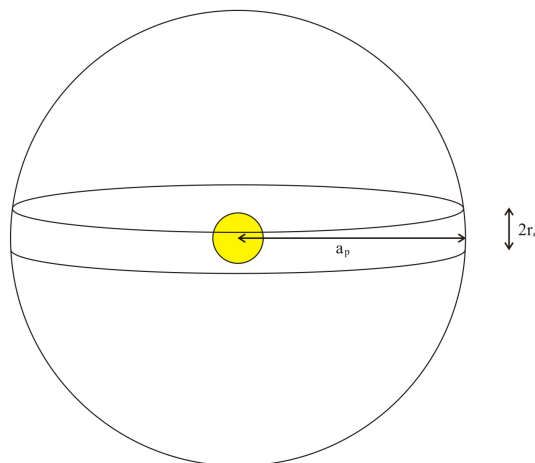


Figura 2.12 - Geometria de um trânsito planetário.

Pode-se calcular a probabilidade de que ocorra um trânsito, considerando a geometria da figura 2.12, onde a órbita do planeta foi aproximada para um círculo. Para obter a probabilidade, calculamos a razão entre as orientações da órbita planetária que resultam em trânsito (representada pelo cilindro de altura  $2r_*$  e raio  $a_p$ , onde  $r_*$  é o raio da estrela e  $a_p$  é o semi-eixo orbital do planeta) e todas as orientações orbitais possíveis (representada pela esfera de raio  $a_p$ ). O resultado que se obtém é:

$$\mathcal{P} = \frac{r_*}{P^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{4\pi^2}{Gm_*} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.20)$$

Percebe-se facilmente que a probabilidade diminui com a distância do planeta à estrela (representada na equação pelo período). No caso de um planeta semelhante a Júpiter em torno de uma estrela semelhante ao Sol com período de 3-4 dias, essa probabilidade é da ordem de 10%. No caso de um análogo à Terra, com período de 365 dias, cai para 0,5%.

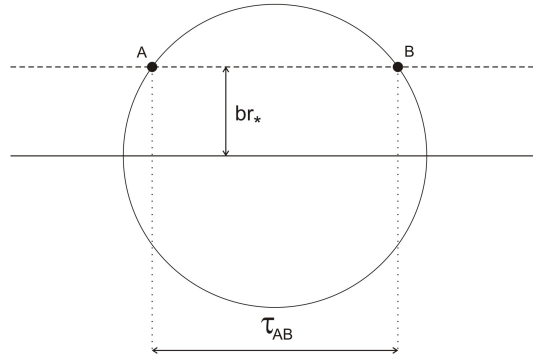


Figura 2.13 - Geometria de um trânsito planetário.

Para calcular a duração do trânsito, vamos considerar a figura 2.13, onde as órbitas planetárias são consideradas circulares. O tempo de trânsito é o tempo necessário para o planeta cruzar o segmento AB na figura, onde  $i$  representa a inclinação orbital em relação à linha de visada e  $b$  é o parâmetro de impacto. Esse parâmetro pode ser calculado por:

$$br_* = a_p \cos i, \quad (2.21)$$

e o comprimento da corda AB é:

$$l = 2r_*\sqrt{1 - b^2}. \quad (2.22)$$

A velocidade do planeta, em órbita circular, é:

$$v = \frac{2\pi a_P}{P}. \quad (2.23)$$

O tempo de trânsito é dado por  $l$  dividido pela velocidade  $v$ . Fazendo a divisão, utilizando a Terceira Lei de Kepler para escrever o tempo de trânsito em função de  $P$  e considerando a massa planetária desprezível diante da massa da estrela, obtemos:

$$\tau = \frac{2r_*\sqrt{1 - b^2}}{(Gm_*)^{1/3}(2\pi)^{2/3}}P^{1/3}. \quad (2.24)$$

A equação 2.24 pode ser simplificada, se tomarmos  $P$  em dias,  $m_*$  e  $r_*$  em unidades solares. Nesse caso, ficamos com:

$$\tau = 1,8\sqrt{1 - b^2} \frac{\left(\frac{r_*}{R_\odot}\right)}{\left(\frac{m_*}{M_\odot}\right)^{1/3}} \cdot \left(\frac{P}{1 \text{ dia}}\right)^{1/3} \quad (2.25)$$

A amplitude da diminuição da luminosidade durante o trânsito pode ser considerada, em primeira aproximação, como a razão das superfícies aparentes da estrela e do planeta. Assim, temos:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{r_P^2}{r_*^2}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, um planeta semelhante a Júpiter causa uma diminuição relativa de apenas 1% no brilho de uma estrela como o Sol, enquanto que um planeta semelhante à Terra, 0,01%. Portanto, o método dos trânsitos planetários exige fotometria de alta precisão para detectar planetas pequenos. No caso de Júpiter, a fotometria deve ter precisão de menos de 1%, enquanto que para a Terra,  $10^{-5}$ . No caso de planetas gigantes gasosos, o trânsito pode ser observado inclusive por telescópios no solo. Por exemplo, no caso do planeta HD 209458 b, o trânsito foi observado primeiramente



da Terra (CHARBONNEAU et al., 2000), para depois ser observado do espaço (BROWN et al., 2001).

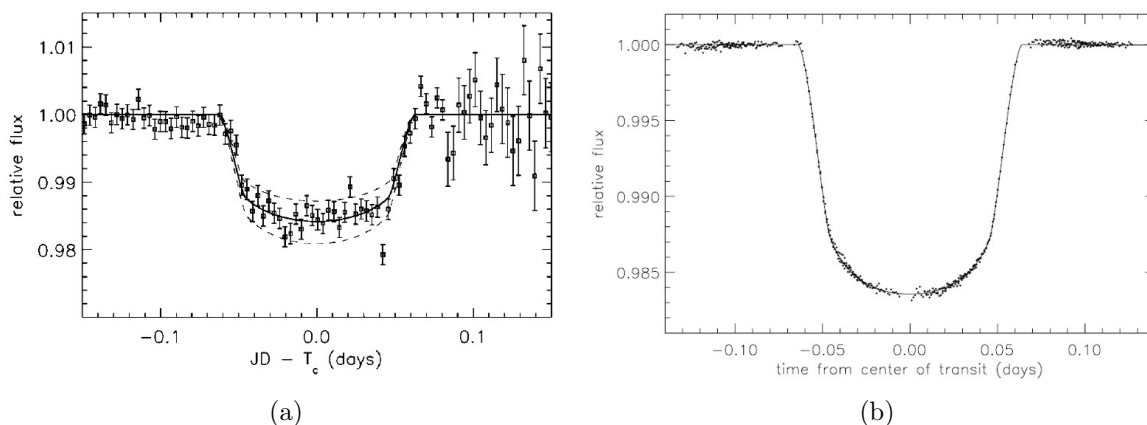


Figura 2.14 - (a) Curva de luz de HD 209458b, obtida a partir do solo. (b) Curva de luz do mesmo planeta, obtida pelo Telescópio Espacial Hubble.

O método dos trânsitos planetários é considerado complementar ao das velocidades radiais. Juntos, os dois métodos permitem a determinação de todos os parâmetros físicos e orbitais do planeta:

- a) ângulo de inclinação orbital, que não pode ser medido pelas velocidades radiais;
- b) tamanho do planeta, a partir da diminuição de brilho relativa, medida pelo trânsito;
- c) massa, a partir da velocidade radial da estrela;
- d) densidade, permitindo diferenciar entre um planeta gasoso e um rochoso.

Existem também outras aplicações do método dos trânsitos planetários. Por exemplo, usando espectroscopia diferencial durante e fora do trânsito, alguns estudos permitem inferir a constituição da atmosfera do planeta. Por observações no infravermelho, pode-se detectar o trânsito secundário (quando o planeta passa por trás da estrela), o que permite determinar algumas características espectrais da atmosfera planetária e também a excentricidade orbital. Também é possível utilizar trânsitos planetários para estudos de albedo planetário e escurecimento de limbo estelar.

Existem muitas missões para busca de exoplanetas, a partir do solo ou do espaço. No solo, citamos o exemplo da rede HAT (*Hungarian Automated Telescope Network*), mantida pela *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics*, o projeto SuperWASP (*Wide Angle Search for Planets*), com participação de 8 instituições e liderado pela Inglaterra, e também o programa TrES (*Trans-Atlantic Exoplanet Survey*), mantido pelo *California Institute of Technology*. No espaço, estão em andamento duas missões importantes: o Telescópio Espacial CoRoT, da Agência Espacial Francesa (CNES), lançado no final de 2006 e que recentemente teve seu tempo de missão estendido, e o Telescópio Espacial Kepler, da NASA, lançado em 2009. Existem também outras missões espaciais em fase de projeto e que devem entrar em funcionamento nos próximos anos.

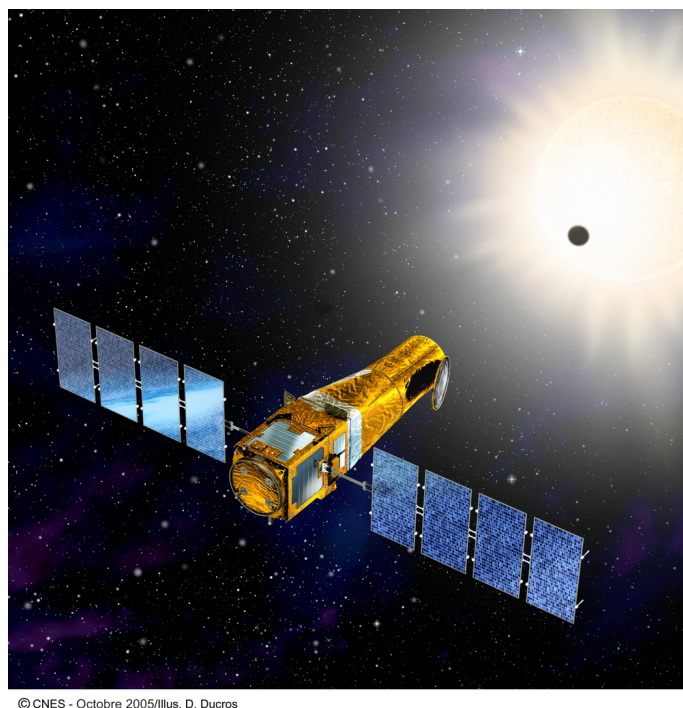
### 2.3.1 O Telescópio Espacial CoRoT

O Telescópio Espacial CoRoT (**C**onvection, **R**otation and **T**ransits) é uma missão liderada pela Agência Espacial Francesa (CNES) em conjunto com a Agência Espacial Européia (ESA) e outros países, entre eles o Brasil. Seus objetivos principais são o de buscar por planetas extrassolares com o método de trânsitos planetários e estudar astrosismologia em estrelas semelhantes ao Sol.

Para alcançar seus objetivos, o CoRoT possui um telescópio de 27 cm de diâmetro e quatro CCDs de 2048 x 2048 pixels cada, operando na faixa do visível do espectro eletromagnético. Seu campo de visão é de 2,7 x 3,05°. Sua órbita é circular polar a 896 km de altitude da Terra. Durante 6 meses, o CoRoT observa estrelas na direção do centro galáctico. Depois, ele gira de 180° e passa a observar estrelas na direção do anti-centro durante outros 6 meses, e assim sucessivamente. Ao todo, são monitoradas cerca de 120 mil estrelas.

O CoRoT foi especialmente projetado para localizar planetas terrestres. Pode operar em duas resoluções temporais: 32 ou 512 segundos. O nível de ruído previsto é de  $2,5 \times 10^{-5}$  a  $1,5 \times 10^{-4}$ .

Foi lançado ao espaço por um foguete Soyuz em 27 de dezembro de 2006. A primeira luz ocorreu em 18 de janeiro de 2007. Com previsão de ser mantido em funcionamento por 2 anos e meio, devido às boas condições, sua vida útil foi estendida até 2010, e depois novamente até 2013. Até o momento, o CoRoT detectou 17 planetas.



© CNES - Octobre 2005/Illus. D. Ducros

Figura 2.15 - Telescópio Espacial CoRoT.

### 2.3.2 A Missão Kepler

A Missão Kepler é uma missão da NASA com o objetivo específico de procurar por exoplanetas, especialmente os que possuem o tamanho da Terra. Possui um telescópio de 0,95 m de diâmetro, campo de visão de aproximadamente  $10 \times 10^\circ$ .

Sua órbita não é em torno da Terra, mas ao redor do Sol, em um dos Pontos Lagrangeanos do sistema. Esse tipo de órbita tem a vantagem de que a Terra nunca cobre o campo de visão do telescópio, além de mantê-lo longe das luzes da Terra que poderiam contaminar as observações.

O Kepler foi lançado em 2009, e até o dia 20 de janeiro de 2011, detectou 9 planetas.

### 2.4 Comparação entre os métodos

A figura 2.17 mostra uma comparação <sup>1</sup> entre os métodos existentes, com a massa limite para detecção e o número de descobertas feitas com cada um. Existem métodos

---

<sup>1</sup>Comparação obtida na *Enciclopédia dos Planetas Extrassolares*, disponível no site [www.exoplanet.eu](http://www.exoplanet.eu), em 28 de Dezembro de 2010.



Figura 2.16 - Missão Kepler.

capazes de detectar apenas planetas com massa superior à de Júpiter, como é o caso da astrometria, e outros que chegam a detectar planetas de massa semelhante à da Terra, como o das velocidades radiais e o dos trânsitos.

Pela figura, percebemos que alguns dos métodos que obtiveram poucos resultados até hoje têm boas perspectivas das próximas duas décadas, como é o caso da astrometria e das imagens diretas a partir do espaço. Velocidades radiais, microlentes gravitacionais e trânsitos planetários, principalmente a partir do espaço, são as técnicas que atualmente têm capacidade para descobrir os menores exoplanetas.

## 2.5 Teoria de Formação Planetária

Antes da descoberta de exoplanetas, o modelo de formação planetária era baseado no único sistema planetário conhecido: o Sistema Solar. Assim, previa-se a existência de planetas rochosos nas órbitas mais internas e gigantes gasosos nas órbitas mais distantes da estrela. Porém, com a descoberta de *51 Peg b* (MAYOR; QUELOZ, 1995), o modelo precisou ser revisto. Este certamente é um planeta gasoso, mas está a apenas 0,05 UA da estrela, com período de apenas 4,2 dias.

A seguir veremos um resumo sobre o modelo mais aceito atualmente de formação planetária, ressaltando que muitos detalhes ainda estão em aberto.

### 2.5.1 A Formação da Estrela

Tipicamente, as estrelas se formam a partir da condensação de grandes nuvens moleculares. Essas nuvens extensas são formadas por moléculas simples, na sua grande

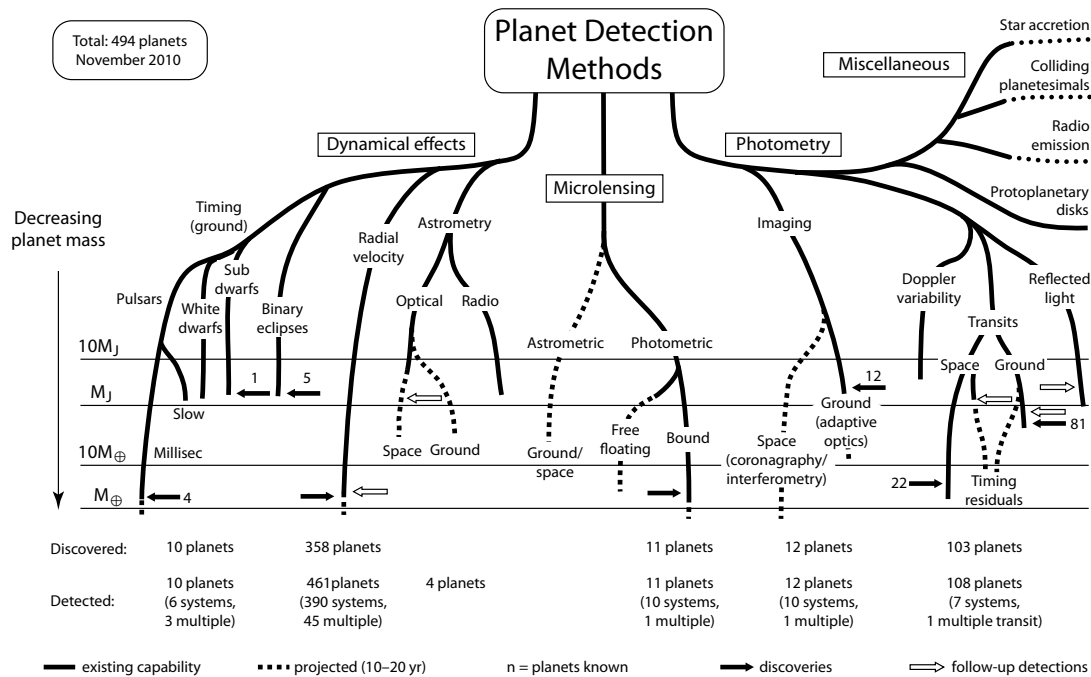


Figura 2.17 - Comparação entre os métodos de detecção de exoplanetas.

maioria Hidrogênio, e possuem baixa temperatura, cerca de 10 K. A atração gravitacional é contrabalanceada pela pressão, turbulência e campo magnético, mantendo a estrutura da nuvem. Quando a nuvem é perturbada de alguma maneira por um fator externo, começa a se contrair, formando uma região mais densa.

A densidade no núcleo da nuvem aumenta com o acréscimo de massa, o que eleva a temperatura e deixa o objeto central cada vez mais denso. O resultado é um objeto formado por um núcleo denso, onde será a estrela, circundado por um disco com rotação, que possui grande parte do momento angular da nuvem inicial. Esse disco recebe o nome de *disco protoplanetário*, e é nele que planetas começarão a se formar em seguida.

## 2.5.2 O Disco Protoplanetário

O disco continua fornecendo material para a protoestrela por acreção, o que não ocorre diretamente, mas ao longo das linhas do campo magnético. Ao mesmo tempo, ocorrem fluxos de matéria no interior do disco. A taxa de acreção começa a diminuir, devido ao aumento da luminosidade da estrela. Os materiais do disco também são processados, levando à formação de grãos. Nesse estágio a estrela é classificada como

uma T-Tauri.

Com o resfriamento do disco, os materiais começam a se condensar. Metais se condensam na parte mais interna do disco. Silicatos um pouco mais adiante. A uma certa distância, a temperatura é baixa o suficiente para permitir a condensação de gelos: é a *linha do gelo*, que separa os planetas rochosos (mais internos) dos gasosos (mais externos). No caso do Sistema Solar, a linha do gelo se localiza entre 4 e 5 UA.

### 2.5.3 Formação de Planetas Rochosos

Planetas rochosos levam muito mais tempo para se formar do que os gasosos. Seu processo de formação começa na fase em que os grãos de metais e silicatos se formaram no disco. Lentamente, esses grãos vão se unindo, devido à ação da gravidade. Em um primeiro momento, formam-se grãos de alguns centímetros de diâmetro, chamados *planetesimais*. Conforme os grãos se formam, eles migram para o interior do disco, pois possuem densidade mais alta. Isso aumenta a taxa de colisão e leva à formação de grãos cada vez maiores.

Existem alguns fenômenos ainda não bem entendidos nesse processo, mas lentamente os planetesimais vão se agregando, até que chegam a alguns quilômetros de diâmetro. Nesse momento, já possuem órbitas keplerianas ao redor da estrela, e recebem o nome de *protoplanetas*. Esse modelo de colisões favorece a formação de poucos corpos, o que é razoável em comparação com o pequeno número de planetas rochosos ao final (CHAMBERS, 2001).

O processo de colisões continua, até que os *planetas* sejam formados. Mesmo após a formação destes, alguns corpos menores continuam existindo por algum tempo, formando um disco. Eventualmente eles colidem com os planetas ou acabam sendo ejetados pela ação da gravidade dos planetas gigantes mais externos. Planetesimais vindos de além da linha de gelo também podem colidir com os planetas. No Sistema Solar, acredita-se que a colisão de um objeto massivo com a Terra tenha sido a provável responsável pela formação da Lua (HARTMANN; DAVIS, 1975; CAMERON; WARD, 1976; BELBRUNO; III, 2005). Também se acredita que colisões semelhantes sejam responsáveis pela formação da atmosfera, e até mesmo pela água existente na Terra.

#### 2.5.4 Formação de Planetas Gasosos

Para o caso dos planetas gasosos, existem dois modelos de formação. O primeiro deles considera a formação de um núcleo sólido, a partir da acreção dos gelos que se condensaram além da linha do gelo (POLLACK *et al.*, 1996). Quando esse núcleo atinge uma massa suficientemente grande, começa a atrair gravitacionalmente o gás existente no disco protoplanetário, formando um envelope. Durante a acreção, o núcleo e o envelope estão em equilíbrio quase-estático e térmico.

Quando o núcleo atinge uma massa crítica, inicia-se um novo processo de acreção do gás do disco. Para que este modelo esteja correto, a formação do planeta deve ocorrer durante o tempo de vida do disco protoplanetário, portanto, a acreção de gelos no núcleo deve ser bastante rápida. O resultado é a formação de um planeta gasoso de grande massa e com um núcleo sólido.

Para Júpiter e Saturno, estimativas indicam que o tempo de acreção é coerente com o tempo de vida médio do disco de gás, tipicamente da ordem de poucos milhões de anos (HAISCH *et al.*, 2001). Porém, dificilmente Urano e Netuno poderiam ter se formado tão rapidamente na posição onde se encontram, sugerindo a possibilidade de terem se formado em outra posição e migrado para suas órbitas atuais (THOMES E. W. & DUNCAN, 1999). Outra dificuldade encontrada é que medidas feitas com a sonda Galileu indicam que o núcleo de Júpiter pode ser menor do que todas as estimativas feitas usando esse modelo.

O outro modelo proposto e amplamente aceito propõe a formação de regiões com densidade um pouco maior no disco, levando ao acúmulo de matéria (BOSS, 2002). Conforme o disco rotaciona, essas regiões vão acumulando todo o material disponível, levando à formação dos planetas. Aparentemente, esse modelo leva à formação de planetas com massa muito maior do que a de Júpiter, mas não parece claro se permite a formação de planetas menos massivos (OLLIVIER *et al.*, 2009). Além disso, ainda falta verificar se a estrutura e a composição dos planetas formados por esse modelo estão de acordo com os dados observados.

#### 2.5.5 Formação de Luas e Anéis

Para planetas rochosos, o modelo padrão não prevê a formação de satélites e anéis, o que condiz com os dados observados no Sistema Solar. Mercúrio e Vênus não possuem luas. A Terra possui uma, que se acredita tenha sido formada pela colisão de um

corpo gigantesco (aproximadamente da massa de Marte) com a Terra em formação. A poeira lançada ao espaço teria se unido gravitacionalmente, formando a Lua. No caso de Marte, seus dois satélites, Fobos e Deimos, são considerados irregulares: são provavelmente grandes asteróides vindos do cinturão de asteróides (localizado entre as órbitas de Marte e Júpiter) que foram capturados por sua gravidade.

Já no caso dos planetas gasosos, as luas se formam a partir do colapso gravitacional dos materiais restantes no disco quando cessou a acreção de gás nos planetas. Os anéis são formados pela desintegração das luas mais internas, devido ao efeito de maré (o lado da lua voltado para o planeta está sujeito à atração gravitacional muito maior do que o lado oposto). Isso explica o grande número de luas nos planetas gasosos do Sistema Solar e também o fato de que os 4 possuem sistemas de anéis.

### 2.5.6 O Processo de Migração Planetária

Todos os modelos de formação planetária resultam na formação de planetas rochosos em órbitas internas e gasosos em órbitas externas. Mas então como explicar a descoberta de *51 Peg b* e de vários outros exoplanetas gasosos nos anos seguintes? A explicação mais aceita atualmente é a *migração planetária*: os planetas podem se formar em um determinado local e migrar para órbitas mais internas ou mais externas (LIN et al., 1996; WARD, 1997)

O modelo atual considera que as migrações ocorrem por interações entre os planetas recém-formados e o disco protoplanetário. Lembramos que a formação de planetas gasosos ocorre muito mais rapidamente do que a dos rochosos, portanto, quando os gigantes gasosos se formam, ainda existe o disco na região mais interna.

A grande dúvida neste modelo é sobre o mecanismo de freamento da migração. Em um gráfico da distribuição de períodos planetários (figura 2.18), percebe-se um amontoamento de planetas com período de cerca de 3 dias, e poucos planetas com período inferior. Isso sugere que de alguma maneira esses planetas param de migrar ao chegar a essa distância. Duas possibilidades são a interação do planeta com o campo magnético da estrela e a interação com a borda interna do disco protoplanetário, mas essa questão ainda está em aberto (UDRY et al., 2003).



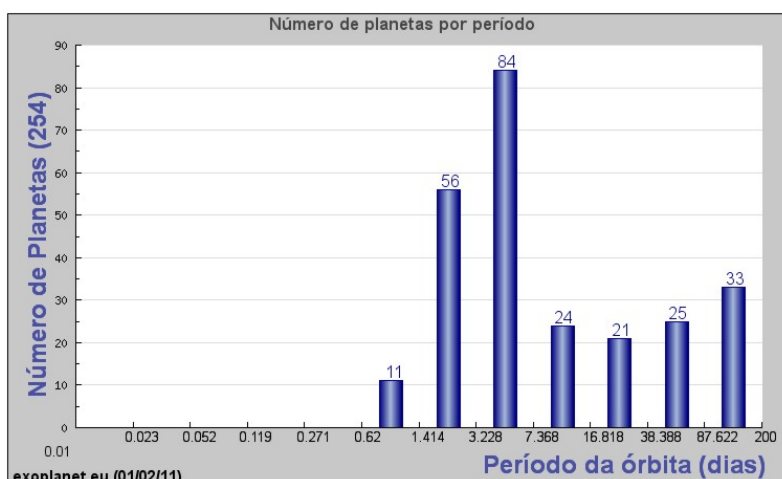


Figura 2.18 - Distribuição de períodos de exoplanetas.

## 2.6 Exoluas

Como até hoje nunca foram detectadas luas ao redor de exoplanetas, pouco se sabe sobre elas. O conhecimento que se tem vem de modelos teóricos e da observação das luas conhecidas do Sistema Solar. Portanto, a seguir apresentaremos alguns dados dessa observação e alguns conceitos importantes.

### 2.6.1 Limites Orbitais: Esfera de Hill e Limite de Roche

Considerando o sistema formado pela estrela, planeta e uma lua, obtemos dois limites orbitais para este último corpo. O primeiro limite vem do sistema de três corpos, e representa o limite máximo para órbitas lunares. Esse limite é chamado de *esfera de Hill*, e é definido como a região na qual a atração gravitacional dominante sobre a lua é a do planeta. Além da esfera de Hill, a lua deixa de orbitar o planeta, e passa a orbitar a estrela.

Podemos derivar o raio da esfera de Hill considerando que nessa região a velocidade de um corpo orbitando o planeta se iguala à velocidade do mesmo corpo orbitando a estrela. Assim, temos:

$$\sqrt{\frac{Gm_p}{R_H^3}} = \sqrt{\frac{Gm_*}{a_p^3}}, \quad (2.27)$$

onde  $R_H$  representa o raio da esfera de Hill,  $a_p$  é o raio orbital do planeta ao redor da estrela, e  $m_*$  e  $m_p$  são as massas da estrela e do planeta.

Resolvendo a equação 2.27 para  $R_H$ , obtemos:

$$R_H = a_p \left( \frac{m_p}{m_*} \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (2.28)$$

O outro limite orbital existente para as luas é chamado de *limite de Roche*. Ele representa a órbita mínima, além da qual a lua se despedaça por efeitos de marés.

Para obter a forma analítica do limite de Roche, vamos iniciar relembrando a Lei da Gravitação. A força de atração que a lua exerce sobre um elemento de massa  $u$  da própria lua é:

$$F_G = \frac{Gm_l u}{r_l^2} , \quad (2.29)$$

onde  $r_l$  e  $m_l$  são respectivamente o raio e a massa da lua.

Vamos agora definir a *força de maré*  $F_T$  como sendo a diferença entre a gravidade exercida pelo planeta na porção da lua mais próxima ao planeta e a que atua no centro da lua:

$$F_T = \frac{Gm_p u}{(a_l - r_l)^2} - \frac{Gm_p u}{a_l^2} , \quad (2.30)$$

onde  $a_l$  e  $m_p$  são a distância da lua ao planeta (considerando a órbita lunar circular) e a massa do planeta, respectivamente.

Podemos reescrever a equação 2.30 como:

$$F_T = Gm_p u \frac{2r_l a_l - r_l^2}{a_l^4 - 2r_l a_l^3 + r_l^2 a_l^2} . \quad (2.31)$$

Se considerarmos que a lua é muito menor que a distância entre a lua e o planeta ( $r_l \ll a_l$ ), obtemos:

$$F_T = Gm_p u \frac{2r_l}{a_l^3} . \quad (2.32)$$

Finalmente podemos definir o raio de Roche como sendo a distância entre a lua e o planeta de tal forma que onde a gravidade que atua sobre um elemento da superfície do satélite se iguala à força de maré, de modo que esse elemento de massa se desprenda:

$$F_T = F_G . \quad (2.33)$$

Substituindo as equações 2.29 e 2.32 na equação 2.33, e usando  $a_l = d$ , obtemos:

$$d = r_l \left( 2 \frac{m_p}{m_l} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.34)$$

onde  $d$  representa o limite de Roche. Nessa expressão aparece o raio da lua, o que nem sempre é desejável. A forma mais comum de se encontrar esse limite é expressando as massas em função das densidades, usando as expressões:

$$m_p = \frac{4\pi\rho_p r_p^3}{3} \text{ e} \quad (2.35)$$

$$m_l = \frac{4\pi\rho_l r_l^3}{3}. \quad (2.36)$$

Assim, substituindo as equações 2.35 e 2.36 na 2.34, podemos reescrevê-la sem o raio da lua:

$$d = r_p \left( 2 \frac{\rho_p}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.37)$$

Para essa derivação do limite de Roche, consideramos um satélite rígido. Resultados diferentes podem ser encontrados para outros casos, caso se leve em conta a deformação na lua causada pela gravidade do planeta.

### 2.6.2 Limites Orbitais: Simulações Numéricas

Além dos limites apresentados anteriormente, utilizamos o trabalho de Domingos et al. (2006), no qual os autores utilizam simulações numéricas para obter o semi-eixo maior máximo da lua em função dos parâmetros planetários, considerando o caso de luas prógradas e retrógradas. Os resultados são expressos usando a idéia de que o semi-eixo máximo pode ser escrito como uma parcela do Raio de Hill (HAMILTON; BURNS, 1991). Os limites obtidos dessa forma são:

$$a_{max} = [0,485(1 - 1,0305e_p - 0,2738e_l)] R_H \quad (2.38)$$

para uma lua prógrada e

$$a_{max} = [0,9309(1 - 1,0764e_p - 0,9812e_l)] R_H \quad (2.39)$$

para uma lua retrógrada. Nas equações 2.38 e 2.39,  $a_{max}$  representa o semi-eixo maior máximo,  $e_p$  e  $e_l$  indicam as excentricidades do planeta e da lua, e  $R_H$  representa o Raio de Hill. Usando a definição dada pela equação 2.28, pode-se obter esses limites em função do semi-eixo orbital do planeta.

Outro resultado interessante desse trabalho é a equação:

$$m_{max} = \frac{2}{13}(a_{mc})^{\frac{13}{2}} \frac{Q_P}{3k_{2P}TR_p^5} \sqrt{\frac{m_p}{G}}, \quad (2.40)$$

que calcula a massa máxima de uma lua em órbita circular estável por um tempo  $T$  em órbita de um planeta gigante.  $a_{mc}$  é o semi-eixo orbital máximo de uma órbita circular, e pode ser obtido usando  $e_l = 0$  na equação 2.38,  $Q_P$  é o parâmetro de dissipação de maré,  $k_{2P}$  é o número de Love,  $R_p$  e  $m_p$  são o raio e a massa do planeta. Os autores usam essa equação para calcular a massa máxima de uma lua estável (com  $T$  igual à idade estimada da estrela) ao redor de alguns exoplanetas conhecidos, a fim de exemplificar.

Com isso, eles demonstram que planetas com período pequeno (da ordem de poucos dias) só podem possuir luas com massa muito pequena (da ordem de  $10^{-5} M_{\oplus}$ , enquanto que planetas com período da ordem de 30 dias podem possuir luas com massa comparável à da Terra. Quanto mais distante o planeta da estrela, maior a massa máxima de uma lua com órbita estável. Somente para comparação, os planetas detectados em trânsito com maior período são Kepler-9c, com período de 38,9 dias (HOLMAN et al., 2010), CoRoT-9b, 95,27 dias (DEEG et al., 2010) e HD 80606b, 111,43 dias (NAEF et al., 2001), o que mostra que planetas capazes de possuir luas estáveis de massa comparável à da Terra são detectáveis atualmente com o método dos trânsitos.

### 2.6.3 Efeitos de Variação Temporal

Efeitos de variação temporal foram propostos como forma de detectar exoluas por Sartoretti e Schneider (1999), porém sua primeira aplicação com sucesso tenha sido na descoberta de um sistema planetário múltiplo (HOLMAN; MURRAY, 2005). Pouco tempo depois, essa técnica foi aprofundada e aplicada novamente à busca por exoluas (SZABÓ et al., 2006; KIPPING, 2009a; KIPPING, 2009b), embora ainda não tenha obtido nenhum resultado positivo.

São dois os efeitos de variação temporal, baseados no movimento que o planeta descreve ao redor do centro de massa planeta-lua. Esse movimento resulta em pequenos deslocamentos no instante central do trânsito (*transit timing variations, TTV*) e diferenças na duração do trânsito (*transit duration variations, TDV*), ambos da ordem de alguns segundos. A seguir, veremos a definição desses dois efeitos e como eles podem ser utilizados na obtenção dos parâmetros físicos e orbitais da lua.

Inicialmente, consideramos um planeta com uma lua em órbita. Devido à ação da força gravitacional, ambos os corpos descrevem um movimento ao redor do centro de massa comum, denominado de *wobble* ou *oscilação*. Da definição de centro de massa:

$$m_p a_w = m_l a_l , \quad (2.41)$$

podemos obter o semi-eixo do movimento descrito pelo planeta:

$$a_w = a_s \frac{m_l}{m_p} , \quad (2.42)$$

onde  $m_l$  e  $m_p$  são as massas da lua e do planeta,  $a_l$  e  $a_w$  são os semi-eixos orbitais da lua e do planeta ao redor do centro de massa.

Considerando o movimento de oscilação e da lua circulares, a velocidade do centro de massa em órbita da estrela é dada por:

$$v_b = \frac{2\pi a_p}{P} , \quad (2.43)$$

onde  $a_p$  é semi-eixo orbital do planeta em órbita da estrela e  $P$  é o período do planeta.

Em cada trânsito, o planeta estará em uma posição em relação ao CM. A variação máxima é dada pelo semi-eixo do movimento de oscilação (equação 2.42). Logo, a amplitude da variação no tempo de trânsito é dada por:

$$\delta_{TTV} = \frac{2a_w}{v_b} , \text{ ou seja :} \quad (2.44)$$

$$\delta_{TTV} = \frac{1}{\pi} \frac{P}{m_p a_p} a_l m_l . \quad (2.45)$$

Com esse efeito somente, não podemos determinar a massa e o período da lua, mas

o produto  $a_l m_l$ .

O outro efeito que ocorre é também uma consequência do movimento do planeta em órbita do centro de massa. Durante o trânsito, o planeta se movimenta, fazendo com que cada trânsito apresente pequenas diferenças.

Normalmente, se define o tempo de duração de um trânsito como a diferença de tempo entre os pontos de ingresso e egresso. No nosso caso, para facilitar as medidas, vamos definir o tempo de trânsito como o tempo entre os pontos  $a$  e  $b$  conforme a figura 2.19.

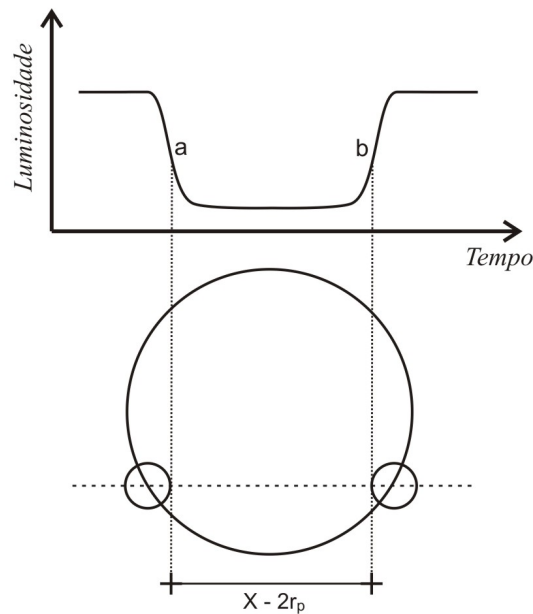


Figura 2.19 - Geometria de um trânsito planetário.

Nesse caso, a distância que o planeta percorre é  $X - 2r_p$ , onde  $X$  é o comprimento do segmento atravessado pelo planeta durante o trânsito. No caso de um planeta sem lua, o tempo que o planeta levaria para percorrer essa distância seria dado por:

$$\tilde{\tau} = \frac{X - 2r_p}{v_b}, \quad (2.46)$$

onde  $v_b$  representa a velocidade do centro de massa, que nesse caso é a própria velocidade do planeta. No caso de um planeta com lua, essa equação se modifica

levemente, pois temos que somar a velocidade do planeta em torno do centro de massa no denominador:

$$\tau = \frac{X - 2r_p}{v_b + v_w}, \quad (2.47)$$

onde  $v_w$  é a velocidade do planeta ao redor do centro de massa. Nas equações 2.46 e 2.47, consideramos que os movimentos são todos coplanares.

Agora definimos a variação na duração do trânsito como a diferença entre as equações 2.46 e 2.47:

$$\delta_{TDV} = \frac{X - 2r_p}{v_b} - \frac{X - 2r_p}{v_b + v_w}, \quad (2.48)$$

que pode ser reescrita como:

$$\delta_{TDV} = \left( \frac{v_b}{v_b + v_w} - 1 \right) \tilde{\tau}. \quad (2.49)$$

Considerando que a velocidade do centro de massa é muito maior que a velocidade da oscilação, reescrevemos a equação 2.49:

$$\delta_{TDV} = \frac{-v_w}{v_b} \tilde{\tau}. \quad (2.50)$$

Como estamos interessados na amplitude da variação, podemos desprezar o sinal negativo. Agora vamos obter as expressões para as velocidades, para que possamos escrever  $\delta_{TDV}$  de forma mais conveniente. Considerando o movimento do planeta ao redor do CM circular, a velocidade  $v_w$  é dada por:

$$v_w = \frac{2\pi a_w}{P_l}, \quad (2.51)$$

onde  $P_l$  é o período orbital da lua. Da definição do centro de massa do sistema planeta-lua, obtemos  $a_w$ :

$$a_w = \frac{a_l m_l}{m_p} \quad (2.52)$$

Assim,  $v_w$  pode ser escrito como:

$$v_w = \frac{2\pi a_l m_l}{m_p} \frac{1}{P_l}. \quad (2.53)$$

Usando a Terceira Lei de Kepler, podemos retirar  $P_l$  da expressão, ficando com:

$$v_w = \left( \frac{Gm_l^2}{m_p a_l} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (2.54)$$

Seguimos o mesmo raciocínio para obter  $v_b$ . A velocidade do centro de massa em órbita da estrela é dada por:

$$v_b = \frac{2\pi a_p}{P} . \quad (2.55)$$

Usando a Terceira Lei de Kepler novamente, removemos o semi-eixo orbital do planeta do denominador:

$$v_b = \left( \frac{2\pi G m_*}{P} \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (2.56)$$

Finalmente, substituímos as equações 2.54 e 2.56 na equação 2.50:

$$\delta_{TDV} = \left( \frac{Gm_l^2}{a_l m_p} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{P}{2\pi G m_*} \right)^{\frac{1}{3}} \tilde{\tau} \quad (2.57)$$

Voltando à ideia de que  $\delta_{TDV}$  é uma fração do tempo de trânsito de um planeta sem luas  $\tilde{\tau}$ , temos:

$$\delta_{TDV} = R \tilde{\tau} \quad , \text{ onde:} \quad (2.58)$$

$$R = \left( \frac{G}{m_p} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{P}{2\pi G m_*} \right)^{\frac{1}{3}} m_l a_l^{-\frac{1}{2}} . \quad (2.59)$$

A técnica de variações temporais consiste em medir o instante central e a duração de cada um de sucessivos trânsitos planetários. A cada trânsito, compara-se o valor medido com o valor esperado. A melhor maneira de lidar com o TDV é usando o parâmetro R, razão entre a duração medida e a esperada. Dessa forma obtemos a amplitude das variações.

Resolvendo o sistema formado pelas equações 2.45 e 2.59, a massa e o raio orbital são dados, respectivamente, por:

$$m_l = \left( \frac{32\pi^5}{G} \right)^{\frac{1}{9}} \left[ \frac{\left( m_p m_*^{\frac{1}{3}} \right)^2}{P^{\frac{5}{3}} \delta_{TTV} R^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad (2.60)$$



$$a_l = (16\pi^4 G)^{\frac{1}{9}} \left( \frac{m_p^3 a_p^6}{P^4 m_*^2} \right)^{\frac{1}{9}} \left( \frac{\delta_{TTV}}{R} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.61)$$

Um fato interessante entre essas duas técnicas é que se espera que elas tenham uma diferença de fase de  $\frac{\pi}{2}$  entre si. Essa diferença decorre do fato de que TTV é um efeito espacial, enquanto TDV é um efeito dinâmico (causado pela velocidade do planeta). Porém ela é sempre constante, mesmo no caso de satélites retrógrado. Sendo assim, ela não fornece informações sobre o movimento da lua, mas serve como diferenciação entre efeitos causados por luas ou por outros fatores, como outros planetas.

Note que  $\delta_{TTV}$ , como dissemos anteriormente, não permite a obtenção do período e da massa separadamente, mas apenas do produto  $a_l m_l$ . Porém, se conseguirmos medir os dois efeitos,  $\delta_{TTV}$  e  $\delta_{TDV}$ , podemos medir os dois parâmetros, obtendo tanto período orbital quanto massa da lua. Além disso, se pudermos medir também o raio da lua, a partir de assinaturas nas curvas de luz, obtemos também a densidade do satélite. Dessa forma, os efeitos de variações temporais se mostram uma importante ferramenta na detecção de luas.

Uma das dificuldades de medir essas variações é que elas são muito pequenas. Para exemplificar, [Kipping \(2009a\)](#) cita o caso de um planeta idêntico GJ436 b, porém com período de 35,7 dias. Esse período colocaria esse planeta na zona habitável de sua estrela hospedeira. Supondo a existência de uma lua em órbita, ela seria um local adequado para a vida. Supondo que a lua tivesse  $1 M_{\oplus}$  e período de 2,5 dias, a amplitude do  $\delta_{TTV}$  seria de 195 segundos e do  $\delta_{TDV}$  seria de 84 segundos<sup>2</sup>. Com fotometria de alta precisão, como a do Kepler, seria possível medir tais variações e detectar a lua em órbita do planeta.

#### 2.6.4 Aquecimento Interno

No caso de luas próximas ao planeta, forças de marés agem sobre ela. Esses efeitos de marés causam atrito entre as camadas internas, gerando aquecimento. Por isso, luas próximas possuem alta atividade vulcânica, o que ajuda a moldar sua superfície. Em alguns casos, o interior da lua pode ser completamente *derretido*, como no caso de *Io*, como veremos logo a seguir.

---

<sup>2</sup>Na verdade, [Kipping \(2009a\)](#) utiliza amplitude rms, que é mais adequada para o caso de órbitas elípticas. No nosso caso, como estamos considerando órbitas circulares, achamos mais conveniente utilizar amplitude como sendo a altura dos picos da curva senoidal. A diferença entre as duas definições, no caso de órbitas circulares, é um fator  $\sqrt{2}$ .

### 2.6.5 As Luas do Sistema Solar

Como já mencionamos, luas são formadas por poeira e gases que sobraram no disco protoplanetário, após a formação dos planetas. Todos os planetas gasosos do Sistema Solar possuem satélites, e possuem um grande número deles. Somente Júpiter e Saturno, por exemplo, possuem cerca de 60 satélites cada um. Aqui tratamos apenas das luas dos planetas gasosos, uma vez que nos rochosos as luas não são previstas pelos modelos de formação planetária, mas capturadas ou formadas por outros processos.

No caso de Júpiter, 4 satélites foram descobertos por Galileu, e por isso são chamados de *Satélites Galileanos*. São eles: *Io*, *Europa*, *Ganimedes* e *Calisto*. *Io* se localiza tão próximo a Júpiter (cerca de 420 mil km) que forças de maré agem violentamente sobre ele, aquecendo o núcleo. Por isso sua superfície apresenta alta atividade vulcânica. *Europa* possui superfície coberta de gelo. Modelos de estrutura interna demonstram que forças de marés também aquecem seu interior. Portanto, abaixo de uma camada de gelo de alguns quilômetros de espessura, supõe-se que exista um grande oceano, provavelmente salgado. Do ponto de vista da exobiologia, *Europa* é um dos satélites mais interessantes. Os demais satélites de Júpiter estão longe demais do planeta para que efeitos de marés gerem um oceano em seu interior, como acontece com *Europa*.

Em Saturno, encontra-se um satélite que atrai a curiosidade dos cientistas há algum tempo: *Titã*. Além de ser o maior de Saturno e o segundo maior do Sistema Solar (depois de *Ganimedes*), medindo uma vez e meia a nossa Lua, ele é o único satélite a possuir uma atmosfera densa, rica em matéria orgânica<sup>3</sup>, muito semelhante à da Terra primitiva. Estudos revelam uma região mais nova em um dos polos, em um sinal de criovulcanismo. Sua superfície apresenta grandes oceanos de hidrocarbonetos e sinais de erosão causada por chuvas. Mas a semelhança com a Terra para por aí, pois sua temperatura é muito baixa, apenas 93 K.

### 2.7 Anéis Planetários

Anéis planetários são discos de poeira e gelo, que orbitam os planetas gasosos. Os primeiros anéis descobertos, e mais famosos, são os de Saturno, observados pela primeira vez por Galileu. Atualmente, sabe-se que todos os planetas gasosos possuem

---

<sup>3</sup>Matéria constituída por substâncias contendo Carbono em sua estrutura molecular.

anéis, embora os de Júpiter, Urano e Netuno sejam difíceis de serem observados.

Os anéis de Júpiter apresentam elementos pesados, como Silício e Enxofre. Os de Saturno são formados basicamente por gelo e outros elementos congelados. Já os de Urano e Netuno apresentam grande variedade de elementos orgânicos.

Existe um fluxo de partículas dentro dos anéis, sendo que quando estas chegam no seu limite interno, acabam caindo sobre o planeta ou sendo ejetadas gravitacionalmente. Por isso, deve existir um mecanismo de realimentação dessas partículas, de modo que anéis possam existir por longos períodos. Acredita-se que quem fornece essas partículas sejam as luas, que acabam se despedaçando por efeitos de marés ou por colisões com outros corpos.



### 3 O MODELO

Neste capítulo, falaremos sobre o modelo que desenvolvemos para simular o trânsito de planetas com luas e anéis. Inicialmente, explicaremos o funcionamento básico do programa, comentando sobre os parâmetros. Serão mostradas também algumas curvas de luz para exemplificar, destacando a assinatura fotométrica em cada caso.

#### 3.1 Introdução

Nosso modelo é feito em IDL, e é baseado nos trabalhos de [Silva \(2003\)](#), [Silva-Válio \(2008\)](#). Ele considera uma estrela com escurecimento de limbo. Basicamente, o que o programa faz é calcular a posição do planeta, da lua e dos anéis, e estimar a luminosidade da estrela somando os pixels não cobertos. Fazendo essa estimativa passo a passo, o programa gera a curva de luz do trânsito.

#### 3.2 Estrela e Escurecimento de Limbo

Para modelar a estrela, utilizamos uma matriz bidimensional, gerada num programa à parte. Ela contém valores nulos nas regiões fora da estrela e não-nulos na superfície da estrela. O valor no centro da estrela é o maior, e os demais são calculados utilizando uma relação de escurecimento de limbo.

Usamos em nosso trabalho uma relação quadrática:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - \omega_1(1 - \mu) - \omega_2(1 - \mu)^2, \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é o cosseno do ângulo entre a linha de visada e a normal da superfície da estrela em cada pixel e  $I(1)$  representa a luminosidade no centro da imagem da estrela. [Brown et al. \(2001\)](#) mostram que essa relação é mais adequada para a estrela HD 209458, de classe espectral G0 V, do que a relação linear, usada normalmente para o Sol. Em todas as nossas simulações, utilizamos a mesma imagem da estrela HD 209458, gerada com a equação acima e com as constantes  $\omega_1 = 0.2925$  e  $\omega_2 = 0.3475$ , obtidas no mesmo artigo.

Além da relação de escurecimento de limbo utilizada, existem outras expressões, como a linear e a logarítmica. [Claret \(2000\)](#) sugere uma relação não linear com cinco parâmetros, capaz de representar com precisão estrelas de todos os tipos espectrais. [Claret \(2008\)](#) estuda a relação entre os parâmetros de escurecimento de limbo e

os parâmetros estelares, como massa e metalicidade. Em nosso trabalho optamos por não entrar nos detalhes dessa discussão, utilizando apenas a equação 3.1 e os parâmetros acima, de (BROWN et al., 2001).

A matriz que representa a estrela é utilizada como parâmetro de entrada, de modo que o programa não precise refazer a imagem da estrela a cada execução. Normalmente, usamos uma matriz de 856 x 856 pixels, mas para utilizar outros tamanhos basta gerar a nova matriz e rodar o modelo normalmente.

A figura 3.1 mostra um exemplo de imagem da estrela utilizada pelo modelo.

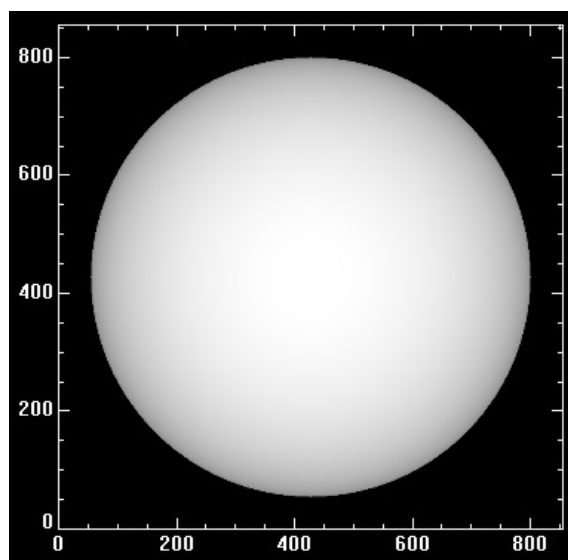


Figura 3.1 - Imagem da estrela com escurecimento de limbo.

### 3.3 Parâmetros Estelares

Para a estrela, são utilizados 3 parâmetros de entrada: período de rotação ( $P_R$ ), raio ( $r_*$ ) e massa ( $m_*$ ). O período de rotação é importante para calcular a posição das manchas superficiais em trânsitos consecutivos. O raio determina a razão entre as áreas da estrela e do planeta, e a massa é importante para que o programa calcule o semi-eixo orbital do planeta a partir do período, utilizando a Terceira Lei de Kepler.

### 3.4 Parâmetros Planetários

São 4 os parâmetros planetários: período orbital ( $P$ ), raio ( $r_p$ ), massa ( $m_p$ ) e ângulo de inclinação ( $i$ ). A massa será importante no movimento da lua, para calcular o semi-eixo orbital a partir do período. O ângulo de inclinação orbital determina a latitude da linha de trânsito na superfície da estrela.

A figura 3.2 mostra um exemplo de trânsito de um planeta diante da estrela, com raio cerca de 10 vezes menor. A figura 3.3 mostra as curvas de luz obtidas para planetas com mesmas características que HD 209458b e CoRoT-2b.

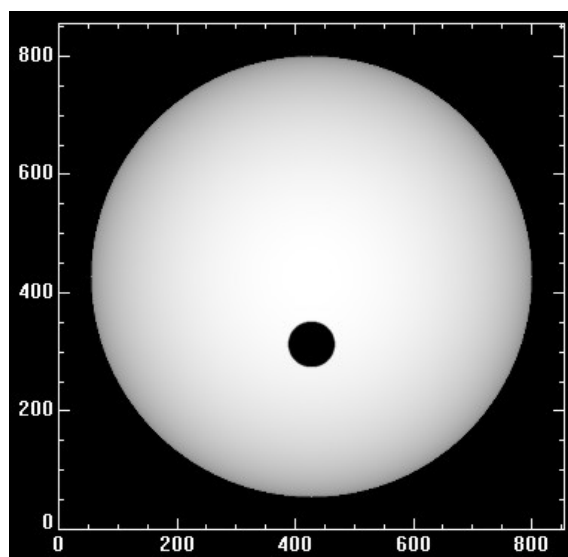


Figura 3.2 - Trânsito de um planeta sem lua diante da estrela.

### 3.5 Parâmetros Lunares

Para as luas, o programa possui também 4 parâmetros: período orbital ( $P_l$ ), raio ( $r_l$ ), massa ( $m_l$ ) e posição angular ( $\varphi$ ). A órbita lunar é circular e coplanar com a planetária, como já mencionamos. Essa foi uma opção feita para simplificar o modelo, diminuindo os parâmetros. O programa também calcula o deslocamento do planeta em torno do centro de massa do sistema planeta-lua, que depende da massa dos dois corpos. A posição angular indica a posição relativa entre lua e planeta no início do trânsito.

Um exemplo de trânsito de um planeta com uma lua pode ser visto na figura 3.4. A

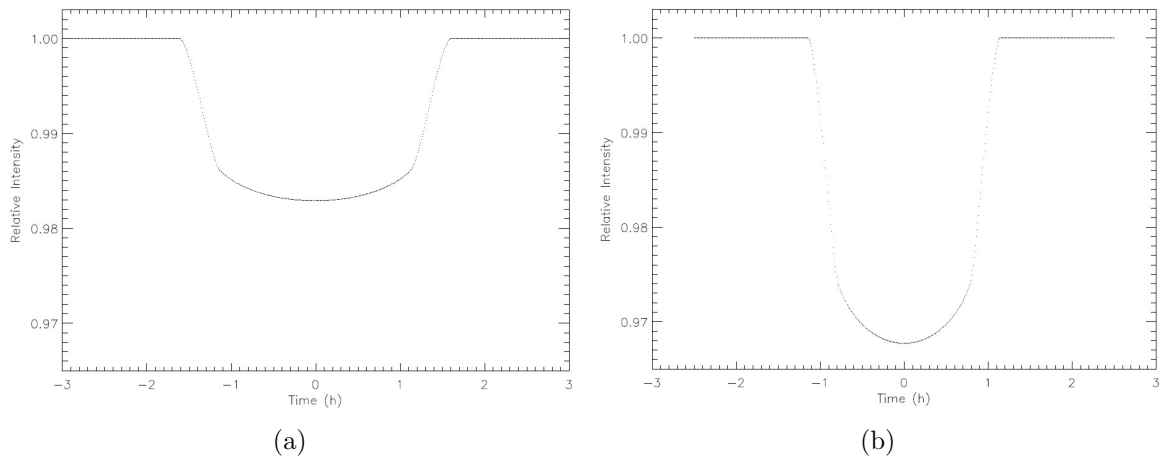


Figura 3.3 - Simulação de trânsito de dois planetas. (a) HD 209458b. (b) CoRoT-2b.

figura 3.5 exibe as curvas de luz para um planeta idêntico a Júpiter, com período de 45 dias, que possui uma lua com  $2 R_{\oplus}$  em órbita, em duas configurações diferentes.

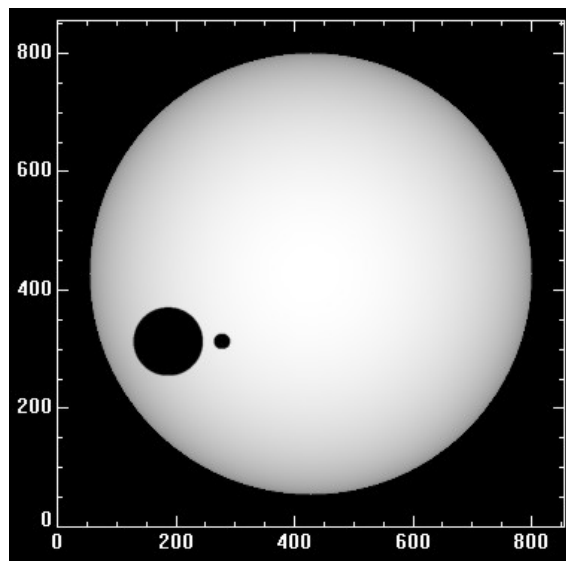


Figura 3.4 - Trânsito de um planeta com uma lua diante da estrela.

A principal assinatura na curva de luz que indica a presença da lua é um degrau, que ocorre quando a lua ingressa antes ou egressa depois no trânsito. Além desse, também ocorrem assimetrias na parte inferior. Todos esses sinais dependem da posição relativa entre a lua e o planeta, e também do período da lua.



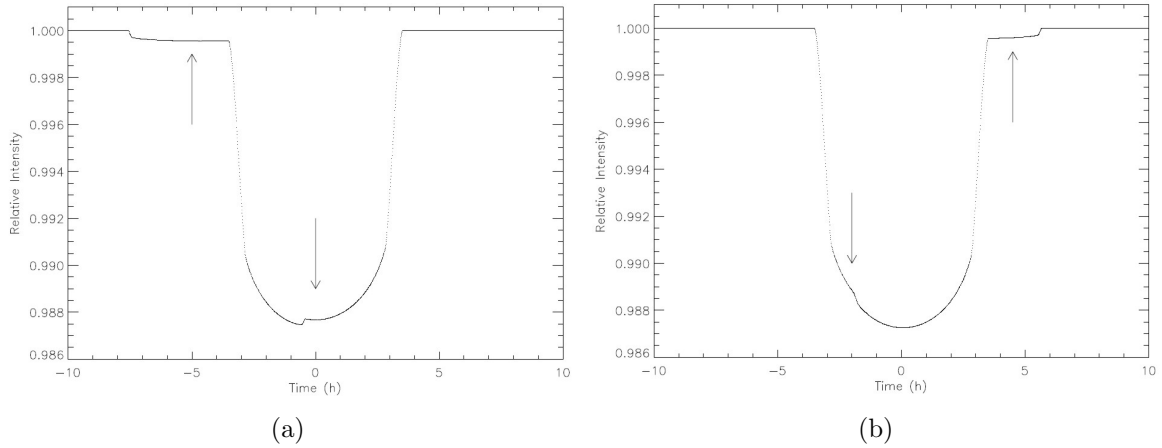


Figura 3.5 - Curvas de luz de um planeta com uma lua: **(a)**  $P_l = 5$  dias e  $\varphi = 0^\circ$ ; **(b)**  $P_l = 2$  dias e  $\varphi = 60^\circ$ .

### 3.6 Parâmetros de Anéis

Para o caso de anéis, deve-se informar a transparência ( $T$ ), os raios interno ( $r_i$ ) e externo ( $r_e$ ), e também dois ângulos de inclinação, sendo um deles com o plano orbital ( $\psi$ ) e outro em relação à linha de visada ( $\chi$ ). Os pixels da estrela cobertos pelos anéis não são zerados, mas têm sua intensidade multiplicada pelo parâmetro de transparência.

A figura 3.6 exibe um exemplo de trânsito de planeta com anéis. A figura 3.7(a) mostra a curva de luz gerada para um planeta igual a Saturno, com período de 5 dias

As simulações feitas com planetas com anéis indicam que o efeito destes na fotometria é aumentar a profundidade do trânsito, devido ao aumento da superfície encoberta da estrela. Também ocorre um arredondamento nos pontos de ingresso e egresso na curva de luz, na presença dos anéis. Um fenômeno interessante ocorre quando aumentamos o raio do anel, como pode ser visto na figura 3.7(b). O resultado é que com anéis maiores, a curva de luz se torna mais fechada, assumindo forma semelhante à das estrelas binárias com eclipses rasantes. Tais planetas com anéis, se existirem, provavelmente seriam precipitadamente descartados ao serem identificados como binárias.

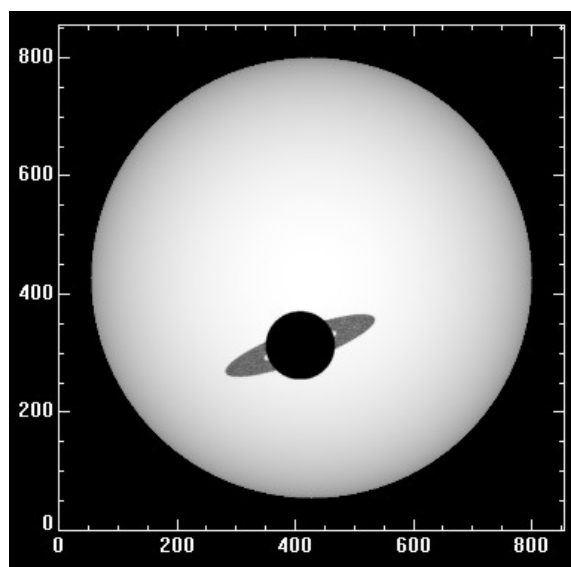


Figura 3.6 - Trânsito de um planeta com anéis diante da estrela.

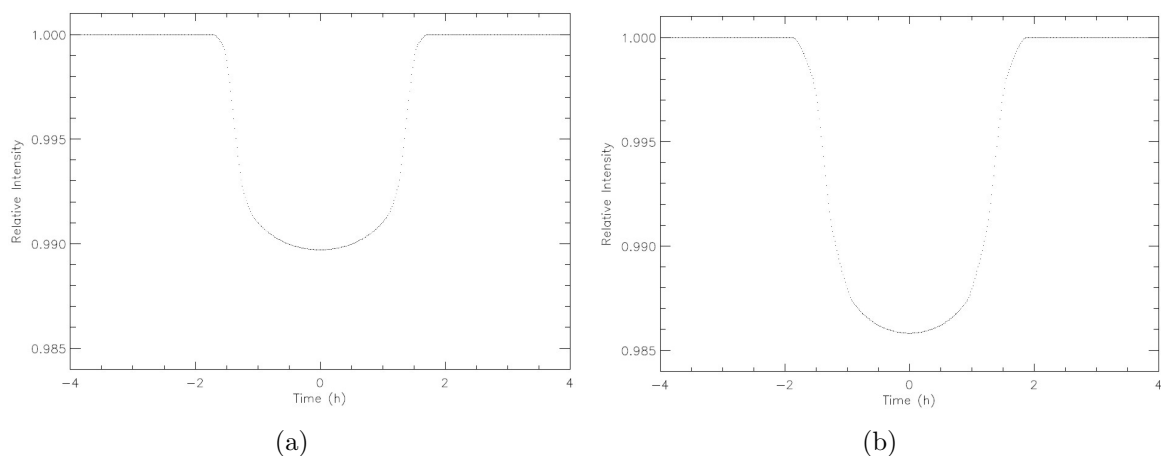


Figura 3.7 - Trânsito de Saturno em frente de uma estrela igual ao Sol. **(a)** Anéis planetários com as mesmas dimensões dos anéis de Saturno. **(b)** Anéis aumentados em 50% em relação aos anéis de Saturno.

### 3.7 Manchas Estelares

No caso de planetas com luas, o sinal destas pode ser confundido com o causado pela presença de manchas na superfície da estrela. Portanto, nosso modelo permite considerar manchas estelares. Para isso, o usuário informa a posição, o raio e a intensidade de cada mancha. [Silva \(2003\)](#) demonstrou que o sinal das manchas durante um trânsito planetário é um pequeno pico na curva de luz, devido ao fato de que a

mancha é uma região mais fria da superfície estelar. Ao encobrir a mancha, o planeta descobre uma região mais brilhante.

A figura 3.8 mostra o trânsito de um planeta diante de uma mancha na superfície estelar. A figura 3.9 mostra a curva de luz gerada para o caso dos planetas HD 209458b e CoRoT-2b, acrescentando uma mancha na superfície das estrelas. Nos dois casos, a mancha possui metade do raio do planeta e luminosidade de 60% da luminosidade da estrela.

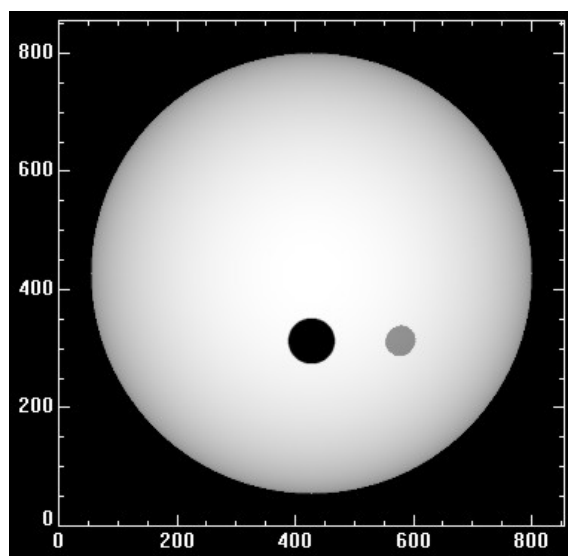


Figura 3.8 - Trânsito de um planeta com uma lua diante da estrela.

Quando o planeta possui luas e transita diante de uma mancha, o sinal da lua ocorre duplicado, devido ao trânsito do planeta e da lua diante da mancha. Porém, em alguns casos, a estrela pode possuir mais de uma mancha, o que pode dificultar bastante a identificação dos sinais fotométricos da lua. A figura 3.10 mostra as curvas de luz para um planeta idêntico a Júpiter com período de 45 dias, com uma lua de  $3 R_{\oplus}$ . Na figura 3.10(a), a estrela possui uma mancha superficial, e na figura 3.10(b), são 4 manchas.

### 3.8 Trânsitos Consecutivos

Em alguns casos, a curva de luz de planetas transitando diante de manchas estelares produz um resultado muito semelhante ao caso de luas. A diferença entre esses

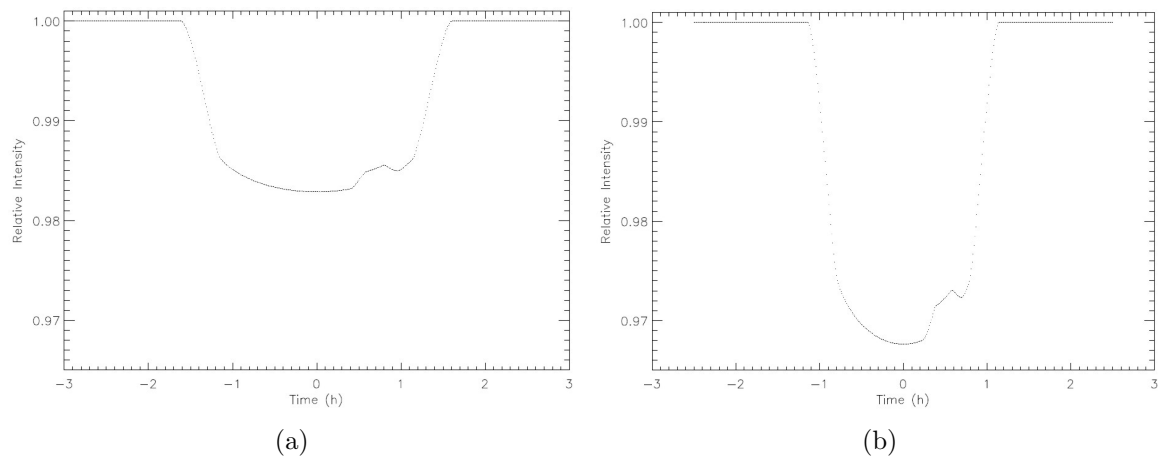


Figura 3.9 - Curvas de luz de trânsitos planetários com manchas na estrela. **(a)** Planeta HD 209458b. **(b)** Planeta CoRoT-2b.

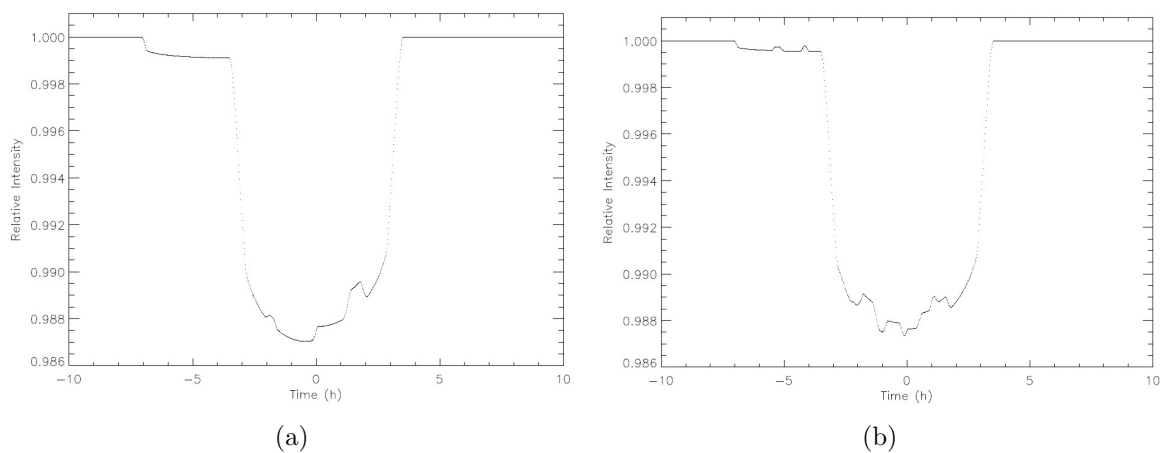


Figura 3.10 - Curvas de luz de um Júpiter Quente com uma lua. **(a)** Uma mancha na estrela. **(b)** 4 manchas na estrela.

dois modelos fica aparente quando consideramos mais de um trânsito, uma vez que o período das manchas será igual ao da estrela, enquanto que para luas isso não acontece.

Assim, o modelo permite ao usuário simular vários trânsitos consecutivos. Nesse caso, o programa calcula a posição angular da lua e das manchas no início de cada trânsito, sendo que o restante do funcionamento do programa é igual. Para otimizar o funcionamento, a curva de luz só é calculada nos momentos em que o planeta está em trânsito. A figura 3.11 mostra um exemplo de curva de luz gerada para três

trânsitos consecutivos.

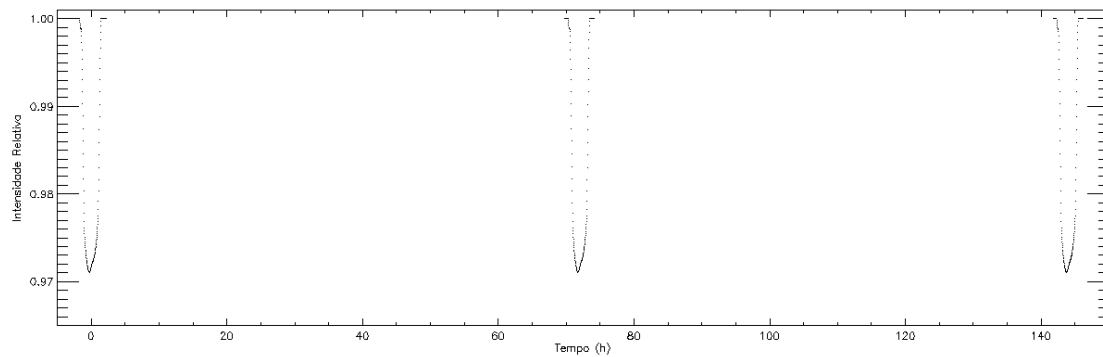


Figura 3.11 - Curva de luz de um planeta com uma lua gerada para três trânsitos consecutivos.



## 4 DETECÇÃO DE LUAS E ANÉIS PLANETÁRIOS

O programa que desenvolvemos permite acrescentar ruído à curva de luz e também ajustar a precisão temporal desejada nas curvas de luz. Para o ruído, utilizamos uma distribuição gaussiana. Ajustando adequadamente os dois parâmetros, podemos simular curvas de luz que seriam observadas pelos telescópios espaciais CoRoT e Kepler. Essas curvas de luz são utilizadas em outro programa separado, que faz a análise e procura por sinais característicos de curvas e anéis. O funcionamento e os resultados dessas análises são comentados a seguir.

### 4.1 Resolução Temporal e Precisão Fotométrica

Para simular os dados do Telescópio Espacial CoRoT, utilizamos a resolução temporal de 32 segundos e o ruído fotométrico relativo de  $6 \times 10^{-4}$ . Esse ruído é do nível do observado na descoberta do planeta CoRoT-2b. Para o Kepler, utilizamos resolução temporal de 60 segundos e ruído fotométrico relativo de  $2 \times 10^{-5}$ .

### 4.2 Os Algoritmos de Ajuste de Curvas

Para o ajuste, utilizamos dois algoritmos: Pikaia (CHARBONNEAU, 1995) e Amoeba (PRESS et al., 1992). O Pikaia é um algoritmo genético, e tem a vantagem de localizar o máximo global de uma função sem necessidade de se informar um valor inicial para a procura. Os resultados obtidos por ele são inseridos como dados iniciais para o Amoeba, que refina os resultados por iteração, usando o método do simplex.

Para comparar os resultados dos ajustes, exibimos, nas tabelas a seguir, o valor de  $\chi^2$  obtido com o procedimento de ajuste e também o valor do parâmetro  $Q$ , definido como *qualidade do ajuste* (PRESS et al., 1992). Esse parâmetro varia de 0 a 1, e indica a probabilidade de que  $\chi^2$  assumira um valor maior ou igual a um valor desejado, portanto, é uma medida qualitativa da qualidade do ajuste obtido.

Para o valor de  $Q$ , costuma-se adotar o seguinte critério (PRESS et al., 1992): se  $Q$  for maior do que 0,01, então o ajuste é satisfatório; se for entre 0,001 e 0,1, então pode ou não ser satisfatório, e é recomendado um estudo acerca dos níveis de ruído da amostra;  $Q$  menor do que 0,001 indica que o ajuste não é bom.

### 4.3 Detecção de Planetas

Como teste de funcionamento do procedimento de ajuste, simulamos curvas de luz de planetas idênticos a HD 209458b e CoRoT 2b. Acrescentamos ruído e submetemos ao processo de ajuste de parâmetros, deixando livres o raio planetário e a inclinação orbital, com os demais parâmetros fixados. O processo foi feito para simulação de curvas de luz simuladas do CoRoT e do Kepler. A figura 4.1 mostra o resultado do ajuste para as curvas do CoRoT, e as tabelas 4.1 e 4.2 compara os parâmetros originais e os obtidos pelo ajuste. Os pontos representam a curva com ruído, e a linha cheia mostra o melhor ajuste obtido.

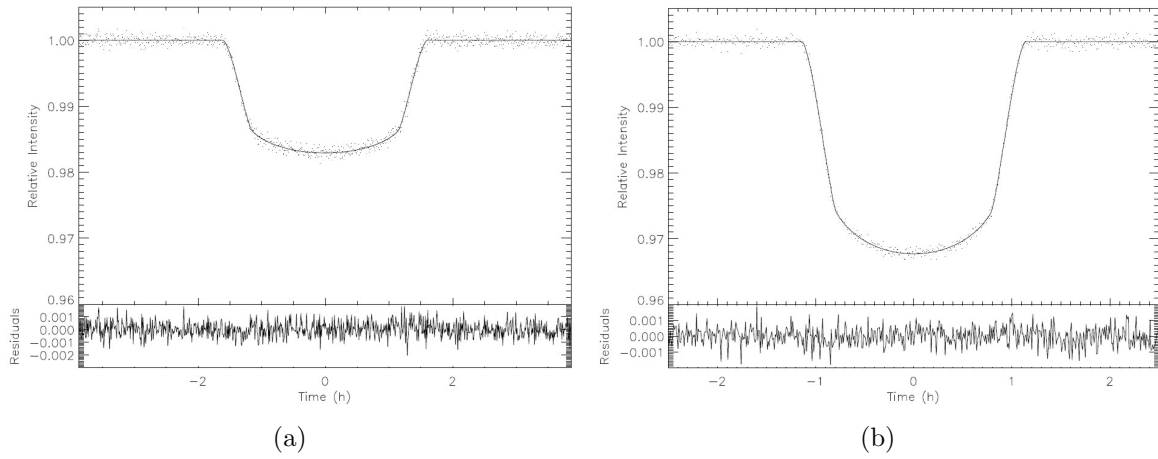


Figura 4.1 - Ajuste de curvas para o trânsito de um planeta. **(a)** HD 209458b. **(b)** CoRoT-2b.

Tabela 4.1 - Resultados dos ajustes das simulações dos trânsitos de HD 209458b e CoRoT-2b, considerando o ruído do CoRoT.

Planeta	Parâmetro	Valor Original	Ajuste	$\chi^2$	Q
HD 209458b	Raio Planetário ( $R_J$ )	1,38	1,37	902,67	0,1880
	Inclinação Orbital ( $^\circ$ )	86,677	86,694		
CoRoT-2b	Raio Planetário ( $R_J$ )	1,465	1,466	261,96	0,934
	Inclinação Orbital ( $^\circ$ )	87,84	87,86		



Tabela 4.2 - Resultados dos ajustes das simulações dos trânsitos de HD 209458b e CoRoT-2b, considerando o ruído do Kepler.

Planeta	Parâmetro	Valor Original	Ajuste	$\chi^2$	Q
HD 209458b	Raio Planetário ( $R_J$ )	1,38	1,38	865,20	0,501
	Inclinação Orbital ( $^\circ$ )	86,677	86,677		
CoRoT-2b	Raio Planetário ( $R_J$ )	1,465	1,465	321,29	0,169
	Inclinação Orbital ( $^\circ$ )	87,84	87,84		

#### 4.4 Detecção de Luas

No caso do planeta possuir uma lua em órbita, existem dois fatores que dificultam sua detecção. O primeiro deles é o ruído, como seria de se esperar. Em casos de luas muito pequenas, a assinatura deixada por elas na curva de luz é coberta pelo nível de ruído, deixando-a indetectável. Outra dificuldade que existe é a presença de manchas escuras na superfície da estrela, como já citamos anteriormente.

Para demonstrar como luas podem ser detectadas, vamos considerar o caso de um Júpiter Quente, com período de 45 dias ao redor da estrela. Em órbita, foi colocada uma lua com 3 raios da Terra e período de 5 dias. Foram feitas simulações para o CoRoT e para o Kepler. Os parâmetros obtidos pelo ajuste em comparação com os originais podem ser vistos na tabela 4.3, e a figura 4.2 mostra o resultado do ajuste para o CoRoT. A simulação foi feita considerando 5 trânsitos consecutivos, mas a figura exibe apenas o primeiro deles, para facilitar a visualização.

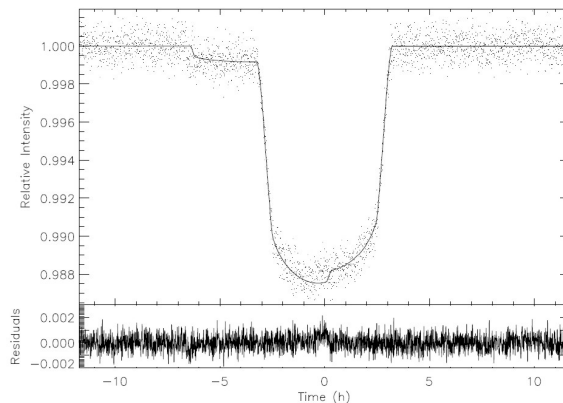


Figura 4.2 - Ajuste de curvas para o trânsito de um planeta com uma lua, considerando o nível de ruído do CoRoT.

Tabela 4.3 - Resultados dos ajustes da simulação de um trânsito de um planeta com uma lua, obtidos para o ajuste de 5 trânsitos.

Telescópio	Parâmetro	Valor Original	Ajuste	$\chi^2$	Q
CoRoT	Raio Planetário ( $R_J$ )	1,0	1,0	1399.93	0,533
	Período Lunar (dias)	5,0	5,0		
	Raio Lunar ( $R_\oplus$ )	3,0	2,9		
	Posição angular da lua ( $^\circ$ )	0,0	0,6		
Kepler	Raio Planetário ( $R_J$ )	1,0	1,0	1358.75	0,807
	Período Lunar (dias)	5,0	5,0		
	Raio Lunar ( $R_\oplus$ )	3,0	3,0		
	Posição angular da lua ( $^\circ$ )	0,0	-0,4		

Em nossas simulações, percebemos que quanto maior o número de trânsitos considerados, menor o número de iterações necessárias nos algoritmos de ajuste para obter o resultado, ou seja, mais fácil a detecção das luas.

#### 4.5 Detecção de Anéis Planetários

Vimos anteriormente que os anéis planetários são evidenciados pelo arredondamento das regiões de ingresso e egresso do trânsito, além do aprofundamento do trânsito (devido ao aumento da área encoberta da superfície estelar). Para que essas assinaturas sejam detectáveis, o ruído é o fator predominante: se a assinatura for muito pequena, o ruído acabará por cobri-la.

Para exemplificar, consideramos o trânsito de um planeta idêntico a Saturno, com período de 45 dias. Simulamos o trânsito para os dois telescópios espaciais. Em ambos os casos, submetemos a curva de luz a um processo de ajuste considerando apenas a presença do planeta. O resultado desse primeiro ajuste pode ser visto na figura 4.3 e na tabela 4.4.

Pela análise dos resíduos da figura 4.3 e pelo valor de  $Q$  na tabela 4.4, percebe-se que o ajuste considerando apenas um planeta produz um resultado satisfatório para o CoRoT (figura 4.3(a)), mas não para o Kepler (figura 4.3(b)). Isso indica que os anéis de Saturno são detectáveis pelo Kepler, mas não pelo CoRoT, ou seja, se o CoRoT detectasse um planeta idêntico a Saturno, ele seria identificado como um planeta gasoso com raio um pouco maior que o de Júpiter, porém sem anéis.

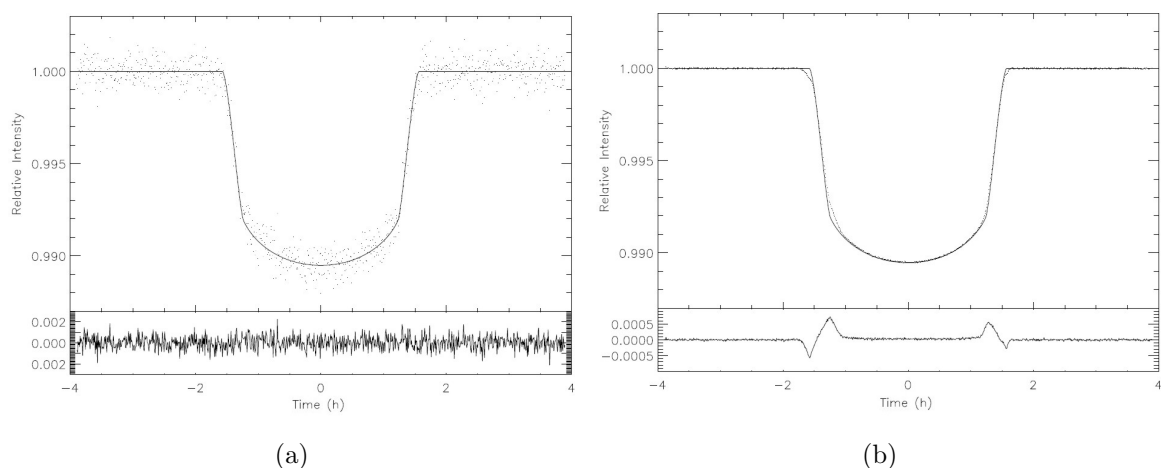


Figura 4.3 - Trânsito de Saturno, ajustado sem considerar os anéis. **(a)** CoRoT. **(b)** Kepler.

Tabela 4.4 - Resultados dos ajustes das simulações do trânsito de Saturno, considerando apenas a presença do planeta.

Telescópio	Parâmetro	Valor Original	Ajuste	$\chi^2$	Q
CoRoT	Raio Planetário ( $R_J$ )	0,84	1,02	885,62	0,340
	Inclinação Orbital ( $^\circ$ )	88	88,04		
Kepler	Raio Planetário ( $R_J$ )	0,84	1,02	106817	0
	Inclinação Orbital ( $^\circ$ )	88	88,05		

Em seguida, submetemos apenas a curva de luz da figura 4.3(b) ao procedimento de ajuste considerando a presença dos anéis. Os parâmetros obtidos podem ser conferidos na tabela 4.5, e o resultado do ajuste na figura 4.4. Comparando-se os resíduos das figuras 4.3(b) e 4.4 e valor de  $Q$  nas tabelas 4.4 e 4.5, percebe-se que o ajuste do modelo considerando os anéis produz um resultado mais adequado.

Observando os dados da tabela 4.5, vemos que os parâmetros obtidos pelo ajuste são ligeiramente diferentes dos originais, exceto os ângulos de inclinação, que resultaram em valores bem próximos. Apesar disso, a figura 4.4 mostra que o ajuste foi adequado. Isso ocorre porque há uma degenerescência nos dados: anéis de dimensões e transparências diferentes podem produzir a mesma curva de luz. Essa degenerescência não pode ser removida, mas mesmo assim, pela comparação dos resíduos das figuras 4.3(b) e 4.4, o ajuste considerando os anéis produz um resultado muito melhor. Veremos adiante que por causa dessa degenerescência, precisamos estabelecer

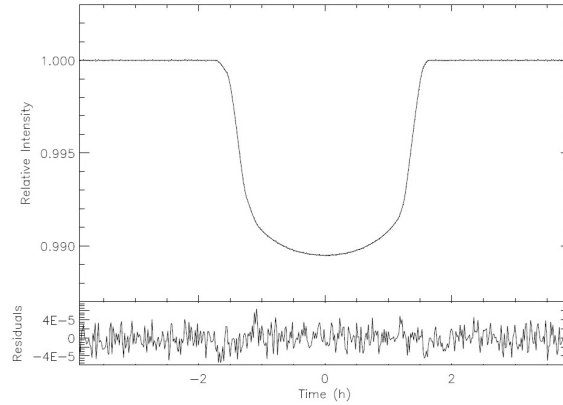


Figura 4.4 - Trânsito de Saturno, ajustado considerando a presença dos anéis.

Tabela 4.5 - Resultados obtidos no ajuste de uma simulação do trânsito de um planeta idêntico a Saturno observado pelo Kepler.

Parâmetro	Valor Original	Ajuste	$\chi^2$	Q
Raio Planetário ( $R_J$ )	0,84	0,84	517,03	0,036
Raio Interno ( $R_P$ )	1,11	1,52		
Raio Externo ( $R_P$ )	2,32	2,12		
Ângulo com Plano do Céu ( $^\circ$ )	78,0	78,35		
Ângulo com Plano Orbital ( $^\circ$ )	20,0	20,55		
Transparência	0,5	0,10		

outro critério de detectabilidade de anéis.

#### 4.6 Limites de Detecção

Para determinar o raio da menor lua detectável, fizemos várias simulações, diminuindo o raio a cada execução. Em cada execução, fizemos o procedimento de ajuste de parâmetros. Em todos os casos em que os parâmetros obtidos foram iguais aos originais, então consideramos que o evento é detectável. Assim, no caso do CoRoT, a menor lua detectável em órbita de um planeta idêntico a Júpiter tem raio de  $1,3 R_\oplus$ . No caso do Kepler, esse raio mínimo cai para  $0,3 R_\oplus$ , pouco maior que a Lua da Terra.

Para o caso dos anéis planetários, o procedimento foi um pouco diferente. Primeiramente, vimos que no ajuste de planetas com anéis existe uma degenerescência que não pode ser removida. Logo, para determinar a detectabilidade desses sistemas não

podemos proceder como no caso de planetas com luas, apenas comparando parâmetros. Além disso, o problema maior é a diferenciação entre planetas solitários e planetas com anéis.

Por isso, adotamos o seguinte critério: ao simular uma curva de luz de planetas com anéis, fazemos o ajuste dos parâmetros considerando apenas a presença do planeta; se o valor de  $Q$  indicar que o ajuste não foi satisfatório, então os anéis são detectáveis.

Para estabelecer um critério de detectabilidade, definimos também a área efetiva dos anéis planetários como sendo a projeção dos anéis sobre a superfície plana multiplicada pela opacidade dos anéis:

$$A_{EF} = (R_E^2 - R_I^2) \cos \psi (1 - T) \quad (4.1)$$

onde  $R_E$  e  $R_I$  são os raios externo e interno dos anéis, respectivamente,  $\psi$  é o ângulo de inclinação dos anéis com o plano do céu e  $T$  representa a transparência (1 representa anéis totalmente transparentes e 0 totalmente opacos).

Em nossas simulações, verificamos que no caso do Kepler, anéis planetários são detectáveis quando a área efetiva corresponde a aproximadamente 3% da área encoberta pelo planeta. Para anéis com transparência 0,5 e inclinação de  $78^\circ$  em órbita de um planeta idêntico a Saturno, são detectáveis anéis com aproximadamente 50% do tamanho dos anéis de Saturno. Para o caso do CoRoT, a área efetiva deve corresponder aproximadamente à área do planeta. Para o planeta do mesmo exemplo anterior, os anéis devem possuir raios 45% maiores que os de Saturno para serem detectáveis pelo CoRoT.

#### 4.7 Medidas de Variações Temporais

O modelo permite considerar o movimento de wobble do planeta em órbita do centro de massa do sistema planeta-lua, ou então considerar o planeta fixo. O primeiro caso resulta em variações temporais que fornecem informações sobre a lua.

Kipping (2009a) sugere que as medidas da duração (TDV, *transit duration variation*) e do instante central do trânsito (TTV, *transit timing variation*) sejam feitas pelos pontos de ingresso e egresso do trânsito planetário. Carter et al. (2008), por outro lado, mostra que as medidas são precisas se forem feitas pela largura à meia altura da curva de luz. Em nosso trabalho optamos por fazer dessa maneira. Dessa forma,

a diferença entre os pontos  $t_1$  e  $t_2$  fornecem o tempo de duração do trânsito, e a média deles informa o instante central (figura 4.5).

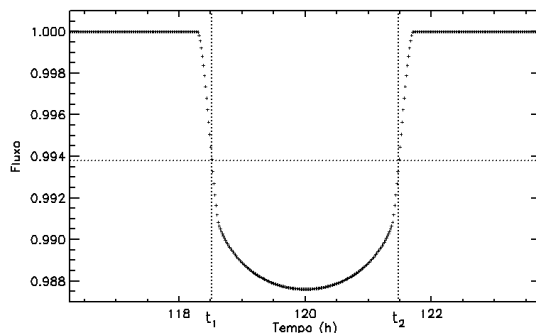


Figura 4.5 - Medidas do instante central e da duração de um trânsito planetário.

Um programa distinto analisa as curvas de luz e usa esse método para determinar os efeitos de TTV e TDV. A cada trânsito, são feitas as medidas do instante central e da duração. O TTV é dado pela diferença do instante central de cada trânsito e o valor esperado, calculado pelo período planetário. O TDV é dado pelo parâmetro  $R$ , a razão entre a duração do trânsito e a duração de um trânsito de um planeta idêntico, sem luas. Fazendo essas medidas para vários trânsitos, obtemos valores oscilatórios, cuja amplitude pode ser usada nas equações 2.45 e 2.59 para obtermos novamente os parâmetros da lua.

Na figura 4.6, vemos um exemplo de medidas de variações temporais causadas em um planeta idêntico a GJ 436b com período de 35,7 dias por uma lua com a massa da Terra com período de 2,5 dias, com o nível de ruído do Kepler. Esse planeta está na zona habitável de sua estrela hospedeira. A linha cheia representa a TTV e a pontilhada a TDV. Uma dificuldade nesta técnica é que só fazemos uma medida da variação temporal por trânsito, portanto a determinação da amplitude dos efeitos fica dificultada. Mesmo assim, a variação periódica dos sinais e a diferença de fase entre eles é um forte indicativo da presença da lua.

O ruído é o principal fator que dificulta as medidas dessas variações temporais. Com o CoRoT, essas medidas só podem ser feitas com luas de massa muito grande, quando as amplitudes são da ordem de alguns minutos. Com o Kepler, podemos medir satisfatoriamente os dois efeitos. O exemplo da figura 4.6 mostra que luas

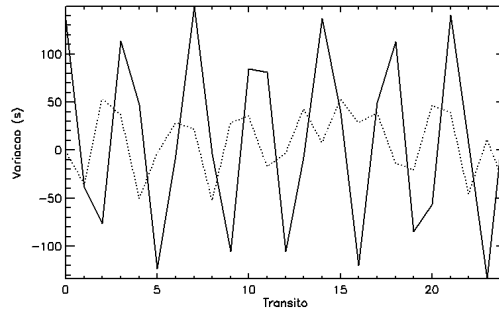


Figura 4.6 - Medidas dos efeitos TTV (linha cheia) e TDV (linha pontilhada) em 25 trânsitos consecutivos, em uma simulação de dados do Kepler.

terrestres na zona habitável de sua estrela são detectáveis pelo Kepler (no contexto do modelo utilizado) usando efeitos de variação temporal.





## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nos últimos 15 anos, a ciência de exoplanetas evoluiu muito rapidamente. Com o desenvolvimento de novas técnicas e novos instrumentos, com capacidade cada vez maior, o número de descobertas saltou rapidamente para os 519 atuais<sup>1</sup>. Com isso, demonstrou-se que exoplanetas existem em uma variedade muito grande de tipos e características: foram descobertos planetas gasosos, planetas rochosos, planetas em sistemas múltiplos, em estrelas binárias, planetas com órbita retrógrada (QUELOZ *et al.*, 2010), e muito mais.

Essa grande variedade de características é o que nos permite imaginar as descobertas surpreendentes que virão a seguir. Por exemplo, Cabrera e Schneider (2007) supõem a existência de planetas binários: dois corpos com massa planetária orbitando um centro de massa comum, e o centro de massa orbitando a estrela. Se tais planetas binários existem ou não é uma pergunta a ser respondida nos próximos anos.

Dentre as suposições que podemos fazer acerca dos exoplanetas, existe a possibilidade de existência de luas. Essa idéia se baseia no fato de que os planetas gasosos do sistema solar possuem muitas luas. Para que elas sejam descobertas, são necessárias medidas de alta precisão, como as que são feitas pelos telescópios espaciais CoRoT e Kepler.

Neste trabalho, desenvolvemos um método para detecção de luas usando fotometria. Mostramos, com a simulação de curvas de luz do CoRoT e do Kepler, que é possível recuperar os parâmetros planetários e lunares. Estabelecemos limites de detecção, mostrando que o CoRoT poderia detectar uma lua de no mínimo  $1,3 R_{\oplus}$ , enquanto o Kepler chegaria até a  $0,3 R_{\oplus}$ , pouco maior que o raio da nossa Lua. Sobre a estabilidade dinâmica, utilizamos o trabalho de Domingos *et al.* (2006), que mostra que planetas com período de aproximadamente 30 a 40 dias já teriam capacidade de hospedar uma lua com massa comparável à da Terra. Usando dados de exoplanetas descobertos, mostramos que já é possível hoje em dia detectar tais planetas de períodos grandes por trânsitos planetários. Assim, nosso modelo se mostra uma ferramenta útil na detecção de exoluas.

Outro efeito estudado e útil para a detecção de luas é o efeito de variações temporais causadas pelo movimento do planeta ao redor do centro de massa planeta-lua. Nosso

---

<sup>1</sup>De acordo com a *Enciclopédia dos Planetas Extrassolares*, disponível no site [www.exoplanet.eu](http://www.exoplanet.eu), em 20 de Janeiro de 2011.

modelo também considera esse movimento. Assim, temos duas formas distintas de detectar luas para fazer a confirmação, da mesma forma como planetas encontrados por trânsitos planetários são confirmados por velocidades radiais.

Além das luas, trabalhamos também com a possibilidade de existência de anéis planetários. Mostramos que o sinal fotométrico destes é muito sutil, mas que é possível diferenciar curvas de luz de planetas com ou sem anéis dentro de certos limites. Para este tipo de sistema, é necessário que sejam feitos estudos dinâmicos, possivelmente com simulações numéricas, para estabelecer limites de estabilidade, da mesma forma como o trabalho de [Domingos et al. \(2006\)](#) fez com as luas.

Na sequência deste trabalho, iremos aplicar esse modelo a curvas de luz obtidas pelos telescópios CoRoT e Kepler. O objetivo é procurar por exoluas em dados observados. Acreditamos que nosso método oferece uma possibilidade real de detecção.

A descoberta de luas terá uma importância muito grande na ciência de exoplanetas. Novas questões serão levantadas, como a formação de luas, sua influência no processo de migração, seus efeitos sobre os planetas, e muitas outras. Além disso, como citamos na Introdução, luas de planetas gasosos que estejam na zona habitável da estrela são habitáveis, logo, são locais propícios ao surgimento da vida.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEAULIEU, J.-P.; BENNETT, D.; FOUQUE, P.; WILLIAMS, A.; DOMINIK, M.; JORGENSEN, U.; KUBAS, D.; CASSAN, A.; COUTURES, C.; GREENHILL, J.; HILL, K.; MENZIES, J.; SACKETT, P.; ALBROW, M.; BRILLANT, S.; CALDWELL, J.; CALITZ, J.; COOK, K.; CORRALES, E.; DESORT, M.; DIETERS, S.; DOMINIS, D.; DONATOWICZ, J.; HOFFMAN, M.; KANE, S.; MARQUETTE, J.-B.; MARTIN, R.; MEINTJES, P.; POLLARD, K.; SAHU, K.; VINTER, C.; WAMBSGANSS, J.; WOLLER, K.; HORNE, K.; STEELE, I.; BRAMICH, D.; BURGDORF, M.; SNODGRASS, C.; BODE, M.; UDALSKI, A.; SZYMANSKI, M.; KUBIAK, M.; WIECKOWSKI, T.; PIETRZYNSKI, G.; SOSZYNSKI, I.; SZEWCZYK, O.; WYRZYKOWSKI, L.; PACZYNSKI, B. Discovery of a Cool Planet of 5.5 Earth Masses Through Gravitational Microlensing. **Nature**, v. 439, p. 437–440, 2006. 21
- BELBRUNO, E.; III, J. R. G. Where Did The Moon Come From? **The Astronomical Journal**, v. 129, p. 1724 – 1745, 2005. 30
- BOSS, A. P. Stellar Metallicity and the Formation of Extrasolar Gas Giant Planets. **The Astrophysical Journal**, v. 567, p. L149–L153, 2002. 31
- BROWN, T. M.; CHARBONNEAU, D.; GILLILAND, R. L.; NOYES, R. W.; BURROWS, A. Hubble Space Telescope Time-Series Photometry of the Transiting Planet of HD 209458. **The Astrophysical Journal**, v. 552, p. 699–709, 2001. 24, 43, 44
- BUTLER, R.; MARCY, G.; FISCHER, D.; BROWN, T.; CONTOS, A.; KORZENNIK, S.; NISENSEN, P.; NOYES, R. Evidence for Multiple Companions to  $\nu$  Andromedae. **The Astrophysical Journal**, v. 526, p. 916–927, 1999. 2
- CABRERA, J.; SCHNEIDER, J. Detecting Companions to Extrasolar Planets Using Mutual Events. **Astronomy and Astrophysics**, v. 464, p. 1133 – 1138, 2007. 63
- CAMERON, A. G. W.; WARD, W. R. The Origin of the Moon. In: LUNAR AND PLANETARY INSTITUTE CONFERENCE, 7., 1976, Houston. **Abstracts...** Houston: Lunar and Planetary Institute, 1976. v. 7, p. 120–122. 30

CAMPANELLA, G.; KIPPING, D.; FOSSEY, S. The detectability of habitable exomoons with kepler. In: COMITEE ON SPACE RESEARCH, 38., 2010, Bremen, Germany. **Abstracts**. Paris: Comitee on Space Research, 2010. p. 2525–. 3

CARTER, J. A.; YEE, J. C.; EASTMAN, J.; GAUDI, B. S.; WINN, J. N. Analytic Approximations for Transit Light-Curve Observables, Uncertainties, and Covariances. **The Astrophysical Journal**, v. 689, p. 499–512, 2008. 59

CHAMBERS, J. E. Making More Terrestrial Planets. **Icarus**, v. 152, p. 205–224, 2001. 30

CHARBONNEAU, D.; BROWN, T. M.; LATHAM, D. W.; MAYOR, M. Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 529, p. L45, 2000. 24

CHARBONNEAU, P. Genetic Algorithms in Astronomy and Astrophysics. **Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 101, p. 309, 1995. 53

CHAUVIN, G.; LAGRANGE, A.-M.; DUMAS, C.; ZUCKERMAN, B.; MOUILLET, D.; SONG, I.; BEUZIT, J.-L.; LOWRANCE, P. Giant Planet Companion to 2MASSW J1207334-393254. **Astronomy & Astrophysics**, v. 438, p. L25 – L28, 2005. 12

Claret, A. Non-linear limb-darkening law for LTE models (Claret, 2000). **VizieR Online Data Catalog**, v. 336, p. 31081–+, nov. 2000. 43

\_\_\_\_\_. Testing the limb-darkening coefficients measured from eclipsing binaries. **Astronomy & Astrophysics**, v. 482, p. 259–266, abr. 2008. 43

DEEG, H. J.; MOUTOU, C.; ERIKSON, A.; CSIZMADIA, S.; TINGLEY, B.; BARGE, P.; BRUNTT, H.; HAVEL, M.; AIGRAIN, S.; ALMENARA, J. M.; ALONSO, R.; AUVERGNE, M.; BAGLIN, A.; BARBIERI, M.; BENZ, W.; BONOMO, A. S.; BORDÉ, P.; BOUCHY, F.; CABRERA, J.; CARONE, L.; CARPANO, S.; CIARDI, D.; DELEUIL, M.; DVORAK, R.; FERRAZ-MELLO, S.; FRIDLUND, M.; GANDOLFI, D.; GAZZANO, J.-C.; GILLON, M.; GONDOIN, P.; GUENTHER, E.; GUILLOT, T.; HARTOG, R. den; HATZES, A.; HIDAS, M.; HéBRARD, G.; JORDA, L.; KABATH, P.; LAMMER, H.; LÉGER, A.; LISTER, T.; LLEBARIA, A.; LOVIS, C.; MAYOR, M.; MAZEH, T.; OLLIVIER, M.; PÄTZOLD, M.; PEPE, F.; PONT, F.; QUELOZ, D.; RABUS, M.; RAUER, H.; ROUAN, D.; SAMUEL, B.; SCHNEIDER, J.; SHPORER, A.;

STECKLUM, B.; STREET, R.; UDRY, S.; WEINGRILL, J.; WUCHTERL, G. A. Transiting Giant Planet with a Temperature Between 250 K and 430 K. **Nature**, v. 464, p. 384 – 387, 2010. 36

DOMINGOS, R. C.; WINTER, O. C.; YOKOYAMA, T. Stable Satellites Around Extrasolar Giant Planets. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 373, p. 1227 – 1234, 2006. 35, 63, 64

HAISCH, K. E.; LADA, E. A.; LADA, C. J. Disk Frequencies and Lifetimes in Young Clusters. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 553, p. L153 – L156, 2001. 31

HAMILTON, D. P.; BURNS, J. A. Orbital Stability Zones About Asteroids. **Icarus**, v. 92, p. 118 – 131, 1991. 35

HAN, C.; HAN, W. On the Feasibility of Detecting Satellites of Extrasolar Planets via Microlensing. **The Astrophysical Journal**, v. 580, p. 490 – 493, 2002. 3

HART, M. H. The Evolution of the Atmosphere of the Earth. **Icarus**, v. 33, p. 23–29, 1978. 3

HARTMANN, W. K.; DAVIS, D. R. Satellite-Sized Planetesimals and Lunar Origin. **Ica**, v. 24, p. 504–514, 1975. 30

HEBB, L.; COLLIER-CAMERON, A.; TRIAUD, A.; LISTER, T.; SMALLEY, B.; MAXTED, P.; HELLIER, C.; ANDERSON, D.; POLLACCO, D.; AND, D. Q. M. G.; WEST, R.; BENTLEY, S.; ENOCH, B.; HASWELL, C.; HORNE, K.; MAYOR, M.; PEPE, F.; SEGRANSAN, D.; SKILLEN, I.; UDRY, S.; WHEATLEY, P. WASP-19b: The Shortest Period Transiting Exoplanet yet Discovered. **The Astrophysical Journal**, v. 708, p. 224, 2009. 2

HOLMAN, M. J.; FABRYCKY, D. C.; RAGOZZINE, D.; FORD, E. B.; STEFFEN, J. H.; WELSH, W. F.; LISSAUER, J. J.; LATHAM, D. W.; MARCY, G. W.; WALKOWICZ, L. M.; BATALHA, N. M.; JENKINS, J. M.; ROWE, J. F.; COCHRAN, W. D.; FRESSIN, F.; TORRES, G.; BUCHHAVE, L. A.; SASSELOV, D. D.; BORUCKI, W. J.; KOCH, D. G.; BASRI, G.; BROWN, T. M.; CALDWELL, D. A.; CHARBONNEAU, D.; DUNHAM, E. W.; III, T. N. G.; GEARY, J. C.; GILLILAND, R. L.; HAAS, M. R.; HOWELL, S. B.; CIARDI, D. R.; ENDL, M.; FISCHER, D.; FÜRÉSZ, G.; HARTMAN, J. D.; ISAACSON, H.; JOHNSON, J. A.; MACQUEEN, P. J.; MOORHEAD, A. V.; MOREHEAD, R. C.;

- OROSZ, J. A. Kepler-9: A System of Multiple Planets Transiting a Sun-Like Star, Confirmed by Timing Variations. **Scien**, v. 330, p. 51 – 54, 2010. 36
- HOLMAN, M. J.; MURRAY, N. W. The Use of Transit Timing to Detect Terrestrial-Mass Extrasolar Planets. **Science**, v. 307, p. 1288 – 1291, 2005. 3, 36
- HUANG, S. S. Occurrence of Life Outside the Solar System. **American Scientist**, v. 47, p. 397, 1959. 3
- IDA, S.; CANUP, R. M.; STEWART, G. R. Lunar Accretion from an Impact-Generated Disk. **Nature**, v. 389, p. 353–357, 1997. 3
- KALAS, P.; GRAHAM, J. R.; CHIANG, E.; FITZGERALD, M. P.; CLAMPIN, M.; KITE, E. S.; STAPELFELDT, K.; MAROIS, C.; KRIST, J. Optical Images of an Exosolar Planet 25 Light Years from Earth. **Science**, v. 322, p. 1345–1348, 2008. 2, 10
- KASTING, J. F. et al. Habitable Zones Around Main Sequence Stars. **Icarus**, v. 101, p. 108–128, 1993. 3
- KIPPING, D. Transit Timing Effects due to an Exomoon. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 392, p. 181–189, 2009. 3, 36, 41, 59
- KIPPING, D. M. Transit Timing Effects due to an Exomoon - II. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 396, p. 1797–1804, 2009. 3, 36
- LIN, D. N. C.; BODENHEIMER, P.; RICHARDSON, D. C. Orbital Migration of the Planetary Companion of 51 Pegasi to its Present Location. **Nature**, v. 380, p. 606–607, 1996. 32
- MAROIS, C.; MACINTOSH, B.; BARMAN, T.; ZUCKERMAN, B.; SONG, I.; PATIENCE, J.; LAFRENIÈRE, D.; DOYON., R. Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799. **Science**, v. 322, p. 1348, 2008. 12
- MAYOR, M.; QUELOZ, D. A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star. **Nature**, v. 378, p. 355 – 357, 1995. 2, 19, 28
- MARTHUR, B.; ENDL, M.; COCHRAN, W.; BENEDICT, G.; FISCHER, D.; MARCY, G.; BUTLER, R.; NAEF, D.; MAYOR, M.; QUELOZ, D.; UDRY, S.; HARRISON, T. Detection of a Neptune-Mass Planet in the  $\rho$  Cancri System Using the Hobby-Eberly Telescope. **The Astrophysical Journal**, v. 614, p. L81, 2004. 2

NAEF, D.; LATHAM, D.; MAYOR, M.; MAZEH, T.; BEUZIT, J.; DRUKIER, G.; PERRIER-BELLET, C.; QUELOZ, D.; SIVAN, J.; TORRES, G.; UDRY, S.; ZUCKER, S. HD 80606 b, A Planet on an Extremely Elongated Orbit.

**Astronomy & Astrophysics**, v. 375, p. L27, 2001. 2, 36

NOYES, R. W.; JHA, S.; KORZENNIK, S. G.; KROCKENBERGER, M.; NISENSEN, P.; BROWN, T. M.; KENNELLY, E. J.; HORNER, S. D. A Planet Orbiting the Star Rho Coronae Borealis. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 483, p. L111, jul. 1997. 16

OLLIVIER, M.; ENCRENAZ, T.; ROQUES, F.; SELSIS, F.; CASOLI, F. **Planetary systems**: Detection, formation and habitability of extrasolar planets. New York: Springer, 2009. 2, 31

PODSIADLOWSKI, P. Planet formation scenarios. In: J. A. Phillips, S. E. Thorsett, & S. R. Kulkarni (Ed.). **Planets Around Pulsars**. [S.l.]: Astronomical Society of the Pacific, 1993. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 36), p. 149–165. 20

\_\_\_\_\_. The Formation of Planet Pulsars. In: A. S. Fruchter, M. Tavani, & D. C. Backer (Ed.). **Millisecond Pulsars. A Decade of Surprise**. [S.l.]: Astronomical Society of the Pacific, 1995. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 72), p. 411–+. 20

POLLACK, J.; HUBICKYJ, O.; BODENHEIMER, P.; LISSAUER, J.; PODOLAK, M.; GREENZWEIG, Y. Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas. **Icarus**, v. 124, p. 62–85, 1996. 30

PRAVDO, S. H.; SHAKLAN, S. B. An Ultracool Star's Candidate Planet. **The Astrophysical Journal**, v. 700, p. 623, 2009. 16

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. **Numerical recipes in C: the art of scientific computing**. 2nd. ed. New York: Cambridge University Press, 1992. 53

QUELOZ, D.; ANDERSON, D.; CAMERON, A. C.; GILLON, M.; HEBB, L.; HELLIER, C.; MAXTED, P.; PEPE, F.; POLLACCO, D.; SéGRANSAN, D.; SMALLEY, B.; TRIAUD, A. H.; UDRY, S.; ; WEST, R. WASP-8b: A Retrograde Transiting Planet in a Multiple System. **Astronomy and Astrophysics**, v. 517, p. L1+, 2010. 63

- REFFERT, S.; QUIRRENBACH, A. Mass constraints on substellar companion candidates from the re-reduced Hipparcos intermediate astrometric data: nine confirmed planets and two confirmed brown dwarfs. **Astronomy & Astrophysics**, v. 527, p. A140, mar. 2011. 16
- SARTORETTI, P.; SCHNEIDER, J. On the Detection of Satellites of Extrasolar Planets with the Method of Transits. **Astronomy & Astrophysics Supplement Series**, v. 134, p. 553–560, 1999. 3, 36
- SELSIS, F. et al. Habitable Planets Around the Star Gliese 581. **Astronomy & Astrophysics**, v. 476 3, p. 1373 – 1387, 2007. 3
- SILVA, A. Method for Spot Detection on Solar-Like Stars. **The Astrophysical Journal**, v. 585, p. L147–L150, 2003. 43, 48
- SILVA-VÁLIO, A. Estimating Stellar Rotation from Starspot Detection During Planetary Transits. **The Astrophysical Journal**, v. 683, p. L179–L182, 2008. 43
- Simon, A.; Szatmáry, K.; Szabó, G. M. Determination of the size, mass, and density of “exomoons” from photometric transit timing variations. **Astronomy & Astrophysics**, v. 470, p. 727–731, ago. 2007. 3
- SIMON, A. E.; SZABÓ, G. M.; SZATMÁRY, K. Exomoon Simulations. **Earth Moon and Planets**, v. 105, p. 385–389, set. 2009. 3
- SIMON, A. E.; SZABÓ, G. M.; SZATMÁRY, K.; KISS, L. L. Methods for exomoon characterization: combining transit photometry and the Rossiter-McLaughlin effect. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 406, p. 2038–2046, ago. 2010. 3
- SZABO, G. M.; SIMON, A. E.; KISS, L. L.; REGALY, Z. Practical suggestions on detecting exomoons in exoplanet transit light curves. In: INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION SYMPOSIUM, 276., 2010, Torino, Italy. **Abstracts...** [S.l.]: International Astronomical Union, 2010. 3
- SZABÓ, G. M.; Szatmáry, K.; Divéki, Z.; Simon, A. Possibility of a photometric detection of “exomoons”. **Astronomy & Astrophysics**, v. 450, p. 395–398, abr. 2006. 3, 36



THOMES E. W. & DUNCAN, M. J. . L. H. F. The Formation of Uranus and Neptune in the Jupiter-Saturn Region of the Solar System. **Nature**, v. 402, p. 635 – 638, 1999. 31

UDRY, S.; MAYOR, M.; NAEF, D.; PEPE, F.; QUELOZ, D.; SANTOS, N.; BURNET, M. The CORALIE Survey for Southern Extra-Solar Planets. VIII. The Very Low-mass Companions of HD 141937, HD 162020, HD 168443 and HD 202206: Brown Dwarfs or “Superplanets”? **Astronomy & Astrophysics**, v. 390, p. 267, 2002. 2

UDRY, S.; MAYOR, M.; SANTOS, N. Statistical Properties of Exoplanets. I. The Period Distribution: Constraints for the Migration Scenario. **Astronomy & Astrophysics**, v. 407, p. 369–376, 2003. 32

UDRY, S.; SANTOS, N. Statistical Properties of Exoplanets. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 45, p. 397 – 439, 2007. 2

WANG, Z.; CHAKRABARTY, D.; KAPLAN, . D. L. A debris disk around an isolated young neutron star. **Nature**, v. 440, p. 772 – 775, 2006. 20

WARD, W. R. Protoplanet Migration by Nebula Tides. **Icarus**, v. 126, p. 261–281, 1997. 32

WILLIAMS, D.; KNACKE, R. Looking for Planetary Moons in the Spectra of Distant Jupiters. **Astrobiology**, v. 4(3), p. 400–403, 2004. 3

WOLSZCZAN, A.; FRAIL, D. A Planetary System Around the Millisecond Pulsar PSR1257+12. **Nature**, v. 355, p. 145–147, 1992. 2, 19

ZARKA, P.; QUEINNEC, J.; RYABOV, B. P.; RYABOV, V. B.; SHEVCHENKO, V. A.; ARKHIPOV, A. V.; RUCKER, H. O.; DENIS, L.; GERBAULT, A.; DIERICH, P.; ROSOLEN, C. Ground-Based High Sensitivity Radio Astronomy at Decameter Wavelengths. In: RUCKER, H. O.; BAUER, S. J.; LECACHEUX, A. (Ed.). **Planetary Radio Emissions IV**. Vienna: Austrian Acad. Sci. Press, 1997. p. 101–128. 13



## APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA DAS LEIS DE KEPLER

No capítulo 2, apresentamos as 3 Leis de Kepler, sem qualquer tratamento matemático. Aqui, demonstraremos como podem ser obtidas essas leis a partir das Leis de Newton. O trabalho de Newton é posterior ao de Kepler, mas optamos por fazer a dedução desta maneira para demonstrar que as duas teorias levam a resultados idênticos e para que o conteúdo fique mais completo.

### A.1 Equação do Movimento

Vamos considerar planeta orbitando ao redor de uma estrela (figura A.1). Inicialmente, forma da órbita não é conhecida. Pela *Terceira Lei de Newton*, ao mesmo tempo que a estrela atrai gravitacionalmente o planeta, este também exerce atração sobre a estrela, como é visto na figura. Há, portanto, duas forças atuando no sistema,  $\vec{F}_P$  e  $\vec{F}_*$ , respectivamente, a força que age sobre o planeta e sobre a estrela. A partir da *Lei da Gravitação Universal de Newton*, essas duas forças podem ser escritas na forma:

$$\vec{F}_P = \frac{-Gm_*m_P}{r^3}\vec{r} \quad \text{e} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{F}_* = \frac{Gm_*m_P}{r^3}\vec{r}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $m_*$  e  $m_P$  são as massas da estrela e do planeta e  $\vec{r}$  é a posição do planeta medida a partir da estrela.

A *Segunda Lei de Newton* permite obter as equações dos movimentos do planeta e da estrela:

$$\ddot{\vec{r}}_P = \frac{-Gm_*}{r^3}\vec{r} \quad \text{e} \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{\vec{r}}_* = \frac{Gm_P}{r^3}\vec{r}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_*$  são os vetores posição do planeta e da estrela, respectivamente.

O modo mais simples de resolver as equações acima é adotando um sistema de coordenadas no qual a estrela se encontre fixa, com o planeta orbitando ao seu redor. Para isso, definimos  $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_*$ , e subtraímos as equações A.3 e A.4.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_P - \ddot{\vec{r}}_* = \frac{-Gm_*}{r^3}\vec{r} - \frac{Gm_P}{r^3}\vec{r} \quad (\text{A.5})$$

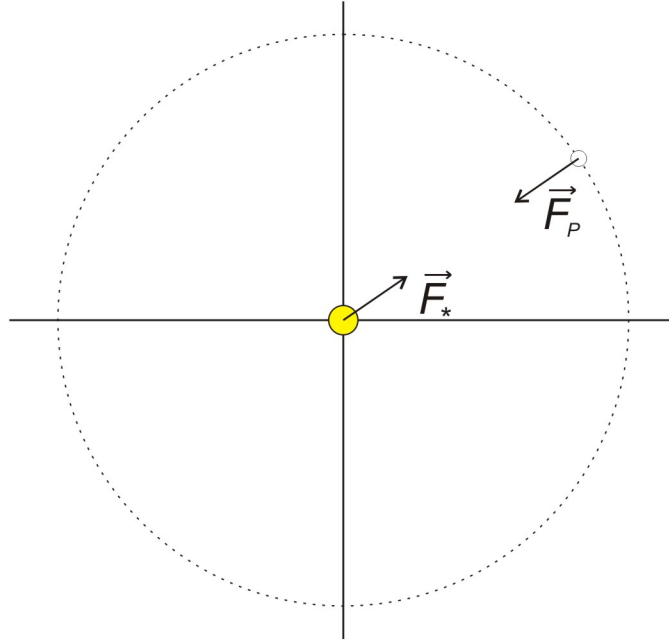


Figura A.1 - Um planeta em órbita de uma estrela. Ao mesmo tempo que a estrela atrai gravitacionalmente o planeta, este também atrai a estrela.

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} \vec{r} = \vec{0}. \quad (\text{A.6})$$

A equação A.6 é a equação que representa o movimento do planeta ao redor da estrela.

## A.2 Conservação da Energia Total

Podemos demonstrar que a energia total do planeta se conserva durante seu movimento. Para isso, vamos calcular o produto escalar do vetor velocidade  $\dot{\vec{r}}$  pela equação A.6:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = \vec{0}. \quad (\text{A.7})$$

O produto escalar pode ser escrito como produto dos módulos pelo cosseno do ângulo entre eles. Como  $\dot{\vec{r}}$  e  $\vec{r}$  são paralelos, então podemos reescrever a equação A.7:

$$\dot{r}\ddot{r} + \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} r\dot{r} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Podemos escrever os dois termos na forma de derivadas temporais:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{r}^2}{2} \right] = \dot{r}\ddot{r} \quad (\text{A.9})$$

$$-\frac{d}{dt} \left[ \frac{G(m_* + m_p)}{r} \right] = \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} r\dot{r} . \quad (\text{A.10})$$

Substituímos os termos A.9 e A.10 na equação A.8:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{G(m_* + m_p)}{r} \right] = 0 . \quad (\text{A.11})$$

Como a derivada temporal do termo entre colchetes é nula, então a equação indica a existência de uma grandeza conservada:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{G(m_* + m_p)}{r} = E , \quad (\text{A.12})$$

onde  $E$  é uma constante. Essa constante é a *energia total por unidade de massa*. O primeiro termo da equação acima representa a *energia cinética por unidade de massa*, e o segundo representa a *energia potencial gravitacional por unidade de massa*. Concluímos daqui que quando o planeta estiver mais próximo à estrela, sua energia potencial será menor, portanto sua energia cinética aumentará. Isso demonstra que o planeta não mantém sua velocidade constante ao longo da trajetória. Ao contrário, os planetas se movem mais rápido quando estão mais próximos da estrela.

### A.3 Conservação do Momento Angular

Podemos demonstrar que o momento angular também se conserva, a partir do produto vetorial da equação A.6 pelo vetor posição  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} . \quad (\text{A.13})$$

O segundo termo se anula, pois o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é um vetor nulo. Ficamos apenas com o primeiro termo, que pode ser escrito na forma da derivada temporal:

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right] = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} . \quad (\text{A.14})$$

Assim, da equação A.13, obtemos:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = \vec{0}. \quad (\text{A.15})$$

A derivada temporal na equação A.15 indica uma grandeza constante. Definimos o *momento angular por unidade de massa* como:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \quad (\text{A.16})$$

e, portanto:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{0}. \quad (\text{A.17})$$

A equação A.17 indica que o momento angular como definido pela equação A.16 é conservado durante o movimento do planeta.

#### A.4 Primeira Lei de Kepler

Para determinar a órbita do planeta em torno da estrela vamos multiplicar vetorialmente a equação A.6 pelo momento angular:

$$\vec{l} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} \vec{l} \times \vec{r} = \vec{0}. \quad (\text{A.18})$$

Usamos a definição do momento angular (equação A.16) na equação anterior:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{l} = \frac{G(m_* + m_p)}{r^3} [(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}]. \quad (\text{A.19})$$

No lado direito, aplicamos a identidade vetorial:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}). \quad (\text{A.20})$$

Com essa identidade, obtemos:

$$\frac{G(m_* + m_p)}{r^3} [(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}] = G(m_* + m_p) \left[ \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Podemos também reescrever o termo entre colchetes na forma de uma derivada temporal:

$$\frac{G(m_* + m_p)}{r^3} \left[ (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \right] = G(m_* + m_p) \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Voltando à equação A.19, o lado esquerdo pode ser escrito também como uma derivada temporal, lembrando que a derivada de  $\vec{l}$  é nula:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{l} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\vec{r}} \times \vec{l} \right]. \quad (\text{A.23})$$

Usando os resultados das equações A.22 e A.23, podemos reescrever a equação A.19 na forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \dot{\vec{r}} \times \vec{l} \right] = G(m_* + m_p) \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \right]. \quad (\text{A.24})$$

Agora integramos a equação A.24 no tempo. Com isso, aparece um vetor constante  $\vec{\beta}$ :

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{l} = G(m_* + m_p) \frac{\vec{r}}{r} + \vec{\beta}. \quad (\text{A.25})$$

Como  $\vec{l}$  é perpendicular à órbita, então  $\dot{\vec{r}} \times \vec{l}$  é coplanar à órbita planetária. Assim,  $\dot{\vec{r}} \times \vec{l}$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{\beta}$  são vetores *coplanares*. Na verdade, o vetor  $\vec{\beta}$  é um vetor que indica a posição do *periastro*, como será visto adiante.

Agora multiplicamos escalarmente a equação A.25 pelo vetor posição, e finalmente obtemos a equação da trajetória:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{l} = G(m_* + m_p) \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}. \quad (\text{A.26})$$

No lado esquerdo, usamos as propriedades do produto triplo e a definição de momento angular. Podemos reescrever na forma:

$$l^2 = G(m_* + m_p) r \left[ 1 + \frac{\beta}{G(m_* + m_p)} \cos \gamma \right], \quad (\text{A.27})$$

onde  $\gamma$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{\beta}$ . Resolvendo para  $r$ , obtemos a equação da trajetória:

$$r = \frac{\frac{l^2}{G(m_* + m_p)}}{1 + \frac{\beta}{G(m_* + m_p)} \cos \gamma}. \quad (\text{A.28})$$

Para melhorar um pouco essa equação, podemos comparar com a equação das *seções cônicas*, descoberta pelo matemático grego Apolônio de Perga (262 a.C.- 190 a.C.) em 200 a.C:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (\text{A.29})$$

onde  $p = a(1 - e^2)$  é chamado de *semi-latus rectus*,  $e$  é a *excentricidade*,  $a$  é o semi-eixo maior da trajetória e  $\theta$  é a posição angular medida a partir do periastro, ou seja, o ângulo entre o periastro e o vetor posição do planeta. No nosso caso, o ângulo correspondente a  $\theta$  é  $\gamma$ , o qual é medido entre os vetores  $\vec{\beta}$  e  $\vec{r}$ , o que deixa claro que  $\vec{\beta}$  indica a posição do periastro da trajetória.

Comparando as equações A.28 e A.29, obtemos:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{l^2}{G(m_* + m_p)}, \quad (\text{A.30})$$

$$e = \frac{\beta}{G(m_* + m_p)} \quad \text{e} \quad (\text{A.31})$$

$$\theta = \gamma. \quad (\text{A.32})$$

Finalmente, podemos escrever a equação da trajetória do planeta em órbita da estrela como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (\text{A.33})$$

A equação A.29 só vale para curvas fechadas, e portanto a solução dada pela equação A.33 também só vale para órbitas fechadas. Utilizando a curva adequada no lugar da equação A.29 e as condições físicas iniciais corretas, podemos encontrar a equação da trajetória para órbitas abertas (parábolas e hipérbolas).

A forma da trajetória cônica é determinada pela excentricidade:

- Caso  $e > 1$ , a órbita é uma *hipérbole*.



- Caso  $e = 1$ , a órbita é uma *parábola*.
- Caso  $0 < e < 1$ , a órbita é uma *elipse*.
- Caso  $e = 0$ , a órbita é uma *circunferência*, que pode ser considerado um caso particular da elipse.

Podemos explorar um pouco mais a excentricidade, retornando à equação que introduziu o termo  $\vec{\beta}$ :

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{l} = G(m_* + m_p) \frac{\vec{r}}{r} + \vec{\beta}, \quad (\text{A.34})$$

ou seja,

$$\vec{\beta} = \dot{\vec{r}} \times \vec{l} - G(m_* + m_p) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (\text{A.35})$$

Elevando ao quadrado:

$$\beta^2 = (\dot{\vec{r}} \times \vec{l}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{l}) + G^2(m_* + m_p)^2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^2} - 2G(m_* + m_p) (\dot{\vec{r}} \times \vec{l}) \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (\text{A.36})$$

Como  $\vec{r}$  e  $\vec{l}$  são perpendiculares, temos:

$$|\dot{\vec{r}} \times \vec{l}| = |\dot{\vec{r}}| |\vec{l}| \quad \text{e} \quad (\text{A.37})$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{l}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{l}) = |\dot{\vec{r}} \times \vec{l}|^2 = \dot{r}^2 l^2. \quad (\text{A.38})$$

Assim, a equação A.36 fica:

$$\beta^2 = \dot{r}^2 l^2 + G^2(m_* + m_p)^2 - \frac{2G(m_* + m_p)}{r} \left[ \dot{\vec{r}} \times \vec{l} \cdot \vec{r} \right]. \quad (\text{A.39})$$

Usando as propriedades do produto misto:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{l} \cdot \vec{r} = -\vec{l} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = \vec{l} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{r}. \quad (\text{A.40})$$

Como  $\vec{l} = \dot{\vec{r}} \times \vec{r}$ , então:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{l} \cdot \vec{r} = \vec{l} \cdot \vec{l} = l^2. \quad (\text{A.41})$$

Logo, a equação A.39 pode ser reescrita:

$$\beta^2 = \dot{r}^2 l^2 + G^2(m_* + m_p)^2 - \frac{2G(m_* + m_p)}{r} l^2 . \quad (\text{A.42})$$

Da equação A.31, temos que  $\beta^2 = e^2 G^2(m_* + m_p)^2$ . A equação A.42 pode ser simplificada:

$$e^2 G^2(m_* + m_p)^2 - G^2(m_* + m_p)^2 = 2l^2 \left( \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{G(m_* + m_p)}{r} \right) . \quad (\text{A.43})$$

O termo entre parênteses pode ser identificado com a energia (equação A.12), e temos:

$$G^2(m_* + m_p)^2 (e^2 - 1) = 2l^2 E . \quad (\text{A.44})$$

Da equação A.30, obtemos o momento angular em função do semi-eixo orbital:

$$l^2 = aG(m_* + m_p)(1 - e^2) . \quad (\text{A.45})$$

Assim, reescrevemos a equação A.44:

$$G^2(m_* + m_p)^2 (e^2 - 1) = -2aG(m_* + m_p)(e^2 - 1)E , \quad (\text{A.46})$$

que resulta em:

$$E = -\frac{G(m_* + m_p)}{2a} \quad (\text{A.47})$$

Essa equação demonstra que a energia do planeta não depende da excentricidade, mas sim do semi-eixo maior. Se o planeta alterar sua órbita, perdendo excentricidade e mantendo o semi-eixo igual, ele não sofrerá variações na energia.

## A.5 Segunda Lei de Kepler

A Segunda Lei de Kepler é também conhecida como *Lei das Áreas*. Ela afirma que o raio que une o planeta à estrela varre áreas iguais em tempos iguais. Para obtê-la, inicialmente calculamos a área  $\Delta A$  varrida pelo raio vetor do planeta em um tempo  $\Delta t$ , conforme a figura A.3:

$$\Delta A = \frac{r^2 \cdot \Delta\theta}{2} , \quad (\text{A.48})$$

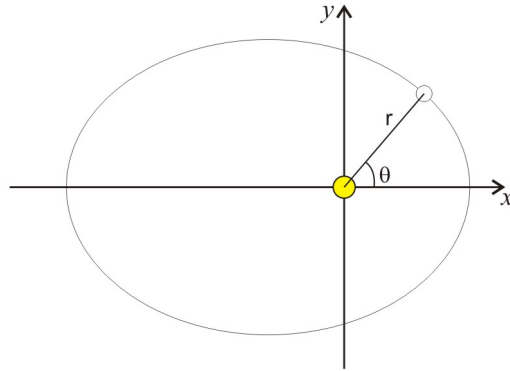


Figura A.2 - Órbita elíptica de um planeta ao redor da estrela.

que pode ser dividida por  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r^2 \Delta \theta}{2 \Delta t} . \quad (\text{A.49})$$

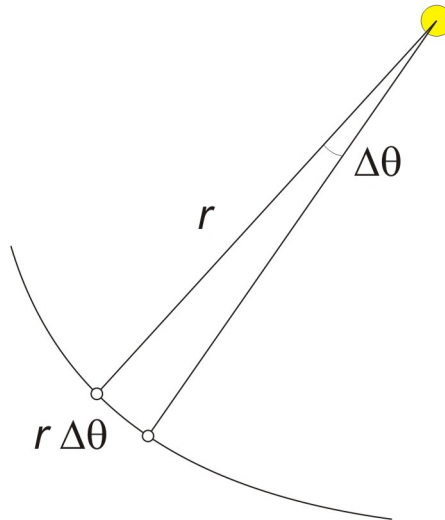


Figura A.3 - A área infinitesimal percorrida pelo planeta pode ser aproximada por um triângulo de altura  $r$  e base  $r\Delta\theta$ .

Fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} . \quad (\text{A.50})$$

Voltando à equação de definição do momento angular (equação A.16):

$$\vec{l} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} . \quad (\text{A.51})$$

Reescrevemos os vetores posição e velocidade em coordenadas polares:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \quad \text{e} \quad (\text{A.52})$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta . \quad (\text{A.53})$$

Assim o momento angular fica:

$$\vec{l} = r \frac{dr}{dt} (\hat{e}_r \times \hat{e}_r) + r^2 \frac{d\theta}{dt} (\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) , \quad (\text{A.54})$$

ou seja:

$$\vec{l} = r^2 \frac{d\theta}{dt} (\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) . \quad (\text{A.55})$$

Em módulo, lembrando que os versores direcionais são ortogonais e unitários, obtemos:

$$l = r^2 \dot{\theta} . \quad (\text{A.56})$$

Substituindo o resultado da equação A.56 na equação A.50:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2} . \quad (\text{A.57})$$

Assim, sendo que a área percorrida por unidade de tempo depende apenas do momento angular, e que este é constante, concluimos que a área depende apenas do tempo que o raio vetor do planeta leva para percorrer. Portanto, fica demonstrada a Segunda Lei de Kepler, ou seja, o raio vetor percorre áreas iguais em tempos iguais (figura A.4).

## A.6 Terceira Lei de Kepler

A Terceira Lei de Kepler é conhecida também como Lei Harmônica. Ela relaciona o período de um planeta ao redor da estrela com o semi-eixo maior de sua órbita. Para demonstrá-la, partimos da área de uma elipse, pois já foi visto que esta é a

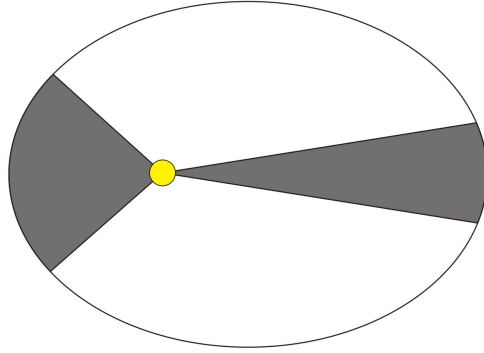


Figura A.4 - Lei das Áreas: as duas áreas hachuradas são percorridas pelo raio vetor do planeta em tempos iguais.

forma da órbita dos planetas:

$$A = \pi ab , \quad (\text{A.58})$$

onde  $a$  e  $b$  são os semi-eixos maior e menor, respectivamente.

Do estudo das elipses, podemos relacionar os dois semi-eixos pela equação:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = (pa)^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{A.59})$$

Da Lei das Áreas (equação A.57), temos:

$$dA = \frac{l}{2} dt . \quad (\text{A.60})$$

Integrando sobre uma órbita completa, temos:

$$\pi ab = \frac{l}{2} P , \quad (\text{A.61})$$

onde  $P$  representa o período, ou seja, o tempo que o planeta leva para completar uma volta em torno da estrela.

Substituindo  $b$  na equação acima, usando a equação A.59, e para o *semi-lactus rectum* que aparece usamos a equação A.30. Com essas substituições, obtemos:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_* + m_p)} a^3 . \quad (\text{A.62})$$

Assim, demonstra-se que o quadrado do período é proporcional ao cubo do semi-eixo maior do planeta.

### A.7 Velocidade Angular

A última grandeza que falta determinar é a velocidade angular do planeta. Podemos obtê-la a partir da relação entre os semi-eixos:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} , \quad (\text{A.63})$$

e da equação da área da elipse:

$$A = \pi ab . \quad (\text{A.64})$$

Substituindo A.63 em A.64:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} . \quad (\text{A.65})$$

A variação da área em função do tempo pode ser calculada como a área total dividida pelo período:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{P} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{P} . \quad (\text{A.66})$$

Substituindo as equações A.56 e A.57 na equação A.66, obtemos a expressão para a velocidade angular do planeta:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi a^2}{Pr^2} \sqrt{1 - e^2} . \quad (\text{A.67})$$

### A.8 Coordenadas do Centro de Massa

Desejamos agora obter as equações das órbitas do planeta e da estrela em um sistema de coordenadas centrado no centro de massa do sistema. Da definição de Centro de Massa:

$$m_* \vec{r}_* = -m_p \vec{r}_p , \quad (\text{A.68})$$

ou seja:

$$\vec{r}_* = \frac{-m_p}{m_*} \vec{r}_p . \quad (\text{A.69})$$

Sabemos que  $\vec{r}$  é a posição do planeta em relação à estrela. As posições da estrela e do planeta em relação ao Centro de Massa se relacionam pela expressão:

$$\vec{r}_* + \vec{r} = \vec{r}_p . \quad (\text{A.70})$$

Podemos ver os vetores posição da estrela e do planeta na figura A.5.

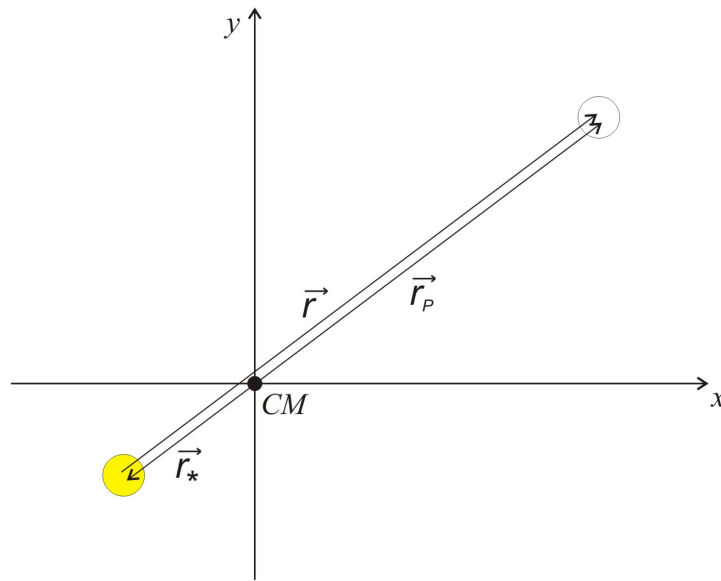


Figura A.5 - Vetores posição do planeta e da estrela a partir do Centro de Massa.

Resolvemos agora A.69 para  $r_*$ , e o resultado substituímos na A.70, em módulo:

$$\frac{-m_p}{m_*} r_p + r = r_p . \quad (\text{A.71})$$

Resolvendo para  $r_p$ , obtemos:

$$r_p = \frac{m_*}{m_* + m_p} r . \quad (\text{A.72})$$

Analogamente para  $r_*$ :

$$r_* = \frac{-m_p}{m_* + m_p} r . \quad (\text{A.73})$$

Vamos substituir  $r$  na forma da Primeira Lei de Kepler:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (\text{A.74})$$

Assim, a posição da estrela e do planeta são dados, respectivamente, por:

$$r_* = \frac{-m_p}{(m_* + m_p)} \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)} \quad \text{e} \quad (\text{A.75})$$

$$r_P = \frac{m_*}{(m_* + m_p)} \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)}. \quad (\text{A.76})$$

Portanto, o movimento da estrela e do planeta ao redor do centro de massa possui a mesma forma que o movimento do planeta ao redor da estrela, pois ambos resultaram em órbitas fechadas com mesma excentricidade  $e$ . O sinal negativo na equação [A.75](#) indica apenas que planeta e estrela ocupam posições angulares opostas na órbita: quando o planeta está no apocentro, a estrela está no pericentro, e vice-versa. Desconsiderando o sinal e adotando  $r$  apenas em módulo, definimos os semi-eixos orbitais da estrela e do planeta:

$$a_* = \frac{m_p a}{m_* + m_p} \quad \text{e} \quad (\text{A.77})$$

$$a_p = \frac{m_* a}{m_* + m_p}. \quad (\text{A.78})$$

Com essas definições, as equações do movimento da estrela e do planeta podem ser finalmente escritas na forma:

$$r_* = \frac{a_*(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)} \quad \text{e} \quad (\text{A.79})$$

$$r_p = \frac{a_p(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)}. \quad (\text{A.80})$$

As definições [A.77](#) e [A.78](#) têm uma propriedade interessante. Somando  $a_*$  e  $a_p$ , obtemos:

$$a_* + a_p = a \quad (\text{A.81})$$



Esses resultados mostram que o movimento do planeta pode ser estudado da forma mais adequada. Se for possível observar o movimento dos dois corpos, pode-se considerar a estrela fixa, com o planeta orbitando ao seu redor. Por outro lado, se for possível observar apenas o movimento da estrela, então pode-se considerar o centro de massa fixo, com a estrela e o planeta se movimentando. Nesse caso, a partir das características do movimento da estrela, pode-se inferir as características da órbita do planeta. Em todos os casos, a forma da órbita é a mesma, variando apenas o semi-eixo em cada caso.