



# DINCON 2011

## 10<sup>a</sup> Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações

### 28 de agosto a 1<sup>o</sup> de setembro de 2011



#### Análise de Manobras Orbitais de Baixo Empuxo Usando o Filtro de Kalman

Thais C. Oliveira <sup>1</sup>, Evandro M. Rocco <sup>2</sup>, Hélio K. Kuga <sup>3</sup>

<sup>1</sup> INPE – Divisão de Mecânica Espacial e Controle, São José dos Campos, Brasil, thais.tata@gmail.com

<sup>2</sup> INPE – Divisão de Mecânica Espacial e Controle, São José dos Campos, Brasil, evandro@dem.inpe.br

<sup>3</sup> INPE – Divisão de Mecânica Espacial e Controle, São José dos Campos, Brasil, hkk@dem.inpe.br

**Resumo:** O objetivo deste trabalho foi simular manobras orbitais de baixo empuxo usando o filtro de Kalman para otimizar os resultados. Foi analisada uma mesma manobra com diferentes precisões nos sensores e diferentes precisões no modelo implementado no sistema de controle, sempre tendo em vista a eficiência da manobra, neste caso, o consumo de combustível e erro médio na posição do veículo espacial.

**Palavras-Chave:** Manobra Orbital, Filtro de Kalman e Otimização.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma manobra orbital de um veículo espacial é a sua transferência de uma órbita para outra. A manobra orbital é caracterizada por uma mudança na velocidade  $\Delta v$  do veículo. Manobras orbitais podem ser impulsivas, onde há uma mudança de velocidade dramática em um curto período de tempo. No trabalho apresentado no ICNPAA por Oliveira et AL. (2010), foi realizado um estudo de manobras orbitais impulsivas com diferentes mudanças nos elementos orbitais e analisado a eficiência de cada manobra.

As manobras orbitais também podem ser não impulsivas, que é o caso deste trabalho, onde o propulsor é de baixo empuxo e age de forma significativa em um intervalo de tempo, e portanto deve ser considerado na equação de movimento do veículo. De acordo com Curtis (2009), ao acionar o propulsor, há consumo de combustível e portanto há uma variação da massa total do veículo. O consumo de combustível é utilizado para o estudo da eficiência da manobra.

Neste trabalho é utilizado o simulador de manobras desenvolvido por Rocco(2008) com a implementação do filtro de Kalman. A propulsão aplicada nas manobras é tangencial à órbita. O simulador utilizado opera em malha fechada, controlando a trajetória do veículo a cada passo pré-definido pelo usuário. O controle em malha fechada é essencial para manobras de baixo empuxo, pois pode corrigir a órbita caso haja perturbações ou falhas, mantendo o sinal de saída próximo ao sinal de entrada e, por conseqüência, são diminuídos os erros ou desvios da manobra (Santos, 2010).

A trajetória da manobra é calculada por meio da solução da equação de Kepler e foi assumido a não esfericidade da Terra, ou seja, o achatamento dos pólos que podem causar duas perturbações orbitais, a regressão dos nodos e a rotação do argumento do perigeu (Chotobov, 2002).

O modelo do sistema determinístico, neste caso, da dinâmica orbital, não é capaz de fornecer uma representação precisa da realidade. Primeiro motivo é devido ao fato de que nenhum modelo matemático é perfeito, todos são aproximados. O segundo motivo são as perturbações ou outros fatores externos que não podem ser controlados ou modelados deterministicamente. E por último, os sensores não apresentam dados ou medições perfeitas. Há distorções ou ruídos e a precisão é limitada.

Apesar de não ser possível determinar com perfeição o estado de um sistema, é possível ter ao nosso dispor o modelo do sistema dinâmico, as medidas, a descrição estatística do ruído, erros da medida e da incerteza do modelo, assim como a disposição de condições iniciais das variáveis de interesse.

O filtro de Kalman combina todos estes dados conhecidos e gera uma estimativa ótima das quantidades medidas. Ótima porque minimiza os erros. O filtro de Kalman é recursivo, ou seja, é um estimador com características de tempo real, ele fornece as estimativas para o instante em que a medida é processada. Dessa forma não é necessário possuir todas as medidas para analisá-las posteriormente com o estimador (Maybeck, 1979).

## 2. MÉTODOS

Supõe-se neste estudo que o veículo espacial tenha capacidade de aplicar um empuxo de 2N para a realização da manobra. Caso o veículo precise de mais empuxo para corrigir o erro na órbita, é possível aplicar um empuxo de até 6N. O estado do veículo é descrito pelas coordenadas  $\mathbf{X} = [X \ Y \ Z \ \dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]$  medidas em um referencial inercial centrado na Terra. O impulso específico considerado foi de 2500s.

Neste trabalho modelamos o sensor de forma que suas medidas apresentem um erro randômico de média zero e variância ajustável pelo usuário. O erro no modelo apresenta as mesmas características do erro do sensor, e ambos os erros refletem na posição do satélite.

O simulador lida com um modelo da dinâmica não linear. Entretanto, para o modelo de observação, o consideramos linear.

A aceleração gravitacional por unidade de massa devido ao achatamento da Terra é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{p}$  é o termo da perturbação na aceleração devido ao achatamento terrestre em Curtis (2009).

Observa-se que a equação 2.1 não é linear, portanto usamos o filtro estendido de Kalman que trata de modelos não lineares.

A equação de estado é definida por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{x}_{k+1}$  são os vetores de estado no instante  $k, k+1$ ,  $\mathbf{f}$  é a função de transição,  $\mathbf{u}_k$  é o controle. O ruído  $\mathbf{w}_k$  do modelo possui média zero gaussiana no qual  $\mathbf{w}_k \sim N(0, Q)$  e é aplicado nas posições inerciais do veículo.

Assume-se que o modelo da observação seja linear. Assim, de acordo com Huang(2010), em um dado instante  $k+1$ , o modelo da observação será

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{x}_{k+1}, \quad (2.3)$$

O ruído  $\mathbf{v}_{k+1}$  na observação tem média gaussiana zero  $\mathbf{v}_{k+1} \sim N(0, R)$ . O ruído da observação é introduzido na leitura da posição inercial do veículo.

A aplicação do filtro é esquematizada abaixo:

**Predição** usando o modelo:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.4)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \nabla \mathbf{f}_x P_k \nabla \mathbf{f}_x^T + Q \quad (2.5)$$

onde  $\nabla \mathbf{f}_x$  é a função jacobiana de  $\mathbf{f}$  com respeito a  $\mathbf{x}$  avaliado no ponto  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

**Atualização** usando a observação:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_{k+1} + K(\mathbf{z}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \quad (2.6)$$

$$P_{k+1} = \bar{P}_{k+1} - KSK^T \quad (2.7)$$

$$S = \nabla \mathbf{h} \bar{P}_{k+1} \nabla \mathbf{h}^T + R \quad (2.8)$$

$$K = \bar{P}_{k+1} \nabla \mathbf{h}^T S^{-1} \quad (2.9)$$

onde  $\nabla \mathbf{h}$  é a função jacobiana  $\mathbf{h}$  avaliada em  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$ .

### 3. RESULTADOS

Consideramos dois casos neste trabalho, o primeiro consiste em verificar e validar o filtro de Kalman. O segundo analisa diferentes erros no modelo assim como no sensor e cria um mapa relacionando os desvios da posição e da velocidade com o consumo de combustível.

#### 3.1 CASO I

Para este caso, consideramos uma única manobra com os elementos keplerianos iniciais descritos a seguir. O estudo foi realizado a partir de uma mesma manobra variando a precisão no sensor, de forma que analisar a eficiência de todos os casos propostos tais como o erro gerado e combustível gasto.

O critério de parada é uma manobra que dure  $2 \times 10^4$  segundos com passo de 1 segundo.

Os elementos Keplerianos da órbita inicial são:

$$a = 7211140 \text{ m}; e = 0; i = 45^0; \Omega = 0^0; \omega = 0^0; M = 0^0.$$

Supomos que há um erro no modelo de  $0,05 \text{ m}^2$  de variância com distribuição gaussiana e a média é zero para as posições inerciais do satélite. No sensor analisamos três diferentes erros de medida com variância 10; 5;  $0,5 \text{ m}^2$ , distribuição gaussiana e média zero. Os resultados obtidos foram:

Tabela 1. Resultados para o caso I.

Parâmetros\Variância no sensor	10m <sup>2</sup>	5 m <sup>2</sup>	0.05 m <sup>2</sup>
Desvio Médio na Posição	0,1668 m	0,1580 m	0,0747 m
Desvio Médio na Velocidade	0.01647 m/s	0.0158 m/s	0,0079 m/s
Consumo de Combustível	6,03 kg	5,92 kg	5,44 kg

A figura 1 mostra o erro na posição do veículo com o uso do filtro e sem o uso filtro de Kalman para a variância no sensor de  $10 \text{ m}^2$ .

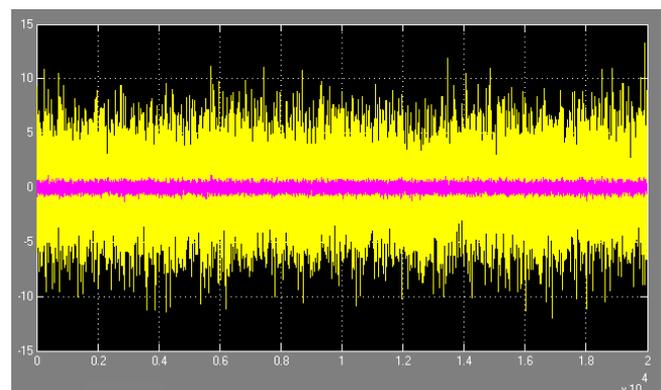


Fig. 1. Erro na componente X(m) versus Tempo(s) para variância de  $10 \text{ m}^2$  no sensor

Legenda: Amarelo - Erro na posição do veículo observado pelo sensor sem o filtro.  
Rosa - Erro na posição do veículo com o filtro de Kalman.

A figura 2 mostra o erro na posição do veículo com o uso do filtro e sem o uso filtro de Kalman para a variância no sensor de  $5 \text{ m}^2$ .

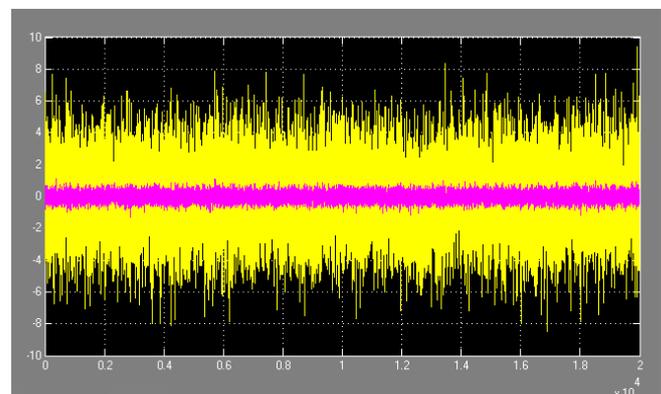


Fig. 2. Erro na componente X(m) versus Tempo(s) para variância de  $5 \text{ m}^2$  no sensor

Legenda: Amarelo - Erro na posição do veículo observado pelo sensor sem o filtro.  
Rosa - Erro na posição do veículo com o filtro de Kalman.

Abaixo a figura 3 apresenta os resíduos na componente X com relação ao tempo.



# DINCON 2011

## 10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações

28 de agosto a 1º de setembro de 2011

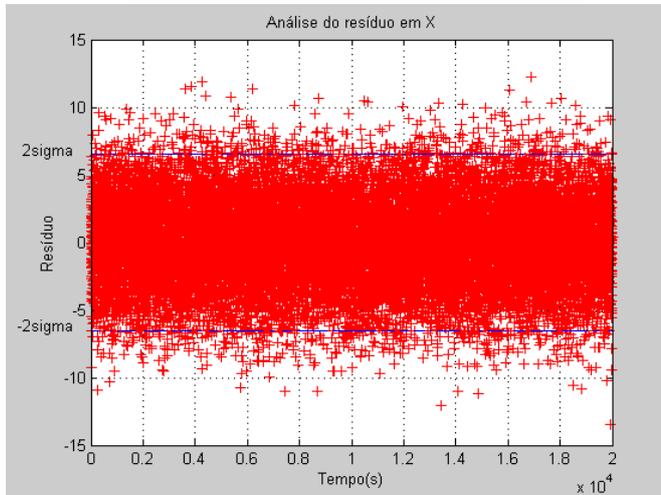


Fig. 3. Análise do resíduo na componente X

Como há muitos dados, o gráfico com os pontos está poluído. Porém com a sua contagem, obteve-se aproximadamente 95% dos pontos no limite de  $2\sigma$ . O resíduo pode ser descrito como um ruído branco de média zero gaussiana de variância  $\sigma^2 = [\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)P_k\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + R]$ , e, portanto, está dentro do limite esperado de  $2\sigma$ .

Para os outros eixos e outros casos, as figuras são similares e portanto serão omitidas.

### 3.2 CASO II

O estudo foi realizado a partir de uma mesma manobra variando a precisão no sensor e a precisão no modelo. Para cada valor diferente da precisão do sensor ou modelo, há um determinado consumo de combustível. Assim eficiência de todos os casos pode ser avaliada.

O critério de parada é uma manobra que dure 6,171 segundos com passo de 1 segundo.

O elementos Keplerianos da órbita inicial são:

$a = 7000000$  m;  $e = 0,01$ ;  $i = 45^\circ$ ;  $\Omega = 30^\circ$ ;  $\omega = 90^\circ$ ;  $M = 0^\circ$ ;

Supõe-se diferentes erros no modelo com variância de 0,05 até 0,175  $m^2$  com passo de 0,025  $m^2$ , distribuição gaussiana e média é zero para as posições inerciais do satélite. No sensor supõe-se igualmente diferentes erros com variância de 1 até 10  $m^2$  com passo de 1  $m^2$ , distribuição gaussiana e média zero.

O filtro de Kalman é usado neste caso para otimizar o consumo de combustível e diminuir o erro na posição.

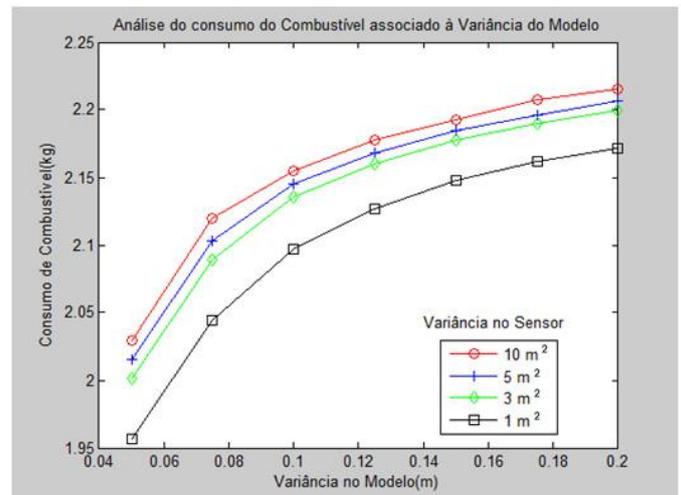


Fig. 4. Análise do consumo de combustível versus variância do modelo

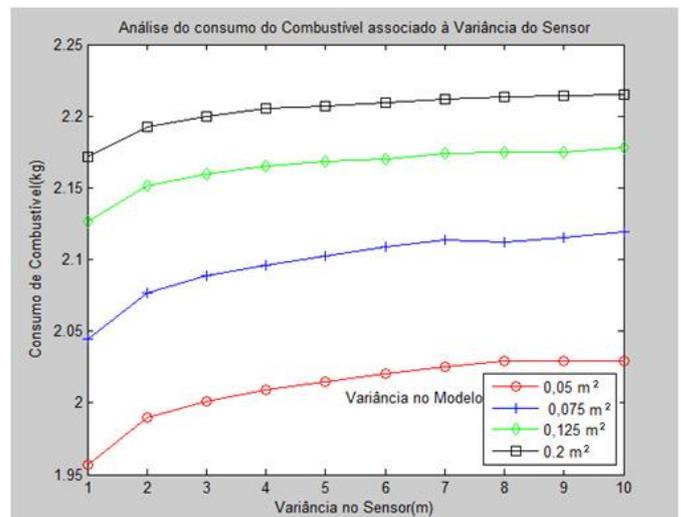


Fig. 5. Análise do consumo de combustível associado à variância do sensor

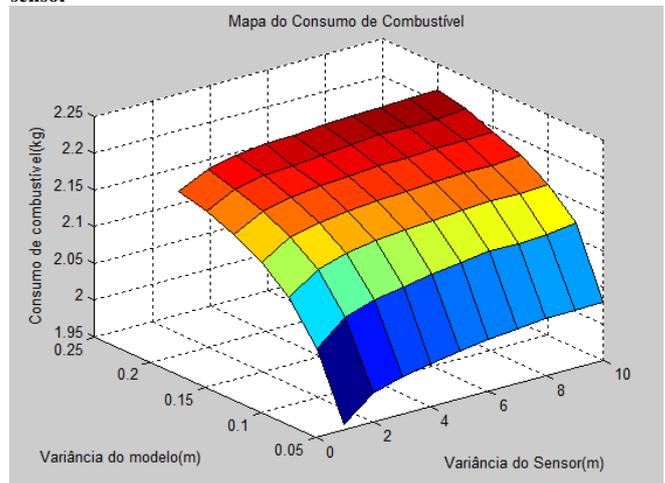


Fig. 6. Mapa do consumo de combustível

#### 4. RESULTADOS

Para o caso I, observa-se a diminuição significativa do erro na posição com a aplicação do filtro de Kalman. Com a diminuição do erro, é aplicada menos propulsão para a correção da órbita. Assim o consumo de combustível é menor.

Não há uma mudança significativa no erro da posição com o filtro ao variar a precisão do sensor, ou seja, das medidas. Isto ocorre devido à grande confiabilidade no modelo, pois seu erro é pequeno, apenas 0,05 de variância com média zero em uma distribuição gaussiana. Assim o filtro confia consideravelmente no modelo, deixando uma pequena parte da análise para as medidas.

Em relação ao consumo do combustível, nota-se que há uma diminuição à medida que melhoramos a precisão das medidas. Isso porque, apesar do filtro confiar em sua grande parte no modelo, ao processar as medidas e ponderá-las, o erro nas posições finais é menor quanto maior a precisão da medida. Portanto, haverá menos manobras na correção da posição se o erro na medida foi menor.

Já para o caso II, com os mapas é possível visualizar com clareza que ao se aumentar o erro no sensor, o consumo do combustível e erro na posição e na velocidade tendem a aumentar. O mesmo acontece para o modelo, se o erro aumentar, o consumo de combustível e erros de posição e velocidade aumentam.

A escolha da precisão do sensor e do modelo que serão implementado no satélite depende de cada missão. O custo de sensores precisos é mais alto, assim como a implementação de um modelo mais preciso a bordo do veículo. O simulador dentro do veículo espacial deve trabalhar em tempo real ao processar e filtrar as medidas, e tais limitações podem restringir a precisão no modelo. As limitações e verba dependem de cada missão. Portanto um mapa como apresentado na figura 6 pode auxiliar na análise para a definição dos parâmetros de projeto do satélite.

Os resultados obtidos mostram qual é a eficiência para erros de modelo e sensor avaliados. Entretanto, a determinação do sensor e do modelo a serem implementados foge do escopo deste trabalho.

#### 5. CONCLUSÃO

Percebe-se que para os diferentes estudos realizados, a aplicação do filtro de Kalman foi essencial para diminuir o erro na posição do veículo espacial. A diminuição do erro resulta em um melhor desempenho da manobra. A precisão das medidas também se mostrou importante para a minimização do consumo de combustível. O sensor de alta precisão, que contribui na diminuição do erro na posição do veículo espacial, tem um custo elevado e em cada missão deve ser analisado o custo e o benefício de cada componente.

Com os mapas apresentados, pode-se visualizar a eficiência para várias precisões do sensor e do modelo. É importante fazer uma análise prévia com diferentes precisões a fim de estudar o melhor resultado obtido. Talvez priorizar o sensor de medida ou refinar modelo pode não

compensar o custo de combustível economizado ou o erro na posição comparado à sistemas menos eficazes. Portanto o mapa se torna essencial à análise de missões.

#### REFERENCES

- [1] CHOBOTOV, V.A. **Orbital mechanics**. 3. Ed. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. ISBN(1-56347-537-5).
- [2] DOI CURTIS, H. D.; **Orbital Mechanics for Engineering Students**. 2. ed. Elsevier Aerospace Engineering Series, 2009. ISBN(978-0-1237-4778-5).
- [3] HUANG, S. **Understanding Extended Kalman Filter – Part III: Extended Kalman Filter**. 2010. ARC Centre of Excellence for Autonomous Systems(CAS). Faculty of Engineering and Information Technology, University of Technology Sydney.
- [4] MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation and Control, Volume 1**. Mathematics Science and Engineering. 1979. ISBN(0-12-480701-1(v.1)).
- [5] OLIVEIRA, T. C.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A. **Evaluation of the Fuel Consumption in Orbital Maneuvers with Time and Position Constrains**, 2010. ICNPAA 2010 World Congress.
- [6] DOI ROCCO, E.M. **Analysis the deviations of the trajectory due to the terrestrial albedo applied to some scientific missions**. Genova, Italy, 2008. International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, 2008c.
- [7] SANTOS, W.G. **Simulação de Manobras Aeroassistidas de um Veículo Espacial Controlado por Placas Aerodinâmicas Reguláveis e Sistema Propulsivo**. Dissertação( Mestrado em Ciência Espacial) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais(INPE), São José dos Campos, 2010.