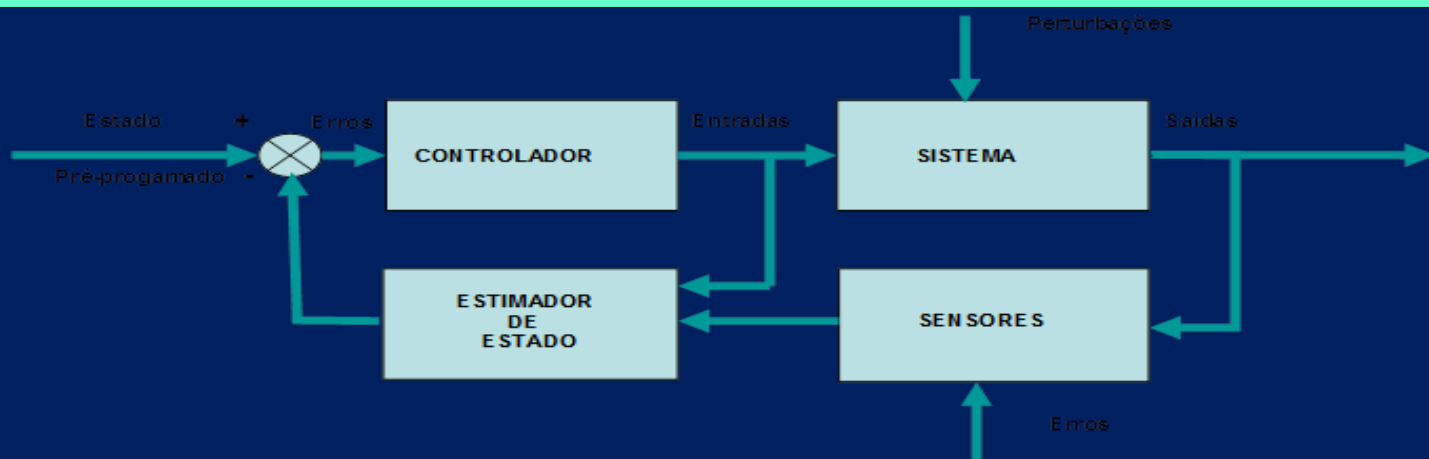


CONTROLE ÓTIMO DE SISTEMAS DINÂMICOS:

Notas de Aula e Exemplos de Aplicação



ATAIR RIOS NETO
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, SP
2012

© Atair Rios Neto

A coautora de todas as minhas realizações, desde que se tornou a companheira nas lutas desta vida, Marli, guerreira da paz, sábia e amorosa. Aos nossos filhos, que têm tornado tão gratificante as lutas que por eles lutamos.

PREFÁCIO

Este livro de Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos é principalmente o resultado da compilação e adequação de notas de aulas ministradas tanto em cursos acadêmicos de pós-graduação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo-EPUSP, do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE, como a engenheiros da Embraer. Os assuntos são sempre tratados com a apresentação de exemplos de aplicação e referências a resultados de pesquisa e desenvolvimento tecnológico de utilidade prática.

O propósito é que ele seja útil e esteja facilmente ao alcance da comunidade de Controle e Automação, tanto nas salas de aula como nos ambientes de trabalho de pesquisa, desenvolvimento e engenharia de instituições e empresas.

Ele foi preparado de modo a fornecer a necessária base conceitual e teórica para seu uso, incluindo conteúdo de revisão de assuntos de fundamentação, através de apêndices em otimização algébrica, sistemas dinâmicos lineares, matrizes, assim como de capítulos com os elementos necessários de probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos.

A sua utilização pode ser feita de forma segmentada. A grande segmentação é, naturalmente, controle em malha aberta e controle em malha fechada. Mas há segmentações menores e de utilidade destacada e ou facilitada, como: Controle Subótimo (Seção 2.7); Estimação de Parâmetros (Capítulo 5); Estimação de Estado e Filtro de Kalman (Seções 7.1 a 7.6); Estimação de Parâmetros e Controle em Malha Fechada (Seção 7.8); Estimação de Parâmetros, Redes Neurais e Controle Neural (Seções 5.3 e 7.8).

Com o firme propósito de contribuir para possíveis realizações de utilidade prática, parte do conteúdo é de divulgação didática, em primeira mão, de resultados de pesquisas desenvolvidas com orientados. Com a justa atribuição de autoria e mérito, destaca-se esta parte: Seção 2.6: Contornos Múltiplos e Desigualdade de Estado, Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, UFMG; Seção 7.4.2: Estimação Adaptativa de Ruído de Estado, Hélio Koiti Kuga, INPE; Seção 7.5: Estimação de Estado com Abordagem Virtual de Controle, Agenor de Toledo Fleury, EPUSP, FEI; Seção 7.6: Técnicas de Fatorização, Hélio Koiti Kuga, INPE; Seção 7.8.1: Controle Sequencial de Sistemas Lineares Discretos: *Solução Sequencial Baseada em Estimação de Estado*, José Jaime da Cruz, EPUSP; 7.8.2: Controle Preditivo Neural de Sistemas Não Lineares Discretos, Paulo Marcelo Tasinaffo, ITA e Jaime Augusto da Silva, INPE. Com o mesmo propósito de efetivação de utilidade prática, há um conteúdo referenciado, designado por Referências de Aplicação, principalmente relativo a pesquisas e desenvolvimentos de resultados feitos sob orientação do autor. Deste conteúdo, há que se destacar, com a justa atribuição de coautoria, resultados de teoria aplicada de interesse amplo: *Programação Linear para Gerar Soluções Subótimas de Controle*, Décio Castilho Ceballos, INPE; *Método de Projeção do Gradiente Estocástico*, Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, UFMG e Fernando Madeira, UFABC; *Solução Sequencial de Sistemas Lineares*, Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, UFMG; *Solução em Paralelo de Sistemas Lineares*, Wilson Rios Neto, Embraer; *Estimação de Parâmetros de Sistemas Dinâmicos*, Marcelo Curvo, Embraer; *Redes Neurais Combinadas com Estrutura de Integradores Numéricos para Modelar Sistemas Dinâmicos*, Paulo Marcelo Tasinaffo, ITA; *Controle Preditivo Neural baseado em Algoritmos de Filtragem de Kalman*, Jaime Augusto da Silva, INPE; *Sistemas Inerciais Não Giroscópicos*, Luís Gonzaga Trabasso, ITA e Edmundo Alberto Marques Filho, INPE.

Agradecimentos especiais ao INPE pela edição eletrônica deste livro em seu site, propiciando aos interessados acesso e cópia do correspondente arquivo pdf.

Atair Rios Neto
São José dos Campos, SP.
Março 2012.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: Controle de Sistemas Dinâmicos: Visualização Geral	
1.1 Colocação Geral do Problema de Controle	1
1.2 Controle Ótimo de Sistemas Dinâmico	3
1.3 Utilidade e Aplicações	5
CAPÍTULO 2: Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos: Malha Aberta	
2.1 Fundamentos: Conceito de Variação	7
2.2 Problema Básico	9
2.3 Problema com Tempo Final Livre	17
2.4 Vínculos de Contorno	20
2.5 Vínculos Dinâmicos de Desigualdade	23
2.6 Contornos Múltiplos e Desigualdade no Estado	24
2.7 Abordagem Subótima	26
2.8 Análise de Condições Suficientes	29
2.9 Métodos Numéricos: Introdução	32
CAPÍTULO 3: Programação Dinâmica: Introdução	
3.1 Princípio da Otimalidade	41
3.2 Relação Fundamental da Programação Dinâmica	42
3.3 Aplicação a Sistemas Lineares Quadráticos	44
CAPÍTULO 4: Elementos de Probabilidade e Variáveis Aleatórias	
4.1 Probabilidade: Teoria Básica	47
4.2 Variáveis Aleatórias: Conceituação e Propriedades Básicas	50
4.3 Variáveis Aleatórias Conjuntamente Distribuídas	54
4.4 Probabilidades e Variáveis Condicionadas	57
CAPÍTULO 5: Estimação de Parâmetros	
5.1 Fundamentação Teórica	60
5.2 Caso Linear	62
5.3 Caso Não Linear	68
CAPÍTULO 6: Processos Estocásticos: Gauss Markov	
6.1 Conceituação Básica	78
6.2 Sequências de Markov	79
6.3 Processos Contínuos: Gauss Markov	80
CAPÍTULO 7: Estimação de Estado e Controle em Malha Fechada	
7.1 Estimação de Estado: Conceitos e Fundamentos	85
7.2 Filtro de Kalman: Caso Contínuo Discreto	87
7.3 Filtro de Kalman: Caso Contínuo Discreto Não Linear	92
7.4 Métodos Adaptativos em Estimação de Estado	96
7.5 Estimação de Estado com Abordagem Virtual de Controle	101
7.6 Técnicas de Fatorização	105
7.7 Controle em Malha Fechada: Controle Estocástico Linear Ótimo	110
7.8 Controle Baseado em Estimação Linear Ótima e Redes Neurais	113
Apêndice I: Fundamentos: Otimização de Sistemas Algébricos	129
Apêndice II: Sistemas Lineares: Matriz de Transição	134
Apêndice III: Identidades de Matrizes	140
Índice Remissivo	141

Capítulo 1

Controle de Sistemas Dinâmicos: Visualização Geral

1.1 Colocação Geral do Problema de Controle

Dado um sistema dinâmico, identificados os *vínculos* a serem respeitados (condições de partida, de chegada, dinâmica, limitações físicas de espaço, tempo, energia, etc.) o *problema de controle* se coloca como o de como agir sobre o sistema de modo a garantir condições de operação pré-determinadas, segundo especificações de operação do sistema e ou critérios de otimização (custo, segurança, desempenho, etc). Assim, como ilustrado na Fig. 1.1, o problema é o da determinação das *entradas* (ações sobre o sistema) de modo a condicionar as *saídas* (diretamente relacionadas ao *estado* do sistema, isto é, a onde e como ele está), segundo condições pré-estabelecidas.

Em resumo:

Problema de Controle:

Dado: Sistema.

Sujeito a: Vínculos referentes a partida, chegada, dinâmica e limitações físicas.

Determinar: Entradas, satisfazendo condições de operação pré-estabelecidas.

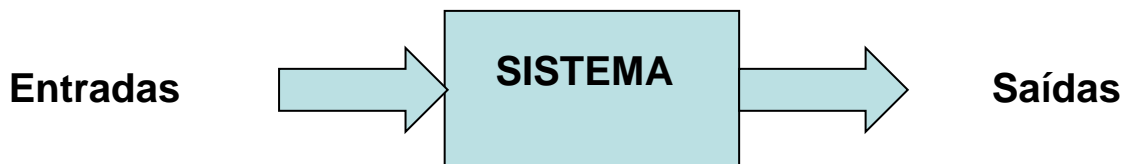


Figura 1.1: Sistema: Esquema Básico de Controle

O objetivo de *Controle Automático* é o da materialização de soluções artificiais para a realização automática de tarefas programadas pelo homem, de modo a substituí-lo e ampliá-lo em ações físicas e mentais.

De maneira bastante genérica, a realização de uma solução de controle e automação de um sistema está condicionada à capacidade de responder às questões, realizar as etapas, e definir um esquema de solução, conforme a seguir.

Questões para realização da solução:

- Onde e como está o sistema em um dado instante? Isto é, qual o seu *estado*.
- Por onde seguir? Isto é, qual a solução de guiagem ao longo do tempo.
- Como agir sobre o sistema? Isto é, como devem ser as *entradas* ou controles, para que as *saídas* sejam adequadas, segundo objetivos de controle e vínculos.

Etapas para realização da solução:

- *Modelagem*, física e ou matemática.
- *Análise* através de simulações e testes de viabilidade, otimizações e desempenho.
- *Síntese* através da definição e realização de solução.

Esquemas de solução:

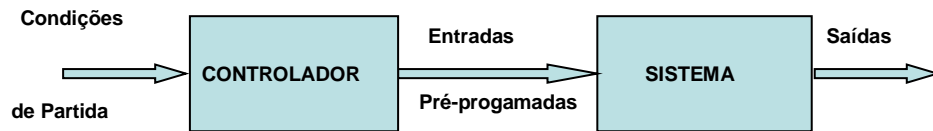


Figura 1.2: Controle em Malha Aberta

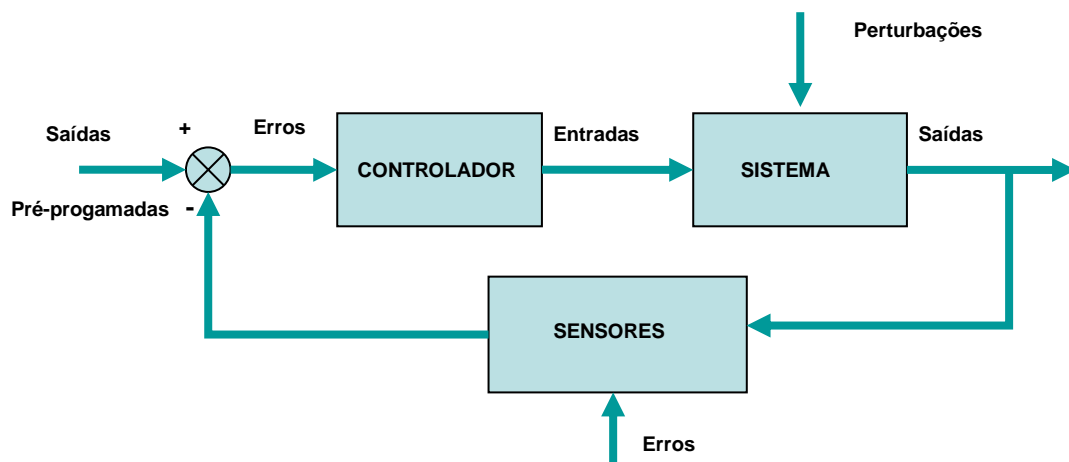


Figura 1.3: Malha Fechada com Realimentação de Saídas

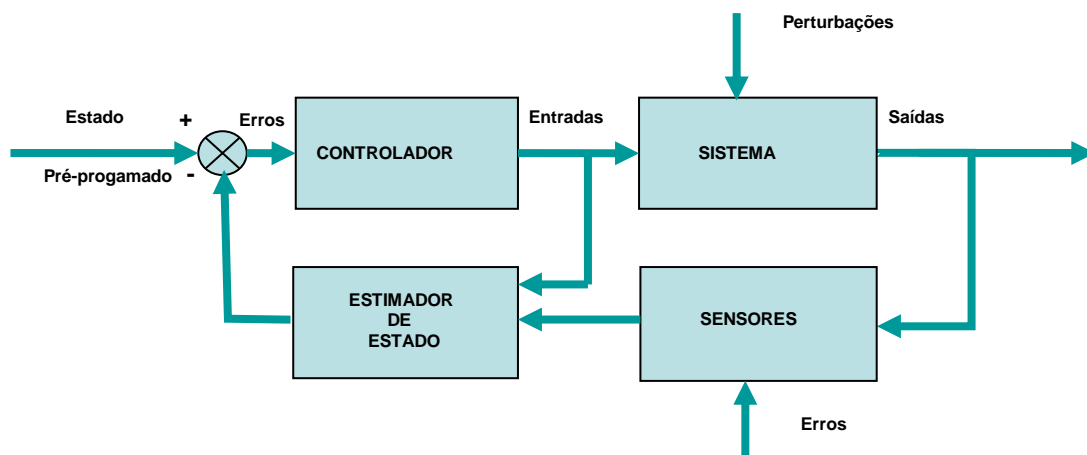


Figura 1.4: Malha Fechada com Realimentação de Estado

1.2 Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos

Neste caso o controle do sistema é determinado segundo uma condição de otimização, através da minimização ou maximização de um índice de performance (IP) ou desempenho.

Seja o sistema dinâmico:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (1)$$

onde $x(t)$, $n \times 1$, é o *estado*, $u(t)$, $m \times 1$, é o *controle*.

A partir da satisfação de *critérios de otimização e vínculos*, relativos à *trajetória de estado*, ao *controle*, e às *condições iniciais e finais*, é possível, em geral, a determinação do *controle*, de sistemas dinâmicos modelados como na Eq. (1), ou como uma função do tempo, $u(t)$, ou como uma função do tempo e do *estado*, $u(x, t)$. A teoria aplicada de *Controle Ótimo* se propõe a prover os meios para a obtenção de soluções, em geral numéricas, para problemas deste tipo, os chamados problemas de controle ótimo. Note-se que a solução é uma função de função, para tanto, como se verá, há a necessidade de um novo tipo de Cálculo, o Variacional, onde o que se otimiza é um funcional, função de função e parâmetros.

Em uma forma bastante geral, o problema de controle ótimo de um sistema dinâmico e sua respectiva solução podem ser colocados como a seguir.

Minimizar:

$$IP = \psi(x(t_0), t_0; x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (2)$$

Sujeito a:

(a) *Vínculos de Contorno:*

$$\phi(x(t_0), t_0; x(t_f), t_f) = 0 \quad (3)$$

(b) *Vínculos Dinâmicos:*

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (4)$$

$$c(x, u, t) \leq 0 \quad (5)$$

$$s(x, t) \leq 0 \quad (6)$$

Solução:

$$t_0^*, x^*(t_0^*), t_f^*, u^*(t) \quad (7)$$

A solução do problema do tipo exemplificado é, em geral, em malha aberta, isto é, obtém-se as condições de contorno e o controle, como uma função $u^*(t)$, como indicado na Fig. 1.5.

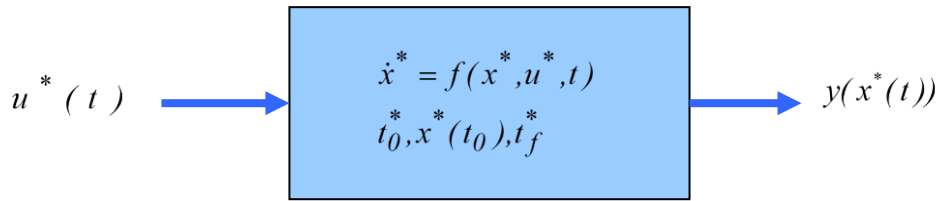


Figura 1.5: Solução em Malha Aberta Ideal

Ao se tentar implementar uma solução em malha aberta que foi determinada a partir de um modelo matemático do sistema real, defronta-se com erros que provocam desvios da trajetória verdadeira em relação a $x^*(t)$. Estes erros são principalmente devidos a:

- desvios nas condições de partida;
- perturbações não modeladas, isto é, não representadas no modelo matemático usado para representar o sistema formalmente e calcular a solução;
- desvios no valor de $u^*(t)$, ao aplicá-lo no sistema real;
- etc.

A eliminação destes erros, em relação à solução em malha aberta que foi determinada, pode ser conseguida através de um esquema de controle em malha fechada, como indicado na Fig. 1.6.

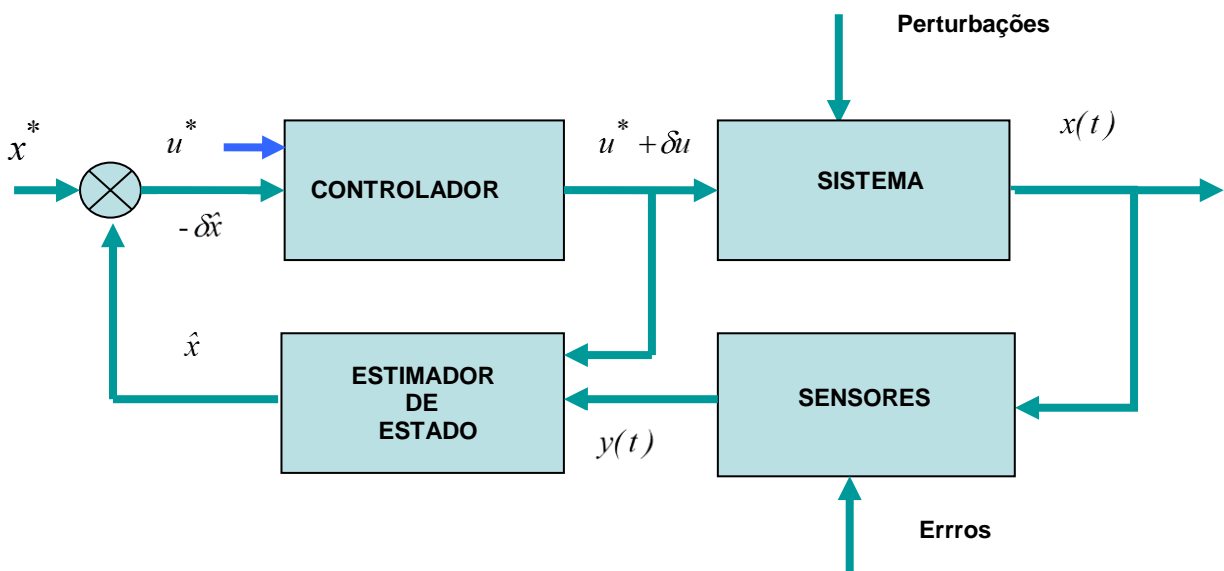


Figura 1.6: Sistema de Realimentação para Correção de Desvios

A solução deste problema é obtida de forma aproximada e recorrente. De modo a permitir uma estimativa do desvio $\delta \tilde{x}(t)$, o *estimador de estado* desempenha papel crucial,

através da determinação de uma estimativa $\hat{x}(t)$ do estado verdadeiro. De um ponto de vista formal, o problema pode ser colocado como, novamente, de controle ótimo, considerando-se perturbações na dinâmica, modeladas por um ruído aleatório, $w(t)$, para representar “a faixa cinzenta de ignorância”, e observações da saída feitas pelos sensores, contaminadas pelos erros dos mesmos, v_k , também modelados como aleatórios. Uma abordagem para a solução poderia ser, por exemplo, como a seguir.

Minimizar:

$$\Delta IP = 1/2 E \left\{ \delta x_f^T S_f \delta x_f + \int_{t_k}^{t_f} (\delta x^T S \delta x + \delta u^T Q \delta u) dt \right\} \quad (1.8)$$

Sujeito a:

$$d(x^* + \delta x)/dt = f(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t) + w(t) \quad (1.9)$$

$$y(t_k) = h(x^*(t_k) + \delta x(t_k), t_k) + v_k$$

$$k = \dots 1, 2, \dots, n_f \quad (1.10)$$

1.3 Aplicação e Utilidade

Controle Ótimo, que está no contexto de Controle Moderno, abre novas possibilidades relativamente a Controle Clássico. O fato de ser no domínio do tempo permite naturalmente tratar de sistemas variantes no tempo e sistemas dinâmicos não lineares, criando possibilidades que atendem necessidades de otimização dinâmica para viabilizar a realização de processos em que as questões de energia consumida, tempo, segurança e atendimento de vínculos são cruciais, como é o caso de processos químicos, nucleares e missões aeroespaciais. Foram estas necessidades, conjuntamente com as novas condições de computação, que impulsionaram o desenvolvimento de Controle Ótimo, principalmente nas décadas dos cinquenta e sessenta do século XX.

O preço a se pagar pelas novas possibilidades é o de se lidar com o Cálculo Variacional, para a obtenção, agora, de funções, como resultado da otimização dinâmica, e não de variáveis algébricas, como é o caso de otimização de funções. No entanto, para desmistificar, vale a parábola do interiorano chegando à cidade grande; no começo o impacto com a nova situação de tamanho e complexidade é grande, mas, com o tempo, se percebe que ao invés de lidar diretamente com localidades, tem-se que, primeiro localizar um bairro, que, no final das contas, é equivalente a uma cidade do interior, às vezes até das pequenas; o desafio é aprender a lidar com os mapas, que, aliás, se vence rapidamente e fica repetitivo!

As aplicações e utilidade de controle ótimo são de amplo alcance, tanto em sistemas como em processos, tais como:

- processos industriais;
- sistemas de energia;
- veículos (terrestres, marítimos, fluviais, aéreos, espaciais);
- otimizações estruturais;
- navegação;
- identificação de sistemas; etc.

Em especial na área espacial, cujos problemas provocaram em grande parte o desenvolvimento de Controle Ótimo, no caso de guiagem e controle presentes em uma missão satélite, tem-se, tipicamente, as aplicações a seguir, conforme as fases da missão (Fig. 1.7):

- 1 Otimização da trajetória de lançamento;
- 2 Determinação de órbita e de atitude (estimação de estado), em órbita intermediária;
- 3 Otimização da órbita de transferência;
- 4 Determinação de órbita e de atitude na órbita de missão; e
- 5 Correção de órbita e de controle de atitude (posicionamento angular do satélite).

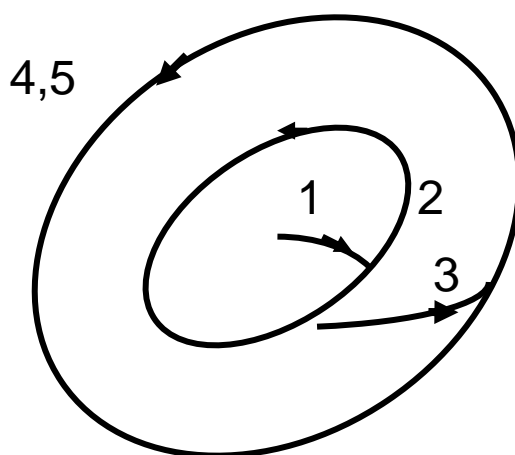


Figura 1.7: Fases em Missão Satélite

Capítulo 2

Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos: Malha Aberta

No que segue, assim como nos demais capítulos, haverá sempre a preocupação predominante de conceituar, interpretar, captar o significado e, quase nunca, de demonstrar propriedades, com exceção daqueles casos em que a demonstração é construtiva, isto é, ajuda no desenvolvimento de soluções.

2.1 Fundamentos: Conceito de Variação

Definição 2.1.1: Seja $x(t)$ definida em $[t_0, t_f]$ e $x(t, \varepsilon)$ uma trajetória na vizinhança (Fig. 2.1), diferenciável em relação a $\varepsilon=0$ e que coincida com $x(t)$, no limite, quando o pequeno parâmetro ε se anula. Nestas condições, define-se variação de primeira ordem de $x(t)$:

$$\delta x(t) \triangleq \left. \partial x(t, \varepsilon) / \partial \varepsilon \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon \cong x(t, \varepsilon) - x(t). \quad (1)$$

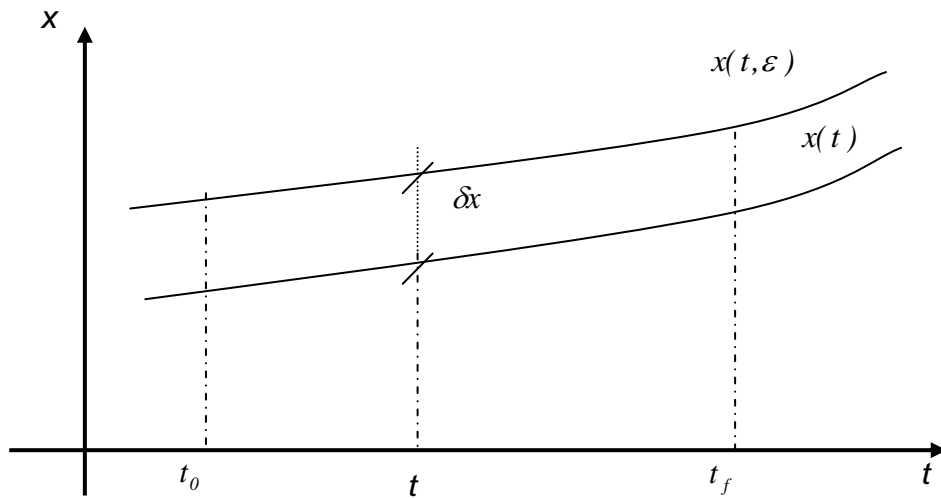


Figura 2.1: Conceito de Variação de Primeira Ordem

Definição 2.1.2: Analogamente, para $f(x(t))$, diferenciável em $[t_0, t_f]$, ε um pequeno parâmetro e $f(x(t, \varepsilon))$ diferenciável em relação a ε em $\varepsilon=0$, então define-se:

$$\delta f(x(t)) \triangleq \left. \partial f(x(t, \varepsilon)) / \partial x \right|_{\varepsilon=0} \left. \partial x(t, \varepsilon) / \partial \varepsilon \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = f_x(x(t)) \delta x \cong f(x(t, \varepsilon)) - f(x(t)). \quad (2)$$

Onde $f_x(x(t))$ indica a derivada parcial da função em relação a x .

Propriedade 2.1.1: As operações de derivação e integração comutam com a de variação:

$$\delta \dot{x}(t) = d\delta x(t)/dt, \quad (3)$$

$$\delta \dot{f}(x(t)) = d\delta f(x(t))/dt, \quad (4)$$

e para t_0 e t_f dados e fixos:

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} f(x(t))dt = \int_{t_0}^{t_f} \delta f(x(t))dt. \quad (5)$$

Definição 2.1.3: Para pontos de contorno não fixos, ao se considerar uma trajetória na vizinhança, se tem $x(t, \varepsilon)$ para $t \in [t_0(\varepsilon), t_f(\varepsilon)]$, isto é, t_0 e t_f são também perturbados, e definem-se as variações de primeira ordem, nestes pontos de contorno, como (Fig. (2.2)):

$$\begin{aligned} dx(t_0) &\triangleq (\partial x(t_0(\varepsilon), \varepsilon)/\partial t_0) \partial t_0(\varepsilon)/\partial \varepsilon|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \partial x(t_0(\varepsilon), \varepsilon)/\partial \varepsilon|_{\varepsilon=0} \varepsilon, \\ &= \dot{x}(t_0) dt_0 + \delta x(t_0) \triangleq x(t_0(\varepsilon), \varepsilon) - x(t_0) \end{aligned} \quad (6)$$

$$dx(t_f) = \dot{x}(t_f) dt_f + \delta x(t_f). \quad (7)$$

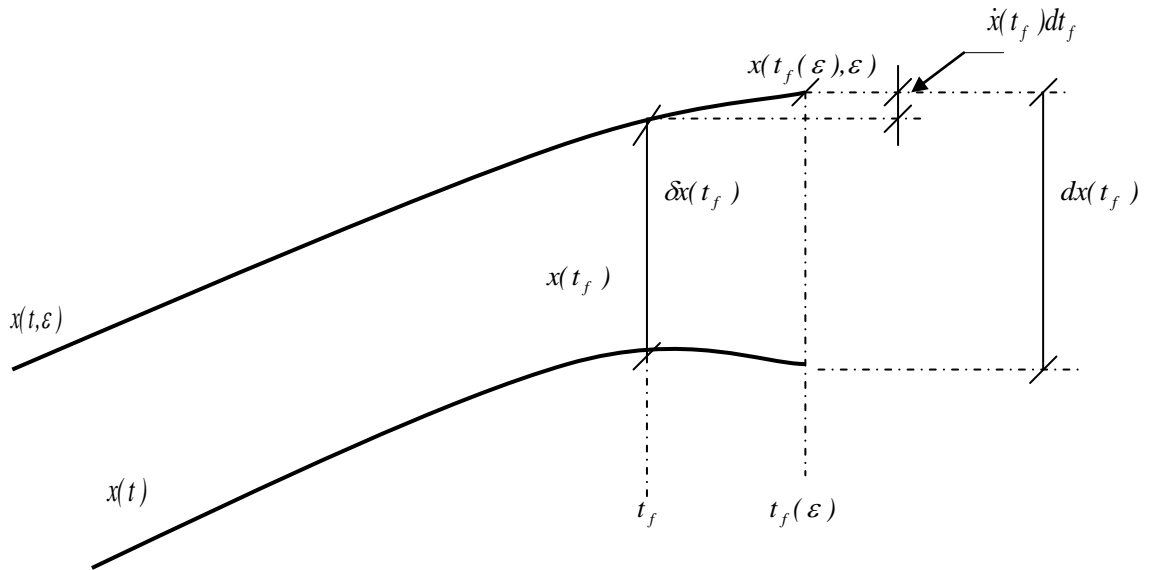


Figura 2.2: Contornos Livres: Variações de Primeira Ordem

Em consequência:

$$df(x(t_0)) = f_x(x(t_0))dx(t_0) \triangleq f(x(t_0(\varepsilon), \varepsilon)) - f(x(t_0)), \quad (8)$$

$$df(x(t_f)) = f_x(x(t_f))dx(t_f) \triangleq f(x(t_f(\varepsilon), \varepsilon)) - f(x(t_f)), \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\delta \left(\int_{t_0}^{t_f} f(x(t)) dt \right) &\triangleq f(x(t_f)) dt_f - f(x(t_0)) dt_0 + \int_{t_0}^{t_f} \delta f(x(t)) dt \\
&\cong \int_{t_0(\varepsilon)}^{t_f(\varepsilon)} f(x(t, \varepsilon)) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x(t)) dt.
\end{aligned} \tag{10}$$

Para esclarecer o significado da Eq. (10), basta notar que se for considerado que:

$$\begin{aligned}
I &\triangleq \int_{t_0}^{t_f} f(x(t)) dt \Rightarrow I(\varepsilon) = \int_{t_0(\varepsilon)}^{t_f(\varepsilon)} f(x(t, \varepsilon)) dt \quad \therefore \\
\delta I &= (dI(\varepsilon)/d\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon = dI = d \left(\int_{t_0(\varepsilon)}^{t_f(\varepsilon)} f(x(t, \varepsilon)) dt \right) / d\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \delta \int_{t_0}^{t_f} f(x(t)) dt.
\end{aligned} \tag{10a}$$

Note-se, pois, que no caso mais geral a variação de um varacional, dado por uma integral com extremos variáveis, reduz-se ao caso de diferencial de uma função de uma variável, $I(\varepsilon)$, em torno de zero.

2.2 Problema Básico

Minimizar:

$$J = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt. \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= x_0, \quad t_0, \quad t_f \quad \text{dados}, \\
\dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\
u(t) &\in U.
\end{aligned} \tag{2}$$

Solução:

A solução é a determinação de $u(t)$, em $[t_0, t_f]$. Para que a solução exista, é necessário que, tomando-se um incremento de primeira ordem, através de $u(t, \varepsilon)$, tenha-se:

$$J(\varepsilon) - J = \delta J \geq 0. \tag{3}$$

Para determinar as condições necessárias para que $u(t)$ seja solução, de modo análogo à otimização de funções na presença de vínculos de igualdade, considere-se o uso de multiplicadores de Lagrange, definindo-se:

$$J' = J + \int \lambda^T (f(x, u, t) - \dot{x}) dt \equiv J. \tag{4}$$

Onde $\lambda(t)$, $n \times 1$, é o vetor de multiplicadores de Lagrange, suposto uma função arbitrária do tempo, isto é, qualquer que seja esta função $\lambda(t)$ a relação da Eq. (4) permanece válida, ou seja, não se altera o funcional J .

Em analogia com a Mecânica Clássica e com motivação nesta, define-se a chamada Hamiltoniana:

$$H(x, u, t) \triangleq L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t). \quad (5)$$

Tomando-se um incremento de primeira ordem através de $u(t, \varepsilon)$ (Fig. 2.3):

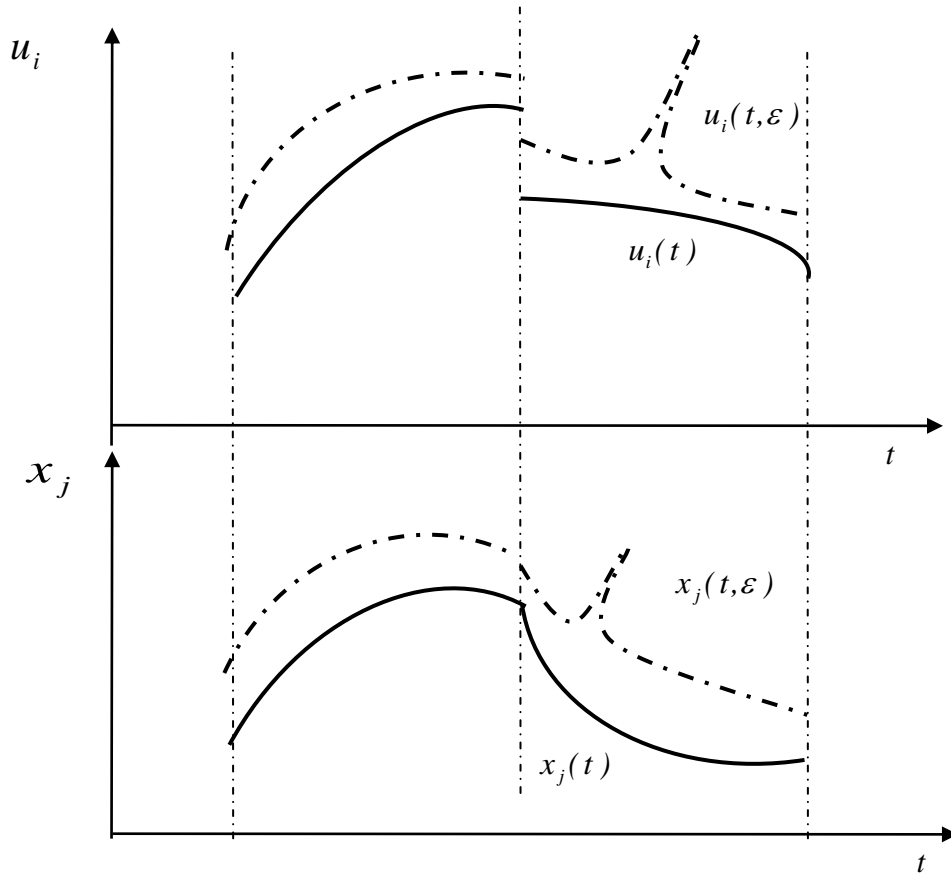


Figura 2.3: Perturbações na Vizinhança da Solução Minimizante

$$\begin{aligned} \delta J = & \psi(x(t_f, \varepsilon)) - \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), t) - \lambda^T \dot{x}(t, \varepsilon)) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x(t), u(t), t) - \lambda^T \dot{x}(t)) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Notando que para $u(t, \varepsilon) = v(t)$, a menos de termos de ordem superior a dois, da expansão em série de Taylor em torno de $x(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_f} H_x(\lambda, x, v, t) \delta x dt = \int_{t_0}^{t_f} H_x(\lambda, x, u, t) \delta x dt + o(2) \quad \therefore$$

$$\int_{t_0}^{t_f} H(\lambda, x + \delta x, v, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t) \delta x + H(\lambda, x, v, t)) dt.$$

De volta na Eq. (6), expandindo os outros termos relativos ao estado, em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ e desconsiderando termos de ordem superior:

$$\delta J = \psi_x(x(t_f)) \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t) \delta x - \dot{\lambda}^T \delta x) dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, v, t) - H(\lambda, x, u, t)) dt.$$

Integrando por partes o termo $\dot{\lambda}^T \delta x$:

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt = \dot{\lambda}^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} (\dot{\lambda}^T \delta x) dt.$$

Considerando que $x(t_0)$ é fixo, resulta, de volta na Eq. (8):

$$\delta J = \psi_x(x(t_f)) \delta x(t_f) - \dot{\lambda}^T(t_f) \delta x(t_f)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t) - \dot{\lambda}^T) \delta x dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, v, t) - H(\lambda, x, u, t)) dt \geq 0.$$

Dada a arbitrariedade de $\lambda(t)$ e de $\lambda(t_f)$:

$$\dot{\lambda}^T = -H_x(\lambda, x, u, t),$$

$$\dot{\lambda}^T(t_f) = \psi_x(x(t_f)).$$

Onde as Eqs.(11) são as chamadas equações adjuntas. Resta, portanto, o último termo da condição da Eq. (10); como $v(t)$ é uma variação arbitrária de $u(t)$, então, necessariamente:

$$H(\lambda, x, v, t) \geq H(\lambda, x, u, t).$$

Esta condição vale para todo t em $[t_0, t_f]$ e $u(t, \varepsilon) = v(t) \in U$, isto é, para $u(t)$ solução tem-se o valor mínimo da Hamiltoniana, quando comparada com $H(\lambda, x, v, t)$. Em correspondência com $u(t)$, tem-se as soluções para $x(t)$ e $\lambda(t)$. Este é o chamado Princípio de Mínimo de Pontryagin. Note-se que ao se comparar a solução com soluções na vizinhança, em consequência de perturbações no controle, não se exclui a possibilidade de descontinuidades na função de controle solução. Esta situação será tratada na extensão a seguir.

Extensão 2.2.1:

Conforme as deduções feitas, não há impedimento de que o controle determinado a partir do Princípio de Máximo tenha uma descontinuidade em um dado t_i . Para analisar as implicações desta situação, considere-se a variação na Eq. (6) contemplando esta possibilidade. Para tanto, quebrando as integrais em dois trechos divididos pelo ponto onde ocorre a descontinuidade, considerando que esta descontinuidade tem medida nula, isto é, não altera a segunda das integrais, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta J = & \psi(x(t_f, \varepsilon)) - \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_i^-(\varepsilon)} (H(\lambda, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), t) - \lambda^T \dot{x}(t, \varepsilon)) dt \\ & + \int_{t_i^+(\varepsilon)}^{t_f} (H(\lambda, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), t) - \lambda^T \dot{x}(t, \varepsilon)) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x(t), u(t), t) - \lambda^T \dot{x}(t)) dt. \end{aligned} \quad (6a)$$

Calculando as variações primeiras e integrando por partes os termos $\lambda^T \delta \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \delta J = & \psi_x(x(t_f)) \delta x(t_f) - \lambda^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_i^-} - \lambda^T \delta x \Big|_{t_i^+}^{t_f} + (H - \lambda^T \dot{x}) \Big|_{t_i^-} dt_i - (H - \lambda^T \dot{x}) \Big|_{t_i^+} dt_i \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t) - \dot{\lambda}^T) \delta x dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, v, t) - H(\lambda, x, u, t)) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (10a)$$

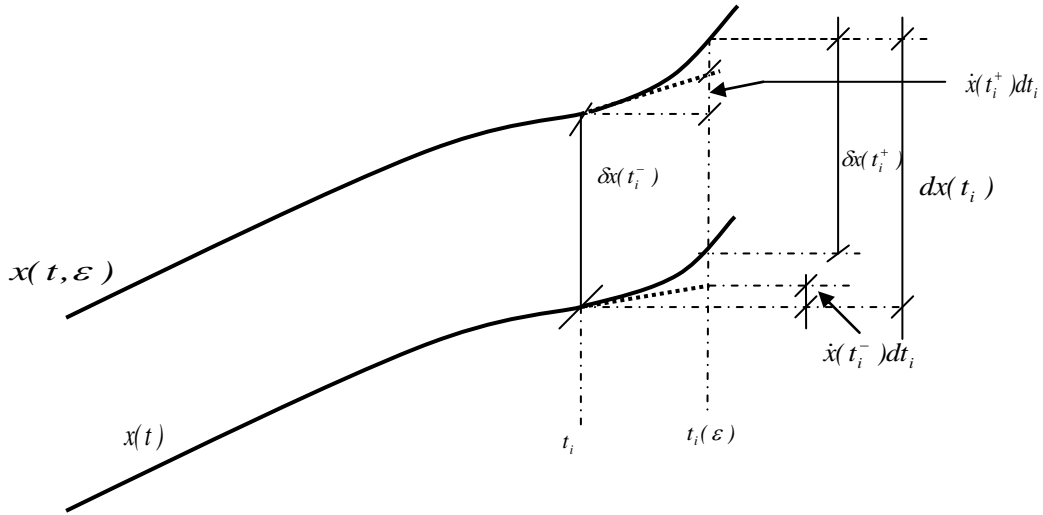


Figura 2.4: Condição de Continuidade no Estado

Onde a hipótese de grandezas finitas garante a junção das integrais parciais; considerando que a descontinuidade em $u(t_i)$ sendo finita não pode produzir descontinuidade nos estados, deve-se ter (Fig. 2.4):

$$dx(t_i) = \begin{cases} \dot{x}(t_i^-)dt_i + \delta x(t_i^-) \\ \dot{x}(t_i^+)dt_i + \delta x(t_i^+). \end{cases}$$

Após as substituições e agrupamentos, considerando as condições necessárias já estabelecidas:

$$\begin{aligned} \delta J = & (\lambda^T(t_i^+) - \lambda^T(t_i^-))dx(t_i) + (H(t_i^-) - H(t_i^+))dt_i \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, v, t) - H(\lambda, x, u, t))dt \geq 0. \end{aligned} \quad (10b)$$

Onde, devido a escolhas arbitrárias que podem ser feitas de $\lambda(t_i^-)$ e do sinal de dt_i as condições necessárias em pontos de descontinuidade do controle, as chamadas condições de quinas (“corner conditions”) resultam:

$$\begin{aligned} \lambda^T(t_i^+) &= \lambda^T(t_i^-), \\ H(t_i^-) &= H(t_i^+). \end{aligned} \quad (11a)$$

O conjunto das condições necessárias para o caso de descontinuidades no controle resulta, então como a seguir.

Condições Necessárias:

(i) Dinâmicas:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}^T = -H_x(\lambda, x, u, t).$$

$$H(\lambda, x, u, t), \text{ mínima em relação a } u(t). \quad (15)$$

(ii) Quina:

$$\begin{aligned} \lambda^T(t_i^+) &= \lambda^T(t_i^-), \\ H(t_i^-) &= H(t_i^+). \end{aligned} \quad (11a)$$

(iii) Contorno:

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0, \quad t_f, \text{ dados.} \quad (16)$$

$$\lambda^T(t_f) = \psi_x(x(t_f)).$$

Exemplo 2.2.1: Seja o problema de se traçar uma curva de inclinação controlada que em t_f atinja a maior ordenada $x(t_f)$ possível, desde que a inclinação, em cada t seja menor ou igual a 1. Ou seja, o problema de:

Maximizar:

$$J = x(t_f). \quad (17)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t), \quad t_0, t_f, x(t_0), \\ u(t) &\leq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Condições Necessárias: neste caso são, sendo $H = \lambda u$:

(i) *Dinâmicas*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t), \\ \dot{\lambda} &= 0, \\ H &= \lambda u, \quad \text{máxima em relação a } u. \end{aligned} \quad (19)$$

(ii) *Contorno*

$$\begin{aligned} t_0, t_f, x(t_0), \\ \lambda(t_f) &= 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Solução: já que da Eq. (19) $\lambda(t)$ é constante e, da Eq. (20), resulta que $\lambda(t) = 1$, o valor do controle que maximiza a Hamiltoniana, neste caso $H = u$, é o valor limite $u(t) = 1$.

Exemplo 2.2.2: Este exemplo corresponde ao problema de guiagem em torno de uma solução previamente otimizada em malha aberta (o caso das Eqs. 1.2(8) a 1.2(10), conforme ilustrado na Fig. (1.6)). Neste caso o estado $x(t)$ é o desvio que se quer manter mínimo com a menor agitação e $u(t)$ o ajuste de controle, que se deseja mínimo, isto é, que implique no menor esforço ou consumo de energia. Para tanto, o problema a resolver se formula como a seguir.

Minimizar:

$$J = 1/2 \{ x_f^T S_f x_f + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \}, \quad S_f \geq 0, Q \geq 0, R > 0. \quad (21)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(t_0) &= x_0, t_0, t_f \text{ dados.} \end{aligned} \quad (22)$$

Condições Necessárias:

$$\text{Hamiltoniana: } 1/2 (x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (A(t)x + B(t)u). \quad (23)$$

$$\text{Equações Adjuntas: } \dot{\lambda}^T = -(x^T Q + \lambda^T A(t)). \quad (24)$$

$$\text{Equação de Controle: } H_u = 0, \therefore u^T R + \lambda^T B = 0, \therefore u = -R^{-1} B^T \lambda. \quad (25)$$

$$\text{Equações de Contorno: } \lambda^T(t_f) = x^T(t_f) S_f. \quad (26)$$

Solução: Das condições necessárias, resulta um problema com condições de contorno em dois pontos,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x - B(t)R^{-1}B^T(t)\lambda, \\ \dot{\lambda} &= -Q^T x - A^T(t)\lambda, \\ x(t_0) &= x_0, t_0, t_f, \lambda^T(t_f) = x^T(t_f) S_f. \end{aligned} \quad (27)$$

Em consequência da condição de contorno na variável adjunta lambda, a solução para esta variável deve ser da forma (ver Apêndice II, Matriz de Transição):

$$\lambda = P(t)x. \quad (28)$$

Levando de volta na Eq. (27), resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BR^{-1}B^T Px \\ \dot{P}x + Px &= -Q^T x - A^T Px \therefore \\ (\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q^T)x &= 0, \forall x. \end{aligned} \quad (29)$$

Resultando, então:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q^T = 0, \quad P(t_f) = S_f. \quad (30)$$

Donde resulta uma lei de realimentação do estado, com o controle de correção proporcional ao desvio, dado por x :

$$u = -R^{-1}B^T(t)P(t)x. \quad (31)$$

No caso de sistemas dinâmicos a natureza de x é de um estado, isto é, posição e velocidade; portanto, vê-se que o controle na Eq. (31) é do tipo proporcional, derivativo. Quanto às matrizes peso ou de ponderação considerem-se as recomendações a seguir.

Observações de ordem prática: (i) Para a escolha das matrizes de ponderação na integral, Q e R , conforme bibliografia (Bryson and Ho, 1975), a recomendação é que: sejam constantes e diagonais; cada termo da diagonal seja tomado igual ao inverso de $(t_f - t_0)$ vezes o quadrado do maior valor tolerado para a respectiva componente da variável em questão, assim, por exemplo:

$$Q = \text{diag.}[Q_i = 1 / ((t_f - t_0)(x_i^{mx})^2) : i = 1, 2, \dots, n]. \quad (32)$$

(ii) Para a matriz S_f recomenda-se, de forma análoga:

$$S_f = \text{diag.}[S_{fi} = 1/(x_i^{mx}(t_f))^2 : i = 1,2,...,n]. \quad (33)$$

(iii) Quando A e B são constantes, isto é, o sistema dinâmico é invariante no tempo, é usual tomar-se um valor aproximadamente nulo para o termo em t_f fora da integral e na regra empírica anterior para as matrizes de ponderação na integral substitui-se $(t_f - t_0)$ por $\Delta t = t - t_0$, correspondente ao valor do tempo a partir do qual a integral é desprezível, assim, por exemplo:

$$x_f^T S_f x_f \cong 0, \quad Q = \text{diag.}[Q_i = 1/(\Delta t (x_i^{mx})^2) : i = 1,2,...,n]. \quad (34)$$

Em correspondência a estas aproximações, toma-se P de regime, considerando-se:

$$(t - t_0) \rightarrow 0, \quad \dot{P} \cong 0. \quad (35)$$

Exemplo 2.2.3: Dado um sistema mecânico conservativo, vale o princípio de Hamilton ou da Mínima Ação, que afirma que entre t_0 e t_f a trajetória solução que vai de $x(t_0)$ a $x(t_f)$ é a que produz o funcional correspondente à Lagrangiana ($L \triangleq T - V$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial) estacionário:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (32)$$

Sendo assim e definindo

$$\dot{x} = u. \quad (33)$$

Então $H = L + \lambda^T u$, resultando as respectivas equações adjuntas e de controle:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^T &= -H_x, \\ H_u &= L_u + \lambda^T = 0 \quad \therefore \\ d(L_u)dt - H_x &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Considerando o vínculo dinâmico da Eq. (43) e que $H_x = L_x$, resultam as Equações de Lagrange:

$$d(\partial L / \partial \dot{x})dt - \partial L / \partial x = 0. \quad (35)$$

Referência de aplicação 2.2.1: Lourenção (1988) e Lourenção e Rios Neto (1989) utilizaram controle ótimo, com modelos lineares para a otimização do posicionamento de sensores e atuadores visando obtenção de modelos reduzidos para a síntese de reguladores ótimos em controle de estruturas flexíveis.

Referência de aplicação 2.2.2: Oliveira e Rios Neto (1976) utilizaram controle ótimo para a operação de um sistema de silos, sob o aspecto de minimização dos custos de manuseio, transferência e armazenagem de grãos.

2.3 Problema com Tempo Final Livre

Minimizar:

$$J = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt. \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad t_0, \quad \text{dados}, \\ t_f &\text{ livre}, \\ \dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ u(t) &\in U. \end{aligned} \quad (7)$$

Solução:

Alerta para “caipira em cidade grande”: o bairro é novo, mas percorrê-lo não traz grande novidade, depois que se familiarizou a situação de como andar em um primeiro bairro, que, afinal, é como andar em uma pequena cidade, com até menos localidades!!!

A solução deste problema ligeiramente estendido é a determinação de $u(t)$, e t_f . Para que a solução exista, é necessário que, tomando-se um incremento de primeira ordem, através de $u(t, \varepsilon)$ e $t_f(\varepsilon)$, tenha-se:

$$J(\varepsilon) - J = \delta J \geq 0. \quad (8)$$

Onde a novidade em relação ao problema básico (ver seção 2.2) é que $J(\varepsilon)$ inclui a perturbação do tempo final também, isto é, $t_f(\varepsilon)$. Seguindo os mesmos passos como nas Eqs. 2.2(4) a 2.2(5), isto é, usando multiplicadores de Lagrange (variáveis adjuntas λ) e definindo a Hamiltoniana, resulta:

$$\begin{aligned} \delta J &= \psi(x(t_f(\varepsilon), \varepsilon)) - \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f(\varepsilon)} (H(\lambda, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), t) - \lambda^T \dot{x}(t, \varepsilon)) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x(t), u(t), t) - \lambda^T \dot{x}(t)) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Expandindo em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ e aproximando pelo termo de primeira ordem (variação primeira), já que ε é um “pequeno” parâmetro, notando que neste caso a variação em t_f é total, pois o tempo e o estado são comparados com valores na vizinhança, resulta:

$$\begin{aligned} \delta J = & \psi_x(x(t_f))dx(t_f) + L(x(t_f), u(t_f), t_f)dt_f + \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t)\delta x - \dot{\lambda}^T \delta x)dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, u(t, \varepsilon), t) - H(\lambda, x, u, t))dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Integrando por partes o termo $\dot{\lambda}^T \delta x$, como na Eq. 2.2(9):

$$\begin{aligned} \delta J = & \psi_x(x(t_f))dx(t_f) + L(x(t_f), u(t_f), t_f)dt_f - \left[\lambda^T \delta x \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t) + \dot{\lambda}^T) \delta x dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, u(t, \varepsilon), t) - H(\lambda, x, u, t))dt \end{aligned} \quad (11)$$

Notando que do fato das condições iniciais serem fixas e do tempo final ser livre, resulta que:

$$\begin{aligned} \delta x(t_0) &= 0, \\ dx(t_f) &= \delta x(t_f) + \dot{x} dt_f \quad \therefore \\ \delta x(t_f) &= dx(t_f) - f(x(t_f), u(t_f), t_f) dt_f. \end{aligned} \quad (12)$$

Substituindo na Eq. (6) e agrupando tem-se:

$$\begin{aligned} \delta J = & (\psi_x(x(t_f)) - \lambda^T(t_f))dx(t_f) \\ & + (L(x(t_f), u(t_f), t_f) + \lambda^T(t_f)f(x(t_f), u(t_f), t_f))dt_f \\ & + \int_{t_0}^{t_f} (H_x(\lambda, x, u, t) + \dot{\lambda}^T) \delta x dt + \int_{t_0}^{t_f} (H(\lambda, x, u(t, \varepsilon), t) - H(\lambda, x, u, t))dt \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando-se a arbitrariedade de $\lambda(t)$, $\lambda(t_f)$ podem-se anular os coeficientes de δx , $dx(t_f)$, do primeiro e terceiro termos; considerando-se a independência das variações em $u(t)$ e dt_f , podem-se considerar variações isoladamente, concluindo-se que o coeficiente de dt_f do segundo termo deve necessariamente ser nulo e pela validade do Princípio de Mínimo para a Hamiltoniana. Resultam assim as condições necessárias para a solução.

Condições Necessárias:

(i) Dinâmicas:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}^T = -H_x(\lambda, x, u, t),$$

$$H(\lambda, x, u, t) \text{ mínima em relação a } u(t). \quad (15)$$

(ii) Contorno:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad t_0 \text{ dados.} \\ \lambda^T(t_f) &= \Psi_x(x(t_f)), \\ H(\lambda(t_f), x(t_f), u(t_f)) &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Notar que, para as componentes $x_i(t_f)$ eventualmente fixas, a segunda das equações de contorno na Eq. (11) não se aplica para esta respectiva componente.

Exemplo 2.3.1: Seja o problema de transferir um ponto material para a origem em tempo mínimo, a partir de uma posição dada, atuando com aceleração limitada ao intervalo $[-1, +1]$, conforme formulado a seguir.

Minimizar:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt. \tag{17}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \\ -1 &\leq u \leq 1, \\ x(t_0), t_0, x(t_f) &= 0, \quad \text{dados.} \end{aligned} \tag{18}$$

Condições Necessárias:

$$\text{Hamiltoniana: } H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u. \tag{19}$$

$$\text{Equações Adjuntas: } \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1. \tag{20}$$

$$\text{Equação de Controle: } u = -\text{sign} \lambda_2. \tag{21}$$

$$\text{Equações de Contorno: } H(\lambda(t_f), x(t_f), u(t_f)) = 0 = \lambda_2(t_f) u(t_f) + 1. \tag{22}$$

Solução:

Das 3 condições de contorno dadas (Eq. (18)) mais a da condição necessária da Eq. (22) conclui-se que há informações suficientes nos 2 pontos de contorno para determinar as constantes de integração e, em princípio, resolver o problema das equações diferenciais correspondente às Eqs. (18) e (20). No entanto, a equação de controle (Eq. (21)) dá uma solução não linear para u e, em consequência, para o sistema dinâmico da Eq. (18).

Resolvendo-se as equações adjuntas resulta:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_2 = \lambda_{2f} + \bar{\lambda}_1(t_f - t). \quad (23)$$

Portanto, sendo λ_2 a função de chaveamento do controle, vê-se que dependendo do ponto de partida pode ou não haver chaveamento; e, se isto ocorrer, será uma única vez de um extremo para o outro da faixa permitida de controle, ou seja, a solução é o do chamado tipo “bang-bang”. Analisando as situações básicas em que não haveria chaveamento:

(i) $\lambda(t_f) = 1 \quad \therefore u(t_f) = -1$: resultando para a solução de estado que,

$$x_2 = t_f - t, \quad x_1 = -(t_f - t)^2 / 2 \quad \therefore \quad x_1 = -(x_2)^2 / 2. \quad (24)$$

(ii) $\lambda(t_f) = -1 \quad \therefore u(t_f) = 1$: resultando de modo análogo que,

$$x_2 = t - t_f, \quad x_1 = (t - t_f)^2 / 2 \quad \therefore \quad x_1 = (x_2)^2 / 2. \quad (25)$$

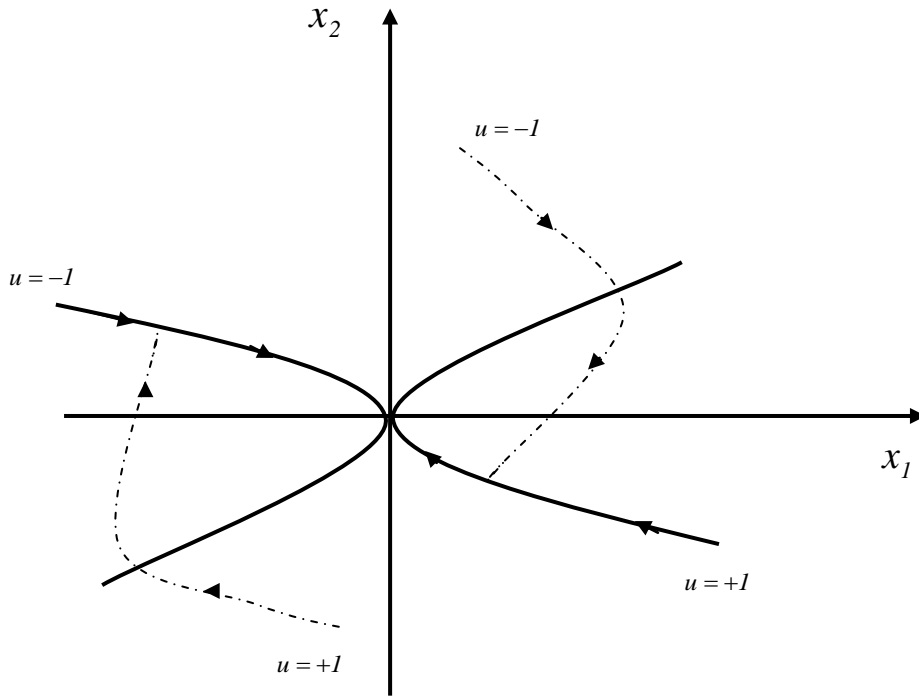


Figura 2.5: Curvas de Chaveamento no Espaço de Fase

Traçando-se essas curvas no espaço de fase (Fig. 2.5), pode-se, então, analisar qualitativamente a solução do problema para as possibilidades de chaveamento a partir das várias possibilidades de condição de partida.

2.4 Vínculos de Contorno

No que segue trata-se de um problema com vínculos de contorno em uma situação mais geral.

Minimizar:

$$J[x(t_0), t_0, u(t), t_f] = \psi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt. \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ u(t) &\in U, \\ \phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Solução:

Definindo a Hamiltoniana, como anteriormente, e utilizando multiplicadores de Lagrange:

$$J' = (\psi + v^T \phi) + \int_{t_0}^{t_f} (H - \lambda^T \dot{x}) dt. \quad (3)$$

Tomando a primeira variação para determinação do incremento de primeira ordem em relação a uma configuração de solução na vizinhança:

$$\begin{aligned} \delta J &= (\psi_{x_0} + v^T \phi_{x_0}) dx_0 + (\psi_{x_f} + v^T \phi_{x_f}) dx_f + (\psi_{t_0} + v^T \phi_{t_0}) dt_0 + (\psi_{t_f} + v^T \phi_{t_f}) dt_f \\ &+ L dt \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (H_x \delta x - \lambda^T \delta \dot{x}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta^u H dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Integrando por partes $\lambda^T \delta \ddot{x}$:

$$\begin{aligned} \delta J &= (\psi_{x_0} + v^T \phi_{x_0}) dx_0 + (\psi_{x_f} + v^T \phi_{x_f}) dx_f + (\psi_{t_0} + v^T \phi_{t_0}) dt_0 + (\psi_{t_f} + v^T \phi_{t_f}) dt_f \\ &+ L dt \Big|_{t_0}^{t_f} - \lambda_f^T \delta x_f + \lambda_0^T \delta x_0 + \int_{t_0}^{t_f} (H_x - \dot{\lambda}^T) \delta x dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta^u H dt \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando que para t_0 e t_f :

$$\delta x(t_f) = dx(t_f) - \dot{x}_f dt_f.$$

Resulta:

$$\begin{aligned} \delta J &= (\psi_{x_0} + v^T \phi_{x_0} + \lambda_0^T) dx_0 + (\psi_{x_f} + v^T \phi_{x_f} - \lambda_f^T) dx_f + (\psi_{t_0} + v^T \phi_{t_0} - L \Big|_{t_0} - \lambda_0^T \dot{x}_0) dt_0 \\ &+ (\psi_{t_f} + v^T \phi_{t_f} + L \Big|_{t_f} + \lambda_f^T \dot{x}_f) dt_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} (H_x - \dot{\lambda}^T) \delta x dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta^u H dt \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Considerando-se a arbitrariedade na escolha dos multiplicadores de Lagrange e a condição necessária para a minimização da Hamiltoniana, resultam:

Condições Necessárias:

em t_0 :

$$\begin{aligned} (\psi_{t_0} + v^T \phi_{t_0} - L]_{t_0} - \lambda_0^T \dot{x}_0) dt_0 &\equiv (\psi_{t_0} + v^T \phi_{t_0} - H]_{t_0}) dt_0 = 0 \\ (\psi_{x_0} + v^T \phi_{x_0} + \lambda_0^T) dx_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

em $[t_0, t_f]$:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}^T = -H_x(\lambda, x, u, t),$$

$$\delta^u H \geq 0, \quad u \in U. \quad (9)$$

em t_f :

$$\begin{aligned} (\psi_{t_f} + v^T \phi_{t_f} + L]_{t_f} + \lambda_f^T \dot{x}_f) dt_f &\equiv (\psi_{t_f} + v^T \phi_{t_f} + H]_{t_f}) dt_f = 0, \\ (\psi_{x_f} + v^T \phi_{x_f} - \lambda_f^T) dx_f &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

em t_0 e t_f :

$$\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0. \quad (11)$$

Extensão 2.4.1:

Pode acontecer situação em que, além das condições de contorno em t_0 e t_f existam *condições de contorno intermediárias*, por exemplo, uma condição em $t_0 < t_i < t_f$:

$$\varphi(x(t_i), t_i) = 0. \quad (2a)$$

Neste caso usando multiplicadores de Lagrange:

$$J' = (\psi + v^T \phi) + \eta^T \varphi(x(t_i), t_i) + \int_{t_0}^{t_i} (H - \lambda^T \dot{x}) dt + \int_{t_i}^{t_f} (H - \lambda^T \dot{x}) dt. \quad (3a)$$

Seguindo processo de calcular a variação primeira, com cuidados semelhantes aos tomados na seção 2.2 (Extensão 2.2.1), resulta a condição necessária adicional, em t_i :

$$\begin{aligned}\lambda^T(t_i^-) &= \lambda^T(t_i^+) + \eta^T \varphi_x(x(t_i), t_i), \\ H(t_i^-) &= H(t_i^+) - \eta^T \varphi_{t_i}(x(t_i), t_i).\end{aligned}\tag{12}$$

2.5 Vínculos Dinâmicos de Desigualdade

Pode também acontecer a situação de limitações nas variáveis de controle e na região permitida para variáveis de estado (limitações físicas e geométricas), resultando em vínculos dinâmicos do tipo:

$$c(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad s(x(t), t) \leq 0,\tag{13}$$

onde, sem perda de generalidade se consideram funções escalares, já que a situação se repete para as diferentes componentes, no caso vetorial. Analogamente ao que se faz no caso estático, estes vínculos podem ser tratados diretamente com multiplicadores de Lagrange, resultando uma Hamiltoniana estendida:

$$\tilde{H}(x, u, t) \triangleq L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) + \mu c(x, u, t) + \varsigma s(x, t).\tag{2}$$

Para incorporar esta situação estendida resultam as seguintes condições necessárias:

em $[t_0, t_f]$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ \dot{\lambda}^T &= -\tilde{H}_x(\lambda, x, u, t), \\ \tilde{H}_u(\lambda, x, u, t) &= 0, \\ \mu(t) &\geq 0, \mu c(x, u, t) = 0; \quad \varsigma(t) \geq 0, \varsigma s(x, t) = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

em $[\tau_1, \tau_2]$ intervalo de fronteira, $\tau = \tau_1, \tau = \tau_2$ e, com possibilidade, de $\tau_1 < \tau < \tau_2$:

$$\begin{aligned}\lambda^T(\tau^-) &= \lambda^T(\tau^+) + \varsigma(\tau) s_x(x, \tau), \\ H(\tau^-) &= H(\tau^+) - \varsigma(\tau) s_\tau(x, \tau), \\ \varsigma(\tau) &\geq 0, \varsigma s(x, \tau) = 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Registre-se que esta não é a única abordagem possível e usada; há tanto a chamada abordagem indireta que tenta reduzir o caso de desigualdade envolvendo apenas o estado ao caso de desigualdade envolvendo o controle, como as abordagens aproximadas, por penalização; recomenda-se consulta à bibliografia e referências para contato e avaliação destas outras abordagens. Embora as abordagens de adicionar direta ou indiretamente os vínculos por multiplicadores de Lagrange sejam válidas e funcionem para os problemas de interesse prático, que, via de regra, atendem as condições de regularidade exigidas, há ainda situações não usuais em que elas não estão totalmente demonstradas como válidas (Hartl, Sethi and Vickson, 1995). No caso das abordagens com penalização, há dificuldades numéricas na obtenção de soluções.

Referência de Aplicação 2.4.1: Rios Neto e Fleury (1977), Rios Neto e Fleury, (1979), Fleury (1978). O problema tratado é de otimização estrutural com objetivo duplo de minimizar massa

total e maximizar frequência natural de vibração, respeitando vínculos de geometria e de resistência. O objetivo de aplicação é o de otimização de apêndices flexíveis, em especial no caso de aplicação a satélites artificiais, mas com possibilidades de desdobramento de aproveitamento dos resultados obtidos em outras situações de aplicação em que seja razoável modelar fisicamente o problema de modo que um modelo matemático de viga em balanço com pequenas vibrações transversais possa ser utilizado. Para resolver este problema de projeto de apêndices flexíveis com pequenas massas e altas frequências naturais de vibração formulou-se um problema de controle ótimo em que: (i) o índice de desempenho a se minimizado inclui de forma ponderada a massa, o inverso da frequência de vibração e uma função de penalização para tratar os vínculos de desigualdade envolvendo variáveis de estado; (ii) os vínculos dinâmicos e de contorno foram formulados usando-se a equação de Euler para viga em balanço engastada em uma extremidade, sujeita a restrições de resistência mecânica, vibração no primeiro modo, positividade de massa e momento de inércia, assim como de patamar inferior para a frequência de vibração; e (iii) a solução foi obtida numericamente com método direto do tipo gradiente (seção 2.7.1). Para tratamento dos vínculos dinâmicos de desigualdade nas variáveis de estado, $s_i(x(t), t) \leq 0$, adotou-se o método de penalização a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n_s} (s_i(x, t))^2 k(s_i(x, t)), \\ k(s_i(x, t)) &= \begin{cases} 0, & s_i(x, t) \leq 0 \\ k_i > 0, & s_i(x, t) > 0 \end{cases} \\ x_{n+1}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$J' = J + k_f x_{n+1}^2(t_f) \quad k_f > 0, \quad (6)$$

onde, a variável independente t corresponde à coordenada na direção longitudinal da viga. Os resultados buscados são atingidos, com valores bastante reduzidos da massa do apêndice e valores da frequência com a ordem de magnitude buscada. Como não há restrição quanto à forma da seção transversal da barra, e como os resultados são apresentados na forma tabular de distribuição de áreas transversais e raios de giração, há a possibilidade de liberdade, quanto à forma geométrica do apêndice. Isto aumenta a utilidade dos resultados para outras aplicações, como, por exemplo, edificações em regiões de ventos ou terremotos e dispositivos de fixação de instrumentação para medidas dinâmicas.

2.6 Contornos Múltiplos e Desigualdades no Estado

Uma situação bastante geral é aquela em que se têm condições de contorno múltiplo, que dependem explicitamente do vetor de estado e , que além dos instantes inicial e final, podem também depender de instantes intermediários, cuja determinação está incluída na otimização. Adicionalmente, inclui-se também a otimização de um vetor de parâmetros.

Este problema foi tratado por Freitas Pinto (1991) e o tratamento a seguir é o apresentado por Freitas Pinto e Rios Neto (1993).

Minimizar:

$$\phi_0(x(t_0), x(t_1), x^+(t_1), \dots, x(t_N), x^+(t_N), x(t_{N+1}), t_0, t_1, \dots, t_{N+1}, p), p \in Q \subset E^{n_p} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= f(x(\tau), u(\tau), \tau), \\ u(\tau) &\in U \subset E^{n_u}, \tau \in [t_0, t_{N+1}], \\ \phi_i(x(t_0), x(t_1), x^+(t_1), \dots, x(t_N), x^+(t_N), x(t_{N+1}), t_0, t_1, \dots, t_{N+1}, p) &= 0, i = 1, 2, \dots, n_\phi\end{aligned}\tag{2}$$

Solução:

Hipóteses:(i) Os instantes t_e são intermediários entre os instantes inicial e final e não coincidentes, dois a dois, isto é,

$$\{t_e : e = 1, 2, \dots, N, t_0 < t_e < t_{N+1}, t_i \neq t_j, i \neq j\}.$$

(ii) Devem ser funções contínuas os

$$x_i(\tau), i = 1, 2, \dots, n_x, \tau \in (t_{e-1}, t_e), e = 1, 2, \dots, N+1,$$

com

$$x(t_0) \triangleq x^+(t_0), x(t_e) \triangleq x^-(t_e).$$

(iii) Devem ser funções contínuas por partes os

$$u_j(\tau), j = 1, 2, \dots, n_u, \tau \in (t_{e-1}, t_e), e = 1, 2, \dots, N+1,$$

com

$$u(t_0) \triangleq u^+(t_0), u(\tau) \triangleq x^-(\tau), \tau \in (t_{e-1}, t_e], e = 1, 2, \dots, N+1.$$

(iv) As funções

$$f(x(\tau), u(\tau), \tau), \phi_i(x(t_0), x(t_1), x^+(t_1), \dots, x(t_N), x^+(t_N), x(t_{N+1}), t_0, t_1, \dots, t_{N+1}, p) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, n_\phi,$$

e suas derivadas parciais primeiras são todas contínuas em relação a todos seus argumentos, nos domínios considerados.

Condições Necessárias:

(i) *Dinâmicas:* Devem existir multiplicadores, $\lambda_i(\tau), i = 1, 2, \dots, n_x$, contínuos para todos os subintervalos $\tau \in (t_{e-1}, t_e), e = 1, 2, \dots, N+1$, tais que, juntamente com a condição dinâmica da Eq. (2):

$$\dot{\lambda}^T(\tau) = -[\partial f / \partial x]^T \lambda(\tau), \quad [\partial f / \partial u]^T \lambda(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t_{N+1}].\tag{3}$$

(ii) *Contornos Múltiplos*: Devem existir multiplicadores $v_i, i = 0, 1, 2, \dots, n_h$, que satisfazem a condição: $v_0 + |v| \neq 0, v_0 \in \{0, 1\}$, de modo que:

$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &= \sum_{j=0}^{n_h} v_j [\partial \phi_j / \partial x_0]^T, \sum_{j=0}^{n_h} v_j \{ [\partial \phi_j / \partial x_0] \dot{x}_0 + \partial \phi_j / \partial t_0 \} = 0; \\ \lambda(t_e) &= -\sum_{j=0}^{n_h} v_j [\partial \phi_j / \partial x(t_e)]^T, \quad \lambda^+(t_e) = \sum_{j=0}^{n_h} v_j [\partial \phi_j / \partial x^+(t_e)]^T, \\ \sum_{j=0}^{n_h} v_j \{ [\partial \phi_j / \partial x(t_e)] \dot{x}(t_e) + [\partial \phi_j / \partial x^+(t_e)] \dot{x}^+(t_e) + \partial \phi_j / \partial t_e \} &= 0, \quad e = 1, 2, \dots, N; \\ \lambda(t_{n+1}) &= -\sum_{j=0}^{n_h} v_j [\partial \phi_j / \partial x(t_{n+1})]^T, \quad \sum_{j=0}^{n_h} v_j \{ [\partial \phi_j / \partial x(t_{n+1})] \dot{x}(t_{n+1}) + \partial \phi_j / \partial t_{n+1} \} = 0; \\ \sum_{j=0}^{n_h} v_j [\partial \phi_j / \partial p]^T &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

(iii) *Hamiltoniana*: A função hamiltoniana:

$$H(x, u, \tau) \triangleq \lambda^T f(x, u, \tau), \tag{5}$$

é contínua para todo $\tau \in (t_{e-1}, t_e), e = 1, 2, \dots, N+1$.

Observações: (i) Note-se que pelas hipóteses feitas, descontinuidades nas variáveis de estado só poderão ocorrer nos instantes $t_e, e = 1, 2, \dots, N$; (ii) Para $\tau \neq t_e, e = 1, 2, \dots, N$, poderão ocorrer descontinuidades somente na variável de controle, o que poderá levar a descontinuidades nas derivadas de estados, em pontos de quina (ver Extensão 2.2.1) explicitados na formulação do problema; (iii) Os pontos $t_e, e = 1, 2, \dots, N+1$ são admitidos como pontos móveis na formulação do problema, de modo que se para algum valor de e $t_e = \bar{t}_e$ for fixo, esta condição deve ser explicitada através de:

$$\phi_j = t_e - \bar{t}_e = 0. \tag{6}$$

2.7 Abordagem Subótima

Neste caso, se coloca um problema que, se não geral, é bastante geral em termos de aplicações. Para tratá-lo propõe-se abordagem subótima, que embora implicando em uma solução que, de partida, se sabe estar sujeita a aproximação, faz sentido prático, tendo em vista erros que sempre existem, tanto de modelagem e solução numérica (ainda que ótima) como de implementação. Seja, pois, o sistema dinâmico com estado $x'(t)$, $n \times 1$, a ser otimizado, em termos do controle $u(t)$, $q \times 1$ e também de p^p parâmetros de projeto, sujeito a vínculos de igualdade e desigualdade, tanto dinâmicos como de contorno.

Minimizar:

$$J = \psi'(x'(t_0), t_0, x'(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x', u, t) dt. \quad (1)$$

Sujeito a:

(i) *dinâmica:*

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= f'(x'(t), u(t), p^p, t), \\ g_i(x'(t), u(t), p^p, t) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_v. \end{aligned} \quad (2)$$

(ii) *contorno:*

$$\begin{aligned} \phi_1^0(x'(t_0), t_0, p^p) &= 0, m_1^0 \times 1; \quad \phi_2^0(x'(t_0), t_0, p^p) \leq 0, m_2^0 \times 1, \\ \phi_1^f(x'(t_f), t_f, p^p) &= 0, m_1^f \times 1; \quad \phi_2^f(x'(t_f), t_f, p^p) \leq 0, m_2^f \times 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Solução:

(i) *Tratamento dos vínculos de desigualdade dinâmicos:*

$$\begin{aligned} \dot{x}'_{n'+1} &= \begin{cases} g_i(x', u, p^p, t), & g_i(x', u, p^p, t) > 0, \\ 0, & g_i(x', u, p^p, t) \leq 0. \end{cases} \\ x'_{n'+1}(t_0) &= x'_{n'+1}(t_f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_v. \end{aligned} \quad (4)$$

(ii) *Transformação em um problema de Mayer:*

$$\begin{aligned} \dot{x}'_{n'+n_v+1} &= L(x', u, t), \\ x'_{n'+n_v+1}(t_0) &= 0 \quad \therefore \\ J &= \psi'(x'(t_0), t_0, x'(t_f), t_f) + x'_{n'+n_v+1}(t_f). \end{aligned} \quad (5)$$

(iii) *Redução a um problema de otimização de parâmetros:* Aproximando o controle $u(t)$ por uma função parametrizada, por exemplo, arcos de polinômio, de modo que $u(t) \cong u(p^c, t)$, o problema pode, finalmente, colocado na forma a seguir.

Minimizar:

$$J = \psi(x_f, p). \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x_f, p) &= 0, \\
\phi_2(x_f, p) &\leq 0, \\
p^T &\triangleq [p^{p^T} : p^{c^T} : x^T(t_0) : t_0 : t_f], \\
x^T &\triangleq [x'^T : x'_{n'+1} : \dots : x'_{n'+n_v+1}]. \\
\phi_1^T(x_f, p) &\triangleq [\phi_1^{0T}(p) : \phi_1^{fT}(x_f, p) : x'_{n'+1}(t_0) : \dots : x'_{n'+n_v+1}(t_0) : x'_{n'+1}(t_f) : \dots : x'_{n'+n_v}(t_f)], \\
\phi_2^T(x_f, p) &\triangleq [\phi_2^{0T}(p) : \phi_2^{fT}(x_f, p)].
\end{aligned} \tag{7}$$

(iv) *Critério de busca direta:* Adotando-se este tipo de busca numérica de solução para o problema, a partir de uma pequena perturbação (linear), em torno de valores supostos para a primeira iteração, ou valores da última iteração, (\bar{x}_f, \bar{p}) , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Delta J &= (\partial \psi(\bar{x}_f, \bar{p}) / \partial x_f) (\partial x_f / \partial p) \Delta p + (\partial \psi(\bar{x}_f, \bar{p}) / \partial p) \Delta p, \\
\Delta \phi_1 &= (\partial \phi_1(\bar{x}_f, \bar{p}) / \partial x_f) (\partial x_f / \partial p) \Delta p + (\partial \phi_1(\bar{x}_f, \bar{p}) / \partial p) \Delta p, \\
\phi_2(\bar{x}_f, \bar{p}) &+ (\partial \phi_2(\bar{x}_f, \bar{p}) / \partial x_f) (\partial x_f / \partial p) \Delta p + (\partial \phi_2(\bar{x}_f, \bar{p}) / \partial p) \Delta p \leq 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

O problema em cada iteração fica reduzido, portanto, ao de minimizar, em relação a Δp , a função ΔJ , sujeito aos vínculos das duas últimas equações, com as restrições adicionais, que são necessárias para garantir convergência para os vínculos e satisfazer a hipótese de perturbação linear (pequenas perturbações):

$$\begin{aligned}
\Delta \phi_i &= \alpha \phi_i(\bar{x}_f, \bar{p}), \quad -1 \leq \alpha < 0, \\
\Delta J &\geq \beta (|\psi(\bar{x}_f, \bar{p})| + \varepsilon), \quad \beta < 0, \quad \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Ao longo das iterações os valores de $\alpha, \beta, \varepsilon$ são ajustados, dependendo do problema tratado. O problema subótimo de otimização de parâmetros pode ser resolvido numericamente por um dos métodos existentes, como, por exemplo, projeção-do-gradiente, programação-linear, etc.

Observação: Para calcular $\partial x_f / \partial p$ por uma aproximação numérica direta:

$$\begin{aligned}
\partial x_f / \partial p_i &\cong \Delta x_f(\Delta p_i) / \Delta p_i, \quad i = 1, 2, \dots, i_p, \\
\Delta x_f(\Delta p_i) &= x_f(\bar{t}_f, \Delta p_i) - \bar{x}_f,
\end{aligned} \tag{10}$$

e $x_f(\bar{t}_f, \Delta p_i)$ resulta da integração numérica a seguir, onde $\bar{p} + \Delta p_i$ significa que apenas a i -ésima componente de p foi perturbada por Δp_i , “suficientemente pequeno”.

Referência de Aplicação 2.5.1: Ceballos (1979), Rios Neto e Ceballos, (1979), Ceballos e Rios Neto (1980, 1981). Nestas aplicações desenvolve-se solução subótima para o problema das Eqs. (1), (2) e (3), parametrizando a função de controle e aproximando-a através de arcos de polinômio, tratando o problema com utilização de Programação Linear, para resolver, em

cada iteração, o problema relativo às Eqs. (8) e (9), de minimizar, em relação a Δp , a função ΔJ , com as restrições para garantir convergência para os vínculos e satisfazer a hipótese de perturbação linear, isto é, pequenas perturbações Δp . Os resultados obtidos foram equivalentes, em termos práticos, aos obtidos com abordagem ótima, para testes em problemas de transferência de órbita.

Referência de Aplicação 2.5.2: Smania e Rios Neto (1988), Smania (1987). O problema de otimizar trajetórias de lançamento com o objetivo de maximizar a carga útil (satélite colocado em órbita), para o Veículo Lançador de Satélites (VLS) brasileiro, é formulado como um problema de controle ótimo com restrições dinâmicas e geométricas do tipo do problema das Eqs. (1), (2) e (3). Desenvolve-se solução subótima parametrizando a função de controle através de segmentos de reta, resolvendo o problema equivalente ao das Eqs. (8) e (9) com iterações de dois problemas de Programação Linear, um para convergência nos vínculos e outro para caminhar na direção do índice de desempenho ótimo (no caso a massa máxima do satélite lançado). A solução leva a resultados válidos para a fase de análise de missão.

Referência de Aplicação 2.5.3: Gamarra Rosado e Rios Neto (1992) e Rosado (19) usaram abordagem com parametrização da função de controle e solução por programação linear para otimização de manobras de satélite estabilizado por “spin” com bobina magnética como atuador interagindo com o campo magnético terrestre.

Referência de Aplicação 2.5.4: Prado e Rios Neto (1994). O problema de transferência de órbita de um veículo espacial com mínimo consumo de combustível é tratado tanto por método direto, com parametrização da função de controle em segmentos de reta, resolvido de forma subótima por método projeção do gradiente, como por método ótimo. Os resultados obtidos são de qualidade equivalente.

Referência de Aplicação 2.5.5: Madeira (1996), Madeira e Rios Neto (1996, 2000), Rios Neto e Madeira (1997). O problema tridimensional de guiagem e controle de um veículo lançador de satélites a combustível sólido é tratado de forma subótima, por parametrização da função de controle em segmentos de reta, e resolvido com método estocástico de projeção do gradiente que permite satisfação de vínculos a menos de erros aleatórios de dispersão especificada. Os resultados são comparáveis ao de outros estudos que utilizaram abordagens ótimas.

2.8 Análise de Condições Suficientes

Para esta análise, será considerado o problema com tempo final fixo, de modo a simplificar desenvolvimentos e sem perda de conteúdo construtivo e de interesse.

Minimizar:

$$J = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt. \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \\ x(t_0), t_0, t_f &\text{ dados}, \\ \phi(x(t_f)) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Condições Necessárias:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ \dot{\lambda}^T &= -H_x(\lambda, x, u, t), \\ \partial H / \partial u &= 0, \\ x(t_0), t_0, t_f &\text{ dados}, \\ \phi(x(t_f)) &= 0, \\ \lambda^T(t_f) &= \psi_{x_f} + \nu^T \phi_{x_f}.\end{aligned}\tag{3}$$

Para pequenas perturbações em torno de uma solução que satisfaça as condições necessárias, produzidas a partir de perturbações $\delta x_0, d\phi = \delta\phi$ e de modo a também satisfazer as condições necessárias, resulta:

$$\begin{aligned}\delta \ddot{x} &= f_x \delta x + f_u \delta u, \\ \delta \dot{\lambda} &= -H_{xx} \delta x - f_x^T \delta \lambda - H_{xu} \delta u, \\ H_{ux} \delta x + f_u^T \delta \lambda + H_{uu} \delta u &= 0, \\ \delta x_0 &\text{ dado}, \\ \delta \lambda_f &= (\psi_{x_f x_f} + \nu^T \phi_{x_f x_f}) \delta x_f + \phi_{x_f}^T d\nu, \\ d\phi &= \phi_{x_f} \delta x_f.\end{aligned}\tag{4}$$

Resolvendo para δu ,

$$\begin{aligned}\delta u &= -H_{uu}^{-1} (H_{ux} \delta x + f_u^T \delta \lambda) \\ (H_{uu} > 0!),\end{aligned}\tag{5}$$

de modo que as condições dinâmicas podem ser colocadas como:

$$\begin{aligned}\delta \ddot{x} &= A(t) \delta x - B(t) \delta \lambda, \\ \delta \dot{\lambda} &= -C(t) \delta x - A^T(t) \delta \lambda, \\ A(t) &= f_x - f_u H_{uu}^{-1} H_{ux}, \\ B(t) &= f_u H_{uu}^{-1} f_u^T, \\ C(t) &= H_{xx} - H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux}.\end{aligned}\tag{6}$$

Devido ao fato de se tratar de um sistema linear (ver Apêndice II: Matriz de Transição) e devido à forma das condições de contorno em $\delta\lambda, \delta\phi$, pode-se concluir que:

$$\begin{aligned}\delta\lambda(t) &= S(t)\delta x(t) + R(t)d\nu, \\ \delta\phi &= R^T(t)\delta x(t) + Q(t)d\nu.\end{aligned}\tag{7}$$

Após alguma manipulação algébrica, resulta:

$$\begin{aligned}S(t_f) &= (\psi_{x_f x_f} + \nu^T \phi_{x_f x_f}), \quad R(t_f) = \phi_{x_f}^T, \quad Q(t_f) = 0, \\ \dot{S}(t) &= -S(t)A(t) - A^T(t)S(t) + S(t)B(t)S(t) - C(t), \\ \dot{R}(t) &= -(A^T(t) - S(t)B(t))R(t), \\ \dot{Q}(t) &= R^T(t)B(t)R(t) \\ (Q(t) &\leq 0!).\end{aligned}\tag{8}$$

Resolvendo para $d\nu$ em função de $\delta\phi$ e $\delta x(t)$, substituindo na expressão de $\delta\lambda(t)$ e, em seguida, substituindo $\delta\lambda(t)$ na expressão de $\delta u(t)$,

$$\begin{aligned}d\nu &= Q^{-1}(t)(\delta\phi - R^T(t)\delta x(t)) \\ (Q(t) &< 0, \quad t_0 \leq t < t_f!), \\ \delta u(t) &= H_{uu}^{-1}((H_{ux} + f_u^T(S - RQ^{-1}R^T))\delta x + f_u^T RQ^{-1}\delta\phi) \\ (S - RQ^{-1}R^T &\text{ finita}, \quad t_0 \leq t < t_f!).\end{aligned}\tag{9}$$

Não é difícil provar que a solução obtida é também a solução que satisfaz as condições necessárias do problema:

Minimizar:

$$\begin{aligned}\delta^2 J &= (\delta x_f^T (\psi_{x_f x_f} + \nu^T \phi_{x_f x_f}) \delta x_f) / 2 \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T : \delta u^T \left[\begin{array}{cc} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt.\end{aligned}\tag{10}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}\delta \ddot{x} &= f_x \delta x + f_u \delta u, \\ \delta x_0 &\text{ dado}, \\ d\phi &= \phi_{x_f} \delta x_f, \\ d\phi &\text{ dado}.\end{aligned}\tag{11}$$

Substituindo esta solução em $\delta^2 J$, adotando a notação $\|v\|_P^2 \triangleq v^T P v$, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & (\delta x_0^T (S - RQ^{-1}R^T)_{t_0} \delta x_0) / 2 + (\delta \phi^T (Q^{-1}R)_{t_0} \delta x_0) / 2 - (\delta \phi^T (Q^{-1})_{t_0} \delta \phi \\ & + (\int_{t_0}^{t_f} \|H_{uu}^{-1} (H_{ux} + f_u^T (S - RQ^{-1}R^T)) \delta x + f_u^T RQ^{-1} \delta \phi + \delta u\|_{H_{uu}}^2 dt) / 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Note-se que para $\delta x_0 = 0, \delta \phi = 0$, o valor de $\delta u(t)$ que minimiza $\delta^2 J$ é identicamente nulo, pois:

$$\delta u = -H_{uu}^{-1} (H_{ux} + f_u^T (S - RQ^{-1}R^T)) \delta x. \quad (13)$$

Como para $\delta x_0 = 0, \delta \phi = 0$, resulta que também $\delta \lambda_0 = 0$, então $\delta x(t) = 0$. Assim, as condições para solução do problema de minimização de $\delta^2 J$, a seguir, são suficientes para que a solução do problema de otimização de J seja minimizante.

$$\begin{aligned} H_{uu} &> 0, \\ Q &< 0, \quad t_0 \leq t < t_f, \\ (S - RQ^{-1}R^T) &\text{ finita}, \quad t_0 \leq t < t_f. \end{aligned} \quad (14)$$

As condições são suficientes porque qualquer outra solução na vizinhança, que satisfaça as condições de contorno, leva a $\delta^2 J > 0$.

2.9 Métodos Numéricos: Introdução

2.9.1 Método Indireto de Perturbação: Matriz de Transição

Seja o problema,

Minimizar:

$$J = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt. \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \\ x(t_0), t_0 &\text{ dados}, \\ \phi(x(t_f), t_f) &= 0, \quad (p \leq n). \end{aligned} \quad (2)$$

Condições Necessárias:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ \dot{\lambda}^T &= -H_x(\lambda, x, u, t), \\ \partial H / \partial u &= 0, \\ x(t_0), t_0 &\text{ dados}, \\ \phi(x(t_f), t_f) &= 0, \\ \lambda^T(t_f) &= \psi_{x_f} + v^T \phi_{x_f}, \\ \psi_{t_f} + v^T \phi_{t_f} + H|_{t_f} &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

A partir destas condições necessárias, portanto na forma de busca indireta, será buscada solução numérica para o problema.

Solução Numérica:

Considerem-se as equações variacionais associadas às condições necessárias, obtidas a partir de expansão em torno de valores nominais de uma primeira iteração ou iteração anterior,

$$\begin{aligned}\delta \ddot{x} &= \bar{f}_x \delta x + \bar{f}_u \delta u, \\ \delta \dot{\lambda} &= -\bar{H}_{xx} \delta x - \bar{f}_x^T \delta \lambda - \bar{H}_{uu} \delta u, \\ \bar{H}_{ux} \delta x + \bar{f}_u^T \delta \lambda + \bar{H}_{uu} \delta u &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Eliminando δu essas equações ficam na forma:

$$\begin{aligned}\delta \ddot{x} &= A(t) \delta x - B(t) \delta \lambda, \\ \delta \dot{\lambda} &= -C(t) \delta x - A^T(t) \delta \lambda, \\ A(t) &= \bar{f}_x - \bar{f}_u \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{ux}, \\ B(t) &= \bar{f}_u \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{f}_u^T, \\ C(t) &= \bar{H}_{xx} - \bar{H}_{xu} \bar{H}_{uu}^{-1} \bar{H}_{ux}.\end{aligned}\tag{5}$$

Usando matriz de transição associada (Apêndice II),

$$[\delta x^T : \delta \lambda^T] = [\delta x_0^T : \delta \lambda_0^T] \Phi(t, t_0).\tag{6}$$

Adotando uma notação compacta para os vínculos de contorno em t_f , colocando-os na forma:

$$V(x(t_f), t_f, \lambda(t_f), v) = 0, \quad (n + p + 1).\tag{7}$$

Para uma perturbação de primeira ordem, em torno de valores nominais, indicados pela sobre barra:

$$V(x(t_f), t_f, \lambda(t_f), v) = \bar{V} + \bar{V}_{x_f} dx_f + \bar{V}_{\lambda_f} d\lambda_f + \bar{V}_{t_f} dt_f + \bar{V}_v dv = \alpha \bar{V}, 0 \leq \alpha < 1, \quad (8)$$

onde α é fator para garantir condições de convergência, com pequenos incrementos que preservem hipótese de perturbação linear e

$$\begin{aligned} dx(t_f) &= \delta x(t_f) + \dot{x}_f dt_f, \\ d\lambda(t_f) &= \delta \lambda(t_f) + \dot{\lambda}_f dt_f, \end{aligned} \quad (9)$$

resultando:

$$(\alpha - 1)\bar{V} = \bar{V}_{x_f} \delta x_f + \bar{V}_{\lambda_f} \delta \lambda_f + (\bar{V}_{t_f} + \bar{V}_{x_f} \bar{f}_f - \bar{V}_{\lambda_f} \bar{H}_{x_f}^T) dt_f + \bar{V}_v dv. \quad (10)$$

Com base nos desenvolvimentos anteriores, pode-se propor o algoritmo de busca da solução a seguir.

Algoritmo de Busca:

- (i) Para iniciar o processo iterativo de busca da solução numérica, escolhem-se, ou melhor, arbitram-se: $\bar{\lambda}_0, \bar{v}, \bar{t}_f$.
- (ii) Com os valores iniciais λ_0, x_0 , integram-se as equações diferenciais em x, λ , das condições necessárias (Eqs. (3)), até \bar{t}_f , usando-se $H_u = 0$ para o cálculo de $u(t)$. Se ocorrer que os vínculos de contorno são satisfeitos a menos de um erro ε dentro da precisão requerida (“zero numérico”), a convergência foi atingida, isto é, se:

$$|\bar{V}| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Em não sendo verificada esta condição de convergência, ir para o passo seguinte.

- (iii) A integração do passo anterior é feita em paralelo com a geração das n últimas colunas da matriz de transição, integrando as equações variacionais (Eqs. (5)) com condições iniciais identicamente nulas para $\delta x(t_0)$ e os n versores ortonormais para $\delta \lambda(t_0)$, resultando:

$$\begin{bmatrix} \delta x_f \\ \delta \lambda_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{x\lambda} \\ \Phi^\lambda \end{bmatrix} \delta \lambda_0. \quad (12)$$

- (iv) Substituindo os valores de $\delta x_f, \delta \lambda_f$ anteriores na expressão (Eq. (10)), que impõe ΔV decrescente, resulta:

$$-\beta \bar{V} = [(\bar{V}_{x_f} \Phi^{x\lambda} + \bar{V}_{\lambda_f} \Phi^\lambda) : (\bar{V}_{t_f} + \bar{V}_{x_f} \bar{f}_f - \bar{V}_{\lambda_f} \bar{H}_{x_f}^T) : \bar{V}_v] [\delta^T \lambda_0 : dt_f : d^T v]^T, \quad (13)$$

onde $\beta = 1 - \alpha$, a ajustar. Considerando a notação compacta para as correspondentes derivadas em relação a λ_0, t_f :

$$(\bar{V}_{x_f} \Phi^{x\lambda} + \bar{V}_{\lambda_f} \Phi^\lambda) = \bar{V}^{\lambda_0}, \quad (\bar{V}_{t_f} + \bar{V}_{x_f} \bar{f}_f - \bar{V}_{\lambda_f} \bar{H}_{x_f}^T) = \bar{V}^{t_f}, \quad (14)$$

e que há condições de existência de solução:

$$[\delta^T \lambda_0 : dt_f : d^T v]^T = -\beta [\bar{V}^{\lambda_0} : \bar{V}^{t_f} : \bar{V}_v]^{-1} \bar{V}. \quad (15)$$

(v) Com as redefinições a seguir reinicia-se o processo voltando para (ii).

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_0 &\leftarrow \bar{\lambda}_0 + \delta \lambda_0, \\ \bar{t}_f &\leftarrow \bar{t}_f + dt_f, \\ \bar{v} &\leftarrow \bar{v} + dv. \end{aligned} \quad (16)$$

2.9.2 Método Direto do Tipo Gradiente de Primeira Ordem

O método a seguir é de busca direta da solução, uma vez que esta busca é feita a partir do problema formulado, perturbando o índice de desempenho e os vínculos e impondo critério de busca para determinação de incrementos na direção da solução. No caso do método tratado o critério é o de busca na direção do gradiente.

Seja o problema das Eqs. (1), (2) recolocado a seguir.

Minimizar:

$$J = \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt.$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \\ x(t_0), t_0 &\text{ dados}, \\ \phi(x(t_f), t_f) &= 0. \end{aligned}$$

Solução Numérica:

Escolhidos ou arbitrados $\bar{t}_f, \bar{u}(t), t_0 \leq t \leq \bar{t}_f$, tem-se em consequência:

$$\bar{J}[\bar{u}(t), \bar{t}_f], \bar{x}(t), \bar{\phi}(\bar{x}(\bar{t}_f), \bar{t}_f). \quad (17)$$

O problema de busca direta que se coloca é o de se perturbar estes “valores-barra”, de modo que estas perturbações, $\delta u(t), dt_f$, levem a valores mais próximos da solução.

$$\begin{aligned} \delta J &= \bar{\psi}_{x_f} \delta x_f + (\bar{\psi}_{x_f} \dot{\bar{x}}_f + \bar{\psi}_{t_f} + \bar{L}_f) dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} (\bar{L}_x \delta x + \bar{L}_u \delta u) dt, \\ \delta \dot{x} &= \bar{f}_x \delta x + \bar{f}_u \delta u, \\ d\phi &= \bar{\phi}_{x_f} \delta x_f + (\bar{\phi}_{x_f} \dot{\bar{x}}_f + \bar{\phi}_{t_f}) dt_f. \end{aligned} \quad (18)$$

Usando multiplicadores de Lagrange, γ , para tratar a dependência de $\delta x(t)$ em $\delta u(t)$, e após integração por partes do termo $\gamma^T \delta \dot{x}$, tem-se:

$$\delta J = (\bar{\psi}_{x_f} - \gamma_f^T) \delta x_f + (\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} ((\dot{\gamma}^T + \gamma^T \bar{f}_x + \bar{L}_x) \delta x + (\bar{L}_u + \gamma^T \bar{f}_u) \delta u) dt. \quad (19)$$

Como $\gamma(t)$ é arbitrário, pode-se escolhê-lo de modo que:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^T &= -(\gamma^T \bar{f}_x + \bar{L}_x), \\ \gamma_f^T &= \bar{\psi}_{x_f}. \end{aligned} \quad (20)$$

Para esta escolha de $\gamma(t)$, o incremento em J fica:

$$\delta J = (\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} (\bar{L}_u + \gamma^T \bar{f}_u) \delta u dt. \quad (21)$$

Para tratar a dependência de $\delta x(t_f)$ em $\delta u(t)$ pode-se usar a matriz de transição associada às equações variacionais (Eqs. (18)):

$$\begin{aligned} \delta x(t_f) &= \int_{t_0}^{\bar{t}_f} (\Phi(t_f, \tau) \bar{f}_u) \delta u d\tau, \\ \dot{\Phi}(t_f, \tau) &= -\Phi(t_f, \tau) \bar{f}_x, \quad \Phi(t_f, t_f) = I_n. \end{aligned} \quad (22)$$

Multiplicando-se ambas as equações à esquerda por $\bar{\phi}_{x_f}$ e definindo $R(t_f, \tau) \triangleq \bar{\phi}_{x_f} \Phi(t_f, \tau)$, tem-se:

$$\dot{R}(t_f, \tau) = -R(t_f, \tau) \bar{f}_x, \quad R(t_f, t_f) = \bar{\phi}_{x_f}.$$

Com esta $R(t_f, \tau)$ pode-se expressar $d\phi$ como:

$$d\phi = (\bar{\phi}_{x_f} \dot{\bar{x}}_f + \bar{\phi}_{t_f}) dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} R(t_f, \tau) \bar{f}_u \delta u d\tau, \quad (23)$$

onde $d\phi$ é escolhido e fixo em cada iteração.

O problema de busca, em uma iteração típica, pode então ser colocado como a seguir.

Minimizar:

$$\delta J' = \delta J + (b dt_f^2) / 2 + \left(\int_{t_0}^{\bar{t}_f} \delta u^T W \delta u dt \right) / 2. \quad (24)$$

Sujeito a:

$$\dot{\bar{\phi}}_f dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} R(t_f, \tau) \bar{f}_u \delta u d\tau - d\phi = 0. \quad (25)$$

Os termos quadráticos, $b > 0$, $W > 0$, são para garantir “pequenas perturbações”. Usando multiplicadores de Lagrange, ν :

$$\begin{aligned} \delta J' = & (\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} (\bar{L}_u + \gamma^T \bar{f}_u) \delta u dt + (b dt_f^2) / 2 + \left(\int_{t_0}^{\bar{t}_f} \delta u^T W \delta u dt \right) / 2 \\ & + \nu^T \left(\dot{\bar{\phi}}_f dt_f + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} R(t_f, \tau) \bar{f}_u \delta u d\tau - d\phi \right). \end{aligned} \quad (26)$$

A condição necessária para minimizar em relação a $\delta x(t_f)$ e $\delta u(t)$, usando-se a arbitrariedade na escolha de ν :

$$\begin{aligned} b dt_f + \nu^T \dot{\bar{\phi}}_f + (\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) &= 0, \\ \delta u^T W + \bar{L}_u + \gamma^T \bar{f}_u + \nu^T R(t_f, \tau) \bar{f}_u &= 0 \quad \therefore \\ dt_f &= -(\nu^T \dot{\bar{\phi}}_f + \bar{\psi}_f + \bar{L}_f) / b, \\ \delta u(\tau) &= -W^{-1} (\bar{L}_u + \gamma^T \bar{f}_u + \nu^T R(t_f, \tau) \bar{f}_u)^T. \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo em $d\phi$, leva a:

$$\begin{aligned} d\phi &= -\dot{\bar{\phi}}_f (\nu^T \dot{\bar{\phi}}_f + \bar{\psi}_f + \bar{L}_f) / b - I_{\phi J} - I_{\phi \phi} \nu, \\ I_{\phi \phi} &= \int_{t_0}^{\bar{t}_f} R(t_f, \tau) \bar{f}_u W^{-1} (\bar{L}_u(\tau) + \gamma^T(\tau) \bar{f}_u(\tau))^T d\tau, \\ I_{\phi J} &= \int_{t_0}^{\bar{t}_f} R(t_f, \tau) \bar{f}_u(\tau) W^{-1} \bar{f}_u^T(\tau) R^T(t_f, \tau) d\tau, \\ \nu &= -(I_{\phi \phi} + (\dot{\bar{\phi}}_f \dot{\bar{\phi}}_f^T) / b)^{-1} (d\phi + I_{\phi J} + (\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) \dot{\bar{\phi}}_f / b). \end{aligned} \quad (28)$$

A variação correspondente em J para as perturbações calculadas é:

$$\begin{aligned} \delta J &= -(\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) (\nu^T \dot{\bar{\phi}}_f + \bar{\psi}_f + \bar{L}_f) / b - I_{JJ} - I_{J\phi} \nu, \\ I_{JJ} &= \int_{t_0}^{\bar{t}_f} (\bar{L}_u(\tau) + \gamma^T(\tau) \bar{f}_u(\tau)) W^{-1} (\bar{L}_u(\tau) + \gamma^T(\tau) \bar{f}_u(\tau))^T d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Com os resultados obtidos é possível montar-se o algoritmo que segue.

Algoritmo de Busca:

(i) Estime, se for o primeiro passo, ou então redefina, nos passos seguintes, as variáveis $\bar{u}(t), \bar{t}_f$.

(ii) Integre as equações em $\dot{x}(t)$ até \bar{t}_f , com $\bar{u}(t)$ e armazene:

$$\bar{x}(t), \bar{u}(t), \phi(\bar{x}(\bar{t}_f), \bar{t}_f) = \bar{\phi}, (\bar{\psi}_f + \bar{L}_f), \bar{\phi}_f.$$

(iii) Determine por integração de \bar{t}_f para t_0 :

$$\gamma(t), R(t_f, \tau).$$

Em paralelo, calcule as integrais:

$$I_{\phi\phi}, I_{JJ}, I_{J\phi} = I_{\phi J}^T.$$

(iv) Escolha:

$$d\phi = -\alpha \bar{\phi}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

e calcule v .

(v) Calcule $\delta u(t), dt_f$ e volte para (i), redefinindo os valores de $\bar{u}(t)$ e \bar{t}_f , isto é:

$$\bar{u}(t) \leftarrow \bar{u}(t) + \delta u(t),$$

$$\bar{t}_f \leftarrow \bar{t}_f + dt_f.$$

Repita os passos de (i) a (v) até que se tenha com a precisão desejada a satisfação de:

$$\phi(\bar{x}(\bar{t}_f), \bar{t}_f) = \bar{\phi} \rightarrow 0,$$

$$(\bar{\psi}_f + \bar{L}_f) + v^T \bar{\phi}_f \rightarrow 0,$$

$$\delta J \rightarrow 0.$$

Bibliografia e Referências

- Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley, New York.
- Ceballos, D.C. (1979), *Aproximações Subótimas para o Controle de Problemas Dinâmicos de Otimização*. Tese de mestrado, INPE, 1979.
- Ceballos, D.C., Rios Neto, A. (1980). Um Procedimento de Busca Direta, Utilizando Programação Linear para Gerar Soluções Numéricas Subótimas em Problemas de Controle; *Anais do 3o. Congresso Brasileiro de Automática*, Rio de Janeiro.
- Ceballos, D.C., Rios Neto, A. (1981). Linear Programming and Suboptimal Solutions of Dynamical Systems Control Problems; *Proceedings of an International Symposium in Spacecraft Flight Dynamics*, organizado pela Agência Espacial Européia, Darmstadt, Germany (ESA SP-160-ISSN 039-6566; INPE-2076-RPE/311).
- Citron, S.J. (1969). *Elements of Optimal Control*; Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Prado A.F.B.A. e Rios Neto, A. (1994). Suboptimal and Hybrid Numerical Solution Schemes for Orbit Transfer Maneuvers. *SBA Controle e Automação*, Vol. 4, No. 2, pp. 82-88.
- Fleury, A.T. (1978). *Otimização da Distribuição de Massa e da Frequência Fundamental de uma Viga em Balanço*. Tese de mestrado, EPUSP, 1978.
- Freitas Pinto, R.L.U. de (1991). *Dedução de Condições Necessárias para a Solução de Problemas de Controle Ótimo com Dinâmica Fracionada e Restrições Não-Diferenciais*. Tese de Doutorado, INPE, São José dos Campos, SP.
- Freitas Pinto, R.L.U. de, e Rios Neto, A. (1993). Condições Necessárias para a Solução de Problemas de Controle Ótimo com Restrições de Contorno Múltiplo e Descontinuidades de Estado. *XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Brasília, DF.
- Gamarra Rosado, V.O (1988). *Otimização de Manobras de Satélites Estabilizados por "Spin", Utilizando Bobinas Magnéticas*. Dissertação de Mestrado, INPE, São José dos Campos, SP.
- Gamarra Rosado, V.O e Rios Neto, A. (1992). Time-Optimal Geomagnetic Attitude Maneuvers of an Axisymmetric Spinning Satellite; *Acta Astronautica*, vol. 26, nº 11, pp. 773-777.
- Hartl, R.F, Sethi, S.P., and Vickson, R.G. (1995). A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints; *SIAM REVIEW*, 37(2), pp. 181-218.
- Lourenção P.T.M. (1988). *Otimização do Posicionamento de Sensores e Atuadores Visando Obtenção de Modelos Reduzidos para a Síntese de Reguladores Ótimos em Controle de Estruturas Flexíveis*. Tese de Doutorado, INPE, São José dos Campos, SP.
- Lourenção P.T.M. e Rios Neto (1989). Optimization fo Actuators/Sensors Placement and Derivation fo Reduced Order Models for the Optimal Control of Flexible Structures;

Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Stowe, Vermont, USA, Paper AAS 89.441.

Madeira, F. (1996). *Guiagem e Controle Não-Linear Sub-Ótimo de Veículos Lançadores de Satélites em Malha Fechada e em Tempo Quase Real*. Tese de doutorado, ITA.

Madeira, F., Rios Neto, A. (1996). Stochastic Gradient Projection Method for Satellite Launch Vehicle Trajectory Optimization. *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática*, IPT-USP, São Paulo, SP, pp 221-226.

Madeira, F., Rios Neto, A. (2000). Guidance and Control of a Launch Vehicle Using a Stochastic Gradient Projection Method. *Automática*, 36, pp 427–438.

Oliveria, L.R. e Rios Neto, A. (1976). Operação Ótima de um Sistema de Silos; *I Congresso Brasileiro de Automática*; São Paulo, SP.

Rios Neto, A., Ceballos, D.C. (1979). Approximation by Polynomial Arcs to Generate Suboptimal Numerical Solutions in Control Systems; *V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*; Campinas, São Paulo.

Rios Neto, A., Fleury, A.T. (1979). First Mode Frequency and Mass Distribution Optimization of Satellite Flexible Appendages; in *Natural and Artificial Satellites Motion*, edited by Paul E. Nacozy and Sylvio Ferraz Mello; University of Texas Press, Austin, Texas, USA.

Rios Neto, A., Fleury, A.T. (1977). Otimização da Frequência Fundamental e da Distribuição de Massa de uma Viga em Balanço; *Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*; Florianópolis, Santa Catarina.

Rios Neto, A., Madeira, F. (1997). Stochastic Gradient Projection Method Applied to an Earth Mars Orbit Transfer Problem; *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica-COBEM* (em CD ROM), Bauru, SP, código COB211.

Sage, A., P. (1977). *Optimum Systems Control*. Prentice Hall Co.

Smania C., M. (1987). *Otimização de Trajetórias de Veículos Lançadores de Satélite a Propelente Sólido*. Tese de mestrado, ITA, 1987.

Smania, A.C.M., Rios Neto, A. (1988). Otimização de Trajetórias de Veículo Lançadores de Satélites; *SBA: Controle e Automação*, Vol. 2, No. 2, pp. 121 - 125.

Capítulo 3

Programação Dinâmica: Introdução

3.1 Princípio da Otimalidade

O princípio da otimalidade da Programação Dinâmica estabelece que se $x^*(t)$ é a solução ótima a partir de $t_0, x(t_0)$, associada ao controle ótimo $u^*(t)$, então, para o mesmo problema, com a diferença de que as condições de partida são, em $t_0 \leq \tau \leq t_f$, $x(\tau) = x^*(\tau)$, a solução ótima para $\tau \leq t \leq t_f$, é também $x^*(t)$, em correspondência com $u^*(t)$ (Fig. 3.1). Para melhor entendimento, considere-se o problema a seguir.

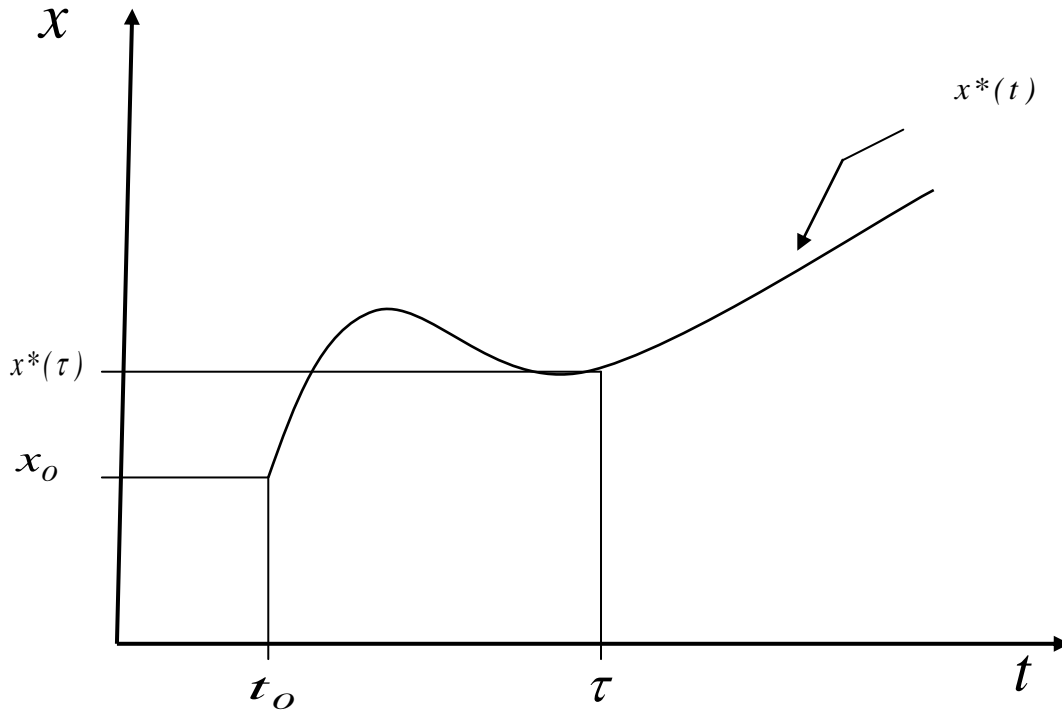


Figura 3.1: Ilustração do Princípio da Otimalidade

Minimizar:

$$J = \Psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt. \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
 x(t_0) &= x_0, \quad t_0, \quad t_f \text{ dados}, \\
 \dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\
 u(t) &\in U, \quad x(t) \in X, \\
 \phi(x(t_f)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

A trajetória solução é $x^*(t)$ para $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, à qual está associada:

$$\begin{aligned}
 V(x(t_0), t_0) &\triangleq J[u^*(t), x(t_0), t_0] = \Psi(x^*(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x^*(t), u^*(t), t) dt, \\
 x^*(t_0) &= x(t_0),
 \end{aligned} \tag{3}$$

em que $V(x(t_0), t_0)$ é a função retorno para t_0 e $x(t_0)$.

Para este problema o princípio da otimalidade estabelece que:

$$V(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^{\tau} L(x^*(t), u^*(t), t) dt + V(x^*(\tau), \tau). \tag{4}$$

3.2 Relação Fundamental da Programação Dinâmica

Consideremos o problema formulado na seção anterior Eqs. 3.1(1) e 3.1(2). Se pelo princípio da otimalidade é verdade que, conforme Eq. 3.1(4):

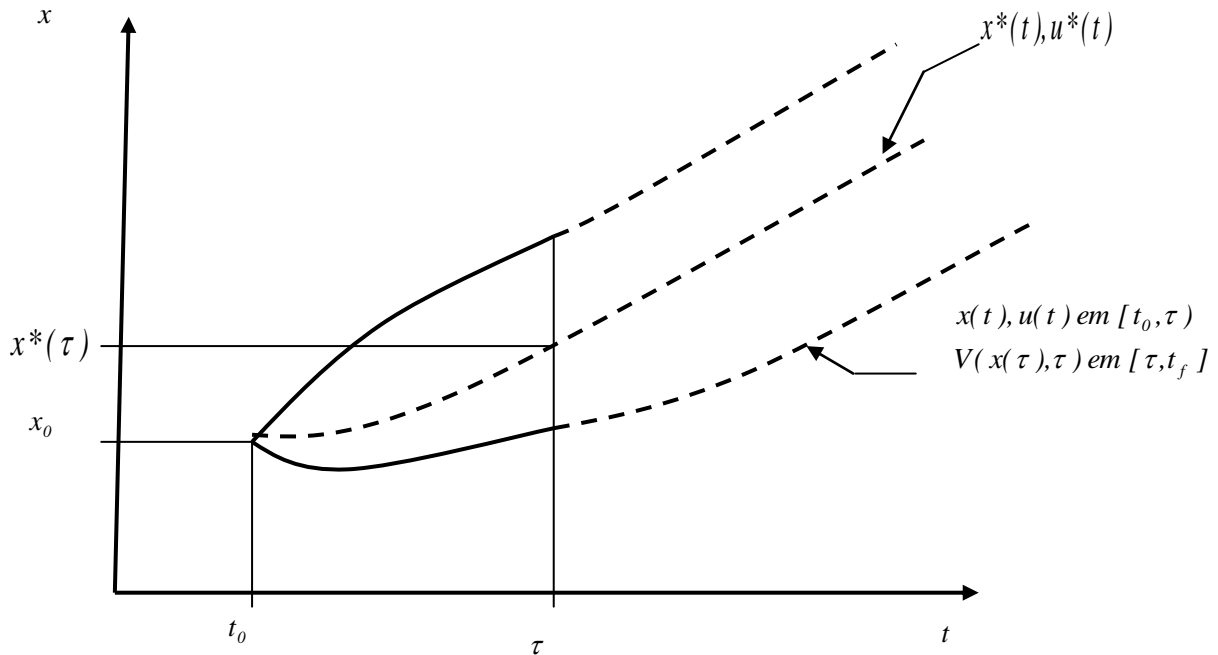


Figura 3.2: Ilustração da Relação Fundamental de Programação Dinâmica

$$V(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^{\tau} L(x^*(t), u^*(t), t) dt + V(x^*(\tau), \tau),$$

Decorre então a relação fundamental da Programação Dinâmica:

$$V(x(t_0), t_0) = \underset{\{u(\xi): t_0 \leq \xi \leq \tau\}}{\text{Min}} \left(\int_{t_0}^{\tau} L(x(t), u(t), t) dt + V(x(\tau), \tau) \right). \quad (1)$$

A validade desta relação fica clara examinando-se a Figura (3.2).

Uma vez que se pode analogamente definir $V(x(t), t)$, é, portanto, também válida a relação:

$$V(x(t), t) = \underset{\{u(\xi): t_0 \leq \xi \leq \tau\}}{\text{Min}} \left(\int_t^{\tau} L(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi + V(x(\tau), \tau) \right). \quad (2)$$

Para o problema de controle ótimo da seção anterior (Eqs. 3.1(1) e 3.1(2)), se for tomado $\tau = t + \Delta t$, resulta:

$$V(x(t), t) = \underset{u(t) \in U_t}{\text{Min}} (L(x(t), u(t), t) \Delta t + V(f(x(t), u(t), t) \Delta t, t + \Delta t)), \quad (3)$$

onde foi considerado o vínculo dinâmico da Eq.3.1(2), de modo que:

$$x(t + \Delta t) = f(x(t), u(t), t) \Delta t. \quad (4)$$

Desenvolvendo em série de Taylor e retendo termos até primeira ordem,

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &= \underset{u(t) \in U_t}{\text{Min}} (L(x(t), u(t), t) \Delta t + V(x(t), t) \\ &+ (\partial V(x(t), t) / \partial x) f(x(t), u(t), t) \Delta t + (\partial V(x(t), t) / \partial t) \Delta t). \end{aligned} \quad (5)$$

Passando para fora da operação de minimização os termos que não dependem de $u(t)$, procedendo aos cancelamentos de $V(x(t), t)$ e Δt , resulta:

$$\partial V(x(t), t) / \partial t + \underset{u(t) \in U_t}{\text{Min}} (L(x(t), u(t), t) + (\partial V(x(t), t) / \partial x) f(x(t), u(t), t)) = 0. \quad (6)$$

Para o caso contínuo, esta é a equação básica da Programação Dinâmica, conhecida como Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. A condição de contorno, associada, da Eq. (6), conclue-se ser:

$$V(x(t_f), t_f) = \psi(x(t_f)), \quad x(t_f) \text{ em } \phi(x(t_f)) = 0. \quad (7)$$

3.3 Aplicação a Sistemas Lineares Quadráticos

Seja o problema linear quadrático, já considerado anteriormente (seção 2.2) e tratado pelo com abordagem varacional, pelo Princípio de Mínimo de Pontrygin, recolocado a seguir.

Minimizar:

$$J = 1/2 \{x_f^T S_f x_f + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt\}, \quad S_f \geq 0, Q \geq 0, R > 0. \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ u(t) &\in U_t, \\ x(t_0) &= x_0, t_0, t_f \text{ dados.} \end{aligned} \quad (2)$$

Solução:

Neste caso, a aplicação da Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman ou equação básica da Programação Dinâmica leva as condições a seguir.

$$\begin{aligned} V_t(x, t) + \underset{u(t) \in U_T}{\text{Min.}} (x^T Q x / 2 + u^T R u / 2 + V_x(x, t)(Ax + Bu)) &= 0, \\ V(x(t_f), t_f) &= (x_f^T S_f x_f) / 2. \end{aligned} \quad (3)$$

A condição de contorno indica que:

$$V(x, t) = (x^T P(t)x) / 2. \quad (4)$$

De volta na Eq. (3), resulta:

$$(x^T \dot{P}(t)x) / 2 + \underset{u(t) \in U_T}{\text{Min.}} (x^T Q x + u^T R u + x^T P(t)(Ax + Bu)) = 0. \quad (5)$$

Considerando que a minimização em relação ao controle é dada pela condição:

$$\begin{aligned} \partial(x^T Q x + u^T R u + x^T P(t)(Ax + Bu)) / \partial u &= 0 \quad \therefore \\ u &= -R^{-1} B^T P x. \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo de volta na Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, após alguma manipulação algébrica, resulta:

$$x^T (\dot{P}(t) + Q + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t))x / 2 = 0.$$

Portanto, necessariamente:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + Q + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) &= 0, \\ P(t_f) &= S_f. \end{aligned} \tag{7}$$

conforme já se tinha deduzido na seção 2.2.

Bibliografia

Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley, New York.

Citron, S.J. (1969). *Elements of Optimal Control*; Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Bellman, R. and Dreyfus, S. (1962). *Applied Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Sage, A., P. (1977). *Optimum Systems Control*. Prentice Hall Co.

Capítulo 4

Elementos de Probabilidade e Variáveis Aleatórias

4.1 Probabilidade: Teoria Básica

Definição 4.1.1: *Fenômeno Aleatório (experimento)* é aquele em que os resultados quanto a quaisquer formas de ocorrência (*eventos*) não podem ser previstos com determinismo (“todo fato tem uma causa e, nas mesmas condições, as mesmas causas produzem os mesmos fatos, o que implica a existência de leis específicas que regem fatos e causas”), pois são governados pelo acaso.

Exemplos 4.1.1: (i) Lançamento de um dado. (ii) Chamada telefônica ocorrendo aleatoriamente em $[0, T]$.

Para medir a possibilidade de uma dada forma de ocorrência, isto é, de um evento, cria-se o conceito de probabilidade, que, a grosso modo, é uma função que a cada evento associa um valor numérico.

Há pelo menos três maneiras de se aferir valores numéricos para possibilidades, isto é, probabilidades de eventos:

(i) Por observação direta do fenômeno e cálculo da chamada *frequência relativa* de ocorrência de um dado evento. Assim, para o evento A , sendo N_A o número de ocorrências de A , nas n ocorrências observadas do fenômeno, com $n \rightarrow \infty$, calcula-se a probabilidade $P(A)$ de A como:

$$P(A) = N_A / n. \quad (1)$$

Na verdade, nem sempre se consegue observar diretamente o fenômeno e os respectivos eventos, e o que se tem são observações indiretas, a partir das quais se busca estimar eventos e probabilidades, como se verá mais adiante quando se desenvolverão os chamados métodos de estimação.

(ii) Pelo método clássico de *contagem dos eventos igualmente possíveis*. Assim, para o lançamento de um dado, se A_i é o evento de ocorrer a face i , $i=1,2,\dots,6$, $P(A_i)=1/6$. No caso da chamada telefônica aleatória em $[0, T]$, a probabilidade de ocorrência dentro de um subintervalo $[t_1, t_2]$:

$$P([t_1, t_2]) = (t_2 - t_1) / T. \quad (2)$$

(iii) Estimativa a priori, com base no conhecimento subjetivo do fenômeno, usada, em geral, para disparar, isto é, como valores iniciais de métodos de estimação.

Para se sistematizar e dar rigor ao conceito de probabilidade, procede-se a uma modelagem matemática, como a seguir.

Definição 4.1.2: *Espaço Amostral* ou *Espaço de Probabilidades* é um conjunto Ω que, através de seus elementos, w , representa as formas elementares de ocorrência ou eventos elementares do fenômeno aleatório.

Nos exemplos considerados, os espaços amostrais podem ser como a seguir.

(i) Lançamento de um dado: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

(ii) Chamada aleatória em $[0, T]$: $\Omega = \{w : 0 \leq w \leq T\}$.

Definição 4.1.3: Para as formas de ocorrência de um fenômeno aleatório, ou seja, para seus eventos, representados por subconjuntos de Ω , define-se a *função de probabilidade* como a função que satisfaz às propriedades:

(i) A probabilidade de ocorrer pelo menos um evento de Ω , isto é, $P(\Omega)$, é certa, isto é,

$$P(\Omega) = 1. \quad (3)$$

(ii) Para todo evento, a função de probabilidade é não nula, isto é,

$$A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0. \quad (3a)$$

(iii) Se $P(\cdot)$ for definida nos A_i, A_j , tais que:

$$A_i \subset \Omega, A_j \subset \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

então,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots \quad (4)$$

Definição 4.1.4: A classe de eventos em que $P(\cdot)$ é definida, através de subconjuntos de Ω , deve constituir uma sigma-álgebra de Borel, B , isto é:

$$\begin{aligned} \Omega &\in B, \\ A \in B &\Rightarrow (\Omega - A) \in B \quad \therefore \emptyset \in B, \\ A_1, A_2, \dots, A_n, \dots &\in B \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_i \in B, \quad \bigcap_1^\infty A_i \in B. \end{aligned} \quad (5)$$

A imposição de que a classe de eventos deve satisfazer a condição de constituir uma sigma-álgebra de Borel garante que ao se operar com união e intersecção de eventos (subconjuntos de Ω) não se tenha a surpresa de acontecer de se cair fora de Ω . Embora nas situações de interesse prático isto não aconteça, pode se demonstrar que há casos patológicos em que, se não for tomado o cuidado, pode acontecer.

Definição 4.1.5: Assim, finalmente, define-se a função de probabilidade com o devido rigor, como sendo:

$$\begin{aligned}
P : \mathcal{B} &\rightarrow [0,1] \quad t.q. \\
(i) \quad P(\Omega) &= 1, \\
(ii) \quad A \in \mathcal{B}, \quad P(A) &\geq 0, \\
(iii) \quad \text{se } A_i \cap A_j &= \emptyset, i \neq j, \quad A_i, A_j \in \mathcal{B}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \dots, \text{então} \\
P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).
\end{aligned} \tag{6}$$

Assim, em resumo, tendo-se um *fenômeno aleatório* representado por um *modelo físico*, procede-se a uma *modelagem* para se ter um correspondente *espaço de probabilidades*, que constitui o *modelo matemático* com que se consegue lidar formalmente.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Fenômeno Aleatório} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (i) \Omega \\ (ii) (\Omega, \mathcal{B}) \\ (iii) (\Omega, \mathcal{B}, P) \end{array} \right\} & \rightarrow & \text{Espaço de Probabilidade : } (\Omega, \mathcal{B}, P) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\text{Modelo Físico} & & \text{Modelagem} & & \text{Modelo Matemático}
\end{array}$$

Como se ilustrará nos exemplos a seguir, o espaço de probabilidades não é necessariamente único para um dado fenômeno aleatório.

Exemplo 4.1.1: Determinação do espaço de probabilidade no caso do fenômeno aleatório correspondente ao lançamento de um dado não viciado:

- (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, \mathcal{B} sigma-álgebra gerada por todos os subconjuntos de Ω e $P(\{i\}) = 1/6, i = 1, 2, \dots, 6$; ou,
- (ii) por exemplo, $\Omega = \mathbb{R}^1 = \{\text{números reais}\}$, \mathcal{B} sigma-álgebra gerada por intervalos do tipo $\{w \leq x : x \text{ real}\}$, isto é, pelos intervalos eventos A que resultam das intersecções e uniões de intervalos deste tipo, $\{w \leq x : x \text{ real}\}$, $P(A) = (\text{número de pontos de } \{1, 2, \dots, 6\} \text{ em } A) / 6$.

Exemplo 4.1.2: Determinação do espaço de probabilidade no caso do fenômeno aleatório orrespondente a chamada aleatória em $[0, T]$:

- (i) $\Omega = \{w : 0 \leq w \leq T\}$, \mathcal{B} sigma álgebra gerada por $\{[w_1, w_2] : 0 \leq w_1 \leq w_2 \leq T\}$, $P([w_1, w_2]) = (w_2 - w_1) / T$; ou,
- (ii) por exemplo, $\Omega = \mathbb{R}^1 = \{\text{números reais}\}$, \mathcal{B} sigma álgebra gerada por intervalos do tipo $\{w \leq x : x \text{ real}\}$, isto é, pelos intervalos eventos A que resultam das intersecções e uniões de intervalos deste tipo, $\{w \leq x : x \text{ real}\}$, $P(A) = c_{12} / T$, c_{12} o comprimento do intervalo correspondente a $A \cap \{w : 0 \leq w \leq T\}$.

Propriedades 4.1.1: Para eventos de um espaço de probabilidades (Ω, \mathcal{B}, P) , demonstra-se que:

$$\begin{aligned}
(i) \quad P(\emptyset) &= 0, \\
(ii) \quad P(A) &= 1 - P(A - \Omega), \\
(iii) \quad P(A_i \cup A_j) &= P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j), \\
(iv) \quad \text{Se } A_i \subset A_j \text{ então } P(A_j) &= P(A_i) + P(A_j \cap (\Omega - A_i)) \geq P(A_i).
\end{aligned} \tag{7}$$

4.2 Variáveis Aleatórias: Conceituação e Propriedades Básicas

A necessidade de se trabalhar com números para quantificar as formas de ocorrência de fenômenos aleatórios é que leva à definição de *variáveis aleatórias*, na verdade funções aleatórias. Prosseguindo na modelagem matemática de fenômenos aleatórios, em (Ω, \mathcal{B}, P) se definem mapeamentos de formas de ocorrência elementares (eventos elementares), $w \in \Omega$, na reta real, R^I , conforme ilustrado na Fig. 4.1.

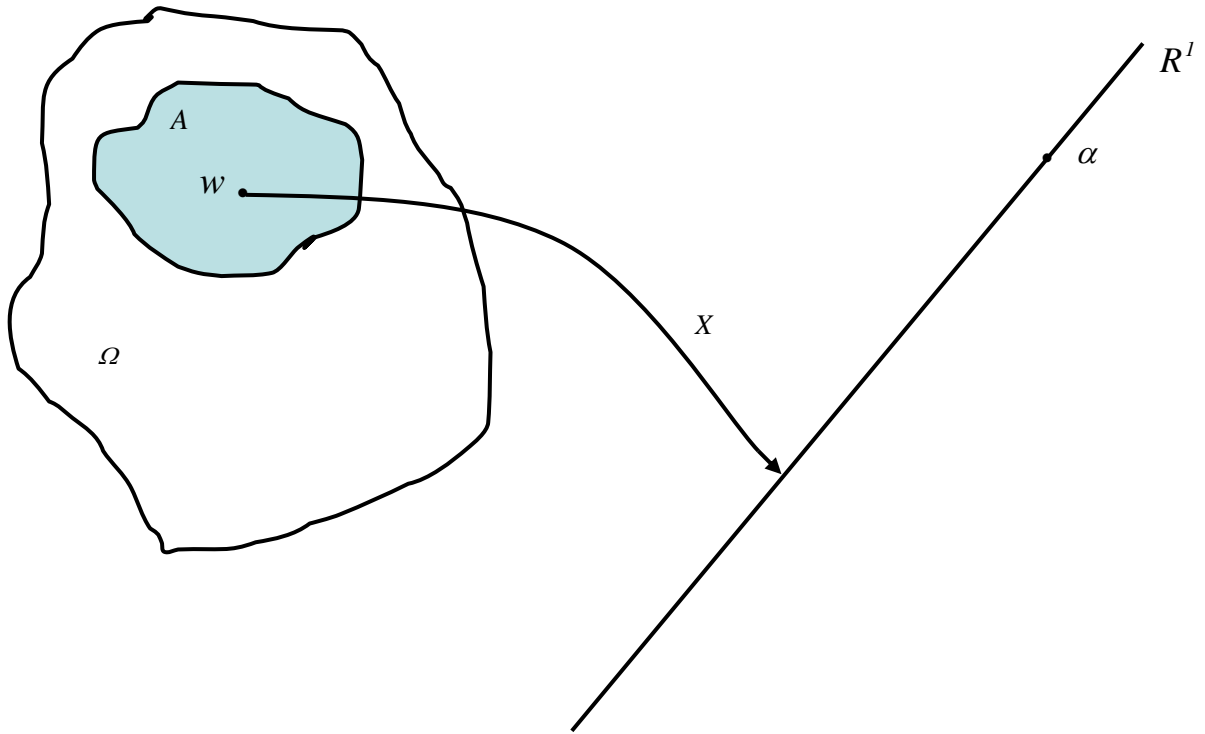


Figura 4.1: Definição de Variável Aleatória

Para garantir condição de se calcular probabilidades de eventos mapeados na reta, há que se garantir que o mapeamento seja através de funções que sejam mensuráveis, conforme definição a seguir.

Definição 4.2.1: Dado (Ω, \mathcal{B}, P) e definida a função real e finita:

$$X(.): \Omega \rightarrow R^I, \quad (1)$$

$X(.)$ é uma variável aleatória se e somente se:

$$\{w : X(w) \leq \alpha, \alpha \in R^I\} \in \mathcal{B}. \quad (2)$$

Em termos práticos, note-se que, via de regra, funções contínuas satisfazem esta condição. Note-se, também, que muitas vezes ocorre que as formas de ocorrências já são expressas numericamente, como no caso da chamada telefônica em um dado intervalo; nestes casos o natural é que se defina a correspondente variável aleatória como sendo a função identidade.

Exemplo 4.2.1: Seja o fenômeno aleatório correspondente ao lançamento de uma moeda, com faces cara e coroa, em que:

$$\Omega = \{Ca, Co\}, \quad B = \{\phi, \{Ca\}, \{Co\}, \Omega\}, \quad P(Ca) = p > 0, \quad P(Co) = q > 0, \quad p + q = 1.$$

Seja

$$X(.): \Omega \rightarrow R^1 \quad t.q. \quad X(Ca) = 1, \quad X(Co) = 0.$$

Decorre, em consequência, o cálculo de probabilidades na reta real através da variável aleatória, que induz a definição de função de probabilidade, $P_X(.)$, cujos argumentos são valores da correspondente variável aleatória:

$$P(\{Ca\}) = P(\{w : X(w) = 1\}) = P_X(X(w) = 1) = p,$$

$$P(\{Co\}) = P(\{w : X(w) = 0\}) = P_X(X(w) = 0) = q.$$

$$P(\{\phi\}) = P(\{w : X(w) < 0\} \cup \{w : 0 < X(w) < 1\} \cup \{w : X(w) > 1\}) \quad \therefore$$

$$P_X(\{X(w) = x : x < 0\}) = 0, \quad P_X(\{X(w) = x : 0 < x < 1\}) = 0,$$

$$P_X(\{X(w) = x : x > 1\}) = 0.$$

$$P(\Omega) = P(\{w : X(w) \leq 1\}) = P_X(\{X(w) = x : x \leq 1\}) = 1.$$

Para uma dada variável aleatória, pode-se em consequência calcular a distribuição de probabilidades na reta, através da chamada *Função de Distribuição*.

Definição 4.2.2: Função de Distribuição de $X(.): \Omega \rightarrow R^1$ é a função definida como:

$$F_X(x) \triangleq P(\{w : X(w) \leq x, x \in R^1\}). \quad (3)$$

Propriedades 4.2.1: A Função de Distribuição de $X(.): \Omega \rightarrow R^1$, pode ser vista como a “massa de probabilidades” que fica à esquerda de um dado ponto da “barra” reta real, que no limite tem “massa de probabilidades” igual a 1, e sendo assim, decorre:

(i) $F_X(x)$ é monotônica não decrescente,

$$F_X(x_2) \leq F_X(x_1), \quad x_1 < x_2, \quad (4)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0. \quad (5)$$

$$P(\{w : X(w) \leq x\}) = F_X(x) - F_X(x^-),$$

$$(iii) P(\{w : x_1 \leq X(w) \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1^-), \quad (6)$$

$$P(\{w : X(w) < x\}) = F_X(x^-).$$

Definição 4.2.3: Uma variável aleatória é discreta se existir uma densidade de probabilidades tal que:

$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} p_X(x_j), \quad \{w : X(w) = x_j\}, p_X(x_j) > 0 \quad (7)$$

Propriedades 4.2.2: Para uma variável aleatória discreta, para x_j tal que $X(w) = x_j$:

$$\begin{aligned} F_X(x_j) - F_X(x_j^-) &= p_X(x_j) = P(\{w : X(w) = x_j\}), \\ \sum_{x_j} p_X(x_j) &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Exemplo 4.2.2: A variável definida para o lançamento de uma moeda (exemplo 4.2.1) é tipicamente discreta e, neste caso:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ q, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} q, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \{x : x \neq 0, x \neq 1\} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} p_X(0) &= P(\{w : X(w) = 0\}) = P(\{Co\}) = q, \\ p_X(1) &= P(\{w : X(w) = 1\}) = P(\{Ca\}) = p, \\ 0 \neq x \neq 1, p_X(x) &= P(\{w : 0 \neq X(w) \neq 1\}) = P(\{\phi\}) = 0. \end{aligned}$$

Definição 4.2.4: Uma variável aleatória é contínua se existir uma densidade de probabilidades tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi, \quad x \in R^1, \quad (9)$$

onde, $F_X(x)$ é suposta derivável ou, pelo menos, absolutamente contínua (isto é, diferenciável a menos de um número contável de pontos).

Propriedades 4.2.3: Para uma variável contínua, $X(.) : \Omega \rightarrow R^1$:

(i) Se $F_X(x)$ é diferenciável em $x \in R^1$, então:

$$p_X(x) = dF_X(x) / dx. \quad (10)$$

(ii) Para dado valor isolado de x e Δx suficientemente pequeno:

$$P(\{w : X(w) = x\}) = 0, \quad P(\{w : x \leq X(w) \leq x + \Delta x\}) \cong p_X(x) \Delta x. \quad (11)$$

(iii) A soma das probabilidades distribuídas na reta, $x \in R^1$, e igual à unidade:

$$p_X(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\xi) d\xi = 1. \quad (12)$$

Exemplo 4.2.3: Chamada aleatória em $[0, T]$:

$$X(w) \hat{=} w, \quad w \in [0, T],$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/T, & 0 \leq x \leq T. \\ 0, & x > T \end{cases}$$

Definição 4.2.4: Define-se *Média* ou *Esperança* de uma variável contínua, $X(.) : \Omega \rightarrow R^1$, como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p_X(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Propriedade 4.2.4: *Média* ou *Esperança* de uma variável aleatória pode, por analogia, ser vista como o operador que calcula o centro de massa de “barra infinita” com densidade $p_X(x)$ e que, como no caso de distribuição de massa de um corpo, é linear, ou seja:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]. \quad (14)$$

Definição 4.2.5: Define-se *Momento n* de uma variável contínua, $X(.) : \Omega \rightarrow R^1$, como:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n p_X(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Para $n=2$, tem-se o chamado *Valor Quadrático Médio*.

Definição 4.2.6: Define-se *Momento Central de Ordem n* de uma variável contínua, $X(.) : \Omega \rightarrow R^1$, como:

$$E[(X - E[X])^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - E[X])^n p_X(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Para $n=2$, tem-se a chamada *Variância*, em geral denotada por $\sigma^2(x)$.

Propriedade 4.2.5: Note-se, novamente, por analogia, que a *Variância* é o “momento de inércia” da “barra infinita” em torno de “centro de massa” $E[X]$. Sendo assim, ela, bem como

o chamado *Desvio Padrão*, $\sigma(x)$, é uma medida da dispersão das ocorrências de $X[w]=x$ em torno de $E[X]$. Em decorrência da sua definição, das propriedades de integração:

$$\sigma^2(x) = E[X^2] - (E[X])^2. \quad (17)$$

Exemplo 4.2.3: Variável aleatória gaussiana, de grande importância prática, já que muitos fenômenos aleatórios podem ser tratados de forma aproximada, como gaussianos. Quando se tem a situação de muitos efeitos aleatórios independentes superpostos, então, apesar das distribuições individuais, a distribuição do efeito somado é gaussiana (Teorema do limite central). Este tipo de variável tem sua distribuição totalmente caracterizada pelo valor médio e pela variância, apresentando uma forma simétrica semelhante ao perfil de um sino, conforme ilustrado na Fig. 4.2.

$$\begin{aligned} p_X(x) &= 1/((2\pi)^{1/2} \sigma) \exp(-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma^2)), \\ E[X] &= \bar{x}, \quad E[(X - E[X])^2] = \sigma^2. \end{aligned} \quad (18)$$

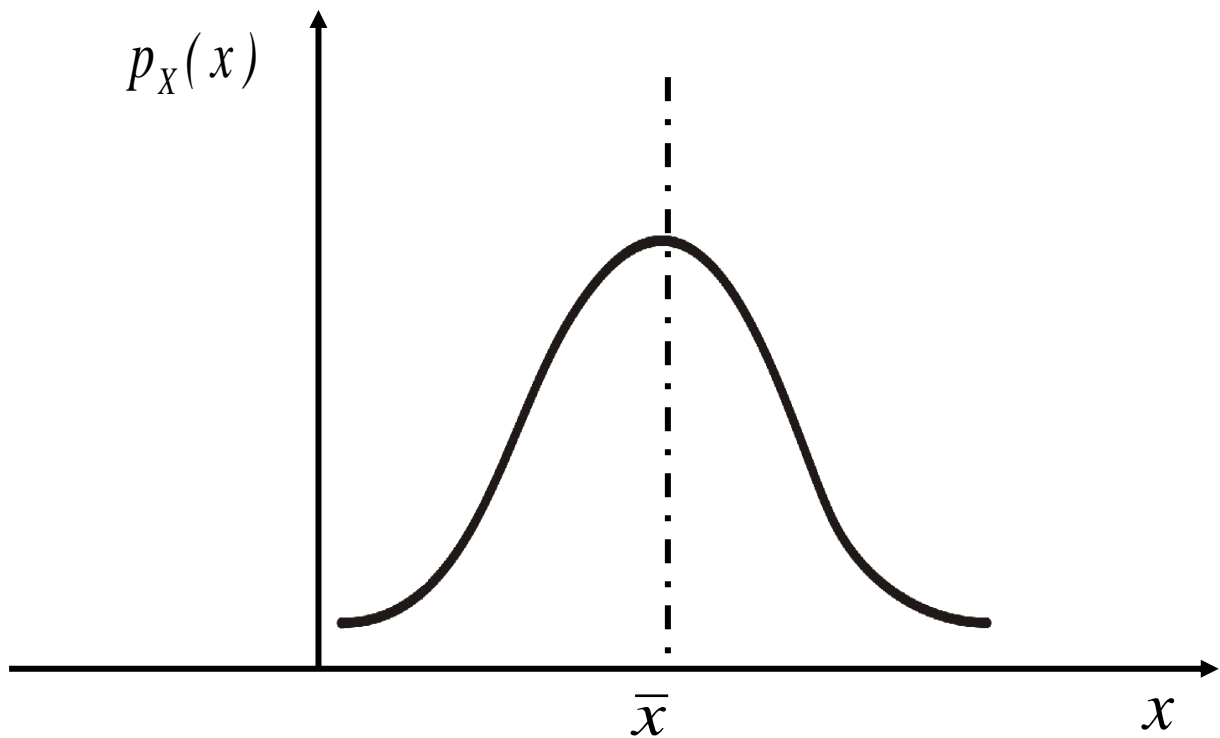


Figura 4.2: Distribuição Gaussiana

4.3 Variáveis Aleatórias Conjuntamente Distribuídas

Definição 4.3.1: Dado (Ω, \mathcal{B}, P) e as variáveis aleatórias, $X_i(\cdot)$, diz-se que elas são conjuntamente distribuídas quando:

$$X_i(\cdot): \Omega \rightarrow R^I, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Exemplo 4.3.1: Lançamento simultâneo de dois dados, em que:

$$\Omega = \{ w = (i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6 \},$$

$$P(w) = P((i, j)) = 1/36.$$

B é a classe de todos os subconjuntos de Ω . Neste caso poder-se-ia definir, por exemplo:

$$X_1(w) = X_1((i, j)) = i, \quad X_2(w) = X_2((i, j)) = j, \quad (i, j) \in \Omega.$$

Definição 4.3.2: Dadas n variáveis conjuntamente distribuídas, define-se sua *Função Distribuição Conjunta*, como:

$$F_X(x) \triangleq P(\{ w : X_1(w) \leq x_1, X_2(w) \leq x_2, \dots, X_n(w) \leq x_n \}), \quad (2)$$

$$X^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, \quad x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Note-se que,

$$A_i = \{ w : X_i(w) \leq x_i \}, \quad \{ w : X_i(w) \leq x_i, i = 1, 2, \dots, n \} = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Portanto, a probabilidade conjunta é calculada sobre o evento representado pelo conjunto intersecção.

Definição 4.3.3: Em decorrência, para variáveis conjuntamente distribuídas contínuas, define-se *Função Densidade Conjunta* $p_X(x)$ através de:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_X(\varepsilon) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n. \quad (3)$$

Propriedades 4.3.1: Para n variáveis conjuntamente distribuídas:

$$(i) \quad p_X(x) \geq 0. \quad (4)$$

$$(ii) \quad F_X(\infty, \infty, \dots, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\varepsilon) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n = 1, \quad (5)$$

$$F_X(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0.$$

$$(iii) \quad F_X(x_1, x_2, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (6)$$

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\varepsilon) d\varepsilon_{m+1} d\varepsilon_{m+2} \dots d\varepsilon_n.$$

Definição 4.3.3: Dadas n variáveis conjuntamente distribuídas, definem-se *Momentos Conjuntos*:

(i) Para $m \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, sendo que para $m=1$ tem-se a *Esperança* ou *Valor Médio*, μ_i :

$$E[(X_i)^m] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon_i)^m p_X(\varepsilon) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n. \quad (7)$$

(ii) Para m e l inteiros positivos, $1 \leq i, j \leq n$, sendo que para $m=l=1$ tem-se a chamada *Covariância* e para $m=l=1$ e $i=j$ tem-se a *Variância* de X_i :

$$E[(X_i - \mu_i)^m (X_j - \mu_j)^l] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon_i - \mu_i)^m (\varepsilon_j - \mu_j)^l p_X(\varepsilon) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n. \quad (8)$$

(iii) Considerando as n variáveis como um vetor, definem-se *Vetor Valor Médio* e *Matriz de Covariâncias*:

$$E[X] \triangleq \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon p_X(\varepsilon) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n, \quad (9)$$

$$E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] \triangleq P_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - \mu_X)(\varepsilon - \mu_X)^T p_X(\varepsilon) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n.$$

Observando-se que as expectâncias se aplicam componente a componente do vetor e termo a termo da matriz.

Definição 4.3.4: Dadas variáveis conjuntamente distribuídas, define-se *Coefficiente de Correlação*, para $\sigma(X_i) \neq 0, \sigma(X_j) \neq 0$:

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &\triangleq E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)], \\ \rho(X_i, X_j) &\triangleq cov(X_i, X_j) / (\sigma(X_i)\sigma(X_j)). \end{aligned} \quad (10)$$

Diz-se que as variáveis são não correlacionadas quando o coeficiente de correlação é nulo.

Propriedades 4.3.2: Para n variáveis conjuntamente distribuídas, o módulo do coeficiente de correlação é sempre menor ou igual do que a unidade, devido à desigualdade de Schwarz e maior ou igual a zero, pois este valor ocorre quando as duas variáveis são não correlacionadas. Ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (cov(X_i, X_j))^2 \leq var(X_i)var(X_j), \\ 0 &\leq |\rho(X_i, X_j)| \leq 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Definição 4.3.5: Dadas variáveis conjuntamente distribuídas, tem-se que:

(i) Duas variáveis são independentes, se vale que:

$$\begin{aligned} F_{X_i X_j}(x_i x_j) &= F_{X_i}(x_i)F_{X_j}(x_j), \\ p_{X_i X_j}(x_i x_j) &= p_{X_i}(x_i)p_{X_j}(x_j), \\ E[f(X_i)g(X_j)] &= E[f(X_i)]E[g(X_j)], \quad f(\cdot), g(\cdot) \text{ funções fixas.} \end{aligned} \quad (12)$$

(ii) Para n variáveis, elas são ditas mutuamente independentes se vale que:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\dots F_{X_n}(x_n), \\ p_X(x) &= p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\dots p_{X_n}(x_n), \\ E\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right] &= \prod_{i=1}^n E[f_i(X_i)]. \end{aligned} \quad (13)$$

(iii) Dois vetores aleatórios $X^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $Y^T = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ são conjuntamente independentes se vale que:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y). \quad (14)$$

Propriedades 4.3.3: Se duas variáveis são independentes, então elas são não correlacionadas; o inverso não é necessariamente verdadeiro. Se as variáveis forem gaussianas, então o inverso é verdadeiro.

4.4 Probabilidades e Variáveis Condicionadas

Definição 4.4.1: Dado (Ω, \mathcal{B}, P) e sendo A_1 e A_2 eventos de \mathcal{B} , define-se a probabilidade de A_1 condicionada a A_2 como sendo:

$$P(A_1 / A_2) \triangleq P(A_1 \cap A_2) / P(A_2), \quad P(A_2) > 0. \quad (1)$$

Definição 4.4.2: Dado (Ω, \mathcal{B}, P) e variáveis X e Y conjuntamente distribuídas, correspondentemente, define-se:

$$p_{X/Y}(x/y) \triangleq p_{XY}(x, y) / p_Y(y), \quad p_Y(y) > 0. \quad (2)$$

Observe-se que $F_{X/Y}(x/y)$ é definida como a distribuição de X , dado o evento $\{w: Y(w)=y\}$. Para uma variável contínua:

$$F_{X/Y}(x/y) \triangleq P(\{w: X(w) \leq x\} \cap \{w: y < Y(w) \leq y + \Delta y\}) / P(\{w: y < Y(w) \leq y + \Delta y\}).$$

Passando-se ao limite, pode-se mostrar que:

$$F_{X/Y}(x/y) = \left(\int_{-\infty}^x p_{XY}(\varepsilon, y) d\varepsilon \right) / p_Y(y). \quad (2a)$$

Definição 4.4.3: Dado (Ω, \mathcal{B}, P) e variáveis vetoriais X e Y conjuntamente distribuídas, correspondentemente definem-se *Vetor Valor Médio* e *Matriz de Covariâncias Condicionados*:

$$\begin{aligned}
E[X/Y] &\triangleq \mu_{X/Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{X/Y}(\varepsilon/y) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n, \\
E[(X - \mu_{X/Y})(X - \mu_{X/Y})^T / Y] &\triangleq P_{X/Y}, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - \mu_{X/Y})(\varepsilon - \mu_{X/Y})^T p_{X/Y}(\varepsilon/y) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Observando-se, novamente, que as expectâncias se aplicam componente a componente do vetor e termo a termo da matriz.

Propriedade 4.4.1: Se duas variáveis são independentes, então:

$$p_{X/Y}(x/y) = p_X(x). \tag{4}$$

Propriedades 4.4.2: Sejam X, Y, Z conjuntamente distribuídas, a, b constantes quaisquer, $f(\cdot)$ função escalar. Admita-se que $E[X], E[Y], E[Z], E[f(Y)]$ existam, então pode-se mostrar que:

$$(i) \ E[X/Y] = E[X], \text{ se } X, Y \text{ independentes}. \tag{5}$$

$$(ii) \ E[X] = E[E[X/Y]]. \tag{6}$$

$$(iii) \ E[a/X] = a, \forall a, X. \tag{7}$$

$$(iv) \ E[f(Y)/Y] = f(Y). \tag{8}$$

$$(v) \ E[(aX + bZ)/Y] = aE[X/Y] + bE[Z/Y]. \tag{9}$$

Bibliografia

Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley, New York.

Jazwinski, A.H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Gelb, A., Kasper Jr, J.F., Nash Jr, R.A., Price, C.F. and Sutherland Jr, A.A. (1977). *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Liebelt, P.B. (1967). *An Introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, USA.

Papoulis, A. (1965). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill, New York.

Capítulo 5

Estimação de Parâmetros

5.1 Fundamentação Teórica

Problema de Estimação

Seja o seguinte problema: (i) Sabe-se que as variáveis aleatórias Z_i se relacionam com o vetor aleatório X através de:

$$Z_i = h_i(X, V_i). \quad (1)$$

No entanto, para observar ocorrências de Z_i , isto é, z_i , tem-se que usar um dado sensor que incorpora um erro v_i , ocorrência de uma variável aleatória V_i .

$$z_i = h_i(x) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

(ii) Quer-se, a partir dos z_i , obter-se uma estimativa de X , isto é, da distribuição de X .

Na maior parte dos casos de interesse, na verdade se quer estimar um vetor de parâmetros. No entanto, o fato de se ter que determiná-lo através da observação de uma outra variável, a menos de um erro de observação, este sim aleatório, é que leva, ou melhor até determina, a modelagem do vetor de parâmetros como aleatório, assim como a variável observada com a qual ele se relaciona.

Crítérios

Dois critérios são usualmente adotados para que a estimativa \hat{X} de X satisfaça. Um para que, em média, o erro seja nulo, isto é, um *critério de não tendenciosidade*, e outro para que a dispersão dos erros de estimação seja pequena, isto é, um critério de *mínimo erro quadrático médio* ou *variâncias mínimas*.

$$\begin{aligned} E[(X - \hat{X})] &= 0, \\ E[(X - \hat{X})^T S (X - \hat{X})], \text{ para } S > 0, &\text{ é mínimo.} \end{aligned} \quad (3)$$

Solução

A solução do problema colocado é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= E[X / Z], \\ Z^T &= (Z_1, Z_2, \dots, Z_m). \end{aligned} \quad (4)$$

De fato, admitindo-se que \hat{X} é um funcional de Z ,

$$E[(X - \hat{X})^T S(X - \hat{X})] = E[E[(X - \hat{X})^T S(X - \hat{X})/Z]].$$

Sendo $\mu_{X/Z} = E[X/Z]$,

$$\begin{aligned} E[(X - \hat{X})^T S(X - \hat{X})/Z] &= E[(X - \mu_{X/Z} + \mu_{X/Z} - \hat{X})^T S(X - \mu_{X/Z} + \mu_{X/Z} - \hat{X})/Z] \\ &= \underbrace{2E[(X - \mu_{X/Z})^T S(\mu_{X/Z} - \hat{X})/Z]}_0 + E[(X - \mu_{X/Z})^T S(X - \mu_{X/Z})/Z] \\ &\quad + E[(\mu_{X/Z} - \hat{X})^T S(\mu_{X/Z} - \hat{X})/Z]. \end{aligned}$$

Voltando e substituindo na expressão original,

$$\begin{aligned} E[(X - \hat{X})^T S(X - \hat{X})] &= E[E[(X - \hat{X})^T S(X - \hat{X})/Z]] \\ &= E[E[(X - \mu_{X/Z})^T S(X - \mu_{X/Z})/Z]] \\ &\quad + E[E[(\mu_{X/Z} - \hat{X})^T S(\mu_{X/Z} - \hat{X})/Z]] \\ &= cte + E[E[(\mu_{X/Z} - \hat{X})^T S(\mu_{X/Z} - \hat{X})/Z]]. \end{aligned}$$

Portanto, como se queria demonstrar, o \hat{X} minimizante é:

$$\hat{X} = \mu_{X/Z} = E[X/Z].$$

Assim, a solução depende de se conhecer a densidade condicionada:

$$p_{X/Z}(x/z).$$

Mas, considerando que:

$$p_{X/Z}(x/z) = (p_{XZ}(x, z))/p_Z(z), \quad p_{Z/X}(z/x) = (p_{XZ}(x, z))/p_X(x).$$

Em decorrência esta densidade pode ser expressa pela regra de Bayes:

$$p_{X/Z}(x/z) = (p_{Z/X}(z/x)p_X(x))/p_Z(z). \quad (5)$$

Portanto, em termos teóricos cai-se em um círculo vicioso, pois para se obter o valor condicionado de X é preciso se conhecer $p_X(x)$. Na prática, em geral se trabalha reiteradamente com aproximações lineares e com distribuição gaussiana e admitem-se, a priori, uma estimativa do valor médio \bar{x} e da distribuição em torno dele, isto é, da matriz de covariâncias, \bar{P} , que por falta de maior informação se considera diagonal, com os termos da diagonal expressando as “faixas de ignorância”, através dos quadrados dos desvios padrões. Havendo redundância nas informações processadas, estas aproximações a priori, isto é, os erros nelas, acabam por sofrer “uma diluição infinita”, conseguindo-se estimativas com erro desprezível, para efeitos práticos.

5.2 Caso Linear

Neste caso, têm-se observações lineares, tipicamente modeladas como variáveis gaussianas e erros de observação não correlacionados e independentes da variável a ser estimada, como a seguir.

Problema de Estimação

Estimar a variável X , sabendo-se que ela se relaciona com as variáveis gaussianas Z_i linearmente, a menos de erros aditivos V_i de distribuição gaussiana conhecida, não correlacionados entre si e independentes de X , isto é:

$$\begin{aligned} Z_i &= H_i X + V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ E[V_i] &= 0, \quad E[V_i^2] = R_i, \quad \text{cov}(V_i V_k) = R_i \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m, \\ \text{cov}(V_i X_j) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Em termos práticos, estimar a variável X a partir de realizações observadas de Z_i , a menos de realizações ocorridas das variáveis erros de observação V_i . Ou seja, estimar a distribuição de X , a partir das observações:

$$z_i = H_i x + v_i \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Solução

Para realizar a estimativa, é preciso ter-se algum tipo de informação a priori da variável a ser estimada, ainda que, no limite, a informação seja a de que não se conhece nada da variável. Ou seja, é preciso ter-se informação a priori sobre o valor médio e a dispersão em torno dele, da forma:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= X + \bar{E}, \\ E[X] &\cong \bar{x}, \quad \text{cov}(\bar{E}) = \bar{P}. \end{aligned} \quad (3)$$

Com esta informação tem-se a priori uma aproximação para $p_X(x)$, que sendo gaussiana é dada por:

$$p_X(x) = (1 / ((2\pi)^{n/2} |\bar{P}|^{1/2})) \exp(-(x - \bar{x})^T \bar{P}^{-1} (x - \bar{x}) / 2). \quad (4)$$

E a partir da informação da Eq. (1), pode-se completar a densidade condicionada da expressão de Bayes da Eq. 5.1(5), repetida a seguir:

$$p_{X/Z}(x/z) = (p_{Z/X}(z/x) p_X(x)) / p_Z(z)$$

De fato, pode-se calcular os valores médios e covariâncias, caracterizando as respectivas funções de densidade de probabilidades:

$$\begin{aligned}
E[Z] &= E[HX + V] = H\bar{x}, \quad \text{cov}(Z) = \text{cov}(Hx + V) = H\bar{P}H^T + R, \\
E[VV^T] &= \text{diag}[R_i : i = 1, 2, \dots, m] \triangleq R, \\
p_Z(z) &= (1/(2\pi)^{m/2} |H\bar{P}H^T + R|^{1/2}) \exp(-(z - H\bar{x})^T (H\bar{P}H^T + R)^{-1} (z - H\bar{x})/2).
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
E[Z/X] &= E[(HX + V)/X] = HX, \quad \text{cov}(Z/X) = \text{cov}((Hx + V)/X) \\
&= \text{cov}(V/X) = R, \\
p_{Z/X}(z/x) &= (1/(2\pi)^{m/2} |R|^{1/2}) \exp(-(z - Hx)^T (R)^{-1} (z - Hx)/2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo na expressão de $p_{X/Z}(x/z)$ e após alguma manipulação algébrica, resulta:

$$\begin{aligned}
p_{X/Z}(x/z) &= (|H\bar{P}H^T + R|^{1/2} / ((2\pi)^{n/2} |\bar{P}|^{1/2} |R|^{1/2})) \exp(-(z - \hat{x})^T (P)^{-1} (z - \hat{x})/2), \\
\hat{x} &= \bar{x} + PH^T R^{-1} (z - H\bar{x}), \\
P &= (\bar{P}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

De forma equivalente, usando identidades de matrizes (Apêndice III), o algoritmo de estimação pode ser colocado na forma de Kalman:

$$\begin{aligned}
K &= \bar{P}H^T (H\bar{P}H^T + R)^{-1}, \\
\hat{x} &= \bar{x} + K(z - H\bar{x}), \\
P &= \bar{P} - KHP \equiv (I_n - KH)\bar{P}(I_n - KH)^T + KRK^T.
\end{aligned} \tag{8}$$

Devido ao mau comportamento numérico deste algoritmo, recomenda-se o uso de formas fatoradas (Bierman, 1977; Kuga, 1989; Kuga et al, 1990), ou, pelo menos, a forma de Joseph para o cálculo de atualização da matriz de covariâncias dos erros de estimação, conforme segunda expressão idêntica para P na Eq. (8).

Propriedade 5.2.1: Chega-se, formalmente ao mesmo resultado para o algoritmo de estimação, se for considerado o problema de mínimos quadrados com informação a priori, formulado com as realizações das variáveis aleatórias e usando como matrizes-peso as inversas das matrizes de covariância, \bar{P}^{-1} e R^{-1} , respectivamente. Ou seja:

$$\text{Min.}_x J = \{(x - \bar{x})^T \bar{P}^{-1} (x - \bar{x}) + (z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx)\} / 2. \tag{9}$$

Propriedade 5.2.2: Processamento seqüencial. A condição de componentes não correlacionadas das variáveis erros de observação, V_i , permite, equivalentemente, o processamento componente a componente das realizações observadas, z_i , de Z_i , (Eq. 5.1(2)), podendo-se, então, evitar a inversão de matriz nos cálculos dos respectivos ganhos de Kalman (Jazwinski, 1970). Com a informação a priori, \bar{x} , \bar{P} , processa-se a primeira componente das realizações observadas, z_1 ; usando o resultado como uma nova informação a priori, processa-se a segunda componente das realizações observadas; e assim por diante, até se processar a última componente das realizações observadas. O resultado é o algoritmo de *atualização seqüencial* em três passos a seguir.

(i) Para $i=0$:

$$\hat{x}(0) = \bar{x}, \quad P(0) = \bar{P}. \quad (10)$$

(ii) Para $i=1,2,\dots,m$:

$$\begin{aligned} K(i) &= P(i-1)H_i^T [H_i P(i-1)H_i^T + R_i]^{-1}, \\ \hat{x}(i) &= \hat{x}(i-1) + K(i)[z_i - H_i \hat{x}(i-1)], \\ P(i) &= P(i-1) - K(i)H_i P(i-1) \equiv [I_n - K(i)H_i]P(i-1)[I_n - K(i)H_i]^T + K(i)R_i K^T(i). \end{aligned} \quad (11)$$

(iii) Para $i=m$:

$$\hat{x} = \hat{x}(m), \quad P = P(m). \quad (12)$$

A este algoritmo pode-se aplicar a fatoração de raiz quadrada de Potter, o que propicia significativa melhoria de desempenho numérico, sem praticamente aumentar a carga computacional:

(i) Para $i=0$:

$$\hat{x}(0) = \bar{x}, \quad P(0) = S(0)S^T(0). \quad (10a)$$

(ii) Para $i=1,2,\dots,m$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i &= H_i S(i-1), \\ K(i) &= S(i-1)\tilde{H}_i^T [\tilde{H}_i \tilde{H}_i^T + R_i]^{-1}, \\ \hat{x}(i) &= \hat{x}(i-1) + K(i)[z_i - H_i \hat{x}(i-1)], \\ S(i) &= S(i-1) - K(i)\tilde{H}_i. \end{aligned} \quad (11a)$$

(iii) Para $i=m$:

$$\hat{x} = \hat{x}(m), \quad P = P(m) = S(m)S^T(m). \quad (12a)$$

Note-se que, como a estimativa a priori da matriz de covariâncias, $\bar{P} = P(0)$, é a de uma matriz diagonal, o cálculo da matriz raiz quadrada (Eq. (10a)), para inicialização do algoritmo, é trivial.

Exemplo de Aplicação 5.2.1: *Solução seqüencial de sistemas lineares* (Pinto e Rios Neto, 1990; Rios Neto, 1981). Seja a solução de um sistema linear vista como a do problema de estimação:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x + \bar{e}, \\
z_i &= H_i x + v_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
E[X] &= \bar{x}, \text{cov}(\bar{E}) = \bar{P} > 0, \\
E[V_j] &= 0, \text{cov}(V) = \text{diag}[R_j : j = 1, 2, \dots, n], \\
\text{cov}(V_j X_i) &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{13}$$

Pode-se, pois, resolver este problema com o algoritmo das Eqs. (10), (11) e (12), para $n=m$. Se, neste algoritmo se passar ao limite zero os R_j , resulta o algoritmo específico para a solução do sistema linear:

$$(i) \text{ Para } i=0: \quad \hat{x}(0) = \bar{x}, \quad P(0) = \bar{P}. \tag{14}$$

(ii) Para $i=1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
K(i) &= P(i-1)H_i^T [H_i P(i-1)H_i^T]^{-1}, \\
\hat{x}(i) &= \hat{x}(i-1) + K(i)[z_i - H_i \hat{x}(i-1)], \\
P(i) &= P(i-1) - K(i)H_i P(i-1).
\end{aligned} \tag{15}$$

(iii) Para $i=n$:

$$x = \hat{x}(n), \quad P = P(n) = 0. \tag{16}$$

E, naturalmente, se for usada a versão fatorada de Potter, melhora-se o desempenho numérico.

Exemplo de Aplicação 5.2.2: Interpolação polinomial. O problema é o de ajustar um polinômio a observações de uma função desconhecida, $h(x)$, para se ter uma aproximação da mesma no intervalo das observações. Assim, sendo dadas observações da função, com erros de observação de distribuição conhecida:

$$\begin{aligned}
y_i &= h(x_i) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
E[V_i] &= 0, \quad E[V_i^T V_j] = R_i \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{17}$$

O que se quer é ter uma representação desta função, aproximada por um polinômio:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad m \geq n+1, \\
y_i = \underbrace{a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n}_{\cong h(x_i)} + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{18}$$

Tem-se, pois, tipicamente um problema de estimação de parâmetros, no caso o vetor dos coeficientes do polinômio. De forma compacta:

$$\begin{aligned}
y &= Ha + v, \\
y^T &= (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad H_i = (1, x_i, \dots, x_i^n), \quad a^T = (a_0, a_1, \dots, a_n), \quad v^T = (v_1, v_2, \dots, v_m).
\end{aligned} \tag{19}$$

Sendo, então, a solução estimada:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \bar{a} + PH^T R^{-1} (y - H\bar{a}), \\ P &= (\bar{P}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}.\end{aligned}\tag{20}$$

Sendo que, na prática, para um primeiro lote de observações, não se tem idéia de valores a priori dos parâmetros da incerteza em torno destes valores a priori. É, pois, razoável, admitir $\bar{a} = 0, \bar{P}^{-1} = 0$. Ou seja, uma solução a priori “no meio da reta real” com incerteza cobrindo toda a reta. Se ocorrer um novo lote de observações:

$$\begin{aligned}y_j^r &= h(x_j) + v_j, \quad j = m+1, \dots, m+m^r, \\ y^r &= H^r a + v^r.\end{aligned}\tag{21}$$

Tomando-se as estimativas do lote anterior como informações a priori, tem-se, então, uma estimativa atualizada dos parâmetros, isto é:

$$\begin{aligned}\bar{a} &\leftarrow \hat{a}, \quad \bar{P} \leftarrow P, \quad R \leftarrow R^r, \\ \hat{a}^r &= \bar{a} + P^r H^{rT} R^{r-1} (y^r - H^r \bar{a}), \\ P^r &= (\bar{P}^{-1} + H^{rT} R^{r-1} H^r)^{-1} \equiv \bar{P} - \bar{P} H^{rT} (H^r \bar{P} H^{rT} + R^r)^{-1} H^r \bar{P}.\end{aligned}\tag{22}$$

Note-se que se o número de observações de um novo lote é pequeno, pode ser conveniente se usar a forma idêntica para cálculo da nova matriz de covariâncias dos erros de estimação.

Exemplo de Aplicação 5.2.3: *Solução em paralelo de sistemas de equações lineares.* (Rios Neto e Rios Neto, 2000) Seja o sistema:

$$b = Ax.\tag{23}$$

Considere-se que se quer determinar o vetor incógnita x a menos de ocorrências de erros $e_i, i=1,2,\dots,n$. Em um esquema iterativo de solução, dada uma estimativa, \bar{x} , inicial ou de uma iteração anterior, e com $0 < \alpha \leq 1$ escolhido para ajustar o passo de busca da solução:

$$\alpha(b - A\bar{x}) = A(x - \bar{x}).\tag{24}$$

Se em cada iteração $x_k, k=1,2,\dots,n, k \neq j$ é considerado como dado por ocorrência:

$$x_k = \bar{x}_k + \bar{\eta}_k.\tag{25}$$

Onde $\bar{\eta}_k$ é erro modelado como aleatório, cuja ocorrência garante boa aproximação para na satisfação da Eq. (24). Se for considerado que, face a estes erros nas demais componentes, o razoável é que x_j também ocorra com erro $\bar{\eta}_j$, resulta que:

$$\alpha(b_i - \sum_{l=1}^n a_{il}\bar{x}_l) = a_{ij}(x_j - \bar{x}_j) + \bar{v}_i^j, \quad (26)$$

$$\bar{v}_i^j = \sum_{k=1}^n a_{ik}\bar{\eta}_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como não se tem idéia de como as realizações dos $\bar{\eta}_k$ se relacionam é razoável modelá-los como de média zero e de distribuição normal. Como no limite eles devem tender para as ocorrências dos erros e_k , e, em cada iteração a distribuição dos \bar{v}_i^j deve ter dispersão da ordem dos resíduos $\alpha(b_i - \sum_{l=1}^n a_{il}\bar{x}_l)$, então é também razoável, por um critério de máxima verossimilhança, que:

$$E[(\bar{v}_i^j)^2] = \alpha^2 \beta_i^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 e_k^2 = \bar{r}_i = \alpha^2 r_i = \alpha^2 (b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}\bar{x}_k)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Portanto:

$$E[(\bar{v}^j)(\bar{v}^j)^T] = \bar{R} = \text{diag}[\alpha^2 \beta_i^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 e_k^2 = \bar{r}_i = \alpha^2 r_i : i = 1, 2, \dots, n] = \alpha^2 R. \quad (28)$$

Assim, em uma iteração típica, o problema é reduzido ao de se resolver em paralelo os problemas de estimação sem informação a priori, para $j=1, 2, \dots, n$,

$$\alpha(b - A\bar{x}) = A_j(x_j - \bar{x}_j) + \bar{v}_j, \quad (29)$$

Aplicando, pois, o estimador para o caso sem informação a priori, resulta, para $j=1, 2, \dots, n$,

$$\hat{x}_j = \bar{x}_j + \alpha[A_j^T R^{-1} A_j]^{-1} A_j^T R^{-1} (b - A\bar{x}). \quad (30)$$

Note-se que foi considerada a relação $\bar{R} = \alpha^2 R$ e cancelado o fator α^2 .

Com o propósito de verificar convergência, note-se que do fato de que R é a mesma para $j=1, 2, \dots, n$ possibilita combinar as estimativas \hat{x}_j , obtendo-se:

$$\hat{x} = \bar{x} - \alpha S \nabla f^T(\bar{x}) = \bar{x} - \alpha S g(\bar{x}), \quad (31)$$

$$S = \text{diag}[(A_j^T R^{-1} A_j)^{-1} : j = 1, 2, \dots, n], \quad f(x) = 1/2 [Ax - b]^T R^{-1} [Ax - b],$$

$$\nabla f^T(\bar{x}) = A^T R^{-1} (A\bar{x} - b) \triangleq g(\bar{x}).$$

Se $0 < \alpha$ for escolhido de modo a minimizar $f(x)$ em uma iteração típica, garante-se a convergência do estimador, que é equivalente a um *Método Modificado de Newton* (Luenberger, 1984):

$$\alpha = (\bar{g}^T S \bar{g}) / (\bar{g}^T S A^T R^{-1} A S \bar{g}), \quad \bar{g} = g(\bar{x}). \quad (32)$$

Para melhorar o comportamento numérico, recomenda-se a forma fatorada de Potter a seguir.

$$\begin{aligned} v_j^T &= A_j^T R_e^{-1/2}, \quad s_j = (v_j^T v_j)^{-1}, \\ p_j &= s_j v_j^T R_e^{-1/2}, \quad e = (b - A\bar{x}), \\ \hat{x}_j &= \bar{x}_j + \alpha p_j e. \end{aligned} \quad (30a)$$

Como antes, é possível combinar as estimativas \hat{x}_j , para obter equivalentemente o estimador do vetor completo x :

$$\begin{aligned} V &= [v_1 : v_2 : \dots : v_n], \quad s = \text{diag}[s_j : j = 1, 2, \dots, n], \\ p^T &= s V^T R_e^{-1/2}, \\ \hat{x} &= \bar{x} + \alpha p e. \end{aligned} \quad (31a)$$

E o valor de $0 < \alpha$, calculado de forma também fatorada:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) &= -V^T R_e^{-1/2} r, \quad g_s(\bar{x}) = s g(\bar{x}), \\ g_v(\bar{x}) &= V g_s(\bar{x}), \\ \alpha &= (g_s^T(\bar{x}) g(\bar{x})) / (g_s^T(\bar{x}) g_v(\bar{x})). \end{aligned} \quad (32a)$$

5.3 Caso Não Linear

Neste caso, a variável a ser estimada se relaciona não linearmente com a variável cujas realizações são observadas, de novo a menos de erros aditivos de observação:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \bar{e}, \\ z_i &= h_i(x) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

Onde, como no caso linear, admite-se alguma informação a priori e os erros de observação, de distribuição conhecida, são não correlacionados com a variável a ser estimada e, via de regra, de componentes não correlacionadas.

Se $h(x)$ for linearizada em torno de \bar{x} , admitindo-se que os erros de dispersão em torno deste valor \bar{x} sejam de ordem superior:

$$h_i(x) = h_i(\bar{x}) + \nabla h_i(\bar{x})(x - \bar{x}) + \underbrace{o(2)}_{\approx 0}. \quad (2)$$

Portanto,

$$\underbrace{z_i - h_i(\bar{x})}_{y_i} + \underbrace{\nabla h_i(\bar{x})\bar{x}}_{H_i} = \nabla h_i(\bar{x})x + v_i.$$

Desta forma, com a linearização em torno da última estimativa, recai-se no caso linear:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \bar{e}, \\ y_i &= H_i x + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{3}$$

Há, neste caso, a necessidade de se reiterar para eliminar as não linearidades. Um algoritmo que pode ser usado é:

(i) Iniciar com:

$$\hat{x}^0 = \bar{x}.\tag{4}$$

(ii) Para $k=1, 2, \dots$, relinearizar em torno de \hat{x}^{k-1} , usando um fator de ajuste, $0 < \alpha \leq 1$, de modo a garantir a hipótese de pequenas perturbações necessária para validade da aproximação linear, redefinindo o problema de estimação linear:

$$\alpha \underbrace{(z_i - h_i(\hat{x}^{k-1}))}_{y_i^k} + \underbrace{\nabla h_i(\hat{x}^{k-1})}_{H_i^k} \hat{x}^{k-1} = \underbrace{\nabla h_i(\hat{x}^{k-1})}_{H_i^k} x + v_i,$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \bar{e}, \\ y_i^k &= H_i^k x + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{5}$$

Notar que a estimativa a priori não muda, o que muda é o ponto em torno do qual a relinearização é feita (até que os termos de ordem superior realmente sejam desprezíveis). Notar também que o fator de ajuste $0 < \alpha \leq 1$ é dependente do problema tratado e, por que não reconhecer, do usuário que estiver lidando com o algoritmo!

(iii) Para $k=1, 2, \dots$, aplicar o estimador linear, até que, para um erro especificado ε seja satisfeito:

$$\|h(\hat{x}^k) - h(\hat{x}^{k-1})\| \leq \varepsilon.\tag{6}$$

Exemplo de Aplicação 5.3.1: Treinamento supervisionado de redes neurais artificiais: Uma aplicação de grande interesse de estimação não linear de parâmetros é o de treinamento supervisionado de redes neurais do tipo “feedforward”, em especial as do tipo de camadas múltiplas de “perceptrons” (“Multi Layer Perceptron”-MLP) (Figs. 5.1 e 5.2). Estas redes neurais (RN) podem ser treinadas para representar uniformemente e com a desejada precisão mapeamentos não lineares contínuos, isto é, ser treinadas para representar funções não lineares, de argumento vetorial, contínuas:

$$y = f(x), \quad f \in C : x \in D \subset R^n \rightarrow y \in R^m.\tag{7}$$

Onde treinar a rede, analogamente ao caso de interpolação polinomial, é resolver o problema de ajustar uma RN a observações de uma função desconhecida. De fato, pois treinar a RN nada mais é que estimar seus parâmetros (pesos sinápticos) (Rios Neto, 1997), de modo que ela seja uma aproximação para a função no intervalo em que se têm valores observados da mesma, possibilitando interpolações no interior deste intervalo de observação. Ou seja, dados

os pares de informações de entrada e saída da rede, $\{x(t), y(t): t=1, 2, \dots, L\}$, o problema é estimar os parâmetros w da função parametrizada equivalente à rede:

$$\hat{y}(t) = \hat{f}(x(t), w). \quad (8)$$

Sendo que, no caso da MLP, se for considerado o caso de uma única camada interna, como ilustrado na Fig. 5.2, que, aliás, é suficiente para garantir a capacidade de representação de funções vetoriais não lineares, tem-se, para o caso de se usar tangentes hiperbólicas (\tanh) como funções de ativação, $a(.) = \tanh(.):$

$$\hat{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}^2 (\tanh[\sum_{k=1}^n w_{jk}^1 x_k(t) + w_{j0}^1]). \quad (9)$$

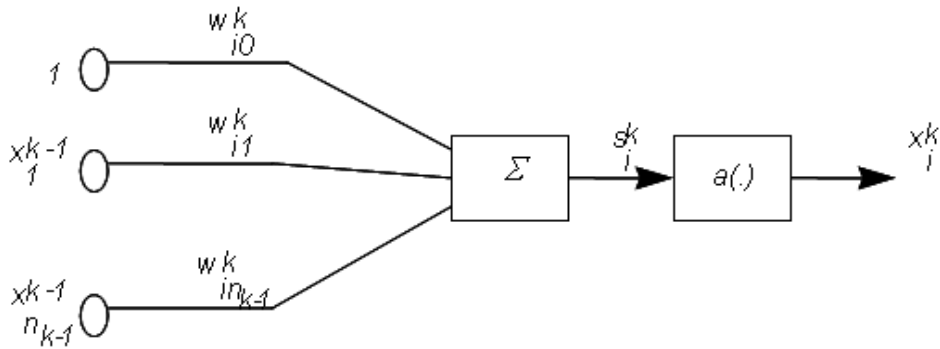


Figura 5.1: Neurônio Artificial do Tipo Perceptron

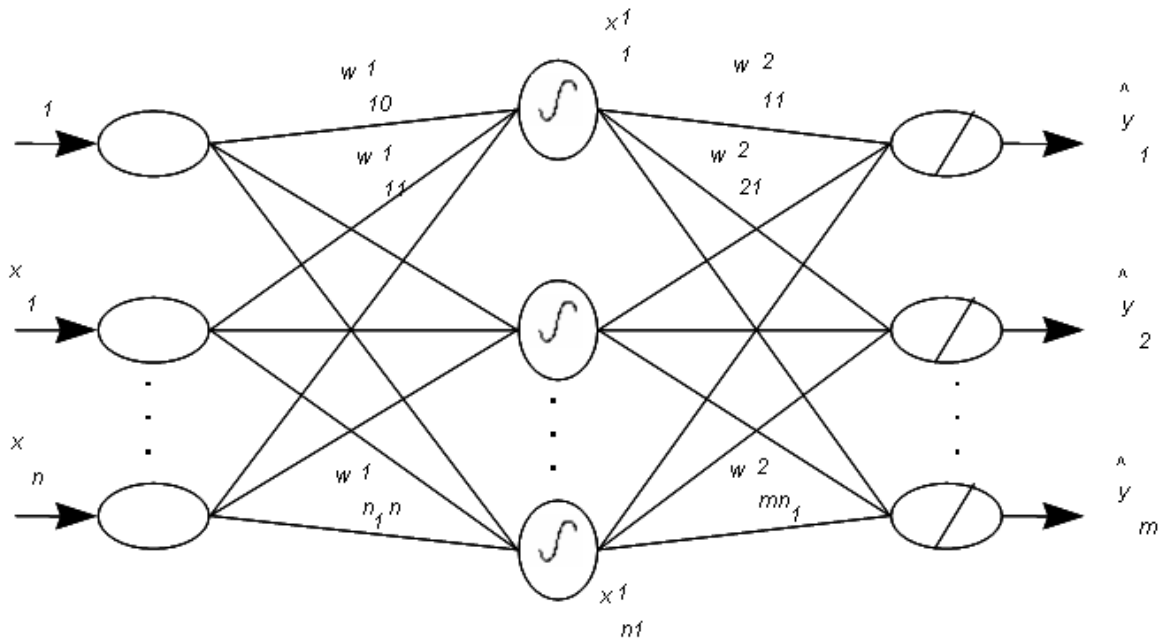


Figura 5.2: Multi Layer Perceptron de Uma Camada

O problema de treinamento supervisionado, que nada mais é que um problema de ajuste da RN aos dados observados, pode ser resolvido como minimizar em relação ao vetor de pesos sinapticos o funcional:

$$J(w) = 1/2[(w - \bar{w})^T \bar{P}^{-1}(w - \bar{w}) + \sum_{t=1}^L (y(t) - \hat{f}(x(t), w))^T R^{-1}(t)(y(t) - \hat{f}(x(t), w))]. \quad (10)$$

Onde são dados $\{x(t), y(t): t=1, 2, \dots, L\}$, uma estimativa a priori de w , \bar{w} , e as matrizes peso $\bar{P}^{-1}, R^{-1}(t)$.

Adotando-se procedimento iterativo, em cada iteração típica procedendo-se a uma perturbação linear, com iterações $i=1, 2, \dots, I$, $\bar{w}(i)$ a estimativa a priori na iésima iteração, $0 \leq \alpha(i) \leq 1$ parâmetro de ajuste para garantir condições de pequena perturbação:

$$\alpha(i)[y(t) - \bar{y}(t, i)] \cong \hat{f}_w(x(t), \bar{w}(i))[w(i) - \bar{w}(i)]. \quad (11)$$

Tem-se, então:

$$J(w(i)) = 1/2[(w(i) - \bar{w})^T \bar{P}^{-1}(w(i) - \bar{w}) + \sum_{t=1}^L (z(t, i) - H(t, i)w(i))^T R^{-1}(t)(z(t, i) - H(t, i)w(i))], \quad (12)$$

$$z(t, i) \triangleq \alpha(i)[y(t) - \bar{y}(t, i)] + \hat{f}_w(x(t), \bar{w}(i))\bar{w}(i), \quad H(t, i) \triangleq \hat{f}_w(x(t), \bar{w}(i)).$$

$\bar{w}(I) = \bar{w}$, $\bar{y}(t, i) = \hat{f}(x(t), \bar{w}(i))$, $\hat{f}_w(x(t), \bar{w}(i))$ é a matriz de derivadas parciais com respeito a w_j , calculada usando-se a regra de “back propagation” (Zurada, 1992) na RN. Em cada iteração, tem-se, portanto, o problema formalmente equivalente de estimação:

$$\bar{w} = w(i) + \bar{e}, \quad (13)$$

$$z(t, i) = H(t, i)w(i) + v(t),$$

$$E[\bar{e}] = 0, E[\bar{e}\bar{e}^T] = \bar{P}, E[v(t)] = 0, E[v(t)v^T(t)] = R(t).$$

Com \bar{e} e $v(t)$ não correlacionados e admitidos com distribuição gaussiana. O problema se reduz, portanto, a uma situação em que pode ser resolvido com algoritmo do tipo daquele das Eqs. 4, 5, 6. Uma simplificação, adotada na prática, que explora a capacidade de processamento paralelo de RNs é a de desprezar a informação no nível de precisão no conhecimento anterior dos pesos nas camadas a posteriori (“after”), dos pesos nos neurônios da mesma camada (“same”) e dos pesos nas camadas que antecedem (“earlier”), $w_a(i)$, $w_s(i)$, $w_e(i)$, respectivamente, com as aproximações:

$$w_a(i) = \bar{w}_a(i), w_s(i) = \bar{w}_s(i), w_e(i) = \bar{w}(i). \quad (14)$$

Com estas aproximações, a Eq. (11) fica bastante simplificada, referindo-se ao neurônio l da camada k :

$$\alpha(i)[y(t) - \bar{y}(t, i)] = \hat{f}_{w_{kl}}(x(t), \bar{w}(i))[w_{kl}(i) - \bar{w}_{kl}(i)] + v(t). \quad (15)$$

Resultando, finalmente, o problema simplificado de estimação, para $t=1, 2, \dots, L$:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{kl} &= w_{kl}(i) + \bar{e}_{kl}, \\ z_{kl}(t, i) &= H_{kl}(t, i)w_{kl}(i) + v(t), \end{aligned} \quad (16)$$

Naturalmente a este problema se aplica a *Propriedade 5.2.2*, tanto no que diz respeito ao processamento sequencial como ao uso da forma fatorada.

Exemplo de Aplicação 5.3.2: *Estimação de parâmetros de sistemas dinâmicos:* (Curvo e Rios Neto, 2003) Seja o caso de sistemas dinâmicos em que se tem que determinar experimentalmente parâmetros que caracterizam seu modelo dinâmico, como, por exemplo, parâmetros de suspensão de veículos, coeficientes aerodinâmicos de aeronaves, coeficientes hidrodinâmicos de embarcações. Nestes casos, em geral se tem um modelo matemático para o sistema, na forma de um sistema dinâmico parametrizado:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p, t), \quad x \in R^n \quad (17)$$

Supondo-se que experimentalmente, por observação direta, se tenham valores com erro de saídas do sistema, que, se admitirá serem os próprios estados, determinados, por exemplo, por navegação inercial ou estimação:

$$\begin{aligned} y(t_k) &= x(t_k) + v_x(t_k), \\ E[v_x(t_k)] &= 0, \text{cov}(v_x(t_k)) = R_x(t_k). \end{aligned} \quad (18)$$

Aplicando-se ao modelo dinâmico um integrador numérico de equações diferenciais ordinárias, por exemplo, um integrador de ordem zero do tipo Runge Kutta:

$$x(t_k) \cong f^n(x(t_{k-1}), u(t_{k-1}), p, \Delta t_k). \quad (19)$$

Expandindo em série de Taylor e tomando aproximação de primeira ordem, admitindo que o erro nos estados é de primeira ordem:

$$\begin{aligned} y(t_k) + v_x(t_k) &= f^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k) + f_p^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k)(p - \bar{p}) \\ &+ f_x^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k)v_x(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Rearranjando termos e agrupando termos referentes a erros:

$$\begin{aligned} y(t_k) - f^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k) + f_p^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k)\bar{p} &= f_p^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k)p \\ &+ (f_x^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k)v_x(t_{k-1}) + v_x(t_k)). \end{aligned}$$

Ou, na notação que vem sendo adotada:

$$\begin{aligned}
z(t_k) &\triangleq y(t_k) - f^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k) + f_p^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k) \bar{p}, \\
H(t_k) &\triangleq f_p^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k), \\
v(t_k) &\triangleq (f_x^n(y(t_{k-1}), u(t_{k-1}), \bar{p}, \Delta t_k) v_x(t_{k-1}) + v_x(t_k)).
\end{aligned}$$

Admitindo-se que se tenha uma informação a priori para p , \bar{p} , com erro de média nula e matriz de covariâncias \bar{P}_p , obtida do processamento de um lote anterior de medidas ou de uma avaliação a priori, recai-se em situação já conhecida:

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= p + \bar{e}_p, \\
z(t_k) &= H(t_k)p + v(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{20}$$

Exemplo de Aplicação 5.3.3: *Solução Numérica de Sistemas Algébricos* (Rios Neto, 1981; Rios Neto e Pinto, 1987). Seja o caso de otimização de sistemas algébricos não lineares:

$$\textbf{Minimizar: } f(x), x \in \Omega \subset E^n, \quad f(.) \in C^2. \tag{21}$$

$$h(x) = 0, \quad m \times 1, \quad m \leq n,$$

$$\begin{aligned}
\textbf{Sujeito a: } g(x) &\leq 0, \quad p \times 1, \\
h(.), g(.) &\in_s C^2.
\end{aligned} \tag{22}$$

Em uma iteração típica de busca numérica da solução deste problema, busca-se determinar um incremento Δx de modo a:

$$\textbf{Minimizar: } f(\bar{x} + \Delta x). \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{Sujeito a: } h(\bar{x} + \Delta x) &= \alpha h(\bar{x}) + \varepsilon, \\
g_i(\bar{x} + \Delta x) &= \beta g_i(\bar{x}) + \delta_i,
\end{aligned} \tag{24}$$

em que \bar{x} é uma aproximação inicial ou valor de uma iteração anterior, $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$ são fatores de ajuste do passo de busca, dosados de modo a garantir condições de respeito a perturbações lineares, ε, δ_i são erros admissíveis na satisfação dos vínculos, e as equações de vínculos incluem os vínculos de desigualdade ativos na dada iteração, ou seja, considerando que δ_i^t seja limite tolerável de erro para ativar $g_i(x)$, o subconjunto dos vínculos de desigualdade tais que:

$$g_i(\bar{x}) \geq \delta_i^t, \quad i = 1, 2, \dots, I_g. \tag{25}$$

Tomando em uma dada iteração k uma aproximação linearizada para os vínculos e modelando os erros como aleatórios, não correlacionados e distribuídos uniformemente em faixas de tolerância total:

$$\begin{aligned}
(\alpha^k - 1)h(\bar{x}^k) + h_x(\bar{x}^k)\bar{x}^k &= h_x(\bar{x}^k)x^k + \varepsilon^r, \\
(\beta^k - 1)g_i(\bar{x}^k) + g_{ix}(\bar{x}^k)\bar{x}^k &= g_{ix}(\bar{x}^k)x^k + \delta_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, I_g. \\
\text{cov}(\varepsilon^r) &= \text{diag}[e_i^2, i = 1, 2, \dots, m_h], \quad e_i^2 = (\varepsilon_i^t)^2 / 3, \\
\text{cov}(\delta^r) &= \text{diag}[d_i^2, i = 1, 2, \dots, I_g], \quad d_i^2 = (\delta_i^t)^2 / 3.
\end{aligned} \tag{26}$$

Condiccionando a priori que o passo seja na direção oposta do gradiente da função objetivo e limitando a ordem de grandeza do passo a ser de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
-\gamma^k \nabla f^T(\bar{x}^k) + \bar{x}^k &= x^k + \eta^k, \\
\text{cov}(\eta) = \bar{P}^k &= \text{diag}[\bar{P}_{jj}, j = 1, 2, \dots, n].
\end{aligned} \tag{27}$$

Em notação compacta, vê-se que, em cada iteração, o problema fica reduzido a uma estimação de parâmetros:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_b^k &= x + \eta^k, \\
y_i^k &= H_i^k x + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_h + I_g.
\end{aligned} \tag{28}$$

Este problema pode, então, ser resolvido com o estimador da Eq. 5.2(8), repetido a seguir como adequação de notação:

$$\begin{aligned}
K &= \bar{P}^k H^{kT} (H^k \bar{P}^k H^{kT} + R)^{-1}, \\
\bar{x}^{k+1} &= \bar{x}_b^k + K(y^k - H^k \bar{x}_b^k), \\
P &= \bar{P} - KHP \equiv (I_n - KH) \bar{P} (I_n - KH)^T + KRK^T.
\end{aligned} \tag{29}$$

Este estimador pode ser aplicado na sua versão seqüencial (Propriedade 5.2.2).

Para evitar conflitos com a satisfação dos vínculos, que é necessária, o processo de busca deve ter duas fases. Na primeira fase, por onde se deve iniciar, procede-se à aquisição dos vínculos de igualdade, incluindo os vínculos de desigualdade que eventualmente se tornem ativos. Na segunda fase, quando se atingem as faixas de erros para satisfação dos vínculos de igualdade, busca-se caminhar na direção do mínimo; para evitar conflito com os vínculos, relaxa-se a ordem de magnitude do erro de satisfação dos vínculos, de modo a criar prioridade para passo na direção do mínimo. Em seguida se repete a fase um, e assim por diante, até convergência. Para a calibração dos parâmetros de ajuste do passo de busca, pode se usar as condições a seguir, baseadas em critério de máxima verossimilhança, aplicados a favor da segurança, onde o sobre índice k indicando o número da iteração foi omitido, sem perda de entendimento:

(i) Para os parâmetros α e β

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= 1 - \beta = s \\
s &= \text{Min.}\{s_i, i = 1, 2, \dots, m_h + I_g\} \\
s_0 &= 1, \quad s_j^2 h_j^2(\bar{x}) = 3R_j q_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_h, \quad q_j \gg 1, \\
s_{k+m_h}^2 g_k^2(\bar{x}) &= 3R_{k+m_h} q_k, \quad k = 1, 2, \dots, m_h, \quad q_k \gg 1.
\end{aligned} \tag{30}$$

(ii) Para a dispersão de η , de modo a avaliar, calibrar \bar{P} :

$$\sum_{j=1}^n H_{ij}^2 \bar{P}_{jj} = 3R_i q_i,$$

que é resolvido de forma aproximada e a favor da segurança, por:

$$\bar{P}_{jj} = \text{Max}_i \{ (3R_i q_i) / (n_i H_{ij}^2), i = 1, 2, \dots, m_h + I_g, H_{ij} \neq 0 \}, \quad (31)$$

em que n_i é o número de termos não nulos da linha i da matriz H .

(iii) Para o parâmetro γ , em cada iteração:

$$\gamma = \text{Min}_i \{ (3\bar{P}_{ii})^{1/2} / \nabla_i f(\bar{x}), i = 1, 2, \dots, n, \nabla_i f(\bar{x}) \neq 0 \}. \quad (32)$$

Bibliografia e Referências

Bierman, G.J. (1977). *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic Press, New York.

Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley, New York.

Curvo, M., Rios Neto, A. (2003), A New Filter Error Method Applied to Aircraft Parameter Identification, *Anais II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações-DINCON 2003*, ISBN 85-86883-15-8, ITA, São José dos Campos, SP.

Gelb, A., Kasper Jr, J.F., Nash Jr, R.A., Price, C.F. and Sutherland Jr, A.A. (1977). *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Jazwinski, A.H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Kuga, H.K. (1989). *Determinação de Órbitas de Satélites Artificiais Terrestres através de Técnicas de Estimação Combinadas a Técnicas de Suavização de Estado*, Tese Doutorado, INPE, São José dos Campos (INPE-4959-TDL/388).

Kuga, H.K., Rios Neto, A., Orlando, V. (1990). UD Filtering and Smoothing Applied to Orbit Determination, *Mécanique Espatiale: Space Dynamics*, Cepadues-Editions, Toulouse, França.
Liebelt, P.B. (1967). *An Introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, USA.

Luenberger, D.G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, MA.

Pinto, R.L.U.F., Rios Neto, A. (1990). An Optimal Linear Estimation Approach to Solve Systems of Linear Algebraic Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 33, pp. 261–268.

Rios Neto, A. (1981). Filtro de Kalman Aplicado a Solução de Sistemas Lineares e Inversão de Matrizes. *33ª Reunião Anual da SBPC*, Salvador, Bahia, Brazil, comunicação nº 19-A.8.1, p. 94. *Suplemento de Ciência e Cultura*, 33(7).

Rios Neto, A. (1981). Estimação Linear Ótima Aplicada à Geração de Método do Direto de Busca em Otimização de Parâmetros; *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, III (1); 11-14.

Rios Neto, A. e Pinto, R.L.U.F. (1987), A Stochastic Approach to Generate a Projection of the Gradient Type Method; *Anais do VIII Congresso Latino Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais da Engenharia*; PUC, RJ, (INPE-4060-PRE/1019).

Rios Neto, A.; Carvalho, S.V.; Pinto, R.L.U. (1993), An Optimal Linear Estimation Approach to Solve Linear Programming Problems; *Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, UNICAMP-Campinas, SP.

Rios Neto, A., Carvalho, S.V., Pinto, R.L.U. (1993). An Optimal Linear Estimation and Projection of the Gradient Approach to Solve Linear Programming Problems, In: *Anais do XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, São Paulo, SP, pp. 933-937.

Rios Neto, A. (1997). Stochastic Optimal Linear Parameter Estimation and Neural Nets Training in Systems Modeling, *RBCM-J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, 19(2), pp 138-146.

Rios Neto, A., Rios Neto, W. (2000). An Optimal Linear Estimation Approach to the Parallel Solution of Linear Algebraic Systems of Equations, *SBA Controle & Automação*, 11(01), pp. 61-67.

Capítulo 6

Processos Estocásticos: Gauss Markov

6.1 Conceituação Básica

A conceituação de *Processo Estocástico*, no caso de sistemas dinâmicos, vem da necessidade de se lidar com situações em que se têm condições iniciais aleatórias e ou em que há perturbações cujo nível de ignorância e complexidade implica em efeitos não modelados, que são regiões cinzentas em que não se tem a menor ideia de como se localizar. Estas situações levam à necessidade de se modelar o estado destes sistemas como variáveis aleatórias em cada instante. E isto é o que é, no caso em que o tempo é a variável independente, um processo estocástico ou aleatório: uma sucessão de variáveis aleatórias concatenadas, isto é, conjuntamente distribuídas, ao longo do tempo, ou, formalmente, como na definição a seguir.

Definição 6.1.1: Dado (Ω, \mathcal{B}, P) define-se *Processo Estocástico* como sendo uma família de variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas, cujos membros são caracterizados por um ou mais índices que se constituem em parâmetros; assim o processo é uma família de variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas parametrizadas. O caso de maior interesse é o de um único índice, como a seguir.

$$\{ X_t(w) \equiv X(w, t) : t \in T \}. \quad (1)$$

Propriedades 6.1.1: (i) Um processo aleatório fica totalmente caracterizado se para todos os t_i se conhecer as correspondentes densidades conjuntas, isto é:

$$\{ t_i \in T : i = 1, 2, \dots, N, \forall N \} \Rightarrow p_{X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_N}}(x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_N}). \quad (2)$$

(ii) Um processo estocástico pode ser contínuo (C) ou discreto (D) quanto à variável aleatória X e ou contínuo (c) ou discreto (d) quanto ao parâmetro t , sendo os casos de mais interesse em controle de sistemas dinâmicos:

(C+c): processo propriamente dito;

(C+d): sequência.

Exemplos 6.1.1: (i) Seja um sistema massa, mola, amortecedor em que as condições iniciais sejam aleatórias:

$$\{ X(w, t_0) : w \in \Omega, t_0 \text{ dado} \}.$$

Como consequência, sendo $\Phi(t, t_0)$ a matriz de transição de estados:

$$X(w, t) = \Phi(t, t_0) X(w, t_0), \quad t \in T.$$

(ii) Seja uma tmbola, se no instante t_i se der um impulso arbitrário na roda para $i=1,2,...,N$, será gerada a família de variáveis aleatórias:

$$\{X(w, t_i) : w \in \Omega, t_i \in \{t_i : i = 1, 2, \dots, N\}\}.$$

(iii) Seja o caso de um radar para monitoramento de velocidades; estando as medidas em cada instante afetadas por erros aleatórios, então as medidas ao longo do tempo constituem um processo aleatório.

6.2. Sequências de Markov

Ao se tratar problemas da vida real, em geral se discretiza em relação ao tempo. Sistemas dinâmicos satisfazem a condição de que, dadas condições iniciais em dado tempo, então os estados futuros ficam determinados pela solução da equação diferencial que modela a dinâmica. Ou seja, "o presente separa o passado do futuro", isto é, os efeitos do passado estão acumulados no presente.  este tipo de propriedade que caracteriza os chamados processos markovianos, em particular as sequências markovianas, como conceituado a seguir.

Definição 6.2.1: Dada uma sequência aleatória, $X(k)$ (que na verdade  $X(w, k)$, mas que, por conveniência, daqui para diante, se indicará omitindo os $w \in \Omega$, que ficarão subentendidos), diz-se que ela é markoviana se:

$$p_{X(k)/X(k-1), X(k-2), \dots, X(0)}(x(k)/x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)) = p_{X(k)/X(k-1)}(x(k)/x(k-1)). \quad (1)$$

Observação: Por questão de simplificação, daqui para diante considerar-se-:

$$p_X(x) \equiv p(x). \quad (2)$$

Propriedades 6.2.2: (i) Considerando a propriedade markoviana e a definição de densidade condicionada sucessivamente, resulta:

$$\begin{aligned} & p(x(k), x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)) \\ &= p(x(k)/x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)) p(x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)) \\ &= p(x(k)/x(k-1)) p(x(k-1)/x(k-2), \dots, x(0)) p(x(k-2), \dots, x(0)) \\ &= p(x(k)/x(k-1)) p(x(k-1)/x(k-2)) \dots p(x(0)). \end{aligned} \quad (3)$$

(ii) Uma sequência markoviana  dita *estacionária em um sentido restrito* se:

- $p(x(k))$ não muda com o ndice k ;
- $p(x(j), x(k))$ depende apenas da diferença $(k-j)$, isto é, da distância entre k e j .

A sequência  dita *estacionária em um sentido amplo* se para todo k e diferença $(k-j)$:

$$E[X(k)] = \mu = cte, \quad cov(X(j), X(k)) = P(k-j). \quad (4)$$

(iii) Uma sequência markoviana  dita puramente aleatória se:

$$p(x(k)/x(k-1)) = p(x(k)), \forall k. \quad (5)$$

Exemplo 6.2.1: Para o caso da t6mbola, as ocorr6ncias em tentativas sucessivas constituem uma sequ6ncia puramente aleat6ria estacion6ria:

$$W(t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

No entanto, o valor acumulado depois de k ocorr6ncias 6 representado por uma sequ6ncia markoviana:

$$X(k+1) = X(k) + W(k), \quad X(1) = W(1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Defini76o 6.2.2: Uma sequ6ncia 6 dita de Gauss Markov se al6m de markoviana ela tem distribui76es de probabilidade gaussianas, isto 6, se forem gaussianas as densidades de probabilidades $p(x(k))$, $p(x(k+1)/x(k))$.

Propriedades 6.2.2: As propriedades que seguem s6o de extrema import6ncia, conceitual e construtiva, para o desenvolvimento de estimadores no caso de sistemas din6micos discretos ou discretizados.

(i) Uma sequ6ncia de Gauss Markov pode sempre ser representada pelo estado de um sistema din6mico linear de m6ltiplos est6gios, for7ado por uma sequ6ncia puramente aleat6ria, de distribui76o tamb6m gaussiana, e tal que o estado inicial seja gaussiano:

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + \Gamma(k)W(k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

(ii) Propaga76o do valor m6dio:

$$\begin{aligned} E[X(k+1)] &= \Phi(k+1, k)E[X(k)] + \Gamma(k)E[W(k)], \quad k = 1, 2, \dots, \\ \mu(k+1) &= \Phi(k+1, k)\mu(k) + \Gamma(k)\bar{w}(k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

(iii) Propaga76o da matriz de covari6ncias:

$$\begin{aligned} &E[(X(k+1) - \mu(k+1))(X(k+1) - \mu(k+1))^T] \\ &= E[(\Phi(k+1, k)(X(k) - \mu(k)) + \Gamma(k)(W(k) - \bar{w}(k)))(\Phi(k+1, k)(X(k) - \mu(k)) \\ &+ \Gamma(k)(W(k) - \bar{w}(k)))^T]. \end{aligned}$$

Em consequ6ncia de $W(k)$ ser puramente aleat6ria e sendo $cov(X(k)) = P(k)$, $cov(W(k)) = Q(k)$, resulta:

$$P(k+1) = \Phi(k+1, k)P(k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k). \quad (9)$$

6.3 Processos Cont6nuos: Gauss Markov

No controle de sistemas din6micos em malha fechada, com realimenta76o de estado, tem-se que estimar seu estado na malha de realimenta76o. O que se sabe fazer, na pr6tica, 6 lidar com sistemas lineares. Assim, para se estimar o estado de sistemas din6micos n6o lineares, o que se faz 6, reiteradamente, se trabalhar com aproxima76es lineares, quando,

então, se modelam estas aproximações lineares como processos de Gauss Markov, como conceituados a seguir.

Definição 6.3.1: Diz-se que $X(w, t)$ é processo contínuo quando é variável aleatória indexada por t tal que X e t variam continuamente, isto é:

$$\{X(t, w) : X_t(\cdot) \equiv X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow R^l, t_0 \leq t \leq t_f\}. \quad (1)$$

O processo é markoviano se, invés de se necessário o conhecimento de:

$$p(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)), \quad \{t_i : t_0 \leq t_i \leq t_f, i = 1, 2, \dots, N, \forall N\}, \quad (2)$$

basta o conhecimento de:

$$p(x(t), x(\tau)), \quad \{t, \tau\} \subset \{t : t_0 \leq t \leq t_f\}. \quad (3)$$

Como se tem que:

$$p(x(t), x(\tau)) = p(x(t)/x(\tau))p(x(\tau)),$$

conclui-se que basta, equivalentemente, o conhecimento das densidades $p(x(t)/x(\tau))$, $p(x(\tau))$ para todo $\{t, \tau\} \subset \{t : t_0 \leq t \leq t_f\}$.

Propriedade 6.3.1: O processo markoviano é dito branco se satisfaz a propriedade típica de:

$$p(x(t)/x(\tau)) = p(x(t)), \quad \forall \{t, \tau\} \subset \{t : t_0 \leq t \leq t_f\}. \quad (4)$$

Note-se que um processo branco é uma idealização para efeito de modelagem, como a de ponto material em Mecânica. Isto porque, para $|t - \tau|$ suficientemente pequeno, deve haver alguma correlação entre $X(t)$ e $X(\tau)$, isto é, o que aconteceu em τ tem que ter alguma influência em t , por menor que seja $|t - \tau|$; pelo menos é assim que é nos processos da natureza, onde nunca há mudanças instantâneas, para as quais seria necessária quantidade de energia infinitamente grande. No entanto, para perturbações de sistemas dinâmicos em que o intervalo $|t - \tau|$, a partir do qual a correlação é detectada, é desprezível face aos tempos de resposta do sistema dinâmico sujeito às perturbações, então é válido aproximar tais perturbações por uma sequência puramente aleatória que, no limite, para $|t - \tau| \rightarrow 0$, é um processo branco. O bicho preguiça que o diga, quando é perturbado por um coelho!

Propriedade 6.3.2: Efeito de perturbações tipo processos brancos. Considere-se, sem perda de generalidade, o caso de perturbação pura que, no limite, pode ser modelada como do tipo ruído branco. Considere-se que para ocorrências do processo valha que:

$$\dot{x} = w \rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t w d\tau. \quad (5)$$

Onde se admite que para Δt 's suficientemente pequenos, as ocorrências de $w(t)$ são constantes, portanto a integral na Eq. (5) existe, pois qualquer ocorrência do processo $w(t)$ é contínua por partes. Com estes cuidados realistas, para efeitos práticos, pode-se tentar calcular o efeito da perturbação no processo $X(t)$:

$$E[X(t)] = \mu_0 + \int_{t_0}^t \bar{w} d\tau, \quad (6)$$

$$\text{cov}(X(t)) = \text{cov}(X(t_0)) + E\left[\left(\int_{t_0}^t (w - \bar{w}) d\tau\right)\left(\int_{t_0}^t (w - \bar{w})^T d\tau\right)\right].$$

Onde se considerou que $w(t)$ não se correlaciona com $X(t_0)$. O problema que se apresenta é, pois, o cálculo da contribuição da perturbação na covariância de $X(t)$. Para simplificar o algebrismo, considere-se o caso escalar e em que $\bar{w}(t) = 0$, isto é, o caso de um ruído branco. Para um dado sistema perturbado, pode-se, sempre, considerar um Δt bem menor que os tempos de resposta a perturbação deste sistema, de modo que:

$$\int_{t_0}^t w d\tau \cong \sum_{k=0}^K w(k) \Delta t = \sum_{k=0}^K I_w(k) \quad (7)$$

A integral do efeito perturbador pode ser, com a aproximação desejada, vista como uma somatória de pulsos $I_w(k)$. Pode-se, em decorrência, se calcular a dispersão causada pela perturbação ruído branco:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(t)) &= E\left[\int_{t_0}^t w d\tau\right] \int_{t_0}^t w d\xi = E\left[\left(\sum_{k=0}^K I_w(k)\right) \sum_{j=0}^J I_w(j)\right] \\ &= \sum_{k=0}^K E[I_w^2(k)] = \sum_{k=0}^K Q_I(k) = \sum_{k=0}^K (Q_I(k) / \Delta t) \Delta t = \sum_{k=0}^K Q(k) \Delta t \\ &\cong \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t Q(\tau) \delta(\xi - \tau) d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Notar que na Eq. (8) $Q(\tau) \delta(\xi - \tau)$ é que é a variância do ruído, que, portanto, tende a infinito (ver Apêndice II, função impulso unitário, Eq. (I.16)) e que $Q(\tau)$ na verdade é uma “densidade espectral”, o que se evidencia se for considerado que $1/\Delta t$ é uma “frequência” e que:

$$Q(k) = E[I_w^2(k) / \Delta t] = E[w^2(k) \Delta t] = \sigma_w^2(k) / (1 / \Delta t) \quad (9)$$

Como $Q(k)$ é finita, por menor que seja Δt , conclui-se que $\sigma_w^2(k)$ tende para infinito.

Propriedade 6.3.3: Um processo de Gauss Markov pode sempre ser gerado por:

$$\dot{X} = F(t)X + G(t)W(t). \quad (10)$$

onde $X(t_0)$ é dada e gaussiana e $W(t)$ é um processo branco gaussiano, não correlacionado com $X(t_0)$ e entendido como o limite de uma sequência branca, de modo a garantir, para as ocorrências do processo, usando matriz de transição, que:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)w(\tau)d\tau. \quad (11)$$

Propriedade 6.3.4: Dado um processo estocástico gerado por:

$$\dot{X} = F(t)X + G(t)W(t),$$

onde $X(t_0)$ é dada e $W(t)$ é um processo branco, não correlacionado com $X(t_0)$ e entendido como o limite de uma sequência branca, de modo a garantir, para as ocorrências do processo, usando matriz de transição pode-se calcular os valores propagados da media e da matriz de covariâncias, como a seguir.

$$\begin{aligned} \mu(t) &= E[x(t)] = \Phi(t, t_0)E[x(t_0)] + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)E[w(\tau)]d\tau \\ &= \Phi(t, t_0)\mu(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)\bar{w}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Vê-se, pois, que:

$$\dot{\mu} = F(t)\mu + G(t)\bar{w}(t). \quad (13)$$

E, para a matriz de covariâncias:

$$\begin{aligned} cov(X(t)) &= P(t) = cov(\Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)E[w(\tau)]d\tau) \\ &= \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)cov(W(s)W(\tau))G^T(s)\Phi^T(t, s)dsd\tau \\ &= \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)Q(s)\delta(\tau - s)G^T(s)\Phi^T(t, s)dsd\tau \\ &= \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)G(s)Q(s)G^T(s)\Phi^T(t, s)ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Bibliografia

Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley, New York.

Jazwinski, A.H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Gelb, A., Kasper Jr, J.F., Nash Jr, R.A., Price, C.F. and Sutherland Jr, A.A. (1977). *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Liebelt, P.B. (1967). *An Introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, USA.

Papoulis, A. (1965). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill, New York.

Capítulo 7

Estimação de Estado e Controle em Malha Fechada

7.1 Estimação de Estado: Conceitos e Fundamentos

Problema de Estimação Linear

Seja o problema de estimação em que tanto o sistema dinâmico como as observações são modelados como lineares: (i) Dado o sistema dinâmico, modelado como um processo de Gauss Markov

$$\dot{X} = F(t)X + G(t)W(t), \quad (1)$$

onde $W(t)$ é um ruído branco gaussiano, de distribuição conhecida, independente de $X(t_0)$:

$$E[W(t)] = 0, \quad \text{cov}(W(t), W(\tau)) = Q(t)\delta(\tau - t), \quad (2)$$

e para $X(t_0)$ se tem uma aproximação para a distribuição, admitida gaussiana:

$$E[X(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad \text{cov}(X(t_0)) = \bar{P}(t_0). \quad (3)$$

(ii) Dadas as observações de saídas do sistema:

$$y(t_i) = H(t_i)x(t_i) + v(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

em que $y(t_i)$, $m \times 1$, corresponde a ocorrências de:

$$Y(t_i) = H(t_i)X(t_i) + V(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4a)$$

com $V(t_i)$ gaussiano, independente de $X(t)$ e de $W(t)$, com distribuição conhecida:

$$E[V(t_i)] = 0, \quad \text{cov}(V(t_i)) = R(t_i). \quad (5)$$

(iii) O problema que se coloca é o de se estimar um processo $\hat{X}(t_i)$ que seja uma boa aproximação de $X(t_i)$, isto é, de modo que as ocorrências do processo estimado sejam boas aproximações do valor médio do processo que representa o sistema dinâmico e que a dispersão do erro de estimação, isto é, as variâncias (ou desvios padrões), seja suficientemente pequena de modo a garantir as precisões especificadas para navegação ou controle do sistema.

Critérios

Como no caso de estimação de parâmetros, no caso de estimação de estado de sistemas dinâmicos, os critérios são: (a) em média, o erro seja nulo, isto é, um *critério de não tendenciosidade*, e (b) outro para que a dispersão dos erros de estimação seja pequena, isto é, um critério de *mínimo erro quadrático médio* ou *variâncias mínimas*.

$$\begin{aligned} E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))] &= 0, \\ E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \hat{X}(t_i))] &, \text{ para } S > 0, \text{ é mínimo.} \end{aligned} \quad (6)$$

Solução

Conforme visto no caso de estimação de parâmetros a solução é dada pela média condicionada:

$$\hat{x}(t_i) = E[X(t_i) / \{y(t_k) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]. \quad (7)$$

Ou seja, o valor estimado a partir das ocorrências de $Y(t_k)$ observadas e, por sua vez, este valor estimado é uma ocorrência do estimador:

$$\hat{X}(t_i) = E[X(t_i) / \{Y(t_k) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]. \quad (7a)$$

A demonstração segue passos totalmente análogos ao do caso de estimação de parâmetros (seção 5.1), admitindo-se que \hat{X} é um funcional de $\{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}$:

$$\begin{aligned} &E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \hat{X}(t_i))] \\ &= E[E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]]. \end{aligned}$$

Sendo $\mu_{X/Y}(t_i) = E[X(t_i) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]$,

$$\begin{aligned} &E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}] \\ &= E[(X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i) + \mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i) \\ &\quad + \mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}] \\ &= \underbrace{2E[(X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i))^T S (\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]}_0 \\ &\quad + E[(X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i))^T S (X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}] \\ &\quad + E[(\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}] \end{aligned}$$

Voltando e substituindo na expressão original,

$$\begin{aligned}
& E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \hat{X}(t_i))] \\
&= E[E[(X(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (X(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]] \\
&= E[E[(X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i))^T S (X(t_i) - \mu_{X/Y}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]] \\
&+ E[E[(\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]] \\
&= cte + E[E[(\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i))^T S (\mu_{X/Y}(t_i) - \hat{X}(t_i)) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}]].
\end{aligned}$$

Portanto, como se queria demonstrar, o $\hat{X}(t_i)$ minimizante é:

$$\hat{X}(t_i) = \mu_{X/Y}(t_i) = E[X(t_i) / \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}].$$

7.2 Filtro de Kalman: Caso Contínuo Discreto Linear

No que segue, duas abordagens são apresentadas para a dedução do estimador linear ótimo, o Filtro de Kalman, para o caso contínuo discreto: a primeira bayesiana, já que se baseia na propriedade de Bayes; a segunda por analogia com o caso de estimação de parâmetros, que se poderia chamar de abordagem heurística.

Solução Bayesiana:

Para o problema da seção anterior (Eqs. 7.1(1) a 7.1(5)), como demonstrado, a solução para obtenção do estimador ótimo passa pela determinação da função de densidade de probabilidade condicionada:

$$\begin{aligned}
& p(x(t_i) / y^i) \\
& y^i \triangleq \{y(t_k) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ou seja, a densidade de probabilidades condicionada ao conjunto de observações até t_i , correspondentes às ocorrências de:

$$Y^i \triangleq \{Y(tk) : k = 0, 1, 2, \dots, i\}.$$

Considerando a definição de densidade condicionada e a propriedade de Bayes:

$$\begin{aligned}
p(x(t_i) / y^i) &= p(x(t_i) / y(t_i), y^{i-1}) = p(x(t_i), y(t_i), y^{i-1}) / p(y(t_i), y^{i-1}) \\
&= p(y(t_i) / x(t_i), y^{i-1}) p(x(t_i), y^{i-1}) / p(y(t_i), y^{i-1}) \\
&= p(y(t_i) / x(t_i), y^{i-1}) p(x(t_i) / y^{i-1}) p(y^{i-1}) / (p(y(t_i) / y^{i-1}) p(y^{i-1})) \\
&= p(y(t_i) / x(t_i)) p(x(t_i) / y^{i-1}) / p(y(t_i) / y^{i-1}),
\end{aligned}$$

onde se considerou a propriedade markoviana, de modo que:

$$p(y(t_i) / x(t_i), y^{i-1}) = p(y(t_i) / x(t_i)). \tag{2}$$

Ou seja, a determinação da solução depende de se resolver a equação de densidades:

$$p(x(t_i)/y^i) = p(y(t_i)/x(t_i))p(x(t_i)/y^{i-1})/p(y(t_i)/y^{i-1}). \quad (3)$$

Como todas as densidades são gaussianas, ficam, portanto, totalmente caracterizadas pelas médias e covariâncias correspondentes. Assim, a densidade do primeiro membro fica totalmente caracterizada pelo produto das densidades do segundo membro, o que levará à determinação dos valores condicionados do valor médio e matriz de covariâncias, solução do problema de estimação.

Calculando, para cada uma das densidades do segundo membro, as médias e covariâncias, decorrem a média e a covariância para a densidade do primeiro, pela manipulação das expressões exponenciais das distribuições gaussianas.

$$p(y(t_i)/x(t_i)):$$

$$\begin{aligned} Y(t_i) &= H(t_i)X(t_i) + V(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ E[Y(t_i)/X(t_i)] &= E[(H(t_i)X(t_i) + V(t_i))/X(t_i)] = H(t_i)X(t_i), \\ \text{cov}(Y(t_i)/X(t_i)) &= \text{cov}(V(t_i)/X(t_i)) = R(t_i). \end{aligned} \quad (4)$$

$$p(x(t_i)/y^{i-1}):$$

Em decorrência de que:

$$\dot{X} = F(t)X + G(t)W(t),$$

onde $X(t_0)$ é dada e $W(t)$ é um processo branco de média nula, não correlacionado com $X(t_0)$ (e, portanto, não correlacionado com Y^{i-1} , pela propriedade markoviana, já que $X(t_0)$ tem em si acumulado os efeitos do passado) e entendido como o limite de uma sequência branca, de modo a garantir, para as ocorrências do processo, o uso da matriz de transição, permitindo o cálculo dos valores propagados da média e da matriz de covariâncias, como a seguir (ver Eq. 6.3(14)).

$$\begin{aligned} E[X(t_i)/Y^{i-1}] &\triangleq \bar{X}(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1})E[X(t_{i-1})/Y^{i-1}] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)E[W(\tau)/Y^{i-1}]d\tau \\ &= \Phi(t_i, t_{i-1})\hat{X}(t_{i-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E[(X(t_i) - \bar{X}(t_i))(X(t_i) - \bar{X}(t_i))^T / Y^{i-1}] &\triangleq \bar{P}(t_i) \\ &= \Phi(t_i, t_{i-1})P(t_{i-1})\Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(t_i, \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

$$p(y(t_i)/y^{i-1}):$$

$$\begin{aligned} E[Y(t_i)/Y^{i-1}] &= E[(H(t_i)X(t_i) + V(t_i))/Y^{i-1}] = H(t_i)\bar{X}(t_i), \\ E[(Y(t_i) - H(t_i)\bar{X}(t_i))(Y(t_i) - H(t_i)\bar{X}(t_i))^T / Y^{i-1}] &= H(t_i)\bar{P}(t_i)H^T(t_i) + R(t_i). \end{aligned} \quad (7)$$

Montando as correspondentes exponenciais, efetuando os produtos, após alguma manipulação resulta o estimador, através da média e matriz de covariâncias.

$$p(x(t_i)/y^i):$$

$$E[X(t_i)/Y^i] \triangleq \hat{X}(t_i) = (H^T(t_i)R^{-1}(t_i)H(t_i) + \bar{P}^{-1}(t_i))^{-1} (H^T(t_i)R^{-1}(t_i)Y(t_i) + \bar{P}^{-1}(t_i)\bar{X}(t_i)),$$

$$\text{cov}(X(t_i)/Y^i) \triangleq P(t_i) = (H^T(t_i)R^{-1}(t_i)H(t_i) + \bar{P}^{-1}(t_i))^{-1}.$$

E para as ocorrências observadas tem-se o estimador com se operacionalizam os cálculos para se obter a ocorrência estimada do estado:

$$\hat{x}(t_i) = (H^T(t_i)R^{-1}(t_i)H(t_i) + \bar{P}^{-1}(t_i))^{-1} (H^T(t_i)R^{-1}(t_i)y(t_i) + \bar{P}^{-1}(t_i)\bar{x}(t_i)),$$

$$P(t_i) = (H^T(t_i)R^{-1}(t_i)H(t_i) + \bar{P}^{-1}(t_i))^{-1}. \quad (8)$$

Este estimador, usando-se identidades de matrizes (Apêndice III), pode ser colocado em uma forma equivalente, a chamada forma de Kalman:

$$K(t_i) = \bar{P}(t_i)H^T(t_i)(H(t_i)\bar{P}(t_i)H^T(t_i) + R(t_i))^{-1},$$

$$\hat{x}(t_i) = \bar{x}(t_i) + K(t_i)(y(t_i) - H(t_i)\bar{x}(t_i)),$$

$$P(t_i) = \bar{P}(t_i) - K(t_i)H(t_i)\bar{P}(t_i)$$

$$\equiv (I_n - K(t_i)H(t_i))\bar{P}(t_i)(I_n - K(t_i)H(t_i))^T + K(t_i)R(t_i)K^T(t_i). \quad (9)$$

Propriedade 7.2.1: *Propagação da Matriz de Covariâncias: Equação de Riccati.* Usando-se as expressões baseadas na matriz de transição pode-se calcular uma equação diferencial para a propagação da matriz de transição, como desenvolvido a seguir.

$$P(t + \Delta t) = \Phi(t + \Delta t, t)P(t)\Phi^T(t + \Delta t, t) + \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t + \Delta t, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(t + \Delta t, \tau)d\tau.$$

Considerando a equação dinâmica para a matriz de transição e tomando-se uma aproximação de primeira ordem (método de Euler):

$$\dot{\Phi}(\tau, t) = F(\tau)\Phi(\tau, t), \quad \dot{\Phi}(t, t) = I,$$

$$\Phi(t + \Delta t, t) \cong I + F(t)\Delta t.$$

Resultando, pois:

$$P(t + \Delta t) \cong (I + F(t)\Delta t)P(t)(I + F^T(t)\Delta t) + IG(t)Q(t)G^T(t)I\Delta t.$$

A menos de termos de segunda ordem:

$$P(t + \Delta t) \cong P(t) + P(t)F^T(t)\Delta t + F(t)P(t)\Delta t + G(t)Q(t)G^T(t)\Delta t.$$

Passando ao limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (P(t + \Delta t) - P(t)) / \Delta t = \dot{P}(t) = P(t)F^T(t) + F(t)P(t) + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (10)$$

Solução heurística:

No que segue, por simplificação de notação, sempre que não houver possibilidade de confusão, se usará a notação de ocorrência das variáveis e processos aleatórios como, indistintamente, as respectivas variáveis e processos.

Primeira etapa: Filtragem. Começando em t_0 e depois recursivamente para $k = 1, 2, \dots$, tem-se sempre uma situação equivalente de estimação de parâmetros, com informação a priori, já que se tem que resolver o problema de estimar a variável $X(t_k) \triangleq X(k)$ a partir das ocorrências:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= x(k) + \eta(k), \quad E[\eta(k)] = 0, \quad E[\eta(k)\eta^T(k)] = \bar{P}(k), \\ y(k) &= H(k)x(k) + v(k) \quad E[v(k)] = 0, \quad E[v(k)v^T(k)] = R(k), \quad \text{cov}(v(k), \eta(k)) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Aplicando a solução desenvolvida para estimação de parâmetros (Eq. 5.2(8)):

$$\begin{aligned} K(k) &= \bar{P}(k)H^T(k) \left(H(k)\bar{P}(k)H^T(k) + R(k) \right)^{-1} \\ \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + K(k)(y(k) - H(k)\bar{x}(k)), \\ P(k) &= \bar{P}(k) - K(k)H(k)\bar{P}(k) \equiv (I_n - K(k)H(k))\bar{P}(k)(I_n - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k). \end{aligned} \quad (9a)$$

Observação: Note-se que no caso de erros de observação não correlacionados, isto é, $R(k)$ diagonal, pode-se processar o vetor de observação sequencialmente, isto é, componente a componente (ver *Propriedade 5.2.2*).

Segunda etapa: Propagação. Entre t_k e t_{k+1} não há observações de ocorrências e o melhor que se faz, na verdade o necessário, é respeitar os vínculos dinâmicos e calcular os valores condicionados da média e das covariâncias às observações passadas:

$$\begin{aligned} E[x(k+1) / y^k] &\triangleq \bar{x}(k+1) \\ &= \Phi(k+1, k)E[x(k) / y^k] + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)G(\tau)E[w(\tau) / y^k]d\tau \\ &= \Phi(k+1, k)\hat{x}(k). \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} E[(x(k+1) - \bar{x}(k+1))(x(k+1) - \bar{x}(k+1))^T / y^k] &\triangleq \bar{P}(k+1) \\ &= \Phi(k+1, k)P(k)\Phi^T(k+1, k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(k+1, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(k+1, \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (6a)$$

Ou, equivalentemente, integrando numericamente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= F(t)\bar{x}, \quad \bar{x}(t_k^+) = \hat{x}(k), \\ \dot{\bar{P}}(t) &= \bar{P}(t)F^T(t) + F(t)\bar{P}(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \quad \bar{P}(t_k^+) = P(k). \end{aligned} \quad (12)$$

Terceira etapa: Recursividade. Incrementar k , ($k \leftarrow k + 1$) se $k < K$, voltar para primeira etapa.

Algoritmo do Filtro e Considerações Práticas

(i) *Filtragem:* Para um dado $k=0,1,2,\dots$, isto é, t_0, t_1, t_2, \dots , use a estimativa a priori, $\bar{x}(k)$, $\bar{P}(k)$ e a observação $y(k)$ e determine com o algoritmo de filtragem (Eqs. 7.2(9a)) abaixo a estimativa atualizada $\hat{x}(k)$, $P(k)$. Prossiga para o próximo passo, de propagação, caso k não tenha atingido um valor limite.

$$\begin{aligned} K(k) &= \bar{P}(k)H^T(k) \left(H(k)\bar{P}(k)H^T(k) + R(k) \right)^{-1}, \\ \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + K(k) \left(y(k) - H(k)\bar{x}(k) \right), \\ P(k) &= \bar{P}(k) - K(k)H(k)\bar{P}(k) \equiv (I_n - K(k)H(k))\bar{P}(k)(I_n - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k). \end{aligned} \quad (9a)$$

As considerações práticas são quanto ao valor inicial $\bar{P}(0)$ e ao comportamento numérico do algoritmo de filtragem (Eqs. 7.2(9a)) no cálculo de $\hat{x}(k)$, $P(k)$. Para $\bar{x}(t_0)$, em geral se tem uma estimativa inicial que é aceitável, apesar de com erros a favor da segurança, isto é, maiores que na realidade. Para $\bar{P}(0)$ recomenda-se uma estimativa inicial diagonal, em que as variâncias, na diagonal, sejam os quadrados do que seriam erros de primeira ordem para as respectivas componentes do estado, de modo a não destruir hipóteses de linearização e ou evitar tendência de “aprender muito rapidamente o modelo errado e perder sensibilidade para extração de informação de observações futuras”. Para o algoritmo de filtragem recomenda-se o uso de formas fatoradas (Bierman, 1977; Kuga, 1989; Kuga et al, 1990), e, sempre, o uso da forma de Joseph para o cálculo de atualização da matriz de covariâncias dos erros de estimação, isto é, a forma:

$$P(k) = (I_n - K(k)H(k))\bar{P}(k)(I_n - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k). \quad (13)$$

(ii) *Predição:* Entre t_k e t_{k+1} propagam-se as estimativas de t_k , usando-se os vínculos dinâmicos:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \Phi(k+1, k)\hat{x}(k), \\ \dot{\Phi}(\tau, t_k) &= F(\tau)\Phi(\tau, t_k), \quad \dot{\Phi}(t_k, t_k) = I, \\ \bar{P}(k+1) &= \Phi(k+1, k)P(k)\Phi^T(k+1, k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(k+1, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(k+1, \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= F(t)\bar{x}, \quad \bar{x}(t_k^+) = \hat{x}(k), \\ \dot{\bar{P}}(t) &= \bar{P}(t)F^T(t) + F(t)\bar{P}(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \quad \bar{P}(t_k^+) = P(k). \end{aligned} \quad (14a)$$

As considerações práticas são quanto ao método de propagação numérica das estimativas e à calibração da densidade espectral ou “magnitude” do ruído $w(t)$, através da matriz $Q(\tau)$. Quanto ao método de propagação das estimativas, pode-se usar a matriz de transição com um método de integração numérica de baixa ordem; por exemplo, o método de Euler, tomando-se aproximações trapezoidais para a integral de propagação da matriz de covariâncias, com $Q(\tau)$ constante ao longo do intervalo de discretização, tanto para situações em que o intervalo de discretização $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ é suficientemente pequeno, e ou em que o sistema tem tempo de resposta a perturbações muito maior que o intervalo de discretização. Para sistemas rápidos, isto é, com tempos de resposta próximos ao intervalo de discretização, pode-se usar um integrador de pacote computacional, mas ainda assim de ordem baixa: em geral um integrador Runge Kutta de quarta ordem, com $Q(\tau)$ constante ao longo do intervalo de discretização. Quanto à calibração de $Q(\tau)$ ela é necessária, para que o estimador não perca a sensibilidade para extração de informação de observações futuras, devido à queda acentuada das estimativas dos erros de estimação, isto é, das variâncias estimadas. Situação esta que ocorre tanto pelo comportamento numérico do filtro (filtragem e propagação) como por erros de modelagem, que implicam na tendência de se aprender muito rapidamente o modelo errado (Jazwinski, 1970). A dosagem de incerteza propiciada pelo ruído, para manter a sensibilidade de extração de informação das observações, pode ser feita de forma heurística, envolvendo algum esforço de calibração (sempre dependente do problema e do usuário). Há também técnicas adaptativas, que serão tratadas mais adiante, recomendáveis nas situações em que o problema de erros de modelagem é mais acentuado. Uma técnica heurística bastante simples, sugerida por Gelb et al (1977), é apresentada a seguir. Considerando o ruído branco como o limite de uma sequência branca, para $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ suficientemente pequeno, pode-se tomar a aproximação, para os termos da diagonal da matriz de densidade espectral $Q(\tau)$, considerada constante em $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$:

$$q_{j_w} \cong (\Delta x_j(t_{k+1}, t_k))^2 / \Delta t_k \quad (15)$$

Onde, dada a natureza de ruído branco de $w(t)$, é razoável admitir que sua ação é da forma aditiva pura na equação dinâmica, de modo que w_{j_w} perturba a componente j na equação dinâmica e $\Delta x_j(t_{k+1}, t_k)$ é avaliada de modo a grosseiramente representar a incerteza introduzida pela possível faixa de variação de w_{j_w} no intervalo $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ entre observações (Rios Neto e Cruz, 1985).

7.3 Filtro de Kalman: Caso Contínuo Discreto Não Linear

Problema de Estimação Não Linear:

O tratamento do caso não linear, mais realista e de maior interesse prático, será a partir de abordagem de perturbação linear reiterativa, de modo a reduzi-lo ao caso linear em uma iteração típica. Uma característica distintiva na abordagem reiterativa é que as reiterações se dão ao longo do tempo, de um intervalo de discretização para o outro, como se verá no que segue.

Neste caso, o problema é estimar o processo estocástico correspondente a um sistema dinâmico não linear com modelagem dada, a partir de processo estocástico observado a

menos de erros aditivos de sensores, processo este que se relaciona não linearmente com o processo a ser estimado, como a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f(X, t) + G(t)W(t), \\ Y(t_i) &= h(X, t_i) + V(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1}$$

Onde $f(.,.)$, $G(.)$ são funções fixas e suficientemente regulares para garantir as soluções do sistema dinâmico ao se lidar com ocorrências, em que sempre se admitirá que a aleatoriedade ocorre para as condições iniciais no intervalo de discretização e que $W(t)$ é um processo branco de média nula, não correlacionado com o estado, para valores passados do tempo, e entendido como o limite de uma sequência branca, de modo a garantir, para as ocorrências do processo, as soluções aproximadas das equações dinâmicas, incluindo o uso da matriz de transição, permitindo o cálculo dos valores propagados da média e da matriz de covariâncias; $X(t_0)$ é dada através de informações a priori, através de valores aproximados de sua média e covariâncias.

Admitindo-se que se conheça uma solução nominal, $\bar{x}(t)$, e que as ocorrências $x(t)$, de $X(t)$, são próximas desta solução nominal, pode-se tomar uma aproximação linear:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, t), \quad x(t) = \bar{x}(t) + \delta x(t), \\ \dot{\bar{x}} + \delta \dot{x} &= f(\bar{x} + \delta x, t) + G(t)w(t), \\ \delta \dot{x} &= f_x(\bar{x}, t)\delta x + G(t)w(t).\end{aligned}$$

Em notação mais conveniente:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x} &= F(t)\delta x + G(t)w(t), \\ F(t) &\triangleq f_x(\bar{x}, t).\end{aligned}\tag{2}$$

De forma análoga para as observações:

$$\begin{aligned}\bar{y}(t_i) &= h(\bar{x}(t_i), t_i), \quad y(t_i) = \bar{y}(t_i) + \delta y(t_i), \\ \bar{y}(t_i) + \delta y(t_i) &= h(\bar{x}(t_i) + \delta x(t_i), t_i) + v(t_i), \\ \delta y(t_i) &\cong h_x(\bar{x}(t_i), t_i)\delta x(t_i) + v(t_i).\end{aligned}$$

Em notação mais conveniente:

$$\begin{aligned}\delta y(t_i) &= H(t_i)\delta x(t_i) + v(t_i), \\ H(t_i) &\triangleq h_x(\bar{x}(t_i), t_i).\end{aligned}\tag{3}$$

Na prática, duas situações podem ser consideradas:

(i) *Filtro Linearizado*: neste caso $\bar{x}(t)$ pré-estabelecida é mantida ao longo do intervalo de tempo da estimação, isto é, ao longo de todos os subintervalos de discretização.

(ii) *Filtro Estendido de Kalman*: neste caso em cada t_i^+ :

$$\bar{x}(t_i^+) = \hat{x}(t_i). \quad (4)$$

Esta é a condição inicial para gerar $\bar{x}(t)$ em $t_i^+ \leq t \leq t_{i+1}$, redefinindo a trajetória nominal, usando-se a última informação de estimação, isto é, caracterizando uma reiteração ao longo dos intervalos de discretização do tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, t), \\ \bar{x}(t_i^+) &= \hat{x}(t_i), \quad t_i^+ \leq t \leq t_{i+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Algoritmo do Filtro e Considerações Práticas

(i) *Filtragem*: Para um dado $i=0,1,2,\dots$, isto é, t_0, t_1, t_2, \dots , use a estimativa a priori, $\bar{x}(t_i), \bar{P}(t_i)$ e a observação $y(t_i)$ e determine com o algoritmo de filtragem abaixo a estimativa atualizada $\hat{x}(t_i), P(t_i)$. Prossiga para o próximo passo, de propagação, caso i não tenha atingido um valor limite.

$$\begin{aligned} K(t_i) &= \bar{P}(t_i)H^T(t_i)(H(t_i)\bar{P}(t_i)H^T(t_i) + R(t_i)), \\ \hat{x}(t_i) &= \bar{x}(t_i) + K(t_i)(y(t_i) - h(\bar{x}(t_i))), \\ P(t_i) &= \bar{P}(t_i) - K(t_i)H(t_i)\bar{P}(t_i), \\ &\equiv (I_n - K(t_i)H(t_i))\bar{P}(t_i)(I_n - K(t_i)H(t_i))^T + K(t_i)R(t_i)K^T(t_i). \end{aligned} \quad (6)$$

As considerações práticas, como no caso do filtro linear, são quanto ao valor inicial $\bar{P}(0)$ e ao comportamento numérico do algoritmo de filtragem no cálculo de $\hat{x}(t_i), P(t_i)$. Para $\bar{x}(t_0)$, em geral se tem uma estimativa inicial que é aceitável, apesar de com erros a favor da segurança, isto é, maiores que na realidade. Para $\bar{P}(0)$ recomenda-se uma estimativa inicial diagonal, em que as variâncias, na diagonal, sejam os quadrados do que seriam erros de primeira ordem para as respectivas componentes do estado, de modo a não destruir hipóteses de linearização e ou evitar tendência de “aprender muito rapidamente o modelo errado e perder sensibilidade para extração de informação de observações futuras”. Para o algoritmo de filtragem, recomenda-se o uso de formas fatoradas (Bierman, 1977; Kuga, 1989; Kuga et al, 1990), e, sempre, o uso da forma de Joseph para o cálculo de atualização da matriz de covariâncias dos erros de estimação.

(ii) *Predição*: Entre t_i e t_{i+1} propagam-se as estimativas de t_i , usando-se os vínculos dinâmicos:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_i^+) = \hat{x}(t_i), \quad t_i^+ \leq t \leq t_{i+1}, \\ \dot{\Phi}(\tau, t_i) &= F(\tau)\Phi(\tau, t_i), \quad \Phi(t_i, t_i) = I, \\ \bar{P}(t_{i+1}) &= \Phi(t_{i+1}, t_i)P(t_i)\Phi^T(t_{i+1}, t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(t_{i+1}, \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_i^+) = \hat{x}(t_i), \quad t_i^+ \leq t \leq t_{i+1}, \\ \dot{\bar{P}}(t) &= \bar{P}(t)F^T(t) + F(t)\bar{P}(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \quad \bar{P}(t_k^+) = P(k). \end{aligned} \quad (7a)$$

As considerações práticas, como no caso do filtro linear, a menos de pequenos ajustes, são quanto ao método de propagação numérica das estimativas e à calibração da densidade espectral ou “magnitude” do ruído $w(t)$, através da matriz $Q(\tau)$. Quanto ao método de propagação da estimativa das covariâncias, pode-se usar a matriz de transição com um método de integração numérica de baixa ordem; por exemplo, o método de Euler, tomando-se aproximações trapezoidais para a integral, com $Q(\tau)$ constante ao longo do intervalo de discretização, tanto para situações em que o intervalo de discretização $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ é suficientemente pequeno, e ou em que o sistema tem de tempo de resposta a perturbações muito maior que o intervalo de discretização. Para sistemas rápidos, isto é, com tempos de resposta próximos ao intervalo de discretização, pode-se usar um integrador de pacote computacional, mas ainda assim de ordem baixa: em geral um integrador Runge Kutta de quarta ordem, com $Q(\tau)$ constante ao longo do intervalo de discretização. Quanto à calibração de $Q(\tau)$ ela é necessária, para que o estimador não perca a sensibilidade para extração de informação de observações futuras, devido à queda acentuada das estimativas dos erros de estimação, isto é, das variâncias estimadas. Situação que ocorre tanto pelo comportamento numérico do filtro (filtragem e propagação) como por erros de modelagem, que implicam na tendência de se aprender muito rapidamente o modelo errado (Jazwinski, 1970). A dosagem de incerteza propiciada pelo ruído, para manter a sensibilidade de extração de informação das observações, pode ser feita de forma heurística, envolvendo algum esforço de calibração (sempre dependente do problema e do usuário). Há também técnicas adaptativas, que serão tratadas mais adiante, recomendáveis nas situações em que o problema de erros de modelagem é mais acentuado. Uma técnica heurística bastante simples, sugerida por Gelb et al (1977), é apresentada a seguir. Considerando o ruído branco como o limite de uma sequência branca, para $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ suficientemente pequeno, pode-se tomar a aproximação, para os termos da diagonal da matriz de densidade espectral $Q(\tau)$, considerada constante em $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$:

$$q_{j_w} \cong (\Delta x_j(t_{i+1}, t_i))^2 / \Delta t_i. \quad (15)$$

Onde, dada a natureza de ruído branco de $w(t)$, é razoável admitir que sua ação é da forma aditiva pura na equação dinâmica, de modo que w_{j_w} perturba a componente j na equação dinâmica e $\Delta x_j(t_{i+1}, t_i)$ é avaliada de modo a grosseiramente representar a incerteza introduzida pela possível faixa de variação de w_{j_w} no intervalo $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ entre observações (Rios Neto e Cruz, 1985).

Exemplo de aplicação 7.3.1: Navegação de veículos (marítimos, terrestres e aeroespaciais) inclusive navegação por satélites (GPS) (Kaplan and Hegarty, 2006).

Referência de aplicação 7.3.1: Negreiros de Paiva (1988) usou o filtro estendido de Kalman e modelos parametrizados simples de órbita para a determinação autônoma a bordo de satélites usando GPS.

Referência de aplicação 7.3.2: Pinheiro (1989) e Pinheiro e Rios Neto (1990) usaram o Filtro Estendido de Kalman com um modelo semi-analítico de órbita para desenvolver procedimento autônomo sequencial de determinação de órbita de satélite geoestacionário, testando-o com dados reais do satélite Brasilsat A1 de telecomunicações.

Referência de aplicação 7.3.3: Marques Filho (2005) e Marques Filho, Kuga e Rios Neto (2006) aplicaram o Filtro Estendido de Kalman para desenvolver solução de navegação através de um sistema integrado GPS-INS baseado em IMU não-giroscópica de baixo custo.

7.4 Métodos Adaptativos em Estimação de Estado

Modelos são só representações aproximadas de situações da realidade. Além disso, quando implementados computacionalmente, cometem-se erros numéricos, cumulativamente com os erros de modelagem; assim, mesmo quando se tem provas matemáticas de convergência, que são relativas a modelos, não se tem garantia de bons resultados na implementação numérica, para se obter soluções aproximadas para problemas da vida real.

Em aplicações práticas é comum acontecer situação onde se tem um modelo de trabalho para a dinâmica do processo de estado em que há efeitos não modelados. Isto ocorre ou pela necessidade de se trabalhar com modelos simplificados, em geral linearizados, por condições de implementação em tempo real, ou porque há mesmo dificuldade de se incorporar toda a complexidade do mundo real no modelo dinâmico.

No caso de estimação de estado, o Filtro de Kalman e suas extensões para tratar o caso não linear, são extremamente sensíveis a erros de modelagem e de computação numérica, Daí a necessidade dos métodos adaptativos, tratados a seguir.

7.4.1 Compensação do Modelo Dinâmico

Neste caso, para evitar divergência tenta-se estimar os efeitos não modelados, ou seja, adota-se uma abordagem de compensação do modelo dinâmico. O que se faz é aproximar os efeitos não modelados por um processo de primeira ordem de Gauss Markov (e.g. Tapley e Ingram, 1973; Rios Neto e Tapley, 1975; Rios Neto e Cruz, 1985; Cruz e Henriques, 1998; Henriques e Cruz, 2000). Assim, naquelas componentes da dinâmica em que há ‘acelerações não modeladas’, se inclui um termo de compensação modelado por um processo de primeira ordem de Gauss Markov:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= f_j(x, t) + \varepsilon_{j_d} + G_j(t)w(t), \\ \dot{\varepsilon}_{j_d} &= -(1/\tau_{j_d})\varepsilon_{j_d} + w_{j_d}^\varepsilon, \\ \dot{\tau}_{j_d} &= w_{j_d}^\tau,\end{aligned}\tag{1}$$

onde $j_d = 1, 2, \dots, n_d$, o número de componentes do vetor de acelerações não modeladas; $w_{j_d}^\varepsilon$ e $w_{j_d}^\tau$ são ruídos brancos, independentes dos estados iniciais e dos ruídos de observação. Definindo-se um estado estendido $x^e = (x^T : \varepsilon^T : \tau^T)^T$, tem-se, em correspondência, um sistema dinâmico compensado da forma:

$$\dot{x}^e = f^e(x, t) + G^e(t)w^e(t).\tag{2}$$

Recai-se, portanto, no caso do Filtro Estendido de Kalman. A experiência mostra que não é difícil calibrar os valores iniciais das constantes de tempo τ , pois para um dado sistema se tem uma ideia grosseira dos tempos de resposta envolvidos, que podem ser usados junto com correspondentes estimativas de variâncias iniciais que representem o nível de dispersão do erro de avaliação (Rios Neto e Cruz, 1985). Para calibrar a magnitude dos ruídos, pode-se usar abordagem heurística (ver seção 7.3) ou então, ao custo de mais complexidade numérica, uma abordagem adaptativa para estimação da magnitude dos ruídos, como, por exemplo, a apresentada a seguir.

Referências de aplicação 7.3.1: Tapley e Ingram (1973) e Rios Neto e Tapley (1975) utilizaram a técnica de compensação do modelo dinâmico no caso de determinação de órbita do módulo lunar em missão Apolo e determinação de órbita de satélites terrestres de baixa altitude, respectivamente.

Referências de aplicação 7.3.2: Negreiros de Paiva (1980) e Rios Neto e Negreiros de Paiva (1983) usaram método analítico aproximado e o método de compensação dinâmica para viabilizar estimador de órbita de satélites em tempo real.

Referências de aplicação 7.3.3: Cruz (1981) e Rios Neto e Cruz (1985) utilizaram o método de compensação do modelo dinâmico para desenvolver controle adaptativo aplicado ao caso de pilotagem de embarcação em canal estreito, com perturbação de vento e corrente.

Referências de aplicação 7.3.4: Cruz e Henriques (1998) e Henriques e Cruz (2000) aplicaram o método de compensação do modelo dinâmico para o controle robusto de posicionamento de braços robóticos.

7.4.2 Estimação Adaptativa do Ruído de Estado

A dosagem do nível de ruído no estado é necessária, de modo a se ter condições de controlabilidade, para a convergência do Filtro de Kalman, especialmente quando há erros de modelagem. A incerteza propiciada pelo ruído, através da matriz de covariâncias dos erros da estimativa propagada, permite sensibilidade para se continuar tirando informação das novas observações e prevenir a divergência. Os trabalhos pioneiros de Jazwinski (1969) e de Mehra (1970, 1972) indicaram e desenvolveram maneiras de se avaliar esta dosagem, com base na informação contida no processo de inovação, isto é, no processo do resíduo de observações. Ainda na década de setenta, outras variantes explorando a informação contida no processo de inovação foram desenvolvidas (Carew e Bélanger, 1973; Bélanger, 1974; Myers e Tapley, 1976). Retomando e estendendo o trabalho de Jazwinski (1969), Rios Neto e Kuga (1982, 1985) desenvolveram procedimento que mantém a abordagem estocástica ao tratar o resíduo de observação, desenvolvendo um algoritmo para ajuste do nível de ruído que é uma filtragem de Kalman. O resultado é um procedimento com adequação para aplicações em tempo real e bom desempenho (e.g. Nascimento Jr, 1988; Nascimento Jr et al, 1990).

Considere-se a aproximação linear e discretizada para propagação do processo erro de estimação:

$$\begin{aligned}\Delta x(t_i) &= \Phi(t_i, t_{i-1}) \Delta x(t_{i-1}) + \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) G(\tau) d\tau \right) w(t_i) \\ &= \Phi(t_i, t_{i-1}) \Delta x(t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1}) w(t_i), \\ \bar{P}(t_i) &= \Phi(t_i, t_{i-1}) P(t_{i-1}) \Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1}) Q(t_i) \Gamma^T(t_i, t_{i-1}),\end{aligned}\tag{3}$$

onde $\Delta x(t_{i-1}) = x(t_{i-1}) - \hat{x}(t_{i-1})$; e o processo do ruído de estado foi aproximado por uma sequência de ruído branco, com $w(t_i) \sim N(0, Q(t_i))$, $Q(t_i) = \text{diag}\{q_k(t_i): k=1,2,\dots,n_w\}$.

As variâncias $q_k(t_i)$ devem ser estimadas para ajustar o nível de ruído. Definindo-se os processos resíduos de observação, para as $j=1,2,\dots,m$ componentes do vetor de observação:

$$\begin{aligned} r_j(t_i) &= y_j(t_i) - H_j(t_i)\bar{x}(t_i) = H_j(t_i)(\Phi(t_i, t_{i-1})\Delta x(t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1})w(t_i)) + v_j(t_i), \\ r_j^a(t_i) &= r_j(t_i) - v_j(t_i) = H_j(t_i)(\Phi(t_i, t_{i-1})\Delta x(t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1})w(t_i)), \end{aligned} \quad (4)$$

onde $r_j^a(t_i)$ é a j -ésima componente do processo resíduo atual, ou seja, do processo resíduo sem erro de observação. Da hipótese de distribuições gaussianas, para os processos de estado e ruídos de estado e observação, resulta que o processo de resíduo atual é também gaussiano. Adotando-se um critério de consistência estatística entre os valores ocorridos deste processo e suas respectivas variâncias, que seja o de maximizar a probabilidade de tais ocorrências, ou seja, um critério de máxima verossimilhança (Jazwinski, 1969), tem-se:

$$(r_j^a(t_i))^2 = E[(r_j^a(t_i))^2]. \quad (5)$$

Desta relação tem-se informação a ser explorada para se estimar o nível de ruído. Seu desenvolvimento permite colocá-la na forma de um pseudo vetor de observações, resultando para uma componente genérica:

$$z_j(t_i) = M_j(t_i)q(t_i) + v_j^q(t_i). \quad (6)$$

Impondo limite à ordem de magnitude do resíduo adotado para os cálculos, por questão de respeito à hipótese de perturbação linear, no caso de problema não linear, ou de pequenas perturbações, mesmo no caso de problema linear e ou evitar o efeito nocivo de realizações ocasionais e locais de observações com erros anormalmente elevados:

$$r_j^c(t_i) = \text{Min}\{r_j(t_i)/3(R_{jj}(t_i))^{1/2}\}, \quad (7)$$

resultam em (6):

$$\begin{aligned} z_j(t_i) &= (r_j^c(t_i))^2 - H_j(t_i)\Phi(t_i, t_{i-1})P(t_{i-1})\Phi^T(t_i, t_{i-1})H_j^T(t_i), \\ M_j(t_i) &= ((\sum_{k=1}^n H_{jk}(t_i)\Gamma_{k1})^2 : (\sum_{k=1}^n H_{jk}(t_i)\Gamma_{k2})^2 : \dots : (\sum_{k=1}^n H_{jk}(t_i)\Gamma_{kn_w})^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Dado que se está considerando aproximação linear para a propagação do processo erro de estimação, consistentemente, toma-se uma aproximação linear para as ocorrências de erro $v_j^q(t_i)$:

$$\begin{aligned} v_j^q(t_i) &= -2r_j(t_i)v_j(t_i) + (v_j(t_i))^2 \cong -2r_j(t_i)v_j(t_i), \\ R^q(t_i) &= \text{cov}(v^q(t_i)) = \text{diag}\{4(r_j(t_i))^2 R_{jj}(t_i): j=1,2,\dots,m\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Resulta, pois, que a distribuição do ruído da pseudo observação é $v_j^q(t_i) \sim N(0, 4(r_j(t_i))^2 R_{jj}(t_i))$.

Para finalizar as condições para a calibração do ruído de estado, de modo a trata-lo como a de um problema estocástico de estimação ótima, é preciso modelar como estocástico o processo das variâncias deste ruído. A aproximação do processo de ruído no estado por uma sequência de Gauss Markov branca implica ser razoável que:

$$q(t_i) = q(t_{i-1}) + w^q(t_i). \quad (10)$$

Em consequência:

$$\bar{q}(t_i) = \hat{q}(t_{i-1}), \quad \bar{P}^q(t_i) = P^q(t_{i-1}) + Q^q(t_i), \quad (11)$$

onde $cov(w^q(t_i)) = Q^q(t_i) = diag.\{q_k^q(t_i) : k = 1, 2, \dots, n_w\}$. Para implementar o modelo de propagação é preciso se conhecer as variâncias $q_k^q(t_i)$, assim como se ter estimativas de valores iniciais. Para não se cair em um círculo vicioso, tem-se que fazer uma avaliação heurística destas variâncias e condições iniciais. A experiência tem demonstrado (Rios Neto e Kuga, 1985) que é razoável se usar a aproximação:

$$q_k^q(t_i) = Max.\{(\bar{q}_k(t_i)/3)^2, 10^{-2p}\}, \quad (12)$$

onde p é o número de significativos do computador usado. Para os valores iniciais é razoável se tomar:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t_0) &= 0, \quad P^q(t_0) = diag.\{P_{j_w j_w}^q(t_0) : j_w = 1, 2, \dots, n_w\}, \\ P_{j_w j_w}^q(t_0) &= (\alpha \bar{P}_{jj}(t_0) / \Delta^2 t_1)^2, \quad \alpha < 1, \end{aligned} \quad (13)$$

onde α deve ser calibrado de acordo com o problema; o razoável é toma-lo suficientemente pequeno de modo que $\alpha \bar{P}_{jj}(t_0)$ represente a variância do erro tolerado e ou conseguido para a estimativa $\hat{x}(t_i)$.

Algoritmo do Filtro de Estimação do Ruído

(i) *Inicialização*: Para os valores iniciais, heurísticamente se assumem:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t_0) &= 0, \quad P^q(t_0) = diag.\{P_{j_w j_w}^q(t_0) : j_w = 1, 2, \dots, n_w\}, \\ P_{j_w j_w}^q(t_0) &= (\alpha \bar{P}_{jj}(t_0) / \Delta^2 t_1)^2, \quad \alpha < 1, \end{aligned}$$

α calibrado de acordo com o problema, sendo razoável toma-lo suficientemente pequeno de modo que $\alpha \bar{P}_{jj}(t_0)$ represente a variância do erro tolerado e ou conseguido para a estimativa $\hat{x}(t_i)$.

(ii) *Predição*: Para $i=1, 2, \dots$, geram-se numericamente as estimativas a priori, a partir da propagação dinâmica das estimativas em t_{i-1} :

$$\bar{q}(t_i) = \hat{q}(t_{i-1}), \quad \bar{P}^q(t_i) = P^q(t_{i-1}) + Q^q(t_i),$$

$$Q^q(t_i) = \text{diag}\{q_k^q(t_i) : k = 1, 2, \dots, n_w\}, \quad q_k^q(t_i) = \text{Max}\{(\bar{q}_k(t_i)/3)^2, 10^{-2p}\}.$$

(iii) *Atualização*: Para atualizar a estimativa, usam-se a estimativa a priori, $\bar{q}(t_i)$, $\bar{P}^q(t_i)$, e a ocorrência da pseudo observação $z(t_i)$, com a informação da matriz de covariâncias dos erros das pseudo informações, $R^q(t_i) \text{diag}\{4(r_j(t_i))^2 R_{jj}(t_i) : j = 1, 2, \dots, m\}$:

$$K^q(t_i) = \bar{P}^q(t_i) M^T(t_i) (M(t_i) \bar{P}^q(t_i) M^T(t_i) + R^q(t_i)),$$

$$\hat{q}(t_i) = \bar{q}(t_i) + K^q(t_i) (z(t_i) - M(t_i) \bar{q}(t_i)),$$

$$\hat{q}_{j_w}(t_i) = \text{Max}\{\hat{q}_{j_w}(t_i), 0\},$$

$$P^q(t_i) = \bar{P}^q(t_i) - K^q(t_i) M(t_i) \bar{P}^q(t_i)$$

$$\equiv (I_n - K^q(t_i) M(t_i)) \bar{P}^q(t_i) (I_n - K^q(t_i) M(t_i))^T + K^q(t_i) R^q(t_i) K^{qT}(t_i).$$

Referências de aplicação 7.4.1: Brinati (1976) e Brinati e Rios Neto (1977) aplicaram procedimento desenvolvido por Jazwinski (1970) em conjunção com Filtro Estendido de Kalman para identificação dos coeficientes hidrodinâmicos de navios.

Referências de aplicação 7.4.2: Kuga (1981) aplicou o procedimento de estimação adaptativa do ruído no estado para estimação de órbitas de baixa altitude com modelos simplificados da dinâmica orbital.

Referências de aplicação 7.4.3: Cardenuto (1984), Cardenuto, Rios Neto e Kuga (1984); Ferraresi (1987) e Ferraresi, Rios Neto e Orlando (1986) aplicaram o procedimento adaptativo de ruído em sistemas de navegação inerciais auxiliados por sensores não inerciais, para navegação de atitude de satélites do tipo sensorimento remoto com controle ativo de atitude.

Referências de aplicação 7.4.4: Trabasso (1985) e Rios Neto, Trabasso e Orlando (1987) aplicaram o procedimento adaptativo de ruído em sistemas de navegação inerciais não giroscópicos para filtragem de ruídos da unidade inercial acelerométrica.

Referências de aplicação 7.4.5: Nowosad, Rios Neto e Campos Velho (2000) usaram o Filtro Estendido de Kalman combinado com procedimento adaptativo de ruído para assimilação de dados meteorológicos.

7.5 Estimação de Estado com Abordagem Virtual de Controle

Em situações em que há grande desconhecimento do modelo do sistema dinâmico do qual se quer estimar o estado, porém em que há um elevado nível de informação local nas observações feitas, o procedimento a seguir é especialmente recomendado; ele pode ser uma alternativa competitiva ao de *Compensação do Modelo Dinâmico* (Seção 7.4.1). Neste procedimento explora-se a condição de dualidade entre a função de estimação e controle para se transformar o problema de estimação de estado em um problema de rastreamento das observações, através da estimação de um controle virtual (Fleury, 1985; Fleury e Rios Neto, 1986, 1987). Sem a necessidade de aumentar a dimensão do vetor de estado, o procedimento, a partir de condições de observabilidade existentes nas observações, condiciona controlabilidade, de modo a efetivamente estimar efeitos não modelados, através do controle virtual e, ao mesmo tempo, estimar o estado de sistema dinâmico.

Assim, para o problema de estimar o processo estocástico correspondente a um sistema dinâmico não linear com modelagem dada aproximada:

$$\dot{X} = f(X, t) + \bar{G}(t)W(t), \quad (1)$$

onde $W(t)$ é um ruído branco gaussiano, de distribuição conhecida, independente de $X(t_0)$:

$$E[W(t)] = 0, \quad \text{cov}(W(t), W(\tau)) = Q(t)\delta(\tau - t), \quad (2)$$

e onde para $X(t_0)$ se tem uma aproximação para a distribuição, admitida gaussiana:

$$E[X(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad \text{cov}(X(t_0)) = \bar{P}(t_0); \quad (3)$$

dadas as observações de saídas do sistema:

$$y(t_i) = H(t_i)x(t_i) + v(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

em que $y(t_i)$, $m \times 1$, corresponde a ocorrências de:

$$Y(t_i) = H(t_i)X(t_i) + V(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4a)$$

com $V(t_i)$ gaussiano, independente de $X(t)$ e de $W(t)$, com distribuição conhecida:

$$E[V(t_i)] = 0, \quad \text{cov}(V(t_i)) = R(t_i); \quad (4b)$$

o procedimento proposto, conforme Fleury (1985) e Fleury e Rios Neto (1987), é o de estimar um "controle virtual", $u(t)$, de modo a forçar o estado controlado a rastrear as ocorrências das observações e ser, assim, uma boa aproximação de estado verdadeiro. Ou seja, definindo virtualmente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= f(x_c, t) + G(t)u(t), \\ \dot{\bar{x}}_c &= f(\bar{x}_c, t), \quad \bar{x}_c(t_i^+) = \hat{x}(t_i), \quad t_i^+ \leq t \leq t_{i+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

considera-se o controle, $u(t)$, como constante por passo e usa-se o resíduo das observações para calcular a ação de controle de modo a zerar este resíduo a menos dos erros de observação. Enfim, transforma-se o problema, em cada passo, em uma estimação de parâmetro correspondente a ação de controle constante por passo, conforme desenvolvimento a seguir.

Procedimento de Estimação com Controle Virtual:

Para se calcular a ação de controle para correção da trajetória nominal de controle, admitindo que em um passo típico esta correção seja de primeira ordem, considera-se a perturbação linear do estado controlado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= f(x_c, t) + G(t)u(t), \\ \Delta \dot{x}_c &= f_x(\bar{x}_c, t)\Delta x_c + G(t)u(t), \quad x_c(t_i^+) = \bar{x}_c(t_i^+) = \hat{x}(t_i), \Delta x_c(t_i^+) = 0, \quad t_i^+ \leq t \leq t_{i+1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Calcula-se a ação de controle de modo a satisfazer:

$$\begin{aligned}\Delta x_c(t_{i+1}) &\cong \Delta x(t_{i+1}), \\ y(t_{i+1}) &= h(\bar{x}_c(t_{i+1}) + \Delta x_c(t_{i+1}), t_{i+1}) + v(t_{i+1}), \\ \Delta y(t_{i+1}) &= H(t_{i+1})\Delta x_c(t_{i+1}) + v(t_{i+1}), \\ H(t_{i+1}) &\triangleq h_x(\bar{x}_c(t_{i+1}), t_{i+1}).\end{aligned}\quad (7)$$

Devido ao fato de se redefinir a cada passo a trajetória nominal com a última estimativa do estado (como se faz no Filtro Estendido de Kalman) e do fato de se impor que a trajetória controlada aproxime a trajetória verdadeira, resulta:

$$\begin{aligned}0 &= \Delta x_c(t_{i+1}) + \bar{\eta}(t_{i+1}), \quad \text{cov}(\bar{\eta}(t_{i+1})) = \bar{P}(i+1), \\ \Delta x_c(t_{i+1}) &= \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) G(\tau) d\tau \right) u(t_i) \triangleq \gamma(t_{i+1}, t_i) u(t_i) \therefore \\ 0 &= \gamma(t_{i+1}, t_i) u(t_i) + \bar{\eta}(t_{i+1}).\end{aligned}\quad (8)$$

Finalmente, combinando os resultados anteriores, tem-se, em cada instante de observação, o problema de estimação de parâmetros:

$$\begin{aligned}0 &= \gamma(t_{i+1}, t_i) u(t_i) + \bar{\eta}(t_{i+1}), \\ \Delta y(t_{i+1}) &= H(t_{i+1}) \gamma(t_{i+1}, t_i) u(t_i) + v(t_{i+1}).\end{aligned}\quad (9)$$

Resolvendo com um estimador de mínima variância, resulta, em um passo típico, a estimativa da ação de controle virtual:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t_i) &= P_u(i) \gamma^T(t_{i+1}, t_i) H^T(t_{i+1}) R^{-1}(t_{i+1}) \Delta y(t_{i+1}), \\ P_u(i) &= (\gamma^T(t_{i+1}, t_i) \bar{P}(i+1) \gamma(t_{i+1}, t_i) + \gamma^T(t_{i+1}, t_i) H^T(t_{i+1}) R^{-1}(t_{i+1}))^{-1} \gamma(t_{i+1}, t_i) H(t_{i+1}).\end{aligned}\quad (10)$$

Para se recuperar a estimativa do estado, bem como a matriz de covariâncias dos erros nesta estimativa, basta considerar que:

$$\Delta \hat{x}_c(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1}, t_i) \hat{u}(t_i) \therefore$$

$$\hat{x}_c(t_{i+1}) \cong \hat{x}(t_{i+1}) = \bar{x}(t_{i+1}) + \Delta \hat{x}_c(t_{i+1});$$

$$x(t_{i+1}) - \hat{x}(t_{i+1}) = x(t_{i+1}) - \bar{x}(t_{i+1}) - \Delta \hat{x}_c(t_{i+1})$$

$$\cong \Delta x_c(t_{i+1}) - \Delta \hat{x}_c(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1}, t_i) (u(t_i) - \hat{u}(t_i)), \therefore$$

$$P(i+1) = \text{cov}(x(t_{i+1}) - \hat{x}(t_{i+1})) = \gamma(t_{i+1}, t_i) P_u(i) \gamma^T(t_{i+1}, t_i).$$

(11)

Ajuste Automático da Matriz de Controle G:

No problema de estimação com controle virtual, uma vez que o controle é virtual, pode-se, também virtualmente, mesmo em sistemas mecânicos de segunda ordem, ajustar a matriz G em:

$$\dot{x}_c = f(x_c, t) + G(t)u(t),$$

de modo a aumentar o acoplamento entre a ação do controle e as variáveis de estado. Fleury (1985) apresenta formas heurísticas, dependentes de tentativa e erro, cujos resultados são certamente e fortemente dependentes do problema e do usuário. Para lidar de forma automática com este ajuste, sugere, também, que se considere o procedimento a seguir, em que, aproximando-se $G(\tau)$ como diagonal e constante, em cada intervalo de discretização:

$$\Delta x_c(t_{i+1}) = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) G(\tau) d\tau \right) u(t_i) = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) G(\tau) d\tau \right) G(t_i) u(t_i) \triangleq \bar{B}(t_i) G(t_i) u(t_i),$$

$$G(t_i) = [G_1^T(t_i) : G_2^T(t_i)] = [\text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_l) : \text{diag}(g_{l+1}, g_{l+2}, \dots, g_n)],$$

utiliza-se o resíduo de observação, minimizado em relação a $G(t_i)$, isto é, aos g_i , com um intervalo de atraso, considerando o último $\hat{u}(t_i)$ determinado.

$$J = [\Delta y(t_{i+1}) - H(t_{i+1}) \bar{B}(t_i) G(t_i) \hat{u}(t_i)]^T R^{-1} [\Delta y(t_{i+1}) - H(t_{i+1}) \bar{B}(t_i) G(t_i) \hat{u}(t_i)]. \quad (12)$$

Se $m < n$, onde m é a dimensão do vetor de observação, alguma informação a priori sobre os g_i deve ser provida, para se garantir solução única; neste caso, esta minimização pode ser resolvida utilizando-se o procedimento apresentado no *Exemplo de Aplicação 5.2.1*.

Correção das Matrizes de Covariâncias de Erros: Adição de Ruído

O fato de haver aproximação, isto é, erro no modelo de propagação da matriz de covariâncias dos erros na estimativa de estado, como no caso do *Filtro Estendido de Kalman*, leva à necessidade de adaptação com adição de ruído de processo, para que a tendência de queda das variâncias estimadas dos erros não provoque perda de capacidade de aprender, isto é, tirar informações de observações futuras. No procedimento em questão, para o ajuste da matriz covariâncias dos erros de estimação do estado propagada, isto pode ser feito da mesma forma que mostrado anteriormente na *Seção 7.4.2*.

Há também necessidade de se adaptar a matriz de covariâncias dos erros de estimação do controle virtual. Isto porque, havendo condição de redundância para estimação deste controle, ocorre excesso de otimismo na estimação da matriz de covariâncias dos erros, levando a valores pequenos das respectivas variâncias destes erros, o que, se não houver correção com adição de ruído, leva à perda de capacidade de continuar a extrair informações de observações futuras. O procedimento de ruído adaptativo é bastante semelhante ao do caso de adaptação de ruído no processo, conforme a seguir.

Considerando que:

$$\begin{aligned}\Delta \hat{x}_c(t_{i+1}) &= \gamma(t_{i+1}, t_i) \hat{u}(t_i) :. \\ \Delta x_c(t_{i+1}) - \Delta \hat{x}_c(t_{i+1}) &= \gamma(t_{i+1}, t_i) (u(t) - \hat{u}(t_i)), :. \\ r_j^u(i+1) &= \Delta y_j(t_{i+1}) - \Delta \hat{y}_j(t_{i+1}) \\ &= H_j(t_{i+1}) \gamma(t_{i+1}, t_i) (u(t) - \hat{u}(t_i)) + v(t_{i+1}), j = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{13}$$

Usando a noção de ruído verdadeiro, como na *Seção 7,4.2*, tem-se:

$$\begin{aligned}r_j^{uv}(i+1) &= H_j(t_{i+1}) \gamma(t_{i+1}, t_i) (u(t) - \hat{u}(t_i)), j = 1, 2, \dots, m, :. \\ r_j^u(i+1) &= r_j^{uv}(i+1) + v_j(t_{i+1}), :. \\ r_j^{uv}(i+1) &= r_j^u(i+1) - v_j(t_{i+1}), j = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{14}$$

Devido às aproximações no cálculo de $P_u(i)$, (ver Eq. (10)), é razoável que se corrija esta matriz, de modo a se ter uma melhor aproximação, $P_u^c(i)$:

$$\begin{aligned}P_u^c(i) &\cong \text{cov}(u(t) - \hat{u}(t_i)) = P_u(i) + Q_u(i), \\ Q_u(i) &= \text{diag}(q_j^u(i), j = 1, 2, \dots, m).\end{aligned}\tag{15}$$

Utilizando-se o critério de consistência estatística, como na *Seção 7,4.2*, tem-se:

$$\begin{aligned}E[(r_j^{uv}(i+1))^2] &= (r_j^{uv}(i+1))^2, j = 1, 2, \dots, m, :. \\ E[H_j(t_{i+1}) \gamma(t_{i+1}, t_i) (u(t) - \hat{u}(t_i)) (u(t) - \hat{u}(t_i))^T \gamma^T(t_{i+1}, t_i) H_j^T(t_{i+1})] \\ &= (r_j^u(i+1))^2 - 2r_j^u(i+1)v_j(t_{i+1}) + (v_j(t_{i+1}))^2, :. \\ H_j(t_{i+1}) \gamma(t_{i+1}, t_i) (P_u(i) + Q_u(i)) \gamma^T(t_{i+1}, t_i) H_j^T(t_{i+1}) &= (r_j^u(i+1))^2 + R_{jj}(t_{i+1}) + v_j^{q^u}(t_{i+1}), \\ v_j^{q^u}(t_{i+1}) &\triangleq -2r_j^u(i+1)v_j(t_{i+1}) + (v_j(t_{i+1}))^2 - R_{jj}(t_{i+1})\end{aligned}\tag{16}$$

Após desenvolvimento algébrico totalmente análogo ao feito na *Seção 7,4.2*, tem-se:

$$\Delta z_j^p(t_{i+1}) = M_j(t_{i+1}) q_j^u(i) + v_j^{q^u}(t_{i+1}), j = 1, 2, \dots, m,\tag{17}$$

em que:

$$M_j(t_i) = ((\sum_{k=1}^n H_{jk}(t_{i+1})\gamma_{k1}(t_{i+1}, t_i))^2 : (\sum_{k=1}^n H_{jk}(t_{i+1})\gamma_{k2}(t_{i+1}, t_i))^2 : \dots : (\sum_{k=1}^n H_{jk}(t_{i+1})\gamma_{kr}(t_{i+1}, t_i))^2),$$

$$\Delta z_j^p(t_{i+1}) = (r_j^u(i+1))^2 + R_{jj}(t_{i+1}) - H_j(t_{i+1})\gamma(t_{i+1}, t_i)P_u(i)\gamma^T(t_{i+1}, t_i)H_j^T(t_{i+1}), j = 1, 2, \dots, m.$$

A Eq. (17) de pseudo-observações permite a estimativa e dosagem de ruído. Para iniciar o processo e se poder processar estas pseudo-observações sequencialmente, no passo inicial pode-se tomar como informação a priori:

$$\bar{q}^u(1) = 0,$$

$$\bar{P}_{q^u}(1) = \text{diag}[(\hat{u}_j(t_1))^2 : j = 1, 2, \dots, r]. \quad (18)$$

Esta informação a priori é a favor da segurança (Fleury, 1985), já que não há nenhum conhecimento a priori sobre o controle virtual e a sua dispersão; há também que se considerar que a redundância de pseudos observações dilue o efeito desta informação a priori. Para os instantes posteriores, pode se adotar:

$$\bar{q}^u(i) = 0,$$

$$\bar{P}_{q^u}(i) = \text{diag}[9(\hat{q}_j^u(i-1))^2 : j = 1, 2, \dots, r], \quad i \neq 1. \quad (19)$$

Assim, pode-se em cada instante se aplicar o estimador linear ótimo de parâmetros e estimar:

$$\hat{q}_j^u(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } \hat{q}_j^u(i) \leq 0, \\ \hat{q}_j^u(i), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$Q_u(i) = \text{diag}[\hat{q}_j^u(i) : j = 1, 2, \dots, m], \quad (20)$$

$$P_u^c(i) = P_u(i) + Q_u(i).$$

7.6 Técnicas de Fatorização

O Filtro de Kalman, por um bom tempo, encontrou resistência ao seu uso, devido ao mau comportamento numérico de seu algoritmo; especialmente porque, à época de seu desenvolvimento, as aplicações em que se necessitava de um estimador de estado eram em veículos aeroespaciais, em computadores de bordo, com limitadas condições de memória, precisão de computação (comprimento de palavra das máquinas, implicando em número de dígitos significativos nos cálculos) e de velocidade de computação. O que motivou a busca de algoritmos mais eficientes e sem perda de precisão foi esta necessidade de aplicação em computadores de bordo, que, na verdade, ocorre também em aplicações de automação, robótica e, especialmente, navegação por satélites em pequenos veículos.

Inicialmente, foram desenvolvidos algoritmos baseados em raiz quadrada de matrizes de covariâncias (positivas definidas), que foram suficientes para atender as necessidades da missão Apolo, mas que demandavam operações que ainda deixavam a desejar em termos de eficiência, especialmente por necessitarem operações explícitas de raiz quadrada (ver, por exemplo, Maybeck, 1979).

Assim, na década de setenta, do século passado, as necessidades do programa espacial continuaram a pressionar pelo desenvolvimento de ajustes no Filtro de Kalman que

melhorassem o comportamento numérico, isto é, a precisão numérica dos cálculos, sem comprometimento da eficiência, isto é, sem inviabilização pelo aumento da complexidade numérica, isto é, número e dificuldade das operações aritméticas. Isto foi conseguido pelos métodos de fatorização do tipo UD (Bierman, 1977; Thorton e Bierman, 1977, 1980). Neste tipo de método conseguem-se os efeitos dos métodos de raiz quadrada (quanto a melhoria da precisão dos cálculos) sem aumento significativo do número de operações aritméticas relativamente ao Filtro de Kalman original.

Para entender o efeito de aumento na precisão dos cálculos numéricos, quando se usa a raiz quadrada de uma matriz, basta considerar que o comportamento numérico na manipulação de uma dada matriz, principalmente sua inversão, depende de seu "número de condição", que é definido como a razão entre o maior auto-valor e o menor auto-valor; quanto maior esta razão, pior o comportamento numérico da matriz. O melhoramento numérico com a raiz quadrada fica evidente se for considerado que o número de condição, $K(P)$ de uma matriz P definida positiva de covariâncias satisfaz:

$$K(P) \triangleq \lambda_M / \lambda_m = K(SS^T) = (K(S))^2. \quad (1)$$

em que λ_M / λ_m é a razão entre o maior e o menor auto valor. Assim, fica claro que se a matriz P tiver problemas por ter um número de condição elevado, de modo que operações com p dígitos significativos apresentem problemas numéricos, ao se operar com sua raiz quadrada S , efetivamente é como se as operações fossem com $2p$ dígitos significativos.

A vantagem de se usar a fatorização UD é que neste caso não se tem que calcular explicitamente raízes quadradas.

A matriz P é fatorada como:

$$P = UDU^T, \quad (2)$$

em que U é triangular superior unitária na diagonal e D é diagonal; portanto esta fatorização é equivalente a uma raiz quadrada de P , pois:

$$P = UDU^T = UD^{1/2}(D^{1/2})^T U^T = SS^T. \quad (3)$$

Tendo em vista que o método de fatorização UD é o que melhor atende o objetivo de melhorar o comportamento numérico do Filtro de Kalman, esta é a abordagem tratada, o que será feito conforme Kuga (1989).

Adota-se a opção de uma apresentação técnica dos algoritmos, sem preocupação de demonstrações, já que estes algoritmos são o resultado praticamente direto de transformações lineares (facilmente encontradas na literatura referenciada e nos textos de Matemática Aplicada ou Álgebra Linear), usadas como ferramentas, e cuja demonstração seria uma perda de foco, nada acrescentando ao objetivo buscado. O algoritmo ponderado modificado de Gram-Schmidt é usado de forma direta na fase de predição ou propagação e a transformação ortogonal de Givens é a base do algoritmo desenvolvido por Bierman para a fase de atualização ou filtragem (Bierman, 1977; Thorton e Bierman, 1977, 1980).

A fatorização se aplica às duas etapas, filtragem e predição, do Filtro de Kalman, isto é, calcula de forma UD o filtro a seguir.

(i) *Atualização ou Filtragem:* Para um dado $k=0,1,2,\dots$, isto é, t_0, t_1, t_2, \dots , usa-se a estimativa a priori, $\bar{x}(k)$, $\bar{P}(k)$ e a observação $y(k)$ e determina-se com o algoritmo de filtragem abaixo

a estimativa atualizada $\hat{x}(k)$, $P(k)$. Prossegue-se para o próximo passo, de propagação, caso k não tenha atingido um valor limite.

$$\begin{aligned} K(k) &= \bar{P}(k)H^T(k) \left(H(k)\bar{P}(k)H^T(k) + R(k) \right)^{-1}, \\ \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + K(k) \left(y(k) - H(k)\bar{x}(k) \right), \\ P(k) &= \bar{P}(k) - K(k)H(k)\bar{P}(k) \equiv (I_n - K(k)H(k))\bar{P}(k)(I_n - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k). \end{aligned} \quad (9)$$

Para $\bar{x}(t_0)$, em geral se tem uma estimativa inicial que é aceitável, apesar de com erros a favor da segurança, isto é, maiores que na realidade. Para $\bar{P}(0)$ recomenda-se uma estimativa inicial diagonal, em que as variâncias, na diagonal, sejam os quadrados do que seriam erros de primeira ordem para as respectivas componentes do estado, de modo a não destruir hipóteses de linearização e ou evitar tendência de “aprender muito rapidamente o modelo errado e perder sensibilidade para extração de informação de observações futuras”.

(ii) *Progação ou Predição*: Entre t_k e t_{k+1} propagam-se as estimativas de t_k , usando-se os vínculos dinâmicos:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \Phi(k+1, k)\hat{x}(k), \\ \dot{\Phi}(\tau, t_k) &= F(\tau)\Phi(\tau, t_k), \quad \dot{\Phi}(t_k, t_k) = I, \\ \bar{P}(k+1) &= \Phi(k+1, k)P(k)\Phi^T(k+1, k) + G(k+1, k)Q(k)G^T(k+1, k). \end{aligned} \quad (10)$$

A ordem natural da fatorização seria a de primeiro considerar a filtragem e, então, a predição; no entanto, por razão didática, inverte-se esta ordem, para que fique clara a aplicação direta do algoritmo modificado de Gram-Schmidt.

Algoritmo Fatorizado do Filtro: Fase de Propagação

Algoritmo Modificado de Gram-Schmidt: Sendo dados

$$\begin{aligned} W^T &= [w_1^T : w_2^T : \dots : w_n^T], \\ D &= \text{diag}[D_j : j = 1, 2, \dots, N], \end{aligned} \quad (4)$$

em que os n vetores linha, w_k , $k=1, 2, \dots, n$, de dimensão $N \geq n$ são linearmente independentes, $D_j > 0$, $j=1, 2, \dots, N$, o algoritmo de Gram-Schmidt realiza a transformação:

$$WDW^T = \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T. \quad (5)$$

em que \bar{U} é matriz triangular superior com diagonal unitária e \bar{D} é diagonal.

Este algoritmo pode mecanizado como a seguir:

$$\begin{aligned}
v_k^n &= w_k^T, \quad k = 1, 2, \dots, n \\
\text{para } j &= n-1, \dots, 1 \\
\bar{D}_{j+1} &= (v_{j+1}^{j+1})^T D v_{j+1}^{j+1} \\
\bar{U}(k, j+1) &= (v_k^{j+1})^T D v_{j+1}^{j+1} / \bar{D}_{j+1}, \quad k = 1, 2, \dots, j+1 \\
v_k^j &= v_k^{j+1} - \bar{U}(k, j+1) v_{j+1}^{j+1}, \quad k = 1, 2, \dots, j \\
\text{fim da malha} \\
\bar{D}_1 &= (v_1^1)^T D v_1^1.
\end{aligned} \tag{6}$$

O algoritmo gera base de vetores D ortogonais, isto é, os vetores:

$$(v_j^j)^T = \bar{w}_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \bar{w}_j D \bar{w}_k^T = \bar{D}_j \delta_{jk}. \tag{7}$$

Note-se, portanto, que:

$$W D W^T = \bar{U} (\bar{W} D \bar{W}^T) \bar{U}^T = \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T, \quad \bar{W}^T = [\bar{w}_1^T : \bar{w}_2^T : \dots : \bar{w}_n^T]. \tag{8}$$

Dados :

$$\hat{U}(k), \hat{D}(k) (P(k) = \hat{U}(k) \hat{D}(k) \hat{U}^T(k)), \Phi(k+1, k), G(k+1, k), Q(k).$$

Considere – se :

$$W = [\Phi(k+1, k) \hat{U}(k) : G(k+1, k)], \quad D = \text{diag}(\hat{D}(k), Q(k)). \tag{11}$$

Calculando – se com o algoritmo mod ificado de Gram – Schimidt $\bar{U}(k+1), \bar{D}(k+1)$ e :

$$\bar{P}(k+1) = \bar{U}(k+1) \bar{D}(k+1) \bar{U}^T(k+1)$$

Algoritmo Fatorizado do Filtro: Fase de Atualização

Na fase de filtragem ou atualização a fatorização é aplicada a uma observação escalar, sem perda de generalidade, já que, quando as as componentes do vetor observação têm erros não correlacionados, é possível processar o vetor de observações componente a componente (ver Propriedade 5.2.2); quando este não é o caso é possível aplicar uma transformação linear diagonalizando-se a matriz R covariâncias dos erros de observação.

Dados:

$$\bar{U}, \bar{D} (\bar{P} = \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T),$$

$$\bar{x}, y, H, R (y = Hx + v, \text{escalar e } \text{var}(v) = R).$$

Calculam os fatores \hat{U} , \hat{D} e a nova estimativa \hat{x} :

$$\begin{aligned}
f^T &= H\bar{U}, \quad f^T = [f_1, \dots, f_n], \quad e = \bar{D}f, \quad e_i = \bar{D}_i f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
\text{para } j &= 1, 2, \dots, n \\
\alpha_j &= \alpha_{j-1} + f_{j-1} e_j, \quad e_0 = R \\
\hat{D}(j) &= (\alpha_{j-1} / \alpha_j) \bar{D}(j) \\
K_j &= e_j \\
\lambda &= -f_j / \alpha_{j-1} \\
\text{para } i &= 1, \dots, j-1 \\
\hat{U}(i, j) &= \bar{U}(i, j) + K_i \lambda \\
K_i &= K_i + \bar{U}(i, j) K_j \\
\text{fim da malha int erna} \\
\text{fim da malha externa} \\
\hat{x} &= \bar{x} + K_n / \alpha_n (y - H\bar{x}) \\
K &= K_n / \alpha_n.
\end{aligned} \tag{12}$$

Observações: (i) Embora se tenha usado o *Filtro de Kalman* linearizado, discretizado, pode-se aplicar a fatorização ao *Filtro Estendido de Kalman* sem modificações na parte de fatorização dos cálculos, basta substituir o procedimento de propagação do estado estimado, usando-se:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, t), \\
\bar{x}(t_k^+) &= \hat{x}(t_k), \quad t_k^+ \leq t \leq t_{k+1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

(ii) A utilização de fatorização melhora apenas o comportamento numérico do *Filtro de Kalman*; portanto, em caso de erros de modelagem, para prevenir o comportamento de decaimento excessivo da matriz de covariâncias dos erros de estimação, há que se usar alguma técnica de compensação do modelo dinâmico (ver *Seção 7.4.1*) e ou de ruído adaptativo (ver *Seção 7.4.2*). No caso de compensação do modelo dinâmico há apenas modificação do modelo dinâmico e extensão do estado, em nada modificando o equacionamento do Filtro. No caso de ruído adaptativo, o algoritmo para adaptação do ruído é também formalmente um *Filtro de Kalman*, em que a propagação da matriz de covariâncias é simplificada, não alterando sua forma diagonal, de modo que se a fatorização se aplica apenas na etapa de atualização de estimativa das variâncias do ruído adaptado.

Referência de Aplicação 7.6.1: Kuga, Rios Neto e Orlando (1990) aplicaram fatorização, combinada com adaptação de ruído para estimar órbita de satélites artificiais terrestres de baixa altitude (700 km), em situação de erros de modelagem acentuados (inclusão de apenas até coeficiente zonal J_2 no modelo gravitacional). Mostraram que o *Filtro Estendido* convencional divergiu nesta situação e que o Filtro com uso de fatorização e adaptação do ruído no estado convergiu com resultados satisfatórios, mesmo quando comparados com resultados após alisamento.

7.7 Controle em Malha Fechada: Controle Estocástico Linear Ótimo

Problema de Controle Estocástico Linear

Seja o problema de controle em malha fechada, em que tanto o sistema dinâmico como as observações são modelados como lineares: (i) Dado o sistema dinâmico, modelado como um processo de Gauss Markov,

$$\dot{X} = F(t)X + G(t)W(t) + L(t)u, \quad (1)$$

onde $W(t)$ é um ruído branco gaussiano, de distribuição conhecida, independente de $X(t_0)$:

$$E[W(t)] = 0, \quad \text{cov}(W(t), W(\tau)) = Q(t)\delta(\tau - t), \quad (2)$$

e para $X(t_0)$ se tem uma aproximação para a distribuição, admitida gaussiana:

$$E[X(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad \text{cov}(X(t_0)) = \bar{P}(t_0). \quad (3)$$

(ii) Dadas as observações de saídas do sistema, isto é, medidas feitas por sensores:

$$y(t_i) = H(t_i)x(t_i) + v(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

em que $y(t_i)$, $m \times 1$, corresponde a ocorrências de:

$$Y(t_i) = H(t_i)X(t_i) + V(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4a)$$

com $V(t_i)$ gaussiano, independente de $X(t)$ e de $W(t)$, com distribuição conhecida:

$$E[V(t_i)] = 0, \quad \text{cov}(V(t_i)) = R(t_i). \quad (5)$$

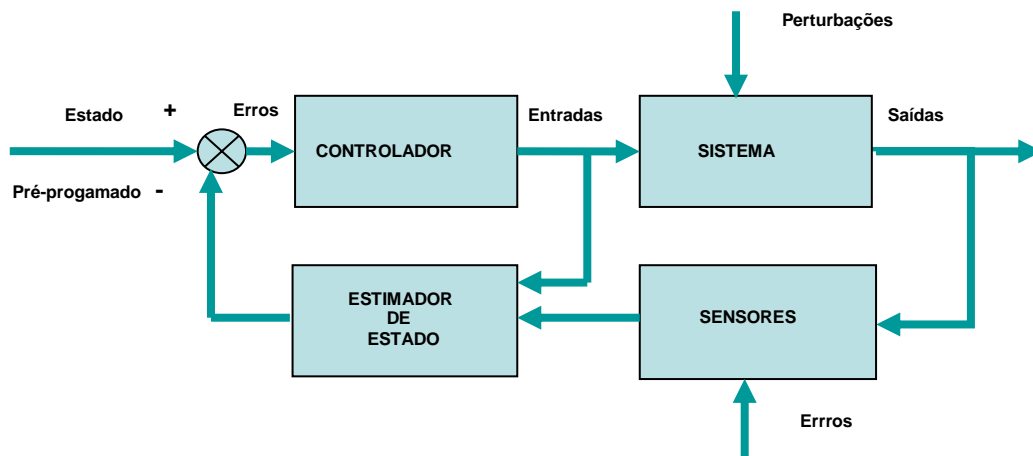


Figura 7.1: Controle com Realimentação de Estado

(iii) O problema que se coloca é o de se controlar de forma otimizada o sistema dinâmico em malha fechada, conforme esquematizado na Fig. 7.1, isto é, determinar um controlador, através da determinação da função de controle, $u(t)$, que regule o estado minimizando o desvio em relação ao estado pré-programado, no caso em questão, em relação ao estado pré-programado como nulo, com valores mínimos de ação de controle. Este problema aparece, em geral, quando se tem que controlar desvios em relação a solução otimizada determinada em malha aberta (seção 1.2) e conforme esquematizado na Fig. 7.2.

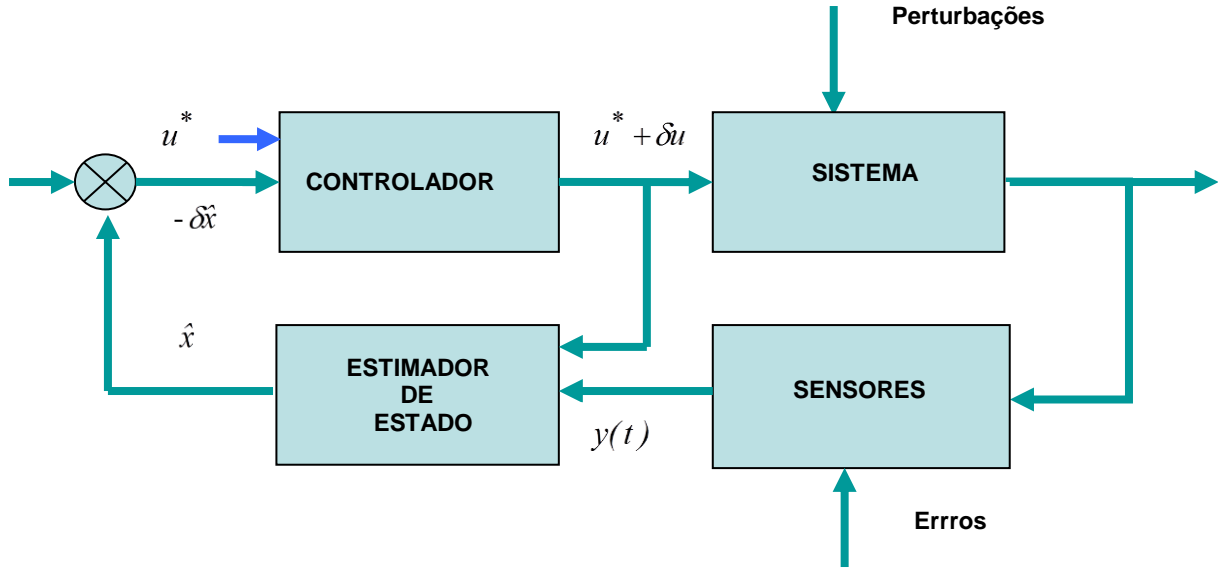


Figura 7.2: Regulador: Realimentação para Correção de Desvios

Crítérios e Condições de Realização

O controle projetado tem que ser uma ação ao longo do tempo compatível com o tempo de resposta a perturbações do sistema dinâmico controlado e dosado em função de avaliação dos desvios em relação ao estado regulado; não tem cabimento em termos físicos tentar atuar no tempo de resposta do ruído $W(t)$, mesmo porque o controle teria que ter frequência de oscilação incompatível com realização prática. O razoável é minimizar um índice de desempenho pela média, como a seguir.

$$J = 1/2 E[x_f^T S_f x_f + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt], \quad S_f \geq 0, Q \geq 0, R > 0. \quad (6)$$

Considerando que o estado estimado pelo Filtro de Kalman tem-se que o processo erro é $\eta = x - \hat{x}$, e que, por exemplo, para o caso contínuo discreto, sem perda de generalidade:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= F(t) \bar{x} + L(t) u, \quad \bar{x}(t_k^+) = \hat{x}(k), \quad \therefore \\ \dot{\eta} &= F(t) \eta + G(t) w, \quad \eta(t_k^+) = \hat{\eta}(k), \quad E[\hat{\eta}(k)] = 0, \text{cov}(\hat{\eta}(k)) = P(k). \end{aligned} \quad (7)$$

Vê-se, pois, que este processo de erro só depende do estimador, isto é, da capacidade de observação, da dinâmica não excitada pelo controle e do algoritmo de estimação. Ou seja, o controle não tem poder de ação sobre o erro de estimação; qualquer que seja a precisão de conhecimento ou determinação do estado, o controle só tem capacidade de ação sobre este estado conhecido, que é sempre dado por um estimador. Caracteriza-se, pois, um princípio de

separação. Isto fica ainda mais claro se, no índice de desempenho, se substituir $\eta + \hat{x} = x$, considerando que o erro do estimador é ortogonal ao estado (e.g., Jazwinski, 1969 ou Bryson and Ho, 1975) e que o controle a ser otimizado não tem ação sobre o erro de estimação:

$$J = 1/2E[\hat{x}_f^T S_f \hat{x}_f + \int_{t_0}^{t_f} (\hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u) dt] + 1/2E[\eta_f^T S_f \eta_f + \int_{t_0}^{t_f} \eta^T Q \eta dt]. \quad (6a)$$

Vê-se, então, que a parte otimizável é apenas a primeira. Resta mostrar que a solução do problema de controle leva à mesma solução que no caso determinístico (seção 2.2, exemplo 2.22). Para tanto, basta usar multiplicadores de Lagrange e considerar o funcional equivalente:

$$J = 1/2E[x_f^T S_f x_f + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u + \lambda^T (\dot{X} - F(t)X + G(t)W(t) + L(t)u)) dt].$$

Efetuada a operação de valor médio, elimina-se o termo de excitação do ruído branco e, notando que o vínculo dinâmico (as equações da dinâmica), sem a excitação do ruído, na verdade é determinístico, sendo apenas as condições iniciais aleatórias; ou seja gera trajetórias determinísticas a partir de ocorrências de valores iniciais, resulta:

$$J = 1/2E[x_f^T S_f x_f + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u + \lambda^T (\dot{x} - F(t)x + L(t)u)) dt]. \quad (8)$$

Considerando a possibilidade de comutar a operação valor médio com a otimização, conclui-se que a solução é da mesma forma que na seção 2.2, ou seja, completa-se a caracterização de um princípio de separação:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q^T = 0, \quad P(t_f) = S_f. \quad (9)$$

$$u = -R^{-1}B^T(t)P(t)x. \quad (10)$$

No entanto, como não é possível se ter este estado, ainda que não afetado pelo ruído branco, a condição de realização é usar o melhor conhecimento do estado na Eq. (10), isto é, o estado estimado, de modo que finalmente tem-se a lei de realimentação, para realizar o controlador, conforme indicado na Fig. 7.1:

$$u = -R^{-1}B^T(t)P(t)\hat{x} \quad (10a)$$

7.8 Controle Baseado em Estimação Linear Ótima e Redes Neurais

7.8.1 Controle Sequencial de Sistemas Lineares Discretos

Problema de Controle Discreto Estocástico Linear

Seja de novo o problema de controle em malha fechada, em que tanto o sistema dinâmico como as observações são modelados como lineares, mas agora discretos: (i) Dado o sistema dinâmico, modelado como um processo discreto de Gauss Markov

$$X(i+1) = \Phi(i+1)X(i) + \Gamma(i)u(i) + W(i), \quad (11)$$

onde $W(i)$ é um ruído branco gaussiano, de distribuição conhecida, independente de $X(0)$:

$$E[W(i)] = 0, \quad \text{cov}(W(i), W(j)) = Q(i)\delta_{ij}, \quad (12)$$

e para $X(0)$ se tem uma aproximação para a distribuição, admitida gaussiana:

$$E[X(0)] = 0, \quad \text{cov}(X(t_0)) = \bar{P}(t_0). \quad (13)$$

(ii) Dadas as observações de saídas do sistema, isto é, medidas feitas por sensores:

$$y(i) = H(i)x(i) + v(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

em que $y(t_i)$, $m \times 1$, corresponde a ocorrências de:

$$Y(t_i) = H(t_i)X(t_i) + V(t_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (14a)$$

com $V(i)$ gaussiano, independente do estado e do ruído na dinâmica do estado, com distribuição conhecida:

$$E[V(i)] = 0, \quad \text{cov}(V(i), V(j)) = R(i)\delta_{ij}. \quad (15)$$

(iii) O problema que se coloca é o de se controlar de forma discreta o sistema dinâmico em malha fechada, conforme esquematizado na Fig. 7.2, isto é, determinar um controlador, através da determinação da função de controle, $u(i)$, que regule o estado minimizando o desvio em relação ao estado pré-programado, com valores mínimos de ação de controle. Este problema aparece, em geral, quando se tem que controlar desvios em relação a solução otimizada determinada em malha aberta (seção 1.2). A aproximação linear discreta se justifica por duas razões: a solução linearizada em torno do estado e controle pré-programados satisfaz a hipótese de perturbação linear, já que os desvios são pequenos; e a discretização devido ao intervalo de discretização ser pequeno e ser razoável admitir como constante a ação do controle de correção ao longo deste intervalo.

Solução Sequencial Baseada em Estimação de Estado

A solução que segue foi proposta e desenvolvida por Rios Neto e Cruz (1990). Para determinar de forma sequencial a ação de controle discreto, a proposta é resolver, em cada t_i de discretização, o problema:

Minimizar:

$$J = 1/2(u^T(i)B(i)u(i) + (\bar{x}^{pd}(i+1) - \bar{x}(i+1))^T S(i+1)(\bar{x}^{pd}(i+1) - \bar{x}(i+1))) \quad (16)$$

Sujeito a:

$$\bar{x}(i+1) = \Phi(i+1)\hat{x}(i) + \Gamma(i)u(i), \quad (17)$$

em que $\hat{x}(i)$ é a estimativa do estado dada pelo Filtro de Kalman; $B(i) > 0$ é diagonal e com os respectivos termos da diagonal escolhidos de modo a representar os inversos dos quadrados das dispersões às quais se quer vincular as componentes de $u(i)$; $\bar{x}^{pd}(i+1)$ é dado e determinado de modo a condicionar contrações possíveis e desejadas do estado; e $S(i+1)$ é previamente determinada, como será mostrado a seguir, no algoritmo do método, de modo a condicionar a contração possível e desejada.

Para a determinação de $S(i+1)$ e de $\bar{x}^{pd}(i+1)$ será necessário considerar que:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1) &= (\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i))\hat{x}(i) \\ &= (\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i))(\bar{x}(i) - K(i)(H(i)\bar{e}(i) - v(i))), \\ \bar{e}(i) &\triangleq \bar{x}(i) - x(i), \text{ cov}(\bar{e}(i)) \triangleq \bar{P}(i), \end{aligned} \quad (18)$$

onde foi considerado que $\hat{x}(i)$ é dado pelo Filtro de Kalman e $C(i)$ é o ganho da lei de realimentação de estado (a ser determinada). Vê-se, assim, que o estado controlado é uma sequência de Gauss Markov de média nula se for considerado que $\bar{x}(0) = N(0, \bar{\Sigma}(0))$ e com dispersão dada por, através do momento de ordem dois:

$$\bar{\Sigma}(i+1) = (\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i))(\bar{\Sigma}(i) + \bar{P}(i) - P(i))(\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i))^T. \quad (19)$$

Com estes elementos pode-se estabelecer o algoritmo do método.

Algoritmo da solução:

Primeiro passo: Considerando $C(i)$ com um passo de atraso, pode-se avaliar um estado previsto controlado possível:

$$\begin{aligned} \bar{x}^p(i+1) &= (\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i-1))\hat{x}(i) \\ &= (\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i-1))(\bar{x}(i) - K(i)(H(i)\bar{e}(i) - v(i))). \end{aligned} \quad (20)$$

Este estado previsto possível tem dispersão, dada pelo momento de ordem dois, conforme Eq. (19):

$$\overline{\Sigma}^p(i+1) = (\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i-1))(\overline{\Sigma}(i) + \overline{P}(i) - P(i))(\Phi(i+1) - \Gamma(i)C(i-1))^T. \quad (19a)$$

Pode-se, então, buscar uma realização de $\bar{x}(i+1)$ que seja uma realização conveniente da variável aleatória $\bar{x}^p(i+1) = N(0, \overline{\Sigma}^p(i+1))$.

Segundo passo: Em um sentido virtual, pode-se considerar que em t_{i+1} a resposta desejada para o sistema controlado seja uma realização de $\bar{x}^p(i+1) = N(0, \overline{\Sigma}^p(i+1))$ suficientemente próxima de zero de modo a garantir uma contração, ou seja, diminuição na magnitude do estado controlado. Assim, em um sentido virtual, considera-se um sensor e supõe-se que se observa uma realização de $\bar{x}^p(i+1)$ que satisfaça a condição desejada:

$$\begin{aligned} \bar{y}^d(i+1) &= \bar{x}^p(i+1) + \bar{v}^d(i+1), \\ \bar{v}^d(i+1) &= N(0, \overline{R}^d(i+1)), \end{aligned} \quad (20)$$

onde $\bar{y}^d(i+1)$ é escolhido de modo a virtualmente constituir a resposta desejada; $\overline{R}^d(i+1)$ tomada diagonal, com variâncias escolhidas para garantir com elevada probabilidade que a ocorrência de $\bar{x}^p(i+1)$ em correspondência com a observação $\bar{y}^d(i+1)$ esteja na região de resposta desejada.

Terceiro passo: Combinando a informação a priori correspondente a $\bar{x}^p(i+1) = N(0, \overline{\Sigma}^p(i+1))$ com a observação virtual da Eq. (20), tem-se o problema de estimação com informação a priori:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{x}^p(i+1) + \eta^p(i+1) \\ \eta^p(i+1) &= N(0, \overline{\Sigma}^p(i+1)) \\ \bar{y}^d(i+1) &= \bar{x}^p(i+1) + \bar{v}^d(i+1), \\ \bar{v}^d(i+1) &= N(0, \overline{R}^d(i+1)). \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando um estimador linear ótimo, equivalente a uma filtragem de Kalman, obtém-se uma estimativa de um possível e desejável estado em t_{i+1} , assim como da correspondente matriz de covariâncias dos erros desta estimativa, isto é, $\hat{\bar{x}}^p(i+1), P^p(i+1)$. Em face das considerações anteriores, é razoável tomar-se:

$$\bar{x}^{pd}(i+1) = \hat{\bar{x}}^p(i+1), \quad S(i+1) = P^p(i+1) = (\overline{R}^d(i+1))^{-1} + (\overline{\Sigma}^p(i+1))^{-1}. \quad (22)$$

Esta escolha deve garantir a contração de magnitude do estado se uma observação virtual $\bar{y}^d(i+1)$ é escolhida suficientemente próxima de zero e se a dispersão dos erros de observação, isto é, os termos da diagonal de $\overline{R}^d(i+1)$ forem suficientemente pequenos para garantir que a correspondente $S(i+1)$ corresponda a estimativa $\hat{\bar{x}}^p(i+1)$ com proximidade de $\bar{y}^d(i+1)$ que garanta a desejada contração do estado.

Para a particular situação em que $\bar{y}^d(i+1) = 0$, resolvendo o problema das Eqs. (16) e (17), resulta:

$$\begin{aligned}
u(i) &= C(i)\hat{x}(i), \\
C(i) &= (\Gamma^T(i)S(i+1)\Gamma(i) + B(i))^{-1}\Gamma^T(i)S(i+1)\Phi(i+1) \\
&= (B(i))^{-1}\Gamma^T(i)(\Gamma(i)(B(i))^{-1}\Gamma^T(i) + (S(i+1))^{-1})^{-1}\Phi(i+1).
\end{aligned} \tag{23}$$

Referências de aplicação 7.7.2.1: Rios Neto e Cruz (1985) e Ferreira, Rios Neto e Venkataraman (1985) usaram estratégia semelhante no projeto heurístico de controle adaptativo, respectivamente para: controle de navios navegando em canais e com perturbações de correntes e vento; e controle de atitude de satélite de baixa altitude através de flaps aerodinâmicos.

7.8.2 Controle Preditivo de Sistemas Não Lineares Discretos

Problema de Controle com Esquema Preditivo

Seja o problema de controlar um sistema dinâmico para que ele siga uma dada saída de referência ao longo do tempo, adotando-se um esquema de controle preditivo. Ou seja, controlar o sistema:

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{24}$$

adotando-se um esquema controle que siga uma trajetória de referência com ações de controle otimizadas, pela minimização de um índice de desempenho do tipo preditivo:

$$\begin{aligned}
J &= \left[\sum_{j=1}^n [y_r(t_j) - \hat{y}(t_j)]^T r_y^{-1}(t_j) [y_r(t_j) - \hat{y}(t_j)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{n-1} [u(t_j) - u(t_{j-1})]^T r_u^{-1}(t_j) [u(t_j) - u(t_{j-1})] \right] / 2,
\end{aligned} \tag{25}$$

onde, $t_j = t + j\Delta t$, $y_r(t_j)$ é a referência de resposta, n define o horizonte de controle, $r_y(t_j), r_u(t_j)$ são matrizes definidas positivas de peso e $\hat{y}(t_j)$ é a saída prevista do sistema, dada por um modelo interno do sistema, do tipo:

$$y(t_j) \cong f(y(t_{j-1}), \dots, y(t_{j-n_y}); u(t_{j-1}), \dots, u(t_{j-n_u})). \tag{26}$$

Este modelo discreto preditivo do sistema dinâmico pode ser dado, por exemplo, pelo integrador numérico do tipo Runge Kutta ou de diferenças finitas, do tipo, por exemplo, Adams Bashfort, usado diretamente (Rios Neto, 2001) ou indiretamente, treinando um rede neural artificial para representar a função de derivadas do sistema dinâmico (Rios Neto e Tasinaffo, 2003; Rios Neto e Tasinaffo, 2004; Tasinaffo e Rios Neto, 2004; Tasinaffo e Rios Neto, 2007). Pode-se também usar uma rede neural para representar diretamente o sistema dinâmico (e.g. Chen and Billings, 1992; Hunt et al, 1992; Su and McAvoy, 1993; Cardenuto, Cardenuto e Rios Neto, 2003), treinando-a para aprender o sistema dinâmico e prover um modelo preditivo do tipo anterior:

$$\hat{y}(t_j) = \hat{f}(\hat{y}(t_{j-1}), \dots, \hat{y}(t_{j-n_y}); u(t_{j-1}), \dots, u(t_{j-n_u}), \hat{w}), \tag{26a}$$

onde \hat{w} , pesos sinápticos da rede são ajustados (estimados) através de treinamento supervisionado (ver seção 5.3, exemplo de aplicação 5.3.1).

Tendo-se um modelo preditivo para o sistema dinâmico, a solução do problema de controle é obtida com a solução do problema de programação matemática de minimizar o índice de desempenho preditivo, sujeito aos vínculos dados por este modelo preditivo discreto do sistema dinâmico. Para aplicações práticas, em cada passo, este problema tem que ser resolvido em uma fração de tempo desprezível face ao tempo de resposta do sistema controlado.

Solução do Problema de Controle Preditivo

Uma vez que se tenha um modelo de predição do sistema dinâmico equacionado matematicamente, resta determinar as ações de controle otimizando o índice de desempenho que pondera seguir a trajetória de referência com ações mínimas de controle. O problema de determinação das ações de controle, segundo o esquema de controle preditivo, pode ser tratado com o problema de estimação de parâmetros estocástica a seguir.

$$y_r(t_j) = \hat{f}(\hat{y}(t_{j-1}), \dots, \hat{y}(t_{j-n_y}); u(t_{j-1}), \dots, u(t_{j-n_u}), \hat{w}) + v_y(t_j), \quad (27)$$

$$0 = u(t_{j-1}) - u(t_{j-2}) + v_u(t_{j-1}),$$

$$E[v_u(t_j)] = 0; E[v_u(t_j)v_u^T(t_j)] = r_u(t_j), \quad E[v_y(t_j)] = 0; E[v_y(t_j)v_y^T(t_j)] = r_y(t_j)$$

onde $\hat{y}(t_j)$ é a saída dada pelo modelo de predição, por exemplo, pela rede neural; $j=1,2,\dots,n$; $\hat{y}(t), \dots, \hat{y}(t_{j-n_y})$ e $u(t_{j-1}), \dots, u(t_{j-n_u})$ são as saídas e ações de controle que já aconteceram e que são conhecidas; e os erros $v_y(t_j)$ e $v_u(t_j)$ são modelados como de componentes não correlacionadas em cada instante, assim como não correlacionados entre si e com matrizes de covariâncias iguais às respectivas matrizes peso $r_y(t_j), r_u(t_j)$. A equação no controle pode ser vista de modo recorrente, sendo equivalente a:

$$\hat{u}(t_{j-1}) = u(t_{j-1}) + \sum_{k=0}^{j-1} v_u(t_k), \quad (28)$$

onde o valor a priori $\hat{u}(t_{j-1})$ é o valor já estimado do controle em $t_{j-1} = t - \Delta t$.

Assim, o problema é visto e tratado, em cada passo, como um de estimação. A observação é dada pela condição de satisfazer a saída de referência $y_r(t_j)$, a menos de um erro $v_y(t_j)$ (Eq. (27)) e a informação a priori por $\hat{u}(t_{j-1})$, dada também a menos de um erro (Eq. (28)). Com esta maneira de ver e tratar o problema, as matrizes peso passam a ter significado de matrizes de covariâncias, na verdade de variâncias, já que são diagonais; portanto, suas variâncias representam a dispersão com que se quer satisfazer a trajetória de referência e a dispersão nos incrementos da ação de controle ao longo dos intervalos de discretização do horizonte de controle preditivo.

Tem-se então um problema não linear de estimação de parâmetros, que pode ser resolvido de forma reiterativa (Capítulo 5). Tomando-se uma aproximação linear, por perturbação de primeira ordem, em uma iteração típica i , resulta a solução, como a seguir.

$$\alpha(i)[y_r(t_j) - \bar{y}(t_j, i)] = \sum_{k=k_0}^{j-1} [\partial \hat{y}(t_j) / \partial u(t_k)]_{[\bar{u}(t_k, i)]} [u(t_k, i) - \bar{u}(t_k, i)] + v_y(t_j), \quad (29)$$

Onde $0 < \alpha(i) \leq 1$ é ajustado de modo a garantir a hipótese de perturbação linear; e sendo $\hat{y}(t_j)$ uma função de $u(t_{j-2}), \dots, u(t_{j-n_u})$, através de $\hat{y}(t_{j-1}), \dots, y(t_{j-n_y})$, então tem-se que $k_0 = \max[0, (j - n_y - n_u)]$. Para o cálculo das derivadas parciais usa-se a regra da derivação em cadeia no modelo de predição; no caso de redes neurais usa-se a regra de retropropagação (“backpropagation”) (e.g. Chandran, 1994; Zurada, 1992). Consistentemente, de modo a garantir pequenos incrementos para as ações de controle:

$$\alpha(i)[\hat{u}(t_{-l}) - \bar{u}(t_l, i)] = [u(t_l, i) - \bar{u}(t_l, i)] + \sum_{k=0}^l v_u(t_k), \quad (30)$$

onde $l=0, 1, \dots, n-1$; $i=1, 2, \dots, I$; $\hat{u}(t_{-l})$ é a solução estimada no último passo; $\bar{u}(t_l, i+1) = \hat{u}(t_l, i)$ é o valor aproximado estimado de $u(t_l)$ na i -ésima iteração; e para $i=1$ são usadas estimativas ou extrapolações de estimativas do último passo.

Adotando-se uma notação vetorial, mais compacta, $l=0, 1, \dots, n-1$, $j=1, 2, \dots, n$:

$$U_l(t, i) \triangleq u(t_l, i); \quad \hat{U}_l(t_{-l}) \triangleq \hat{u}(t_{-l}),$$

o problema pode ser colocado como:

$$\alpha(i)[\hat{U}(t_{-l}) - \bar{U}(t, i)] = U(t, i) - \bar{U}(t, i) + V_u(t), \quad (30a)$$

$$\alpha(i)\bar{Z}^u(t, i) = H^u(t, i)[U(t, i) - \bar{U}(t, i)] + V_y(t). \quad (29a)$$

Usando o algoritmo de filtragem de Kalman, resulta em uma iteração típica, i :

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, i) &= \bar{U}(t, i) + \alpha(i)[\hat{U}(t_{-l}) - \bar{U}(t, i)] \\ &+ K(t, i)\alpha(i)[\bar{Z}^u(t, i) - H^u(t, i)[\hat{U}(t_{-l}) - \bar{U}(t, i)]], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} K(t, i) &= R_u(t)H^{u^T}(t, i)[H^u(t, i)R_u(t)H^{u^T}(t, i) + R_y(t)]^{-1} \\ &\equiv [R_u^{-1}(t) + H^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t)H^u(t, i)]^{-1}H^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

Exercício de aplicação 7.7.3.1: Pode-se demonstrar que o controle calculado com o algoritmo das Eqs. (31) e (32) é formalmente equivalente ao mínimo do funcional:

$$\begin{aligned}
J(\alpha, i) = & [[\alpha(i)\bar{Z}^u(t, i) - H^u(t, i)[U(t, i) - \bar{U}(t, i)]]^T R_y^{-1}(t) \\
& [\alpha(i)\bar{Z}^u(t, i) - H^u(t, i)[U(t, i) - \bar{U}(t, i)]] + \\
& [U(t, i) - \bar{U}(t, i) - \alpha(i)[\hat{U}(t_{-1}) - \bar{U}(t, i)]]^T R_u^{-1}(t) \\
& [U(t, i) - \bar{U}(t, i) - \alpha(i)[\hat{U}(t_{-1}) - \bar{U}(t, i)]]] / 2
\end{aligned} \tag{33}$$

Tem-se, portanto, condição de convergência para um controle suave que minimiza o erro em relação à trajetória de referência, desde que o modelo de predição usado para modelar o sistema dinâmico garanta aproximação com erros especificados, como pode ser o caso tanto das redes neurais como dos integradores numéricos.

Exercício de aplicação 7.7.3.2: Mostra-se que, em uma iteração típica, o algoritmo das Eqs. (31) e (32) é formalmente equivalente a se aplicar o método de Newton à minimização do funcional:

$$J_p = [Z^{uT}(t)R_y^{-1}(t)Z^u(t) + [U(t) - \hat{U}(t_{-1})]^T R_u^{-1}(t)[U(t) - \hat{U}(t_{-1})]] / 2, \tag{34}$$

$$Z_j^u(t) \triangleq [y_r(t_j) - \hat{y}(t_j)], j = 1, 2, \dots, n, \quad U_l(t) \triangleq u(t_l), l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Basta notar que o algoritmo das Eqs. (31) e (32) pode ser colocado na forma equivalente:

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t, i) = & \bar{U}(t, i) + [R_u^{-1}(t) + H^{uT}(t, i)R_y^{-1}(t)H^u(t, i)]^{-1} \\
& \alpha(i)[R_u^{-1}(t)[\hat{U}(t_{-1}) - \bar{U}(t, i)] + H^{uT}(t, i)R_y^{-1}(t)\bar{Z}^u(t, i)],
\end{aligned} \tag{31a}$$

que, por sua vez, pode ser colocado na forma equivalente:

$$\hat{U}(t, i) = \bar{U}(t, i) - \alpha(i)S(t, i)\nabla J_p^T(t, i), \tag{31b}$$

em que $S(t, i)$ e $\nabla J_p(t, i)$ são respectivamente a hessiana definida positiva e o gradiente do funcional da Eq. (34).

Extensão 7.7.3.1:

Para o problema equivalente de estimação em uma iteração típica, repetido abaixo para maior clareza, podem ser tomadas aproximações semelhantes aquelas para treinamento de redes neurais (vide seção 5.3, exercício de aplicação 5.3.1) de modo a permitir versão com processamento paralelo:

$$\alpha(i)[\hat{U}(t_{-1}) - \bar{U}(t, i)] = U(t, i) - \bar{U}(t, i) + V_u(t), \tag{30a}$$

$$\alpha(i)\bar{Z}^u(t, i) = H^u(t, i)[U(t, i) - \bar{U}(t, i)] + V_y(t). \tag{29a}$$

Para tanto, considere-se que $U_k(t, i), k \neq l$, seja aproximado por $\bar{U}_k(t, i)$. Desta aproximação resulta um problema de estimação que pode ser processado em paralelo, para cada $l=1, 2, \dots, n-1$, e que é da forma:

$$\alpha(i)[\hat{u}(t_{-l}) - \bar{u}(t_l, i)] = u(t_l, i) - \bar{u}(t_l, i) + V_{ul}(t), \quad (30b)$$

$$\alpha(i)\bar{Z}^u(t, i) = H_l^u(t, i)[u(t_l, i) - \bar{u}(t_l, i)] + V_y(t). \quad (29b)$$

Aplicando filtragem de Kalman, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t_l, i) &= \bar{u}(t_l, i) + \alpha(i)[\hat{u}(t_{-l}) - \bar{u}(t_l, i)] \\ &+ K(t, l, i)\alpha(i)[\bar{Z}^u(t, i) - H_l^u(t, i)[\hat{u}(t_{-l}) - \bar{u}(t_l, i)]], \end{aligned} \quad (31c)$$

$$K(t, l, i) = [R_{ul}^{-1}(t) + H_l^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t)H_l^u(t, i)]^{-1}H_l^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t). \quad (32a)$$

Analogamente ao que foi feito com o algoritmo pleno, se for considerada a forma equivalente do algoritmo:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t_l, i) &= \bar{u}(t_l, i) + [R_{ul}^{-1}(t) + H_l^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t)H_l^u(t, i)]^{-1} \\ &\alpha(i)[R_{ul}^{-1}(t)[\hat{u}(t_{-l}) - \bar{u}(t_l, i)] + H_l^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t)\bar{Z}^u(t, i)], \end{aligned} \quad (31d)$$

pode-se demonstrar a equivalência formal a se aplicar o algoritmo do método de Newton ao funcional da Eq. (34), repetido abaixo:

$$J_p = [Z^{u^T}(t)R_y^{-1}(t)Z^u(t) + [U(t) - \hat{U}(t_{-l})]^T R_u^{-1}(t)[U(t) - \hat{U}(t_{-l})]] / 2, \quad (34)$$

com a simplificação correspondente da matriz peso, que passa a ser dada por, no lugar de $R_u^{-1}(t)$:

$$\tilde{R}_u^{-1}(t) = \text{diag}.[[R_{ul}^{-1}(t) + H_l^{u^T}(t, i)R_y^{-1}(t)H_l^u(t, i)]^{-1} : l = 0, 1, \dots, n-1]. \quad (35)$$

Portanto, convergência para o caso de processamento paralelo fica também garantida.

Referências de aplicação 7.7.3.1: Silva e Rios Neto (1999), Silva e Rios Neto (2000), Silva e Rios Neto (2001), Silva (2001), usando redes neurais para o modelo de predição, aplicaram o método desenvolvido, respectivamente, em problemas teste da literatura, em controle de atitude de satélites e em controle de trajetórias de lançamento de satélites.

Referências de aplicação 7.7.3.2: Rios Neto e Tasinaffo (2003), Tasinaffo (2003) e Tasinaffo e Rios Neto (2007), usando redes neurais em estrutura de integradores numéricos de equações diferenciais ordinárias desenvolveram modelos de predição, em especial com derivadas médias e estrutura simples de integrador de Euler, e aplicaram o método desenvolvido em problemas de transferência de órbitas.

7.8.3 Controle com Modelo Interno Neural

Neste esquema de controle (Hunt and Sbarbaro, 1991), duas redes neurais artificiais são necessárias: uma para prover um modelo interno de predição do sistema dinâmico e outra para prover um modelo inverso do sistema dinâmico, a rede neural de controle, conforme ilustrado na Fig.7.3.

Para treinar a rede neural de controle, em geral adota-se um treinamento supervisionado pela minimização de um funcional como a seguir, em relação aos parâmetros peso w_c desta rede neural de controle.

$$J = 1/2 \sum_{j=1}^L (y_d(j) - y_c(j, w_c))^T R_y^{-1}(j) (y_d - y_c(j, w_c)), \quad (36)$$

no qual, $y_d(j)$, $j = 1, 2, \dots, L$ é o conjunto de valores de treinamento da resposta desejada; $y_c(j, w_c)$ é a saída controlada no instante j pela ação do controle $u(j-1, w_c)$ no instante $j-1$.

Para o cálculo do gradiente de $y_c(j, w_c)$ em relação aos pesos sinápticos da rede de controle, w_c , considera-se a rede neural de controle em série com a rede neural que fornece o modelo de predição do sistema dinâmico, $y_m(t_j)$. A regra da cadeia, mais especificamente a regra de retropropagação nas redes neurais (Zurada, 1992) é usada para se calcular primeiro na rede do modelo de predição o gradiente da resposta controlada em relação a $u(j-1, w_c)$ e, em seguida, em cadeia, o gradiente deste controle em relação aos pesos w_c .

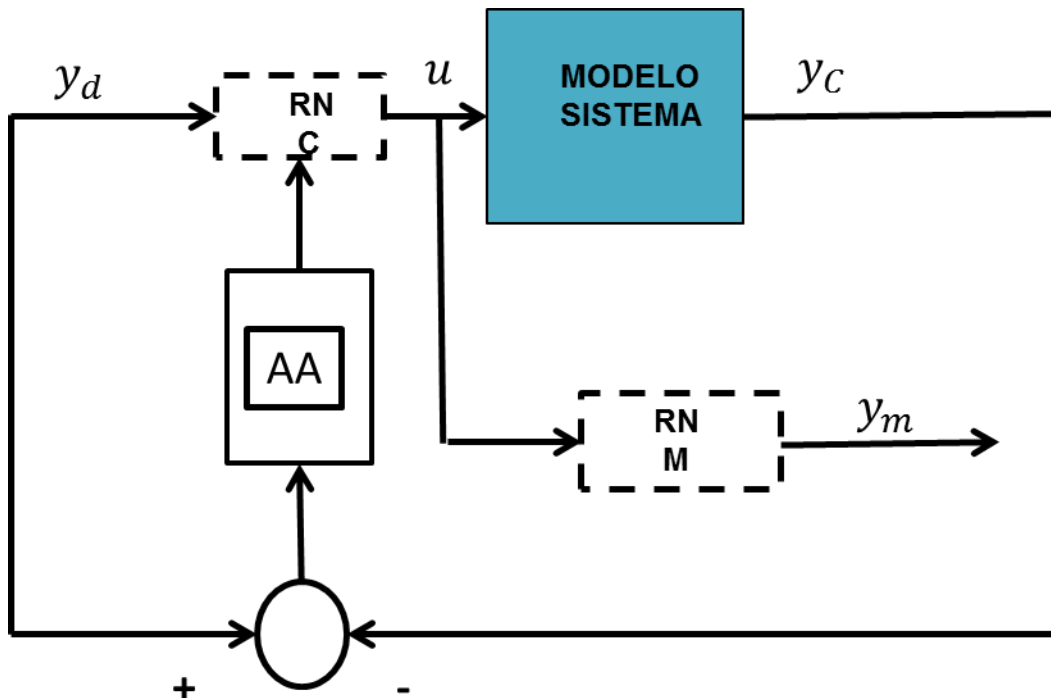


Figura 7.3: Modelo Interno de Controle: Treinamento da Rede de Controle

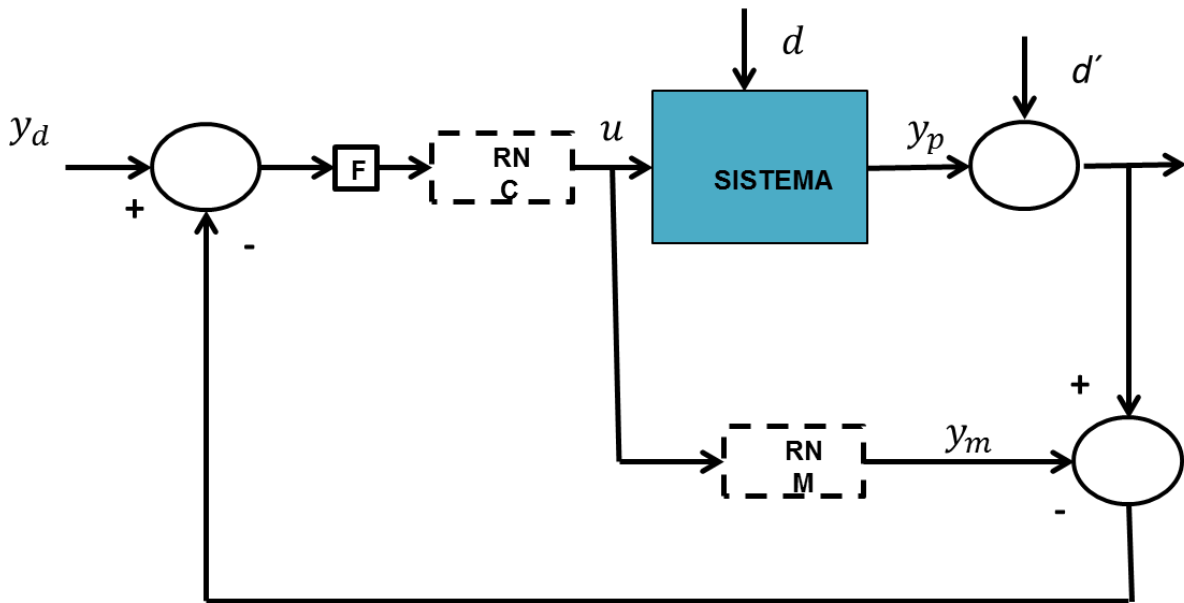


Figura 7.4: Controle com Modelo Interno: Implementação

Na implementação, como as redes neurais não são alimentadas com informações sobre perturbações não modeladas do sistema dinâmico, recomenda-se (Garcia e Morari, 1982) que a diferença entre a trajetória real da planta e a trajetória fornecida pela rede neural modelo interno de previsão seja utilizada na realimentação para corrigir o valor desejado e compensar os efeitos das perturbações (d), conforme ilustrado na Fig. 7.4. Isto além do filtro para alisar o efeito de erros ruidosos (d') na medida da saída perturbada do sistema.

Referências de aplicação 7.7.4.1: Varotto (1997), Varotto e Rios Neto (1997) e Carrara, Varotto e Rios Neto (1998) usaram Controle com Modelo Interno com redes neurais do tipo “multilayer perceptron” para o controle de atitude de satélites artificiais com apêndices flexíveis.

Bibliografia e Referências

Bélangier, P.R. (1974). Estimation of Noise Covariances Matrices for a Linear Time-Varying Stochastic Process, *Automatica*, Vol. 10, pp. 267-275.

Bierman, G.J. (1977). *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic Press, New York.

Brinati (1976). *Investigação sobre o Emprego do Filtro Estendido de Kalman para Identificação da Manobrabilidade de Navio*; Tese de doutoramento, EPUSP.

Brinati e Rios Neto (1977). Emprego de Filtro Adaptativo para Identificação dos Coeficientes do Movimento do Navio; *Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*; Florianópolis, SC.

Bryson, A.E. and Ho, Y.C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley, New York.

Cardenuto, N.C., Rios Neto, A. (2003) Aeronaves Configuradas por Controle do Tipo Preditivo Neural. *Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações-DINCON 2003*, ISBN 85-86883-15-8, ITA, São José dos Campos, SP.

Cardenuto, N.C. (1984). *Análise e Simulação de um Sistema Inercial ("Strapdown") de Determinação de Atitude Auxiliado por Estimação Adaptativa da Deriva*; Dissertação de Mestrado, INPE, São José dos Campos, SP (INPE-3257-TDL/177).

Cardenuto, N.C., Rios Neto, A. e Kuga, H.K. (1984). Determinação de Atitude Através de Sensores Inerciais Acoplados ("Strapdown") e Estimação Adaptativa"; *Anais do 1o. Congresso Latino Americano de Automática e 5o. Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, Paraíba (INPE-3180-PRE-1545).

Cardenuto, N.C. (2003) *Controle Configurado de Aeronaves com Controle Preditivo Neural*. Tese Doutorado, Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP.

Carew, B., Bélangier, P.R. (1973). Identification of Optimum Filter Steady-State Gain for Systems with Unknown Noise Covariances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-18 (6), pp. 582-587.

Carrara, V., Varotto, S. E. C., Rios Neto, A. (1998) Satellite Attitude Control Using Multilayer Perceptron Neural Networks, *American Astronautical Society - AAS, Advances in the Astronautical Sciences*, Vol 100, Part 1, ISBN 0-87703-453-2, AAS 98-345, pp. 565–579.

Chandran, P. S. (1994). Comments on Comparative Analysis of Backpropagation and the Extended Kalman Filter for Training Multilayer Perceptron, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(8), pp. 862-863.

Chen, S. and Billings, S. A. (1992). Neural Networks for Nonlinear Dynamic System Modeling and Identification", *Int. J. Control*, 56(2), pp. 319-346.

Cruz, J. J., Henriques, R.V.B. (1998). Um Novo Método de Controle de Posição de Manipuladores Robóticos. In: *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlândia, MG. V.3. p. 1095-1100.

Ferraresi, V. (1987) *Utilização Conjunta de Sensores Inerciais e Não- Inerciais em Determinação de Atitude de Satélites Via Filtro de Kalman*; Dissertação de Mestrado, INPE, São José dos Campos, SP (INPE-4313-TDL/280).

Ferraresi, V. Rios Neto, A. e Orlando, V. (1986). Utilização Conjunta de Sensores Inerciais e Não-Inerciais em Determinação de Atitude de Satélites Via Filtro de Kalman; *Anais do 6o. Congresso Brasileiro de Automática, SBA*, Belo Horizonte (INPE- 3925-PRE/959).

Garcia, C. E. & Morari, M. (1982) Internal model control - 1. A Unifying Review and Some New Results, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, vol. 21, pp. 308-323.

Fleury, A.T. (1985) Utilização das Noções de Dualidade no Desenvolvimento de Estimadores de Estado. 1985. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

Fleury, A.T. e Rios Neto, A. (1986) State Estimation Of Multivariable Systems Using The Duality Concept. *Revista Brasileira de Ciencias Mecânicas.* , v.8, p.285 - 308.

Fleury, A.T. e Rios Neto, A. (1987) Use of a Virtual Control Approach in State Estimation. *Proceedings of 10th World Congress of IFAC*, Munique, Alemanha Ocidental, Vol. IX, pp. 203 - 208. (INPE-3903-PRE/944).

Gelb, A., Kasper Jr, J.F., Nash Jr, R.A., Price, C.F. and Sutherland Jr, A.A. (1977). *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Henriques, R.V.B., CRUZ, J. J. (2000). Robust Position Control of Mechanical Manipulators. In: *6th IFAC Symposium on Robot Control - 6th SYROCO*, Viena. Preprints 6th SYROCO, V. I. pp. 73-78.

Hunt, K.J. and Sbarbaro, D. (1991) Neural Networks for Nonlinear Internal Model Control, *Proc. IEE Pt. D*, 138, pp. 431-438.

Hunt, K. J., Sbarbaro, D., Zbikowski, R. and Gawthrop, P. J. (1992). Neural Networks for Control Systems- A Survey, *Automatica*, 28(6), pp.1083-1112.

Jazwinski, A.H. (1969). Adaptive Filtering, *Automatica*, Vol. 5, pp. 475-485.

Jazwinski, A.H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Kalman, R.E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.* 82, pp.35-45.

Kalman, R.E. and Bucy, R.S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction, *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.* 83, pp.95-108.

- Kaplan, E. D.; Hegarty, C. J. *Understanding GPS: principles and applications*. Second edition. Norwood, MA: Artech House, 2006. 703 p.
- Kuga, H.K. (1981). *Estimação Adaptativa de Orbitas Aplicada a Satélites de Baixa Altitude*. Dissertação de mestrado, INPE, São José dos Campos, SP.
- Kuga, H.K. (1989). *Determinação de Órbitas de Satélites Artificiais Terrestres através de Técnicas de Estimação Combinadas a Técnicas de Suavização de Estado*, Tese Doutorado, INPE, São José dos Campos (INPE-4959-TDL/388).
- Kuga, H.K., Rios Neto, A., Orlando, V. (1990). UD Filtering and Smoothing Applied to Orbit Determination, *Mécanique Espatiale: Space Dynamics*, Cepadues-Editions, Toulouse, França.
- Marques Filho, E. A. (2005). *Navegação através de um sistema integrado GPS-INS baseado em IMU não-giroscópica*. Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais, INPE, São José dos Campos S.P (INPE-14490-TDI/1171).
- Marques Filho, E.A., Kuga, H.K. e Rios Neto, A. (2006). Integrated GPS/INS navigation system based on a gyroscope-free IMU In: *Anais DINCON 2006, 5o. Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Guaratinguetá, SP.
- Maybeck, P.S. (1979). *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Vol. 1, Academic Press, New York.
- Maybeck, P.S. (1982). *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Vol. 2, Academic Press, New York.
- Mehra, R.K. (1970). On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-15** (2), pp. 175-184.
- Mehra, R.K. (1972). Approaches to Adaptive Filtering, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-17** (5), pp. 693-698.
- Myers, K.A., Tapley, B.D. (1976). Adaptive Sequential Estimation with Unknown Noise Statistics, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 21, pp. 250-253.
- Nascimento Jr, C.L. (1988). *Estudo Comparativo de Métodos de Combate à Divergência de Filtros de Kalman*, Dissertação de Mestrado em Engenharia Eletrônica e Computação, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA.
- Nascimento Jr., C. L., Yoneyama, T., Brandão, J. T. R. (1990). State Estimation Procedures for Satellite Launching Rockets. *International Journal of Systems Science*, Vol. 16, (4), pp. 81-87.
- Negreiros de Paiva, R. (1980). *Determinação de Orbitas de Satélites Artificiais através de um Estimador, na Presença de Acelerações Não Modeladas, Usando a Transformação KS*. Dissertação de mestrado, INPE, São José dos Campos, SP, (INPE-1955-RPE/269).
- Negreiros de Paiva, R. (1988). *Determinação Autônoma de Órbita Usando o GPS*. Tese de Doutorado, INPE, São José dos Campos, SP, (INPE-4815-TDL/361).

Nowosad, A.G., Rios Neto, A. e Campos Velho, H.F. (2000). Data Assimilation Using an Adaptive Kalman Filtering and Laplace Transform; *Hybrid Methods in Engineering*, vol. 3, pp. 289-307.

Pinheiro, M.P. (1989). *Determinação de Órbita Geoestacionária em Tempo Real*; Tese de doutorado, Observatório Nacional.

Pinheiro, M.P. e Rios Neto, A. (1990). Real Time Geostationary Orbit Determination; em *Mécanique Spatiale*, editado pelo Centre D'Etudes Spatiales (CNES); Cepadues - Editions, Toulouse, França, (I.S.S.N. 0766 - 1002).

Rios Neto, A., Cruz, J.J. (1990). Design of a Stochastic Linear Discrete Regulator Based on an Optimal State Estimation Approach, *SBA: Controle e Automação*, Vol. 2, No. 3, pp. 151 – 157.

Rios Neto, A., Tapley, B.D. (1975). Estimating the State of Nonlinear Dynamical Systems in the Presence of Unmodeled Accelerations, In: *Anais do II Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, COPPE/CAPES, Rio de Janeiro.

Rios Neto e Negreiros de Paiva (1983). An Adaptive Satellite Orbit Estimation Scheme Using an Analytical Approach and a Dynamical Model Compensation Technique"; in *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, edited by S. Ferraz-Mello and P.E. Nacozy; Universidade de São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico.

Rios Neto, A., Kuga, H.K. (1982). Estimação Adaptativa do Ruído no Estado para o Filtro de Kalman, In: *Anais do 4o. Congresso Brasileiro de Automática*, Campinas, SP, (INPE-2440-PRE-141).

Rios Neto, A., Kuga, H.K. (1985). Kalman Filtering State Noise Adaptive Estimation, In: *Proceedings of Second IASTED International Conference on Telecommunication and Control*, TELECON'85, Rio de Janeiro.

Rios Neto, A., Cruz, J.J. (1985). A Stochastic Rudder Control Law for Ship Steering, *Automática*, Vol. 21, No. 4, pp. 371-384.

Rios Neto, A., Trabasso, L.G. e Orlando, V. (1987). Real Time Data Smoothing to Improve the Performance of a Strapdown Nongyroscopic Attitude Propagation Inertial Unit; *Revista SBA: Controle e Automação*, Vol. I No. 4, pp. 331-336.

Rios Neto, A. (2000) Design of a Kalman Filtering Based Neural Predictive Control Method, *Anais em CDROM do XIII Congresso Brasileiro de Automática-CBA2000*, Florianópolis, SC.

Rios Neto, A., Tasinaffo, P.M. (2003). Feed forward Neural Networks Combined With a Numerical Integrator Structure for Dynamic Systems Modeling. *Proceedings of the 17th International Congress of Mechanical Engineering-COBEM 2003*, São Paulo, SP.

Rios Neto, A., Tasinaffo, P.M. (2003). Neural Numerical Integrators in Predictive Control Tested in an Orbit Transfer Problem. *Anais II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações-DINCON 2003*, ISBN 85-86883-15-8, ITA, São José dos Campos, SP.

Rios Neto, A., Tasinaffo, P.M. (2004). Modeling with ODE Neural Numerical Integrators Applied to the Dynamics of an Orbit Transfer Problem In: *Advances in Space Dynamics 4: Celestial Mechanics and Astrodynamics*, INPE, São José dos Campos, SP, v.4, p. 243-252.

Silva, J. A., Rios Neto, A.(1999). Preliminary Testing and Analysis of an Adaptive Neural Network Training Kalman Filtering Algorithm. *Anais, IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, ITA, S. J. C., SP, pp. 247-251.

Silva, J. A., Rios Neto, A. (2000). Neural Predictive Satellite Attitude Control Based on Kalman Filtering Algorithms. *Proceedings of the 15th International Symposium in Space Flight Dynamics*, CNES, Biarritz, France.

Silva, J.A. e Rios Neto, A. (2001). Neural Predictive Flight Trajectory Control Based on Kalman Filtering Algorithms. *Anais em CDROM do XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica- COBEM2001*, ISBN: 85-85769-06-8, Uberlândia, MG.

Silva, J. A. (2001) *Controle Preditivo Utilizando Redes Neurais Artificiais Aplicado a Veículos Aeroespaciais*. Tese Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espacial, Instituto de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos (INPE-8480 -TDI/778).

Su, H. T. and McAvoy, T. J. (1993). Neural Model Predictive Control of Nonlinear Chemical Processes, *Proc. of the 1993 International Symposium on Intelligent Control*, Chicago, U.S.A., pp. 358-363

Trabasso L.G. (1985). *Anteprojeto de uma Unidade de Medida Inercial Não- Giroscópica*. Dissertação de Mestrado, INPE, São José dos Campos, SP (INPE-3887-TDL/220)

Tapley, B.D. and Ingram, D.S. (1973). Orbit Determination in the Presence of Unmodelled Accelerations, *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-18**, pp. 369-373.

Tasinaffo, P. M. (2003) *Estruturas de integração neural feedforward testadas em problemas de controle preditivo*. Tese de Doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE, São José dos Campos, (INPE-10475-TDI/945).

Tasinaffo, P. M., Rios Neto, A. (2007) Predictive Control with Mean Derivative Based Neural Euler Integrator Dynamic Model. *SBA: Controle e Automação*, v.18, pp.94-105.

Tasinaffo, P. M., Rios Neto, A. (2007) Mean Derivatives Based Neural Euler Integrator for Nonlinear Dynamic Systems Modeling. *Learning and Nonlinear Models.* , v.3, pp.98-109.

Thorton, C.L., Bierman, G.J. (1977) Gram-Schmidt Algorithms for Covariance Propagation. *International Journal of Control*, 25(2), pp.243-260.

Thorton, C.L., Bierman, G.J. (1980) UDU^T Covariance Factorization for Kalman Filtering. In: Leondes, C.T., ed. *Control and Dynamic Systems*. New York, NY, Academic Press.

Varotto, S.E.C. (1997). *Controle de Atitude para Satélites Artificiais Usando Redes Neurais*. Tese de doutorado, INPE, São José dos Campos, SP.

Varotto, S.E.C. e Rios Neto, A. (1997). Redes Neurais Aplicadas no Controle de Atitude de Satélites Artificiais com Apêndices Flexíveis. *Anais em CD ROM do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Bauru, SP.

Zurada, J. M. (1992). *Introduction to Artificial Neural Systems*, St. Paul, MN, West Publishing Company.

APÊNDICE I:

Fundamentos: Otimização de Sistemas Algébricos

I.1 Colocação Geral do Problema

$$\text{Minimizar: } f(x), x \in \Omega \subset E^n, \quad f(.) \in C^2 \quad (\text{I.1})$$

$$h(x) = 0, m \times 1, m \leq n$$

$$\text{Sujeito a: } g(x) \leq 0, p \times 1 \quad (\text{I.2})$$

$$h(.), g(.) \in_s C^2$$

Definição I.1: Dado um x , diz-se que são ativos os vínculos $g_j(x), j \in J, t.q. g_j(x) = 0$.

I.2 Vínculos de Igualdade

$$\text{Minimizar: } f(x), x \in \Omega \subset E^n, \quad f(.) \in C^2 \quad (\text{I.3})$$

$$\text{Sujeito a: } h(x) = 0, m \times 1, m \leq n, h(.) \in C^2 \quad (\text{I.4})$$

Neste caso, se admite que a solução procurada é interior a Ω .

Definição I.2: $x \in \Omega$, t.q. $h(x) = 0$, é ponto regular se os vetores gradientes, $\nabla h_i(x), i = 1, 2, \dots, m$, forem linearmente independentes.

Condições Necessárias:

Suponha que x^* seja, por exemplo, ponto de mínimo, então:

$$\begin{aligned} x^T &\triangleq (x^{eT} : x^{cT}) \triangleq (x^{eT} : u^T), x^e \in E^m, u \in E^{n-m} \\ \Delta f(x^*) &= f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = f_{x^e}(x^*) \Delta x^e + f_u(x^*) \Delta u + o(2) \geq 0 \\ \Delta h(x^*) &= h(x^* + \Delta x) - h(x^*) = h_{x^e}(x^*) \Delta x^e + h_u(x^*) \Delta u + o(2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Sendo x^* regular, para incrementos de primeira ordem, desconsiderando termos de ordem superior, $o(2)$, tem-se:

$$\Delta x^e = -[h_{x^e}(x^*)]^{-1} h_u(x^*) \Delta u \quad (\text{I.6})$$

Portanto na equação de $\Delta f(x^*)$, resulta:

$$-(f_{x^e}(x^*)[h_{x^e}(x^*)]^{-1} h_u(x^*) + f_u(x^*)) \Delta u \geq 0 \quad (\text{I.7})$$

Sendo as componentes de Δu independentes, resultam como condições necessárias:

$$\begin{aligned} [f_u(x^*) - f_{x^e}(x^*)][h_{x^e}(x^*)]^{-1}h_u(x^*)]^T &= 0 \\ h(x^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

I.3 Multiplicadores de Lagrange

O conceito de multiplicadores de Lagrange é o de que multiplicar uma equação nula por uma variável de valor arbitrário (o multiplicador de Lagrange) não altera a condição dela ser nula. Assim, no problema com vínculos de igualdade:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^*) &\geq 0 \\ \Rightarrow \Delta f(x^*) + \underbrace{\lambda^T \Delta h(x^*)}_{=0} &\geq 0 \\ \Delta h(x^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Resultando, pois:

$$(f_{x^e}(x^*) + \lambda^T h_{x^e}(x^*))\Delta x_e + (f_u(x^*) + \lambda^T h_u(x^*))\Delta u \geq 0 \quad (\text{I.10})$$

Sendo λ , o multiplicador de Lagrange, arbitrário, pode-se escolhe-lo de modo a anular o primeiro termo da (I.10); e sendo Δu de componentes independentes, conclui-se pela nulidade do segundo termo em (I.10). Resultam, então, as condições necessárias:

$$\begin{aligned} f_{x^e}(x^*) + \lambda^T h_{x^e}(x^*) &= 0 \\ f_u(x^*) + \lambda^T h_u(x^*) &= 0 \\ h(x^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Note-se que:

- $\lambda^T = -f_{x^e}(x^*)[h_{x^e}(x^*)]^{-1}$,
- o gradiente de $f(x)$ em x^* é ortogonal à hipersuperfície de intersecção dos vínculos, ou seja, é ortogonal ao plano tangente, em x^* (P^*), à hipersuperfície definida por $h(x)=0$ (Fig. I.1), sendo plano tangente definido por:

$$M \hat{=} \{ y = (P - P^*) \in E^n : \nabla h(x^*)y = 0 \} \quad (\text{I.12})$$

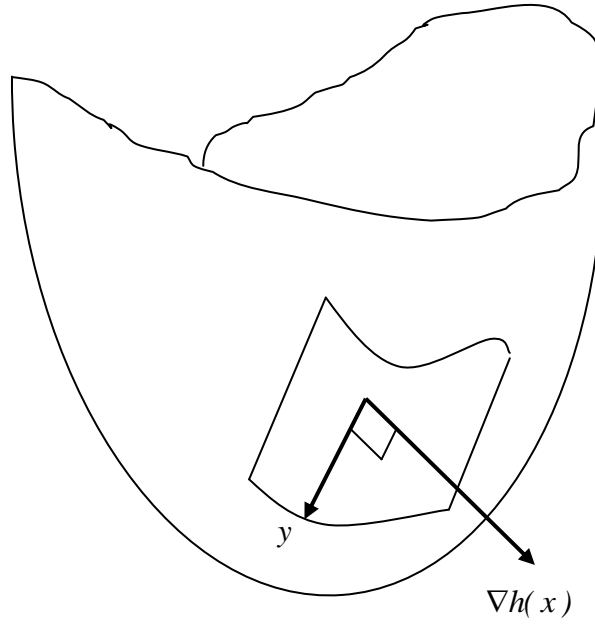


Figura I.1: Ilustração de Plano Tangente e Gradiente

I.4 Vínculos de Desigualdade

Seja o caso do problema geral, com vínculos de desigualdade.

$$\text{Minimizar: } f(x), x \in \Omega \subset E^n, \quad f(.) \in C^2 \quad (\text{I.1})$$

$$h(x) = 0, m \times 1, m \leq n$$

$$\text{Sujeito a: } g(x) \leq 0, p \times 1 \quad (\text{I.2})$$

$$h(.), g(.) \in_s C^2$$

Definição I.3: $x \in \Omega$, t.q. $h(x) = 0$, $g_j(x), j \in J$, t.q. $g_j(x) = 0$. é ponto regular se os vetores gradientes, $\nabla h_i(x), i = 1, 2, \dots, m$, $\nabla g_j(x), j \in J$ forem linearmente independentes.

Condições Necessárias:

Para que x^* regular seja ponto de mínimo é necessário que as chamadas condições de Kuhn-Tucker sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) &= 0 \\ \mu^T g(x^*) &= 0 \\ \lambda \in E^m, \mu \in E^p, \quad \mu &\geq 0 \begin{cases} \mu_j \geq 0, j \in J \\ \mu_l = 0, g_l(x^*) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Note-se que:

- $\nabla f(x^*)$ é ortogonal ao plano tangente à hipersuperfície intersecção de $h(x^*)=0$ e $g_j(x^*)=0, j \in J$.
- $\mu_j \geq 0$, pois componentes de $\nabla f(x^*)$ na direção de $\nabla g_j(x), j \in J$ têm que “apontar para fora dos vínculos”.

I.5 Condições Suficientes

Vínculos de Igualdade:

Para determinação das condições suficientes, seja x^* satisfazendo as condições necessárias e considere-se que, se para qualquer curva $x(t)$ pertencente aos vínculos (isto é, na hipersuperfície de intersecção dos vínculos), com derivada de ordem dois, tal que $x(t=0)=x^*$, for verdade que:

$$d^2(f(x(t)))/dt^2 \Big|_{t=0} > 0 \quad (\text{I.14})$$

Tem-se então uma condição suficiente para que x^* seja ponto de mínimo. Mas, notando que:

$$d^2(f(x(t)))/dt^2 \Big|_{t=0} = \dot{x}^T(0) \{ \partial^2 f(x(t)) / \partial x_i \partial x_j \}_{x^*} \dot{x}(0) + \nabla f(x^*) \ddot{x}(0) \quad (\text{I.15})$$

e que derivando até ordem dois $\lambda^T h(x(t))=0$,

$$\dot{x}^T(0) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \{ \partial^2 h_j(x(t)) / \partial x_k \partial x_l \}_{x^*} \dot{x}(0) + \lambda^T \nabla h(x^*) \ddot{x}(0) \right) = 0 \quad (\text{I.16})$$

Somando, considerando as condições necessárias:

$$\dot{x}^T(0) \left(\{ \partial^2 f(x(t)) / \partial x_i \partial x_j \}_{x^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \{ \partial^2 h_j(x(t)) / \partial x_k \partial x_l \}_{x^*} \right) \dot{x}(0) > 0 \quad (\text{I.17})$$

Sendo $\dot{x}(0)$ arbitrário na hipersuperfície dos vínculos, resulta como condição suficiente que seja definida positiva a matriz:

$$\{ \partial^2 f(x(t)) / \partial x_i \partial x_j \}_{x^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \{ \partial^2 h_j(x(t)) / \partial x_k \partial x_l \}_{x^*} \triangleq F(x^*) + \lambda^T H(x^*) > 0 \quad (\text{I.18})$$

Vínculos de Desigualdade:

Para um ponto regular x^* , que satisfaça as condições necessárias para mínimo e tal que para os $g_j(x^*)=0$ se tenha os correspondentes $\mu_j > 0$, então a condição para que ele seja de mínimo é:

$$\begin{aligned} & \{ \partial^2 f(x(t)) / \partial x_i \partial x_j \}_{x^*} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \{ \partial^2 h_j(x(t)) / \partial x_k \partial x_l \}_{x^*} + \sum_{j=1}^J \mu_j \{ \partial^2 g_j(x(t)) / \partial x_k \partial x_l \}_{x^*} \\ & \triangleq F(x^*) + \lambda^T H(x^*) + \mu^T G(x^*) > 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

sendo a demonstração análoga aquela para vínculos de igualdade e segundo a mesma restrição de $\dot{x}(0)$ arbitrário na hipersuperfície dos vínculos.

APÊNDICE II:

Sistemas Lineares e Matriz de Transição

II.1 Sistemas Lineares Homogêneos

Dado o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas, isto é, sem termo forçante (controle), simplesmente chamado de sistema linear homogêneo:

$$\dot{x} = F(t)x, \quad x(t) \in E^n \quad (\text{II.1})$$

procura-se a partir de uma condição inicial, $x_0 = x(t_0)$, a trajetória solução: $x(t), t \geq t_0$ (Fig. I.1).

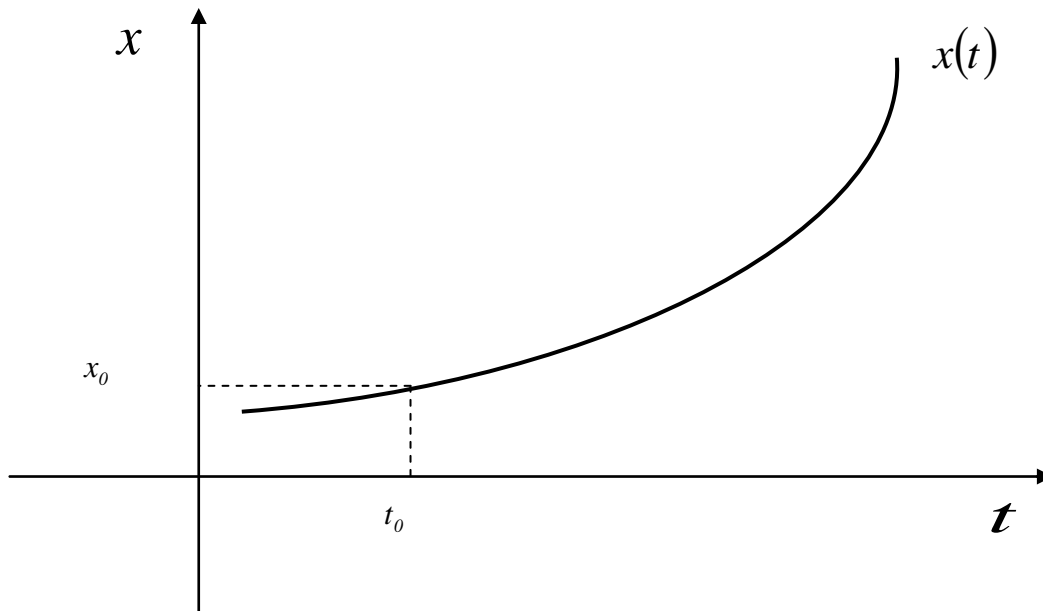


Figura II.1: Condição Inicial versus Trajetória Solução Única

Se os elementos da matriz $F(t)$ ($n \times n$), isto é, $F_{ij}(t)$, são funções contínuas do tempo, então dada uma condição inicial, $x_0 = x(t_0)$, existe e é única a solução, isto é, trajetória, passando por $x_0 = x(t_0)$.

A propriedade básica usada, para estudo de soluções, é a de superposição de soluções, isto é, se $x(t)$ e $x'(t)$ são soluções, então qualquer combinação linear delas é também solução:

$$d(\alpha x + \beta x')/dt = F(t)(\alpha x + \beta x') \quad (\text{II.2})$$

quaisquer que sejam os parâmetros α, β .

Matriz de Transição:

(i) Considerando a base ortonormal (vetores unitários, ortogonais) do espaço de dimensão n , R^n , considere-se que qualquer que seja a condição inicial $x_0 = x(t_0)$, ela pode ser expressa como uma condição dos vetores da base ortonormal:

$$x(t_0) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \varphi^i(t_0) \quad (I.3)$$

$$\varphi^1(t_0) \triangleq (1, 0, \dots, 0)^T, \varphi^2(t_0) \triangleq (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \varphi^n(t_0) \triangleq (0, 0, \dots, 1)^T$$

(ii) Gerando-se as soluções $\varphi^i(t, t_0)$ a partir de $\varphi^i(t_0)$, isto é:

$$\dot{\varphi}^i(t, t_0) = F(t) \varphi^i(t, t_0), \quad \varphi^i(t_0, t_0) = \varphi^i(t_0) \quad (I.4)$$

Combinando-se as soluções $\varphi^i(t, t_0)$ como colunas de uma matriz, para $i=1, 2, \dots, n$, gera-se a chamada matriz de transição:

$$\Phi(t, t_0) \triangleq (\varphi^1(t, t_0) : \varphi^2(t, t_0) : \dots : \varphi^n(t, t_0)) \quad (I.5)$$

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_n$$

(iii) A designação de matriz de transição fica clara notando-se que, se considerarmos o princípio da superposição e a unicidade solução a partir de uma dada condição inicial $x_0 = x(t_0)$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \varphi^i(t, t_0), \quad \tilde{x}(t_0) \equiv x(t_0) \therefore$$

$$\tilde{x}(t) \equiv x(t) \quad (I.6)$$

$$x(t) = (\varphi^1(t, t_0) : \varphi^2(t, t_0) : \dots : \varphi^n(t, t_0)) (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))^T$$

$$\equiv \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

II.2 Propriedades da Matriz de Transição

(i) Sendo:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \varphi^j(t, t_0) x_j(t_0),$$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_i^j(t, t_0) x_j(t_0)$$

portanto,

$$\partial x_i(t) / \partial x_j(t_0) = \varphi_i^j(t, t_0) \equiv \Phi_{ij}(t, t_0) \quad (I.7)$$

Esta propriedade é importante, pois é usada para se gerar numericamente $\Phi(t, t_0)$.

(ii) $\Phi(t, t_0)$ sempre tem inversa, pois gerando-se $x_0 = x(t_0)$ a partir de $x(t)$, repetindo todos os passos, se teria:

$$\Phi(t_0, t), \quad \Phi(t, t) = I_n$$

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t)x(t)$$

No entanto,

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

Portanto,

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0)x(t_0) \quad \therefore$$

$$\Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0) = I_n \quad (I.8)$$

$$\Phi(t_0, t) = \Phi^{-1}(t, t_0)$$

(iii) Da condição de fazer transições de um instante para outro, da matriz de transição, isto é,

$$x(t_j) = \Phi(t_j, t_i)x(t_i)$$

$$x(t_k) = \Phi(t_k, t_j)x(t_j)$$

decorre que,

$$x(t_k) = \Phi(t_k, t_j)\Phi(t_j, t_i)x(t_i)$$

$$= \Phi(t_k, t_i)x(t_i)$$

Portanto:

$$\Phi(t_k, t_i) = \Phi(t_k, t_j)\Phi(t_j, t_i) \quad (I.9)$$

(iv) Para sistemas invariantes no tempo,

$$\dot{x} = Fx, \quad x(t) \in E^n \quad (I.10)$$

tem-se que:

$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)}$$

$$e^{F(t-t_0)} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (F^n / n!)(t-t_0)^n \quad (I.11)$$

Para verificar basta notar que:

$$d(e^{F(t-t_0)})dt = Fe^{F(t-t_0)}, \quad \therefore$$

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = F\Phi(t, t_0)$$

II.3 Sistemas Lineares Não Homogêneos

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u(t), \quad x(t) \in E^n, u(t) \in E^p, p \leq n \quad (\text{I.12})$$

Adotando o método de variação de parâmetros e admitindo:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)z(t) \quad (\text{I.13})$$

Derivando membro a membro e usando a propriedade de matriz de transição, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) \\ &= F\Phi(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) \\ &= Fx(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) \end{aligned}$$

Comparando com a equação inicial, de definição do sistema não homogêneo, Eq. (I.12):

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) &= G(t)u(t) \quad \therefore \\ \dot{z}(t) &= \Phi^{-1}(t, t_0)G(t)u(t) \end{aligned}$$

Integrando membro a membro,

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

Considerando que $z(t_0) = x(t_0)$ (Eq. (I.13)) e multiplicando membro a membro por $\Phi(t, t_0)$

$$\Phi(t, t_0)z(t) - \Phi(t, t_0)z(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, t_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

Portanto, considerando-se que vale, das propriedades de matriz de transição, que:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(s, t_0) &= \Phi(t_0, s) \\ \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s) &= \Phi(t, s) \end{aligned}$$

resulta, finalmente,

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau \quad (\text{I.14})$$

Um caso interessante de sistema não homogêneo é quando o termo não homogêneo ou forçante é um impulso unitário em um dado instante τ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(t)x + I_n u(t), \\ u_i(t) &= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \delta(t - \tau), & i = j \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{I.15})$$

Seja $\delta(t - \tau)$ a função delta de Dirac ou função impulso unitário, definida como o limite a seguir, por exemplo (há outras situações de limites que levam ao impulso unitário):

$$\delta(t - \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1/\varepsilon > 0, & \tau \leq t \leq \tau + \varepsilon \\ 0, & \tau > t > \tau + \varepsilon \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

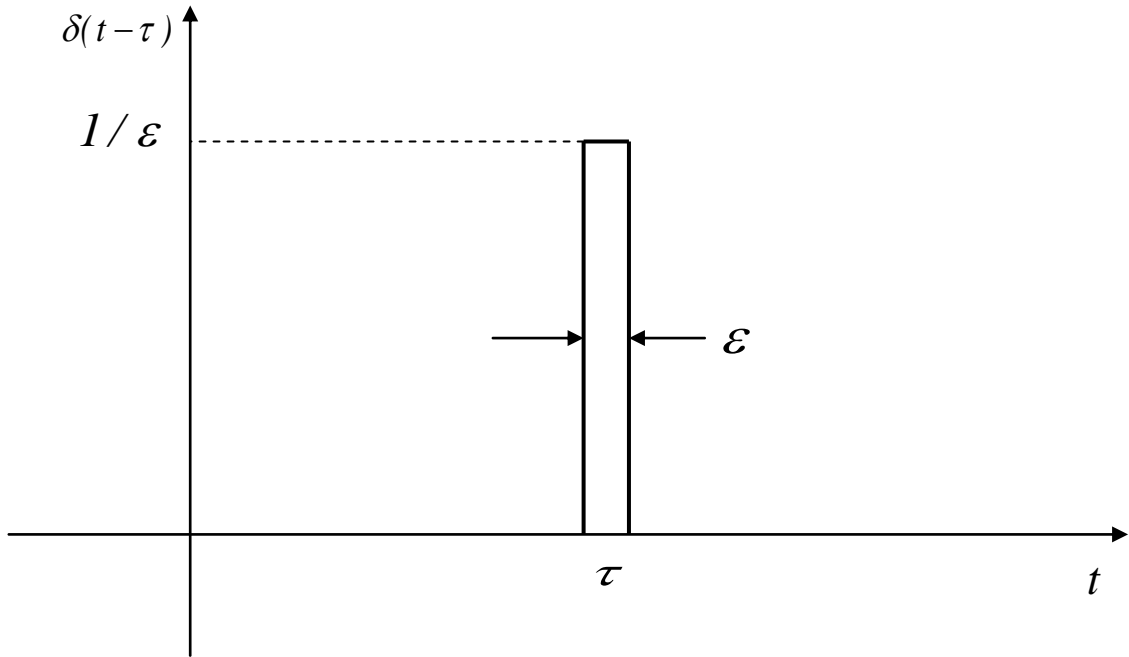


Figura II.2: Impulso Unitário

Esta função tem como propriedade típica:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t > \tau + \varepsilon} f(s) \delta(s - \tau) ds &= \int_{t_0}^{t > \tau + \varepsilon} f(s) (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon) ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon \int_{t_0}^{t > \tau + \varepsilon} f(s) ds = (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon) f(\tau) \varepsilon = f(\tau)\end{aligned}\quad (\text{I.17})$$

Sendo assim, a trajetória a partir de $x_0 = x(t_0)$, para o sistema linear não homogêneo no caso em que o termo forçante é o impulso unitário em τ (Eq. (I.15)) e conforme Eq. (I.14), é:

$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t > \tau} \Phi(t, s) (0, 0, \dots, \delta(s - \tau), \dots, 0)^T ds \\ &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \varphi^j(t, \tau)\end{aligned}\quad (\text{I.18})$$

Ou seja, para condições iniciais nulas, o impulso unitário em τ gera j-ésima coluna da matriz de transição a partir de τ .

APÊNDICE III

Identidades de Matrizes

Seja a matriz quadrada, simétrica, não singular, com A e C quadradas e simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Para determinação da inversa, desenvolvendo o produto:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ N & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A & 0_B \\ 0_{B^T} & I_C \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

$$\begin{aligned} AL + BN &= I_A, & AM + BP &= 0_B \\ B^T L + CN &= 0_{B^T}, & B^T M + CP &= I_C \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Resolvendo estas equações, considerando que A e C são não singulares:

$$\begin{aligned} L &= [A - BC^{-1}B^T]^{-1}, & P &= [C - B^T A^{-1}B]^{-1} \\ N &= -C^{-1}B^T [A - BC^{-1}B^T]^{-1}, & M &= A^{-1}B [C - B^T A^{-1}B]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Do fato que a inversa de uma matriz simétrica é também simétrica, tem-se que:

$$(C^{-1})^T = C^{-1}, \quad (A^{-1})^T = A^{-1}, \quad M = N^T \quad (\text{III.5})$$

Das expressões de M e N resultam as identidades:

$$\begin{aligned} A^{-1}B [C - B^T A^{-1}B]^{-1} &\equiv [-C^{-1}B^T [A - BC^{-1}B^T]^{-1}]^T \\ &\equiv [[A - BC^{-1}B^T]^{-1}]^T BC^{-1} \equiv [A - BC^{-1}B^T]^{-1} BC^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Do fato que:

$$A^{-1}A = I$$

decorre que:

$$NB + PC = I_C \rightarrow P = C^{-1} - NBC^{-1}$$

Substituindo os valores de P e N :

$$[C - B^T A^{-1}B]^{-1} \equiv C^{-1} - C^{-1}B^T [BC^{-1}B^T - A]^{-1}BC^{-1} \quad (\text{III.7})$$

ÍNDICE REMISSIVO

abordagem subótima	27	Hamiltoniana 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 21,	
Adams Bashfort	120	22, 23, 26	
back propagation	73	incremento de primeira ordem 9, 10, 17, 21	
Bierman	65, 78, 93, 96, 109, 127, 131	índice de desempenho	3
busca direta	29, 36	integrador de Euler	124
busca indireta	34	interpolação polinomial	67
coeficiente de correlação	58	Kuhn-Tucker	135
compensação do modelo dinâmico...98, 99,	112	malha aberta	2, 3
condições de contorno	15	malha fechada	2, 4, 83, 114, 115, 117
condições de quinas	13	matriz de covariâncias ... 58, 63, 65, 66, 68,	
conjuntamente distribuídas...57, 58, 59, 60,	80	75, 82, 85, 90, 91, 93, 94, 95, 96, 99,	
contorno múltiplo	25	102, 105, 106, 107, 112, 119	
controle	3	matriz de transição ... 34, 35, 37, 80, 85, 90,	
controle automático	1	91, 94, 95, 97, 139, 140, 141, 143	
controle ótimo	3, 5	matrizes de ponderação	15, 16
controle preditivo	120, 121, 122, 131	máxima verossimilhança	69, 76, 100
controle virtual	104, 105, 106, 107, 108	média	55
critérios de estimação	62	método de Euler	91, 94, 97
da Mínima Ação	16	método de Newton	69, 123, 124
determinismo	49	métodos adaptativos	98
distribuição gaussiana	56	métodos de fatorização	109
entradas	1	modelagem	2
Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman...45,	46	modelo interno	125, 126
equações adjuntas	11, 16, 20	momento	55
Espaço Amostral	50	Multi Layer Perceptron	71, 73
espaço de probabilidades	51	multiplicadores de Lagrange.. 9, 10, 17, 21,	
esperança	55	22, 23, 24, 37, 38, 116, 134	
estado	1, 3	neurônios	73
estimação de parâmetros 67, 76, 88, 89, 92,		perturbação linear .. 29, 30, 35, 73, 95, 100,	
105, 121, 122		105, 117, 122	
estimador de estado	5	pontos de contorno	8
evento	49, 50, 57, 59	Potter	66, 67, 70
experimento	49	princípio da otimalidade	42, 43
fatoração de raiz quadrada	66	princípio de Hamilton	16
fatorização UD	109	Princípio de Máximo	12
fenômeno aleatório	49, 50, 51, 53	Princípio de Mínimo	11, 18, 46
Filtro de Kalman.1, 78, 89, 94, 98, 99, 108,		probabilidade 49, 50, 51, 53, 57, 59, 82, 89,	
109, 112, 115, 118, 128, 130		100, 119	
Filtro Estendido de Kalman 96, 98, 99, 102,		probabilidade condicionada	59
103, 105, 106, 112, 127		problema de controle	1
forma de Joseph	65, 93, 96	problema linear quadrático	46
forma de Kalman	65, 91	processamento seqüencial	74
função de controle	12, 29, 30, 115, 117	processo aleatório	80, 81
função parametrizada	28, 72	processo de Gauss Markov	85, 87, 114
		processo de inovação	100
		processo estocástico	80, 85, 95, 104
		processos markovianos	81

Programação Dinâmica	1, 42, 43, 44, 45, 46
pseudo observação.....	101, 102
raíz quadrada	108, 109
redes neurais....	71, 122, 123, 124, 125, 126
regra de Bayes	63
ruído branco....	83, 84, 87, 94, 97, 100, 104, 114, 116, 117
ruído no estado	99, 101, 102, 112
Runge Kutta.....	74, 94, 97, 120
saídas	1
sequência de Gauss Markov	82, 118
sequência markoviana	81, 82
série de Taylor	10
sigma-álgebra	50, 51
síntese	2

sistema	1
sistema dinâmico	3
solução subótima	29, 30
treinamento supervisionado	71, 73, 121, 125
varacional.....	9
variação.....	7
variância.....	56
variáveis adjuntas.....	17
variável aleatória	52, 53, 54, 55, 62, 80, 83, 119
vínculos	3
vínculos de contorno.....	21, 34, 35
vínculos de desigualdade	24, 28, 75, 76, 135