

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO PERIÓDICAS

Ana Flávia G. Greco¹, Joaquim J. Barroso² e José O. Rossi³

Laboratório Associado de Plasma - INPE, São José dos Campos, SP – Brasil

¹anaflaviaguedesgreco@gmail.com

²barroso@plasma.inpe.br

³rossi@plasma.inpe.br

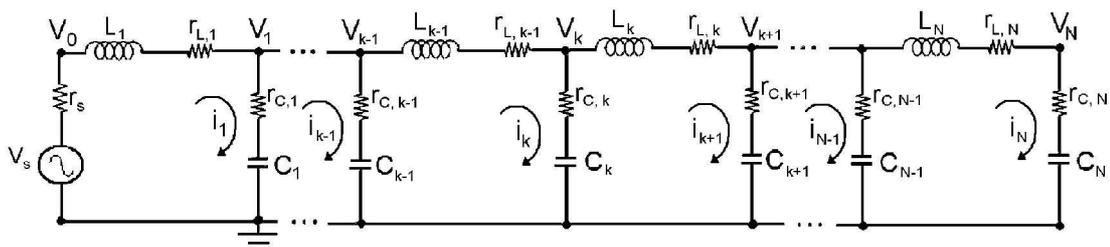
Resumo: O presente trabalho examina as propriedades de propagação de ondas em linhas de transmissão periódicas com células LC e CL. São deduzidas equações diferenciais de primeira ordem no tempo, para corrente e carga, e que desta forma permitem a análise do regime transitório das linhas sendo excitadas por um pulso de forma arbitrária. No regime senoidal em particular, são examinadas as características de propagação em linhas periódicas nas quais células unitárias idênticas repetem-se periodicamente, destacando-se a interpretação de velocidades de fase positiva e negativa associadas respectivamente às topologias LC e CL.

Palavras-chave: linhas de transmissão, linha LC, linha CL, metamateriais.

1 Introdução

Caracterizado por parâmetros constitutivos negativos (permissividade elétrica e permeabilidade magnética), metamaterial (Eleftheriades, 2012) é um material produzido artificialmente, exibindo propriedades não encontradas na natureza. O conceito de metamateriais foi primeiramente teorizado em 1967 por Veselago (1968), que especulou sobre a possível existência dos metamateriais e antecipou suas propriedades eletromagnéticas únicas tais como refração negativa, efeito Doppler inverso, radiação Vavilov-Cerenkov reversa e focalização por lente plana. Tais materiais assim imaginados foram referidos como substâncias LH (left-handed) para expressar o fato de que permitiriam a propagação de ondas eletromagnéticas com o campo elétrico, o campo magnético e o vetor de propagação formando uma tríade canhota, em contraposição aos materiais convencionais em que a tríade destes três vetores segue a regra da mão direita. E somente três décadas após, as idéias de Veselago foram verificadas experimentalmente por Shelby *et al.* (2001), que usando ressoadores de anéis repartidos em combinação com fios condutores demonstraram o fenômeno da refração negativa. Entretanto, exibindo perdas e tendo operação limitada a estreitas faixas de frequência, logo se verificou que tais estruturas ressonantes tornam-se de difícil implementação para aplicações em microondas (Simovski *et al.*, 2003; Ozbay *et al.*, 2003). Mas a partir de 2002, notadamente dois grupos (Caloz *et al.*, 2002; Caloz and Ithoh, 2003; Caloz and Ithoh, 2004; Eleftheriades *et al.*, 2002; Grbic and Eleftheriades, 2003) propuseram a utilização de linhas de transmissão – que são estruturas não ressonantes, de baixas perdas e com larga faixa de frequência de operação – para implementar e levar à prática o conceito de metamateriais.

Do exposto, e tendo em vista a realização de estruturas de metamateriais, o presente trabalho examina as propriedades de propagação de ondas em linhas de transmissão periódicas com células CL (C e L denotando a capacitância série e a indutância shunt em cada célula), pois a linha CL, como será discutido, apresenta a característica de um meio LH em que a velocidade de fase é negativa, i. e., tem direção oposta à velocidade de grupo. Em um estudo comparativo, é feito a análise da linha periódica dual LC (L e C denotando a indutância série e a capacitância shunt em cada célula). Para tanto, e tendo como variáveis de estado a carga no capacitor e a corrente que flui no indutor, são deduzidas equações diferenciais de primeira ordem no tempo para configurações gerais das linhas CL e a dual LC. As equações assim deduzidas permitem a análise transitória das linhas sendo excitadas por um pulso de forma arbitrária. Investigam-se as propriedades de propagação no regime estacionário senoidal, sendo discutidas as características de dispersão e identificando-se as bandas de frequência e atraso de grupo, na faixa de frequências de 100 kHz a 1 MHz.



(a)

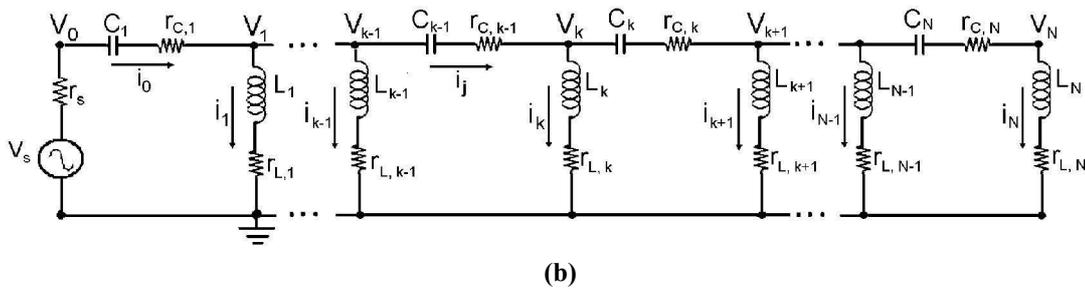


Figura 1. Linhas de Topologia (a) LC e (b) CL.

2 Equações de Circuito

2.1 Linha LC (Right Handed)

A Figura 1(a) mostra uma linha LC generalizada, onde as variáveis de estado consideradas são a corrente I_k no indutor da seção k e a correspondente carga Q_k armazenada no capacitor da seção k . De importância do ponto de vista numérico, foram adotadas estas variáveis de maneira que as equações diferenciais para esta linha sejam todas de primeira ordem. Considera-se ainda uma linha com perdas, onde cada indutor tem uma resistência associada $r_{L,k}$, cada capacitor tem uma resistência $r_{C,k}$ e o gerador tem uma resistência r_s .

As equações a seguir foram generalizadas para qualquer número N de seções k . Para a linha LC, as equações de circuito são escritas para três categorias de seções: inicial, intermediárias e final. Cada uma destas seções corresponde a duas equações, conforme apresentado a seguir:

Seção Inicial:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k}(I_k) - \frac{r_{L,k+1}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k - I_{k+1}) - \frac{Q_k - Q_{k+1}}{L_k C_k} \quad (4a)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k \quad (4b)$$

onde $k = 1$ e V_s representa a tensão de entrada, podendo ser um sinal senoidal, ou uma forma arbitrária de pulso (trapezoidal, triangular, etc.)

Seção Intermediária:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k}(I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k - I_{k+1}) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k - Q_{k+1}}{L_k C_k} \quad (5a)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = 2, 3, \dots, N-1 \quad (5b)$$

Seção Final:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k}(I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k}{L_k C_k} \quad (6a)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = N \quad (6b)$$

2.2 Linha CL (Left Handed)

A Figura 1(b) mostra uma linha CL generalizada, onde as equações deduzidas aplicam-se a qualquer número N de seções k . Diferentemente do caso anterior, nesta topologia a corrente que flui no ramo shunt L - r_L de cada seção é descrita por uma única equação:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} \sum_{j=k}^N I_j - \frac{r_L}{L_k}(I_k) - I_{s_k} - Q_{s_k} \quad (10a)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k \quad (10b)$$

onde I_{s_k} e Q_{s_k} são funções recursivas definidas como

$$I_{s_k} = I_{s_{k-1}} + \frac{r_C}{L} \sum_{j=k}^N I_j, \text{ com } I_{s_0} = 0 \tag{11a}$$

$$Q_{s_k} = Q_{s_{k-1}} + \frac{\sum_{j=k}^N Q_j}{L_k C_k}, \text{ com } Q_{s_0} = 0 \tag{11b}$$

3 Relações de Dispersão

3.1 Linha LC

Para análise no regime senoidal da linha periódica com $r_{C,k} = r_C$, $r_{L,k} = r_L$, $C_{,k} = C$ e $L_{,k} = L$, e considerando a variação espaço temporal $\exp[-i(\omega t - \beta n)]$, onde $n = x / p$ com x denotando a posição de um nó em relação à fonte e p representando o comprimento hipotético da célula unitária, e portanto $\exp(i\beta)$ indica a mudança de fase através de cada célula, as equações para a tensão e corrente na linha LC (Fig. 2) são

$$\begin{cases} C U_k = Q_k \\ U_k = V_k - (I_k - I_{k+1})r_C = V_k - I_k(1 - e^{i\beta})r_C \\ Q'_k = I_k - I_{k+1} \\ V_{k-1} - V_k = L I'_k + r_L I_k \end{cases} \tag{12}$$

e notando que $I'_k = -i\omega I_k$ e $I_{k\pm 1} = I_k e^{\pm i\beta}$, as equações passam a apresentar a forma

$$I_k(1 - e^{i\beta})(1 - i\omega r_C C) = -i\omega C V_k \tag{13a}$$

$$V_k(e^{-i\beta} - 1) = I_k(r_L - i\omega L) \tag{13b}$$

e combinado (13a) e (13b) chega-se à relação de dispersão

$$\omega^2 LC + i\omega r_L C = 4 \text{sen}^2(\beta/2)(1 - i\omega r_C C). \tag{13c}$$

Para uma linha LC sem perdas ($r_C = 0$, $r_L = 0$), (13c) reduz a

$$\omega^2 LC = 4 \text{sen}^2(\beta/2) \tag{13d}$$

onde o fator de fase β é real para $\omega < 2\omega_0$, onde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, e torna-se complexo, $\beta = \pi + ia(\omega)$ quando $\omega > 2\omega_0$ como ilustra a Figura 4.

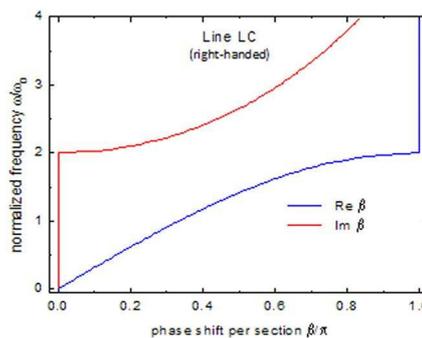


Figura 4. Diagrama de dispersão para uma linha periódica LC.

Notando que $4\text{sen}^2(\beta/2) = 2 - e^{-i\beta} - e^{i\beta}$, determina-se a parte imaginária de β (Fig. 4)

$$a(\omega) = 2\ln\left(\frac{\omega/\omega_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega/\omega_0}{2}\right)^2 - 1}\right) \tag{13e}$$

3.2 Linha CL

Analogamente ao caso anterior, escrevendo as equações para tensão e corrente na linha CL (Fig. 3)

$$\begin{cases} V_k - V_{k+1} = L(I'_k - I'_{k+1}) + r_L(I'_k - I'_{k+1}) = \frac{Q_{j+1}}{C} + r_C I_{j+1} \\ V_{k-1} - V_k = L(I'_{k-1} - I'_k) + r_L(I'_{k-1} - I'_k) = \frac{Q_j}{C} + r_C I_j \end{cases} \tag{14a}$$

chega-se a

$$\omega^2 LC + i\omega r_L C = \frac{1 - i\omega r_C C}{4\text{sen}^2(\beta/2)} \tag{14b}$$

que no caso sem perdas se reduz a

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{2\text{sen}(\beta/2)} \tag{14c}$$

A presença do sinal negativo (oriundo da ambiguidade de sinal \pm da raiz quadrada) é justificada ao se examinar (14c) no limite $\beta \ll 1$, que nos leva a $\beta = \pm 1/\omega\sqrt{LC}$, sendo β/p a constante de propagação da presente linha CL de elementos concentrados. Mas da teoria de linhas de transmissão (Ramo *et al.*, 1965), sabemos que $i\beta$, relaciona-se com as imitâncias da linha por $\beta = i\sqrt{ZY}$. No presente caso, $Z = 1/(-i\omega C)$ e $Y = 1/(-i\omega L)$ e, portanto, $\beta = i\sqrt{\frac{i}{\omega C} \frac{i}{\omega L}} = \frac{-1}{\omega\sqrt{LC}}$ no limite $\beta \ll 1$.

Desta forma, a relação de dispersão da linha CL satisfaz as condições de onda regressiva e que apresenta velocidade de fase negativa, como ilustrado na Figura 5. No intervalo de frequência $\omega > \omega_0/2$, β é puramente real representando propagação sem atenuação no sistema; quando $\omega < \omega_0/2$, β é complexo, com parte imaginária,

$$b(\omega) = 2\ln\left(\frac{1}{2\omega/\omega_0} + \sqrt{\frac{1}{4(\omega/\omega_0)^2} - 1}\right) \tag{14d}$$

indicando atenuação sem dissipação de energia.

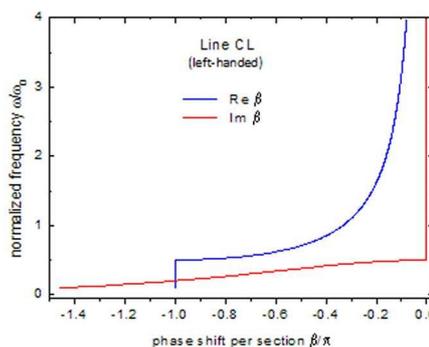


Figura 5. Diagrama de dispersão para uma linha periódica CL.

4 Resultados

Os resultados a seguir referem-se a sinais que se propagam em linhas periódicas CL e LC submetidas à excitação por um sinal puramente senoidal de 1 V de amplitude. Inicialmente, considera-se o caso de baixa perdas ($r_s = r_L = r_C = 0,001 \Omega$) e 10 seções com imitâncias $L = C = \pi^{-1}$, o que corresponde a uma frequência crítica (ou de corte) $f_0 (= \omega_0/2\pi) = 160 \text{ kHz}$.

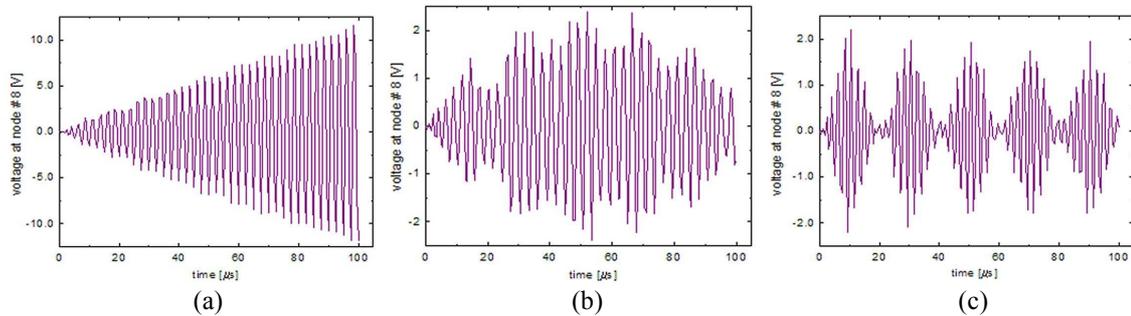


Figura 6. Sinal no nó # 8 em uma linha CL com: (a) $f = 400 \text{ kHz}$; (b) $f = 350 \text{ kHz}$ e (c) $f = 450 \text{ kHz}$.

Excitando-se a linha CL com um sinal senoidal de $400 \text{ kHz} (> f_0/2)$ observa-se que o sinal transmitido cresce indefinidamente, conforme mostra a Figura 6(a) para o nó #8. Por outro lado, reduzindo a frequência para 350 kHz ou elevando-a para 450 kHz o sinal transmitido passa a ser modulado, como ilustram a Figura 6(b) e 6(c), respectivamente.

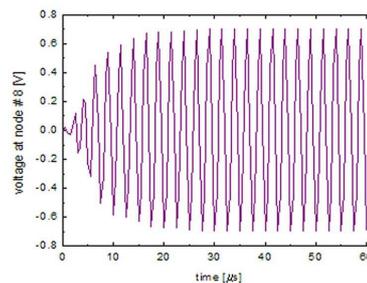


Figura 7. Sinal no nó # 8 em uma linha CL de 10 seções com excitação de 400 kHz .

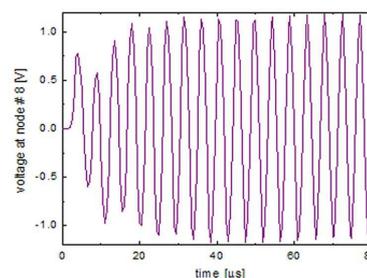


Figura 8. Sinal no nó # 8 em uma linha LC de 10 seções com excitação de 220 kHz .

Mantendo a frequência de excitação ressonante de 400 kHz , mas incluindo resistências dissipativas ($r_s = r_{LC} = r_{CL} = 0,05 \Omega$) e 10 seções com imitâncias $L = C = \pi^{-1}$, o sinal que antes crescia indefinidamente [Fig. 6(a)], torna-se agora estabilizado em $0,7 \text{ V}$ (Fig. 7). O processo de saturação de amplitude também ocorre para a linha LC submetida a uma excitação de $220 \text{ kHz} (< 2f_0)$, como mostrado na Figura 8.

A seguir, consideram-se sinais propagando-se em uma linha CL com 20 seções e com imitâncias $L = 1 \mu\text{H}$, $C = 1 \mu\text{F}$. Para uma linha de baixa perdas considera-se ($r_s = r_{LC} = r_{CL} = 0,001 \Omega$) e para uma linha com perdas considera-se ($r_s = r_{LC} = r_{CL} = 0,05 \Omega$).

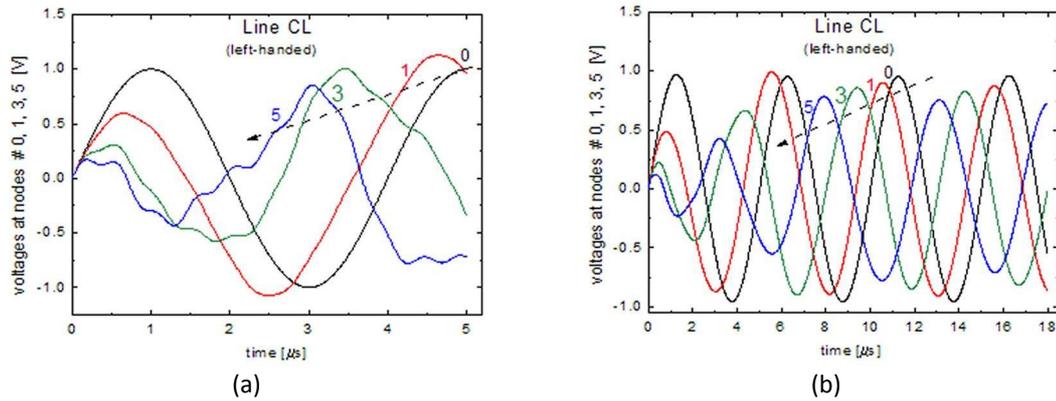


Figura 9. (a) Linha CL sem perdas e com sinal de excitação de 250 kHz e (b) Linha CL com perdas ($r_s = r_L = r_C = 0,05 \Omega$) com 20 seções e sinal de excitação de 200 kHz.

A Figura 9(a) mostra a variação temporal de sinais propagando-se em uma linha CL sem perdas e sendo excitada por um sinal de 250 kHz. As cores preta, vermelha, verde e azul correspondem respectivamente aos nós #0, #1, #3 e #5, onde os sinais são calculados. Nota-se que o sinal azul (nó #5) atinge o pico positivo ($t \cong 0,3\mu s$) antes dos outros sinais correspondentes às posições anteriores {0, 1 e 3} e que se acham mais próximos da fonte excitadora. Este é um fenômeno de avanço de fase em uma linha CL, ficando claramente demonstrado pela posição do pico do sinal azul em 3 μs , antes dos outros sinais, que somente atingem os respectivos picos depois de 3,5 μs . Situação semelhante é mostrada na Figura 9(b) que apresenta uma variação temporal de sinais propagando-se em uma linha CL com perdas e excitada por um sinal de 200 kHz. Nota-se que os sinais distorcem-se nos instantes iniciais ($t < 2\mu s$) para que ocorra a sequência de pulsos de ordem decrescente {5, 3, 1, 0} em instantes posteriores a 8 μs , quando todos os sinais passam a apresentar variação senoidal.

A seguir, consideram-se sinais propagando-se em uma linha LC com 20 seções e com imitâncias $L = 1\mu H$, $C = 1\mu F$. Para uma linha de baixa perdas considera-se ($r_s = r_{LC} = r_{CL} = 0,001 \Omega$) e para uma linha com perdas considera-se ($r_s = r_{LC} = r_{CL} = 0,05 \Omega$).

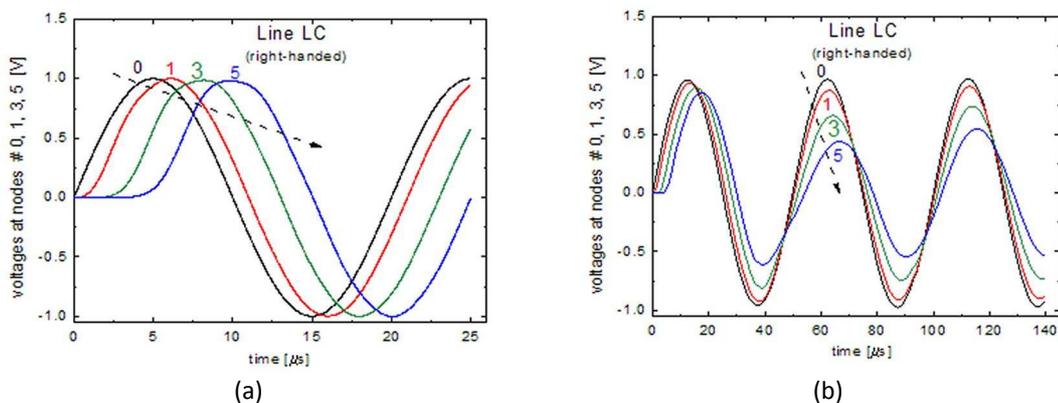


Figura 10. (a) Linha LC sem perdas com 20 seções e sinal de excitação de 50 kHz e (b) Linha LC com perdas ($r_s = r_{LC} = r_{CL} = 0,05 \Omega$) com 20 seções e sinal de excitação de 20 kHz.

A Figura 10(a) mostra a variação temporal de sinais propagando-se em uma linha LC excitada por um sinal de 50 kHz. As cores preta, vermelha, verde e azul correspondem respectivamente aos nós #0, #1, #3 e #5, onde os sinais são calculados. Verifica-se que a velocidade de fase é positiva, sendo o atraso de fase na linha LC sem perdas indicado claramente pela posição relativa dos picos, em que o sinal azul, por exemplo, atinge o primeiro pico em 10 μs após os sinais 0, 1 e 3 terem atingido seus respectivos picos. Para uma linha LC com perdas excitadas com um sinal de 20 kHz [Fig. 10(b)] nota-se que este mesmo pulso azul (nó #5) terá a menor amplitude entre os pulsos da sequência {0, 1, 3}.

5 Conclusões

Foram investigados fenômenos de propagação em linhas de transmissão constituídas de células LC e CL. Para tanto, usando a corrente no indutor e a carga armazenada no capacitor como variáveis de estado, um sistema de equações de primeira ordem foi deduzido para cada topologia de linha (LC e CL) e resolvido numericamente com auxílio do aplicativo Mathematica (Mathematica, v.5).

Considerando linhas periódicas, com ou sem perdas, em que indutores e capacitores idênticos repetem-se periodicamente em cada seção, foram examinados os processos transitórios e de saturação que ocorrem nos sinais quando excitados por uma fonte senoidal, ficando claramente demonstrado o avanço de fase para sinais que se propagam na linha CL. Discutiu-se que esta topologia satisfaz as condições para excitação de ondas regressivas, como acontece em BWOs (“backward wave oscillator”). Ressalte-se que todos os circuitos periódicos possuem um número igual de harmônicas espaciais regressivas e progressivas, mas na linha CL é o modo fundamental que apresenta velocidade de fase negativa que é associada a uma onda regressiva. Para a topologia dual (ou complementar) LC foram discutidos exemplos que ilustram o significado de uma velocidade de fase positiva.

Agradecimento

Ana Flávia G. Greco agradece à CAPES pelo financiamento e apoio a este trabalho.

Referências

- Caloz, C., Okabe, H., Iwai, T., Itoh, T. Transmission line approach of left-handed (LH) materials, in Proc. USNC/URSI National Radio Science Meeting, San Antonio, TX, June 2002, Vol. 1, p. 39.
- Caloz, C., Itoh, T. Novel microwave devices and structures based on the transmission line approach of metamaterials, in IEEE-MTT Int. Symp. Dig., June 2003, pp. 195–198.
- Caloz, C., Itoh, T. Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications. New York: Wiley, 2004.
- CircuitMaker 2000, Altium Limited. Disponível em: <http://www.altium.com/>
- Crowne, F. Modeling and Simulation of Nonlinear Transmission Lines, Army Research Laboratory, Report ARL-TR-5062, January 2010.
- Eleftheriades, G.V., Iyer, A.K., Kremer, P.C. Planar negative refractive index media using periodically L-C loaded transmission lines, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 50, pp. 2702–2712, Dec. 2002.
- Eleftheriades, G. V., Balmain, K. G., Editors, Negative-refraction metamaterials. New York: IEEE Press-Wiley, 2005.
- Eleftheriades, G.V. Metamaterials: The first ten years, Microwave Magazine, Vol. 13, No. 2, pp. 8–10, March/April 2012.
- Grbic, A., Eleftheriades, G.V. Subwavelength focusing using a negative-refractive-index transmission line lens, IEEE Antennas Wireless Propagat. Lett., Vol. 2, No. 13, pp. 186–189, 2003.
- Mathematica v. 5.0, Wolfram Research. Disponível em: <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- Ozbay, E.; Aydin, K.; Cubukcu, E.; Bayindir, M. Transmission and reflection properties of composite double negative metamaterials in free space, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 51, pp. 2592–2595, Oct. 2003.
- Ramo, S.; Whinnery, J.R.; Duzer, T. Van Fields and Waves in communication Electronics. New York: Wiley, 1965, p.45.
- Shelby R.A.; Smith, D.R.; Schultz, S. Experimental verification of a negative index of refraction, Science, Vol. 292, No. 5514, pp.77–79, 2001.
- Simovski, C. R.; Belov, P.A.; Sailing H. Backward wave region and negative material parameters of a structure formed by lattices of wires and split-ring resonators, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 51, pp. 2582–2591, Oct. 2003.
- Veselago, V. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ , Soviet Physics Uspekhi, Vol. 10, No. 4, pp. 509–514, 1968.

Apêndice

Apresentamos neste apêndice as equações implementadas no aplicativo Mathematica para a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento temporal e a propagação de ondas de tensão e corrente, nas linhas duais RH (LC) e LH (CL).

Equação para a 1ª Seção

$$eqi = \text{Table}\left[\left\{i[k]'[t] = \frac{Vs[t]}{Ls[k]} - \frac{Rc[k]}{Ls[k]} (i[k][t] - i[k+1][t]) - fN \frac{(q[k][t] - q[k+1][t])}{Ls[k] Cs[k]} - \frac{Rl[k]}{Ls[k]} i[k][t], \right. \right. \\ \left. \left. q[k]'[t] = \frac{i[k][t]}{fN} \right\}, \{k, 1, 1\}; \right.$$

Equação para as seções intermediárias

$$eqs = \text{Table}\left[\left\{i[k]'[t] = \frac{Rc[k-1]}{Ls[k]} (i[k-1][t] - i[k][t]) + fN * \frac{(q[k-1][t] - q[k][t])}{Ls[k] Cs[k-1]} - \frac{Rc[k]}{Ls[k]} (i[k][t] - i[k+1][t]) - \right. \right. \\ \left. \left. fN * \frac{(q[k][t] - q[k+1][t])}{Ls[k] Cs[k]} - \frac{Rl[k]}{Ls[k]} i[k][t], q[k]'[t] = \frac{i[k][t]}{fN} \right\}, \{k, 2, NN-1\}; \right.$$

Equação para a última seção

$$eqf = \text{Table}\left[\left\{i[k]'[t] = \frac{Rc[k-1]}{Ls[k]} (i[k-1][t] - i[k][t]) + fN * \frac{(q[k-1][t] - q[k][t])}{Ls[k] Cs[k-1]} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{Rc[k]}{Ls[k]} (i[k][t]) - fN * \frac{(q[k][t])}{Ls[k] Cs[k]} - \frac{Rl[k]}{Ls[k]} i[k][t], q[k]'[t] = \frac{i[k][t]}{fN} \right\}, \{k, NN, NN\}; \right.$$

Figura A1. Equações implementadas no aplicativo Mathematica, para uma linha LC.

Definição das Funções Recursivas para Corrente e Carga

```
denq = Table[Ls[k] Cs[j], {j, 1, NN}];
multi = Table[ $\frac{Rc[j]}{Ls[k]}$ , {j, 1, NN}];
Vs[t_] := Sin[ $\frac{2 \pi f t}{1.0 \cdot 10^6}$ ] (* time normalized to  $\mu s$  *)
Qs[k_] := Qs[k-1] + fN *  $\frac{\sum_{j=k}^{NN} q[j][t]}{denq[[k]]}$ 
Is[k_] := Is[k-1] + multi[[k]] *  $\sum_{j=k}^{NN} i[j][t]$ 
```

Equação das Correntes e Cargas para N seções

$$eqs = \text{Table}\left[\left\{i[k]'[t] = \frac{Vs[t]}{Ls[k]} - \frac{Rs}{Ls[k]} * \sum_{j=k}^{NN} i[j][t] - \frac{Rl[k]}{Ls[k]} * i[k][t] - Is[k] - Qs[k], q[k]'[t] = \frac{i[k][t]}{fN} \right\}, \{k, 1, NN\}; \right.$$

Figura A2. Equações implementadas no aplicativo Mathematica, para uma linha CL.

Note que os elementos do circuito são indexados para quaisquer valores de R_L, R_C, R_s, L_k, C_k em cada célula unitária. As condições iniciais são: $I_k(0) = 0$ e $Q_k(0) = 0$.

Os gráficos abaixo comparam as soluções obtidas para a tensão no ponto 11, nos Aplicativos Circuit Maker (CircuitMaker 2000) e Mathematica, respectivamente, para uma Linha RH com carga. Para este exemplo os elementos do circuito são: $r_C = 1\Omega, r_L = 1\Omega, r_s = 1\Omega, L_k = 1 \mu H, C_k = 1 \mu H, f = 200 \text{ kHz}$, e as condições iniciais são: $I_k(0) = 0$ e $Q_k(0) = 0$.

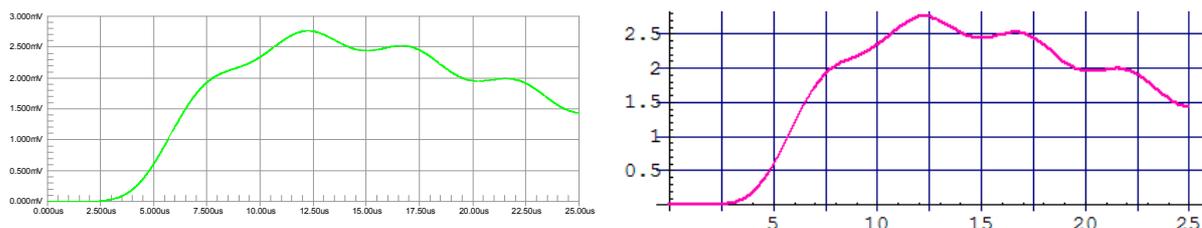


Figura A3. Comparação entre as soluções obtidas para o nó #11 de uma linha LC com carga $r_{load} = 1 \text{ ohm}$ com os aplicativos CircuitMaker e Mathematica, respectivamente.