



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2013/06.06.17.21-TDI

## **UMA ABORDAGEM MULTI-OBJETIVO PARA A OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS DE UMA VELA SOLAR**

Igor Mainenti Leal Lopes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Luiz Carlos Gadelha de Souza, e Fabiano Luis de Sousa aprovada em 24 de maio de 2013.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3E8TPSB>>

INPE  
São José dos Campos  
2013

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**

### **Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **Membros:**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Maria Tereza Smith de Brito - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Luciana Manacero - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2013/06.06.17.21-TDI

## UMA ABORDAGEM MULTI-OBJETIVO PARA A OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS DE UMA VELA SOLAR

Igor Mainenti Leal Lopes

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Luiz Carlos Gadelha de Souza, e Fabiano Luis de Sousa aprovada em 24 de maio de 2013.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3E8TPSB>>

INPE  
São José dos Campos  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

L881a Lopes, Igor Mainenti Leal.  
Uma abordagem multi-objetivo para a otimização de trajetórias de uma vela solar / Igor Mainenti Leal Lopes. – São José dos Campos : INPE, 2013.  
xxii + 110 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2013/06.06.17.21-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013.

Orientadores : Drs. Luiz Carlos Gadelha de Souza, e Fabiano Luis de Sousa.

1. vela solar. 2. trajetória de veiculo espacial. 3. algoritmo evolutivo. 4. Otimização Extrema Generalizada (GEO). 5. otimização multi-objetivo. I.Título.

CDU 629.785

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Doutor(a)** em  
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle**

Dr. Evandro Marconi Rocco



---

Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza



---

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Fabiano Luis de Sousa



---

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Roberto Luiz Galski



---

Membro da Banca / INPE / São José dos Campos - SP

Dra. Cláudia Celeste Celestino de Paula Santos



---

Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Dr. Ernesto Vieira Neto



---

Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

**Este trabalho foi aprovado por:**

maioria simples

unanimidade

Aluno (a): **Igor Mainenti Leal Lopes**

**São José dos Campos, 24 de Maio de 2013**



*“If we burn our wings  
Flying too close to the sun  
If the moment of glory  
Is over before it's begun  
If the dream is won  
Though everything is lost  
We will pay the price,  
But we will not count the cost”*

*Bravado – Rush  
Letra: Neil Peart*





*Ao Mateus, a pequena joia da minha vida.*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, e aos Drs. Luiz Carlos Gadelha de Souza, Fabiano Luis de Sousa e Anna Guerman, pelo apoio intelectual, sem os quais não seria possível concluir esse trabalho. Agradeço aos meus pais que sempre me apoiaram em todos os passos da minha vida. Aos amigos, em especial Ximena, Jairo e Chica, por todos os bons momentos e todo apoio nos momentos difíceis. Agradeço a Leandro Toss Hoffman e ao Dr. Roberto Lopes pela compreensão e paciência nesse último ano. À Viviane por toda dedicação oferecida a mim por todos esses anos e por todos os momentos compartilhados.

Dedico um agradecimento especial ao Mateus, cuja simples existência já foi capaz de iluminar a minha vida.



## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo propor uma abordagem multi-objetivo para o problema de trajetória ótima de uma vela solar. A vela solar é um sistema de propulsão de baixo empuxo que consiste em uma ampla e leve superfície capaz de usar a pressão de radiação do Sol para impulsionar um veículo espacial. A principal vantagem de uma vela solar é o fato de não consumir propelente. Entretanto, por ser um propulsor de baixo empuxo, para se obter um efeito significativo sobre o veículo, é necessária uma aplicação contínua de empuxo. Por esse motivo a identificação de trajetória ótima torna-se muito complexa. Além disso, por ser formada por uma estrutura grande e flexível, a realização de manobras de atitude pode provocar muitas vibrações indesejadas, que representa risco para a missão, além de consumir energia. Sendo assim, torna-se interessante minimizar o número de manobras, além do tempo de transferência para realização de missões interplanetárias. Com o intuito de abordar esse problema multi-objetivo, foi utilizada uma versão multi-objetivo da Otimização Extrema Generalizada com codificação real (M-GEO<sub>real</sub>), por este ser um algoritmo capaz de abordar problemas complexos, com não linearidades e descontinuidades. No presente trabalho foi proposto um caso teste de transferência entre as órbitas da Terra e de Marte. Além da proposta de resolver esse problema de forma multi-objetivo, espera-se também determinar a eficiência e a eficácia do algoritmo ao abordar esse tipo de problema. Para tanto, antes do estudo multi-objetivo foi realizada uma abordagem mono-objetivo do problema. Essa primeira etapa do estudo teve como função estudar as melhores formas de abordar o problema e comparar versões mono-objetivo do GEO<sub>real</sub> ao algoritmo determinístico baseado em gradiente Programação Quadrática Sequencial (SQP – Sequential Linear Programming). Os resultados para o caso de otimização mono-objetivo demonstraram que a versão do GEO teve um melhor desempenho do que o SQP. Isso sugere que algoritmos estocásticos são mais eficientes do que determinísticos para abordagem de tal problema. O algoritmo M-GEO<sub>real</sub> retornou uma fronteira com 5 soluções viáveis e algumas dessas soluções foram dominadas pela solução obtida pelo GEO<sub>real1</sub>.



# AN APPROACH FOR MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION SOLAR SAIL TRAJECTORIES

## ABSTRACT

This work aims to propose a multi-objective approach to the problem of optimal solar sail trajectories. The solar sail is a low-thrust spacecraft that consist of a broad and light surface able to use the solar radiation pressure to propel a spacecraft. The main advantage of a solar sail is the fact of not consuming propellant. However, a low-thrust spacecraft needs a continuous activity to obtain a significant effect. For this reason the identification of optimal trajectory becomes very expensive. Moreover, attitude maneuvers can cause many unwanted vibrations, because solar sails are formed by a large and flexible structure. So, it could increase the mission risk and the energy consumption. Therefore, it becomes interesting to minimize the number of attitude maneuvers, besides the transfer time. In order to tackle this multi-objective problem, one used a multi-objective version of the Generalized Extremal Optimization with real codification (M-GEO<sub>real</sub>), because this algorithm is capable to tackle complex problems with nonlinearities and discontinuities. Besides, is also expected to determine the efficiency and effectiveness of the algorithm to tackle such problem. Therefore, before multi-objective study, one realized a mono-objective approach to the problem. In this first stage, one studied the best way to tackle the problem and it was compared mono-objective versions of the GEO<sub>real1</sub> with the deterministic gradient-based algorithm Sequential Linear Programming (SQP). The mono-objective optimization results showed that the GEO<sub>real1</sub> algorithm had a better performance than the SQP. This suggests that stochastic algorithms are more efficient than deterministic approach to such kind of problems. Nevertheless, the M-GEO<sub>real</sub> algorithm presented difficulties to tackle this problem and returned a frontier with few feasible solutions. Furthermore, some of these solutions were dominated by the solution obtained by GEO<sub>real1</sub>.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação artística de uma vela solar plana.....	13
Figura 2.2 – Figura 2.2 – Representação gráfica dos vetores unitários $\vec{n}$ e $\vec{f}$ , sendo $r$ e $\theta$ as componentes radiais e azimutais de um sistema de coordenadas cilíndricas, $v$ e $u$ as variações temporais de $r$ e $\theta$ , respectivamente.....	17
Figure 2.3 – Representação gráfica da força de radiação solar de uma vela que apresenta reflexão ideal.....	18
Figura 2.4 – Representação gráfica da força de radiação solar de uma vela que apresenta reflexão não ideal.....	21
Figura 2.5 – Comparação entre as forças de pressão de radiação com reflexão ideal e não-ideal em função do ângulo de atitude $\alpha$ da vela solar. Para gerar esse gráfico foi considerado $a_c = 1 \text{ mm/s}^2$ , $r = 1 \text{ UA}$ , $b_1 = 0.0864$ , $b_2 = 0.8277$ , $b_3 = -0.00545$ e $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ .....	27
Figura 2.6 – Uma análise qualitativa do efeito da força de pressão de radiação sobre a trajetória de uma vela solar. A linha tracejada azul escura representa a órbita osculadora da vela. As linhas azuis claro representam as trajetórias espiralando em direção ao Sol e afastando do Sol.....	28
Figura 4.1 – População de espécies no modelo evolutivo de Bak e Sneppen (1993). ...	40
Figura 4.2 – “Fotografia” de uma avalanche na população de espécies do modelo unidimensional de Bak-Sneppen .....	41
Figura 4.3 – $N$ variáveis codificadas em seqüência binária, a variável representada por seis bits. ....	43
Figura 4.4 – Algoritmo GEO canônico. ....	45
Figura 4.5 – Algoritmo $\text{GEO}_{\text{var}}$ . ....	47
Figura 4.6 – Fluxograma do algoritmo $\text{GEO}_{\text{real1}}$ .....	50
Figura 4.7 – Fluxograma do algoritmo $\text{GEO}_{\text{real2}}$ .....	52
Figura 4.8 – Fluxograma da sub-rotina ParetoTest, responsável pela atualização do conjunto das soluções não-dominada .....	56
Figura 4.9 – Fluxograma do algoritmo $\text{M-GEO}_{\text{real}}$ .....	57
Figura 5.1 – Fronteiras otimizadas obtidas pelos algoritmos $\text{M-GEO}$ (em vermelho) e $\text{M-GEO}_{\text{real}}$ (em azul) ao abordar a função-teste $\text{FTM}_4$ .....	64
Figura 5.2 – Fronteiras otimizadas obtidas pelos algoritmos NSGAI (em verde), $\text{M-GEO}$ (em vermelho) e $\text{M-GEO}_{\text{real}}$ (em azul) ao abordar a função-teste ZDT1.....	65
Figura 5.3 – Fronteiras otimizadas obtidas pelos algoritmos NSGAI (em verde), $\text{M-GEO}$ (em vermelho) e $\text{M-GEO}_{\text{real}}$ (em azul) ao abordar a função-teste TNK.....	66
Figura 6.1 – Representação gráfica do histórico do ângulo da vela solar em relação ao Sol para os casos contínuo (linha contínua) e discretizado (linha tracejada). ....	70
Figura 7.1 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo SQP usando a estratégia de controle que mantém o tempo entre as manobras iguais entre si.....	84
Figura 7.2 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo $\text{GEO}_{\text{real1}}$ usando a estratégia de controle que mantém o tempo entre as manobras iguais entre si.....	85
Figura 7.3 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo $\text{GEO}_{\text{real2}}$ usando a estratégia de controle que mantém o tempo entre as manobras iguais entre si.....	87

Figura 7.4 – Histórico do ângulo de atitude da vela solar das melhores soluções obtidas pelos algoritmos de otimização usando a primeira estratégia de controle. Linha verde refere-se à solução obtida pelo algoritmo SQP, linha azul pelo $GEO_{real1}$ e linha vermelha $GEO_{real2}$ .....	87
Figura 7.5 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo $GEO_{real1}$ usando a estratégia de controle que contempla a possibilidade de tempo entre manobras diferentes entre si.....	90
Figura 7.6 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo $GEO_{real2}$ usando a estratégia de controle que contempla a possibilidade de tempo entre manobras diferentes entre si.....	91
Figura 7.7 – Histórico do ângulo de atitude da vela solar das melhores soluções obtidas pelos algoritmos de otimização usando a segunda estratégia de controle. Linha verde refere-se à solução obtida pelo algoritmo $GEO_{real1}$ e linha azul pelo $GEO_{real2}$ .....	92
Figura 7.8 – Fronteira otimizada (soluções em azul), obtida pelo algoritmo M- $GEO_{real1}$ , do problema multi-objetivo que visa otimizar o número de manobras e o tempo de transferência de uma vela solar. A solução em vermelho foi obtida pelo algoritmo $GEO_{real1}$ .....	95
Figura 7.9 – Histórico do ângulo de atitude da vela solar de duas soluções obtidas pelo algoritmo de otimização M- $GEO_{real1}$ usando a primeira estratégia de controle. Linha verde refere-se à solução obtida de menor tempo de transferência e linha azul de menor número de manobras.....	96
Figura 7.10 – Trajetória da solução de menor tempo de transferência obtida pelo algoritmo M- $GEO_{real1}$ .....	97
Figura 7.11 – Trajetória da solução de menor número de manobras obtida pelo algoritmo M- $GEO_{real1}$ .....	98
Figura 7.12 – Fronteira otimizada obtida a partir das soluções geradas pelo M- $GEO_{real1}$ e usadas como soluções iniciais do SQP (em azul). Solução obtida pelo $GEO_{real1}$ (em vermelho).....	100

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Características das funções-teste usadas para verificar o desempenho do M-GEO <sub>real</sub> .....	62
Tabela 5.2 – Valores dos parâmetros livres do algoritmo M-GEO <sub>real</sub> usados para cada uma das funções-teste .....	63
Tabela 6.1 – Estados da órbita alvo e os erros associados a eles .....	75
Tabela 6.2 – Resumo das características de cada um dos testes usando abordagem mono-objetivo .....	77
Tabela 7.1 – Valores dos parâmetros $\tau$ , $\sigma$ e $\sigma_0$ escolhidos para os testes GEO1F1 ao GEO2F3 .....	81
Tabela 7.2 – Comparação do desempenho dos algoritmos considerando a estratégia onde os valores de tempo entre as manobras são iguais entre si .....	82
Tabela 7.3 – Tabela 7.3 – Valores dos parâmetros $\tau$ , $\sigma$ e $\sigma_0$ escolhidos para os testes GEO1F4 ao GEO2F5 .....	88
Tabela 7.4 – Comparação do desempenho dos algoritmos GEO <sub>real1</sub> e GEO <sub>real2</sub> considerando a estratégia onde os valores de tempo entre as manobras são diferentes entre si .....	88
Tabela 7.5 – Comparação do desempenho do algoritmo GEO <sub>real1</sub> considerando as duas estratégias de controle .....	93
Tabela 7.6 – Comparação dos resultados usando apenas o M-GEO <sub>real</sub> com os resultados usando o SQP para otimizar os resultados gerados pelo M-GEO <sub>real</sub> .....	99



## LISTA DE SÍMBOLOS

- $m$  – massa do veículo espacial  
 $M$  – massa do Sol  
 $G$  – constante da gravitação universal  
 $\vec{F}_g$  – força gravitacional  
 $\hat{r}$  – vetor unitário na direção radial  
 $r$  – coordenada radial  
 $\theta$  – coordenada azimutal  
 $u$  – variação temporal da coordenada radial  
 $v$  – variação temporal da coordenada radial  
 $S$  – o fluxo de radiação solar  
 $S_o$  – o fluxo de radiação solar a 1 UA de distância do Sol = 1368 W/m<sup>2</sup>  
 $c$  – a velocidade da luz no vácuo  
 $P$  – pressão de radiação solar  
 $r_o$  – semi-eixo maior da órbita da Terra = 1 UA  
 $\vec{n}$  – vetor normal a superfície da vela solar  
 $\vec{e}_r$  – vetor radial de um sistema de coordenadas esféricas  
 $\vec{e}_{r'}$  – vetor unitário na direção da radiação refletida pela vela solar  
 $\vec{f}$  – vetor unitário na direção e sentido do empuxo gerado pela vela solar  
 $\alpha$  – ângulo de atitude da vela solar, contado a partir de  $\vec{e}_r$  até  $\vec{n}$   
 $\gamma$  – ângulo que determina a direção do vetor  $\vec{f}$  contado a partir de  $\vec{e}_r$   
 $\vec{F}_r$  – força exercida sobre a vela devido à radiação incidente  
 $\vec{F}_{r'}$  – força exercida sobre a vela devido à radiação refletida  
 $\vec{F}_{SRP}$  – força total exercida sobre a vela devido à radiação  
 $A$  – área superficial da vela solar  
 $\beta$  – coeficientes de absorção do filme da vela solar  
 $\rho$  – coeficientes de reflexão do filme da vela solar  
 $\tau$  – coeficientes de transmissão do filme da vela solar  
 $\varepsilon$  – coeficientes de emissão do filme da vela solar  
 $\vec{f}_\rho$  – força devido a reflexão da radiação  
 $\vec{f}_\beta$  – força devido a absorção da radiação  
 $\vec{f}_\varepsilon$  – força devido a emissão de radiação por efeito térmico  
 $\vec{t}$  – vetor unitário transversal a  $\vec{n}$   
 $\rho_s$  – coeficiente de reflexão especular  
 $\rho_d$  – coeficiente de reflexão difusa  
 $\vec{f}_{\rho_s}$  – força devido a reflexão especular  
 $\vec{f}_{\rho_d}$  – força devido a reflexão difusa  
 $B_f$  – coeficiente que indica que a superfície frontal da vela é não-Lambertiana  
 $B_b$  – coeficiente que indica que a superfície posterior da vela é não-Lambertiana  
 $\Pi$  – potência emissão térmica da vela  
 $T$  – temperatura absoluta da vela

$\Psi$  – coeficientes óticos do filme da vela  
 $c_{SB}$  – constante de Stefan–Boltzmann  
 $\varepsilon_f$  – coeficiente de emissão da superfície frontal da vela  
 $\varepsilon_b$  – coeficiente de emissão da superfície posterior da vela  
 $\vec{F}_\perp$  – componente da força  $\vec{F}_{SRP}$  na direção de  $\vec{n}$   
 $\vec{F}_\parallel$  – componente da força  $\vec{F}_{SRP}$  na direção de  $\vec{t}$   
 $\vartheta$  – ângulo entre  $\vec{f}$  e  $\vec{e}_r$   
 $\phi$  – ângulo entre  $\vec{f}$  e  $\vec{n}$   
 $\vec{e}_r$  – vetor unitário radial orbital  
 $\vec{e}_t$  – vetor unitário tangencial orbital  
 $\vec{F}_r$  – componente da força  $\vec{F}_{SRP}$  na direção de  $\vec{e}_r$   
 $\vec{F}_t$  – componente da força  $\vec{F}_{SRP}$  na direção de  $\vec{e}_t$   
 $\vec{x}_e$  – vetor de estado da posição orbital da vela solar usando coordenadas esféricas

# SUMÁRIO

Pág.

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÕES	4
1.2	CONTRIBUIÇÕES	5
<b>2</b>	<b>VELA SOLAR</b>	<b>7</b>
2.1	APROXIMAÇÕES ASSUMIDAS	13
2.2	MOVIMENTO EM UM CAMPO GRAVITACIONAL	15
2.3	PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR	16
2.4	VETOR NORMAL E DE EMPUXO DA VELA	16
2.5	MODELO DA FORÇA DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DE UMA VELA CONSIDERANDO REFLEXÃO IDEAL	17
2.6	MODELO DA FORÇA DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DE UMA VELA CONSIDERANDO REFLEXÃO NÃO IDEAL	19
2.7	EFEITO DA ACELERAÇÃO DA VELA SOLAR SOBRE SUA TRAJETÓRIA	26
2.8	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA VELA SOLAR PLANA	29
2.9	CONVENÇÃO DE UNIDADES PARA O PROBLEMA PROPOSTO	30
<b>3</b>	<b>O PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIA</b>	<b>33</b>
3.1	PROBLEMA TRAJETÓRIA ÓTIMA DE VEÍCULOS ESPACIAIS DE BAIXO EMPUXO	33
3.1.1	<i>Comparação entre otimização de trajetória usando alto e baixo empuxo</i>	33
3.1.2	<i>Otimização de trajetória usando baixo empuxo sob a perspectiva da teoria do controle ótimo</i>	35
3.1.3	<i>Formulação do problema em tempo contínuo</i>	35
3.1.4	<i>Formulação do problema em tempo discreto</i>	37
<b>4</b>	<b>ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO</b>	<b>39</b>
4.1	GEO CANÔNICO	39
4.1.1	<i>Criticalidade auto-organizada</i>	39
4.1.2	<i>Otimização Extrema</i>	42
4.1.3	<i>Estratégia de busca do algoritmo GEO</i>	42
4.2	$GEO_{VAR}$	45
4.3	GEO COM CODIFICAÇÃO REAL – $GEO_{REAL}$	47
4.3.1	$GEO_{real1}$	48
4.3.2	$GEO_{real2}$	50
4.4	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO	53
4.4.1	$GEO_{real}$ Multi-Objetivo	55
4.5	PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL	57
<b>5</b>	<b>TESTES DE DESEMPENHO DO M-<math>GEO_{REAL}</math></b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA</b>	<b>69</b>
6.1	ESTRATÉGIA DE CONTROLE DA VELA SOLAR	69
6.2	FUNÇÕES-OBJETIVO	71
6.3	USO DOS ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO	75
<b>7</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>79</b>
7.1	TESTE SQP1	80
7.2	TESTES GEO1F1 AO GEO2F3	80
7.2.1	<i>Comparação do desempenho dos métodos</i>	81

7.3	GEO1F4 AO GEO2F5.....	87
7.3.1	<i>Comparação do desempenho dos métodos</i> .....	88
7.4	COMPARAÇÃO ENTRE AS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE.....	92
7.5	ABORDAGEM MULTI-OBJETIVO .....	93
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>101</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O projeto e a otimização da trajetória de transferência interplanetária é uma das mais importantes tarefas durante a fase de projeto de uma missão de exploração. Isto deve-se ao fato de serem necessários grandes incrementos de energia para as transferências. Sistemas de propulsão de baixo-empuxo podem melhorar significativamente ou até mesmo permitir o cumprimento da missão (Dachwald, 2004b). Recentemente, Oliveira *et al.* (2013) mostraram que um propulsor de baixo empuxo do tipo iônico (Permanent Magnet Hall) pode oferecer melhorias no consumo de combustível ao realizar manobras orbitais ao redor da Terra.

Outra opção de sistema de propulsão de baixo-empuxo é a vela solar. Este sistema consiste, em sua configuração mais simples, em uma estrutura grande e fina. Geralmente, são compostos por filmes finos fixos a hastes flexíveis de tal forma que sua massa seja a menor possível. Sua função é usar a pressão de radiação solar para gerar empuxo. Sabe-se que a radiação gera pressão ao incidir sobre uma superfície. O intuito da vela solar é aproveitar a energia proveniente dessa pressão de radiação sobre a estrutura da vela e usá-la para impulsionar o veículo. O desempenho desses veículos depende em grande parte da atitude das velas em relação ao Sol. Por serem extensas e flexíveis, elas apresentam grandes dificuldades para o controle de atitude pois, cada manobra de atitude pode fazer com que algumas frequências naturais de vibração da sua estrutura sejam excitadas, o que representa um acréscimo de risco para a missão. Portanto, é interessante para a missão reduzir o número de manobras necessárias para seu cumprimento. Nesse sentido, torna-se interessante fazer uma abordagem multi-objetivo do problema, tendo como funções-objetivo o tempo de transferência da trajetória e o número de manobras necessárias.

Além disso, dependendo do nível de complexidade da missão proposta, achar uma trajetória ótima para um veículo propulsionado por vela solar pode ser

tornar um trabalho que exige excessivo tempo de trabalho envolvendo muita experiência e conhecimento de especialistas em teoria de controle e mecânica orbital (Dachwald, 2004a).

Para tanto, é proposto nesse trabalho o uso de um Algoritmo Evolutivo (AE) capaz de fazer abordagem multi-objetivo. AE é uma classe de métodos de otimização que tem demonstrado bom desempenho ao abordar problemas complexos nas áreas de engenharia e ciência (Davis et al.; 1999; Eiben e Smith, 2003; Clarck *et al.*; 2000; Dasgupta e Michalewicz, 2001). De Sousa (2002) desenvolveram um AE chamado Otimização Extrema Generalizada (GEO – Generalized Extremal Optimization). Ele é de fácil implementação, não faz uso de derivadas, pode ser usado em problemas com ou sem restrições, com espaço de projeto não-convexo ou até mesmo disjunto, e é capaz também de abordar problemas com qualquer combinação de variáveis contínuas, discretas ou inteiras (De Sousa *et al.* 2003). Diversas versões do GEO já foram desenvolvidas, incluindo versões híbridas e multi-objetivo (Galski, 2006), e este tem-se mostrado muito competitivo ao abordar funções-teste e problemas de otimização de projetos. Mais recentemente, Mainenti-Lopes (2008) desenvolveu duas versões do GEO com codificação real (GEO<sub>real1</sub> e GEO<sub>real2</sub>). Estas mostram bom desempenho ao abordar funções-testes amplamente conhecidas.

Nesse trabalho, é proposto o uso de uma versão multi-objetivo do GEO<sub>real1</sub> (M-GEO<sub>real</sub>) para otimizar a trajetória Terra-Marte de uma vela solar. Como o principal objetivo é a análise multi-objetivo do problema, foram consideradas as seguintes simplificações: as órbitas da Terra e de Marte são consideradas circulares, concêntricas e coplanáreas. Ou seja, a órbita de origem tem o raio igual ao semi-eixo maior da órbita de Terra e a órbita de destino o semi-eixo da órbita de Marte, de tal forma que, pode-se considerar esta uma primeira análise de uma missão Terra-Marte usando uma vela como propulsor.

Como estudo preliminar, foi realizada uma otimização mono-objetivo de trajetória de vela solar, onde os algoritmos usados foram o  $GEO_{real1}$ ,  $GEO_{real2}$  e a Programação Quadrática Sequencial (SQP – Sequential Quadratic Programming). O SQP é um algoritmo de otimização baseado em gradiente. Foram usadas as mesmas simplificações da abordagem multi-objetivo para a otimização da trajetória partindo da órbita da Terra para a órbita de Marte, tendo como função-objetivo apenas o tempo de transferência. Além disso, considera-se que a vela realizará dez manobras durante a transferência orbital. O número de manobras foi definido para fins de comparação com resultados obtidos na literatura especializada. Foi realizado um estudo comparativo entre os três algoritmos, que teve como finalidade determinar qual algoritmo tem melhores eficiência e eficácia ao abordar tal problema. Além disso, esse estudo auxiliou na identificação da melhor forma de definir o problema de otimização de tal forma que os algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  tivessem melhores desempenhos. A abordagem mono-objetivo do problema mostrou que o  $GEO_{real1}$  teve melhor desempenho tanto ao obter a melhor solução quanto em uma avaliação estatística considerando-se dez inicializações independentes dos algoritmos de otimização. Outra contribuição secundária desse trabalho é a apresentação do  $M-GEO_{real}$ .

Antes de usar o algoritmo  $M-GEO_{real}$  para abordar o problema de otimização de trajetória de vela solar, ele foi validado ao abordar 3 funções-teste e seu desempenho foi comparado ao desempenho dos algoritmos  $M-GEO$  e NSGAI (DEB et al. 2002). As funções-teste usadas foram  $FTM_4$  (GALSKI, 2006), ZDT1 e TNK (MAINENTI-LOPES *et al.*; 2009). O  $M-GEO_{real}$  mostrou bom desempenho ao demonstrar ser competitivo com o NSGAI e apresentando melhores resultados do que aqueles obtidos pelo  $M-GEO$ .

Uma vez demonstrado o bom desempenho do  $M-GEO_{real}$  para atacar as funções-teste propostas, foi realizada a otimização multi-objetivo usando o algoritmo  $M-GEO_{real}$ . Nesse estudo, o  $M-GEO_{real}$  teve êxito ao abordar tal problema retornando 5 soluções viáveis da fronteira otimizada. Entretanto, o

resultado obtido pelo  $GEO_{real1}$  (solução obtida na abordagem mono-objetivo) dominou algumas soluções obtidas pelo  $M-GEO_{real}$ . Com o intuito de gerar melhores soluções, aquelas soluções obtidas pelo  $M-GEO_{real}$  foram usadas como soluções iniciais para uma busca usando o SQP. Essa abordagem melhorou as soluções com exceção de uma que passou a ser dominada pelas demais.

## 1.1 Motivações

Utilizando apenas a pressão de radiação solar disponível livremente como propulsão, as velas solares oferecem uma ampla gama de oportunidades para missões interplanetárias inovadoras de baixo custo, muitos dos quais são de difícil ou mesmo impossível implementação para qualquer outro tipo de sistema de propulsão convencional, devido ao requisito de grandes incrementos de velocidade (DACHWALD, 2006). No sistema solar interior, veículos cuja propulsão é baseada em velas solares são especialmente adequados para múltiplas missões de *rendezvous* e de retorno de amostra, devido à sua inesgotável capacidade de incremento de velocidade. Mas, até mesmo para as missões cujo alvo encontra-se no sistema solar exterior, podem ser realizadas através de velas solares, embora a pressão de radiação solar diminua proporcionalmente com o inverso do quadrado da distância ao Sol. Para tais missões, a vela solar pode gerar grandes incrementos de energia em manobras de aproximação do sol, realizando assim, o que é chamado de manobra de assistência fotônica solar que transforma a trajetória em hiperbólica (LEIPOLD, 1999 e SAUER, 1976). Essas trajetórias permitem tempos de transferência razoáveis para os planetas exteriores sem a necessidade de realizar qualquer manobra de assistência gravitacional. Entretanto, sem o uso de dispositivos adicionais de propulsão ou uma manobra de frenagem aerodinâmica no corpo alvo (se isso for viável), apenas rápidas interceptações podem ser alcançadas, pois a vela solar seria incapaz de gerar empuxo suficiente para alterar significativamente a velocidade do veículo, uma vez que a intensidade da radiação solar já é muito reduzida nessa região do

Sistema Solar. Como a vela solar é capaz de gerar empuxos contínuos por tempo praticamente indeterminado, devido ao fato de ser desnecessário o consumo de propelente, então é possível gerar uma força resultante que atua no veículo diferente da força central gerada somente pela gravitação por toda vida útil do veículo espacial (MCINNES, 1999). Isso permite que algumas trajetórias únicas sejam possíveis. Nesse sentido, o estudo sobre velas solares torna-se de grande interesse para o desenvolvimento espacial.

## 1.2 Contribuições

As principais contribuições desse trabalho foram:

- Um estudo comparativo entre os algoritmos SQP,  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  ao abordar o problema de otimização de trajetória de uma vela solar.
- Foi proposta uma abordagem multi-objetivo com o intuito de minimizar simultaneamente o tempo de transferência e o número de manobras realizadas pela vela solar.
- Foi proposta e testada contra funções-teste uma nova versão do algoritmo GEO, chamada  $M-GEO_{real}$ , capaz de abordar problemas multi-objetivo usando variáveis reais.
- O algoritmo  $M-GEO_{real}$  foi aplicado ao problema multi-objetivo proposto. Apesar do algoritmo  $M-GEO_{real}$  ter apresentado dificuldades de gerar a fronteira de Pareto para o problema, foi verificado que a implementação de uma versão híbrida do  $M-GEO_{real}$  poderia trazer benefícios no desempenho do algoritmo.

Além disso, foram gerados os seguintes trabalhos:

- Mainenti-Lopes *et al.* (2009).
- Mainenti-Lopes *et al.* (2012a).
- Mainenti-Lopes *et al.* (2012b).
- Mainenti-Lopes *et al.* (2012c).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: é apresentado no Capítulo 2 uma breve revisão bibliográfica sobre velas solares. Neste mesmo capítulo,

também estão incluídos os conceitos físicos e a modelagem matemática da arquitetura de vela solar usada. No Capítulo 3 é caracterizado o problema da otimização de trajetória usando propulsor de baixo empuxo. No Capítulo 4 são definidos os problemas de otimização mono e multi-objetivo e os algoritmos usados. Serão apresentados os conceitos sobre a Otimização Extrema Generalizada e a Programação Quadrática Sequencial, assim como, as estratégias de busca das versões usadas. No Capítulo 5 é apresentado o desempenho do algoritmo M-GEO<sub>real</sub> ao abordar funções-teste, bem como sua comparação com outros algoritmos de otimização. O Capítulo 6 apresenta a metodologia adotada. No Capítulo 7, são apresentados os resultados ao usar o M-GEO<sub>real</sub> para abordar o problema de otimização multi-objetivo de trajetórias de vela solar e o Capítulo 8 conclui o trabalho.

## 2 VELA SOLAR

A origem do conceito da vela solar foi introduzido no início da década de 1920, apresentado no trabalho de Tsiolkovsky e Tsander, descrito em Hargraves e Paris (1987) e Robert (1991). Entretanto, nessa época o interesse em tal sistema de propulsão era puramente acadêmico, dada a impossibilidade de sua construção.

Na década de 1970 a agência espacial norte-americana, Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço (NASA – National Aeronautics and Space Administration), iniciou estudos fundamentais sobre velas solares. Em 1976 Jerome L. Wright escreveu um trabalho mostrando ser possível uma missão de *rendezvous* com o cometa Halley em 1986 usando uma vela solar se esta fosse lançada em 1982 (WRIGHT E WARMKE, 1976). A NASA mostrou interesse pela missão e a chamou de Halley Rendezvous Mission. Diversos estudos sobre velas solares foram realizados nesse sentido, entretanto o programa foi descontinuado. Mais tarde, Wright escreveu o primeiro livro sobre conceitos técnicos a respeito de velas solares, intitulado “Space Sailing”, cuja primeira edição foi lançada em 1992.

Um segundo trabalho de grande importância no campo de estudo das velas solares surgiu com Collin R. McInnes em 1999. Ele escreveu um livro intitulado “Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications” (MCINNES, 1999). A comunidade científica que aplica seus esforços no desenvolvimento de velas solares tem esse como o livro de referência na área. Nesse livro, McInnes compila toda informação sobre vela solar disponível até o momento, incluindo suas próprias contribuições.

Nessa altura, diversas agências espaciais passaram a demonstrar interesse no desenvolvimento de velas solares. Em 1999, a Agência Espacial Europeia (ESA – European Space Agency) foi capaz de demonstrar a abertura de uma vela solar de tamanho 20m x 20m em um teste em solo (GARNER E LEIPOLD,

2000). Em 2004, a Agência Japonesa de Exploração Aeroespacial, JAXA - Japan Aerospace eXploration Agency, teve sucesso na abertura de duas velas solares lançadas a bordo de um foguete de pesquisa (TAKEUCHI, 2004). A NASA desenvolveu diversos testes de abertura de velas. Em 2004, a NASA com engenheiros de L'Garde Inc.<sup>1</sup> demonstraram a abertura de uma vela solar em testes de solo (LICHODZIEJEWSKI *et al.*; 2004); no ano seguinte a abertura de uma vela solar foi demonstrada em condições de vácuo (LICHODZIEJEWSKI *et al.*; 2005).

A primeira tentativa de fazer voar uma vela solar surgiu do esforço de uma iniciativa privada pela Planetary Society (Sociedade Planetária), liderada por Louis Friedman (GOTLIB *et al.*; 2004). Cosmos I<sup>2</sup> foi construída na Rússia e seria lançada a partir de um submarino. Em Julho de 2001, a primeira tentativa de lançamento da Cosmos I fracassou devido a falhas dos foguetes. Em Junho de 2005, houve uma segunda tentativa de lançamento da Cosmos I no espaço. A missão era demonstrar que o uso de uma vela solar para aumentar o semi-eixo maior de sua órbita é factível. Uma falha no primeiro estágio do foguete que transportava a Cosmo I arruinou a missão.

Em 2002, a NASA fundou um projeto, liderado pelo Dr. Michael E. Lisano no Laboratório de Propulsão a Jato (JPL - Jet Propulsion Laboratory), com o intuito de criar uma ferramenta de alta confiabilidade para facilitar o desenvolvimento de projetos e análise de missões para velas solares. Esse projeto foi completado em 2006. O projeto, chamado *Solar Sail Spaceflight Simulation Software* (S5), foi desenvolvido por diversas organizações, entre elas o JPL, a

---

<sup>1</sup> L'Garde Inc. é uma empresa que desenvolve estruturas infláveis e desdobráveis para aplicações terrestres e espaciais.

<sup>2</sup> Cosmos I foi um projeto desenvolvido por Cosmos Studios e The Planetary Society para testar uma vela solar no espaço.



Universidade do Colorado, a Universidade do Michigan, Ball Aerospace & Technologies Corp. e L'Garde Inc. Disponível para licença comercial, a ferramenta S5 é composta por vários módulos que podem ser usados para estudar todos os aspectos da missão de uma vela solar (ELLIS *et al.*; 2004).

Em Maio de 2010, o primeiro veículo espacial a usar pressão de radiação solar como sua forma de propulsão primária foi lançado pela JAXA a bordo de um lançador H-IIA a partir do centro espacial Tanegashima. O veículo espacial, chamado IKAROS (*Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation Of the Sun*), foi lançado em uma trajetória de transferência para próximo de Vênus. A IKAROS é uma vela solar quadrada que foi aberta por movimento de rotação. No filme usado para a propulsão por pressão de radiação solar, também foram colocadas células solares para geração de energia elétrica. Dispositivos de cristal líquido, capazes de sofrerem alterações em suas características de reflexão através da aplicação de corrente elétrica, têm como função a realização do controle de atitude do veículo. A IKAROS demonstrou ter uma capacidade propulsiva da ordem de 1.12mN (MORI *et al.*; 2010).

Adicionalmente à arquitetura tradicional de uma vela solar, diversas organizações, incluindo NASA e a Planetary Society, estão desenvolvendo velas solares tendo como base CubeSats<sup>1</sup>. De fato, a NASA lançou seu primeiro CubeSat com velas solares a bordo do terceiro lançamento do SpaceX Falcon 1<sup>2</sup> em 2 de Agosto de 2008. Infelizmente, o CubeSat falhou a aproximadamente 2 minutos após seu lançamento. Entretanto, ainda não está

---

<sup>1</sup> Um CubeSat é um tipo de satélite miniaturizado para pesquisas espaciais que normalmente tem um volume de 1 L (10 cm<sup>3</sup>), uma massa de não mais que 1.33 kg e faz uso de componentes eletrônicos comerciais de prateleira.

<sup>2</sup> Falcon 1 é um veículo lançador com dois estágios desenvolvido pela SpaceX.

claro como o programa CubeSail<sup>1</sup> complementar os tradicionais programas de velas solares e se eles serão capazes de gerar conhecimento suficientes nessa área da tecnologia, de tal modo que missões mais avançadas sejam viáveis (MACDONALD, 2011).

No que diz respeito aos estudos de otimização da trajetória de velas solares, muitos autores já abordaram tal tema usando diversos métodos de otimização. Entre os trabalhos mais significativos na área encontram-se diversos estudos de casos realizados pelo Dr. Bernd Dachwald e colaboradores usando neuro-controladores evolutivos. Ou seja, usa-se algoritmos evolutivos para otimizar os parâmetros de redes neurais, e esta tem a função de controlar a atitude da vela ao longo da trajetória de tal forma a minimizar o tempo de transferência. Dachwald (2004) aplicou essa metodologia com êxito para missões hipotéticas de encontro com Mercúrio e 1996FG<sub>3</sub> (um asteroide próximo da Terra) e de passagem por Plutão. Devido ao fato de uma vela solar usar a energia da luz solar para propulsão, e como o fluxo de radiação solar decai com o inverso do quadrado da distância, uma missão de encontro para regiões muito afastadas do Sol torna-se impraticável caso não seja usada outra forma de propulsão ou de frenagem. Em outro trabalho, Dachwald *et al.* (2006) apresenta a otimização da trajetória de transferência de uma possível sonda para imagear os polos do Sol (*SPI – Solar Polar Imager*). Essa missão, em especial, apresenta uma grande dificuldade para as formas de propulsão amplamente usadas atualmente, pois exigem grandes incrementos de velocidades em posições específicas da órbita. Em um trabalho mais recente, Dachwald e Wurn (2011) apresentaram um estudo comparativo do desempenho de três arquiteturas diferentes de velas solares.

---

<sup>1</sup> CubeSail é um projeto experimental que usa vela solar como propulsor de nanosatélite desenvolvido pelo Surrey Space Centre.

Além do uso de neuro-controladores evolutivos, abordagens usando formas de otimização clássicas têm sido usadas. Mengali e Quarta (2009a) realizaram um estudo do mesmo projeto de transferência de uma vela solar para um imageador dos polos solares realizado por Dachwald *et al.* (2006). Entretanto, os autores dividem a transferência em três etapas. A primeira tem como objetivo aproximar a vela do Sol, para que seu empuxo seja maior. A segunda etapa visa aumentar a inclinação da órbita da vela e a terceira etapa deve colocar a vela na órbita nominal de operação. Em todas as três etapas, a otimização é realizada escrevendo a hamiltoniana do sistema, usando o princípio do máximo de Pontryagin e um algoritmo baseado no método da seção áurea e interpolação parabólica. Tal trabalho teve como objetivo apresentar uma metodologia para obtenção de uma solução quase-ótima para ser usada como condição inicial na busca usando um algoritmo mais preciso. Outra aplicação do mesmo método de otimização pode ser encontrada no trabalho de Mengali e Quarta (2009b), sendo o alvo, nesse caso, o asteroide Apophis. Mengali e Quarta (2009c) apresentaram também um trabalho que propõe a discretização da lei de controle da vela, usando a mesma metodologia de otimização dos trabalhos apresentados acima. Os autores testaram a estratégia proposta através dos casos de transferência Terra-Marte e Terra-Vênus. Em ambos os casos foram desconsideradas as inclinações e excentricidades das órbitas. Ao se comparar com soluções contínuas, pode-se verificar que existe uma pequena perda de eficiência no que diz respeito ao tempo de transferência.

Aproveitando a estratégia apresentada acima, Zhang *et al.* (2010) fazem uso do algoritmo de otimização Programação Quadrática Sequenciada (SQP – Sequential Quadratic Programming) e obteve resultados melhores do que aqueles apresentados por Mengali e Quarta (2009c).

Além disso, arquiteturas de velas solares compostas já foram estudadas e comparadas a arquitetura simples (GUERMAN *et al.*; 2009, DACHWALD e

WURM, 2011). As arquiteturas compostas têm por objetivo fazer melhor uso da pressão de radiação solar e diminuir a necessidade de manobras da estrutura. No trabalho de Dachwald e Wurm (2011) foi mostrado que velas solares compostas dependem consideravelmente das características óticas e estruturais de cada uma das partes do sistema. Além disso, foi concluído que, baseado em complexidade técnicas, de escalabilidade e de desempenho, a vela solar simples ainda oferece as melhores condições de projeto.

Tendo em vista que, todos esses trabalhos buscam otimizar a trajetória segundo apenas o tempo de transferência. Ou seja, em todos eles, a abordagem é mono-objetivo (tem apenas uma função a ser otimizada). Apesar da vela solar não consumir energia, tão pouco combustível, para produzir empuxo, ainda assim é possível realizar estudos de otimização multi-objetivo sobre o problema.

Portanto, com este intuito de fundamentar a abordagem multi-objetivo do problema de transferência ótima de uma vela solar plana, nesse capítulo será apresentado o modelo matemático da vela solar plana usado no estudo da otimização da trajetória. O modelo matemático para as equações de movimento da vela solar foram obtidos do trabalho de Zhang *et al.* (2010). Enquanto que a formulação matemática da força da pressão de radiação solar sobre uma vela solar foi obtida do trabalho de Dachwald *et al.* (2006). Uma representação artística de uma vela solar plana é apresentada na Fig. 2.1.

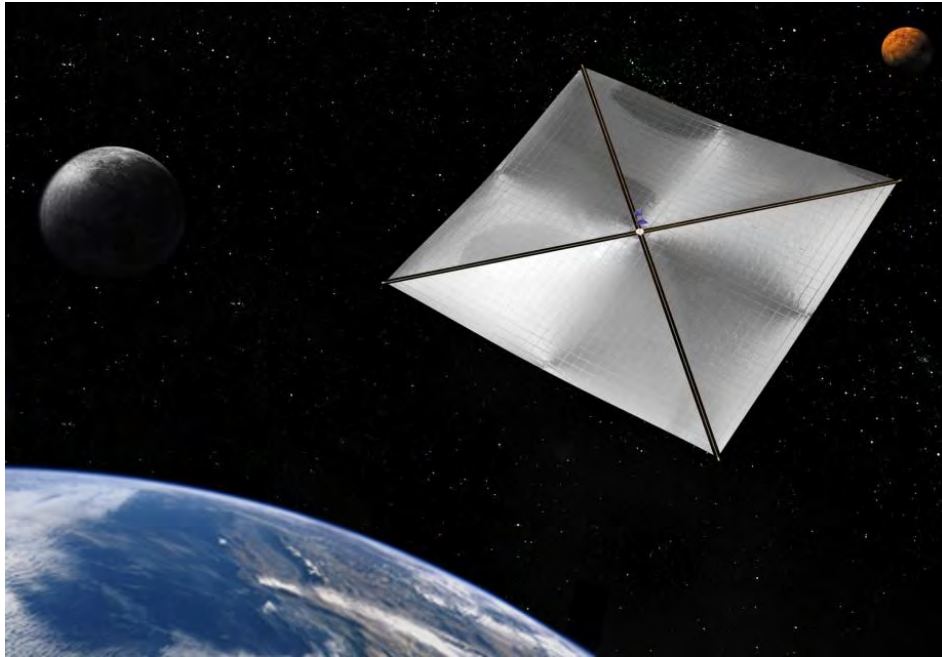


Figura 2.1 – Representação artística de uma vela solar plana.

Fonte: Cubillos e Souza (2011).

## 2.1 Aproximações assumidas

Além da força gravitacional dos diversos corpos celestes e da propulsão do veículo espacial, existem muitas forças de perturbação que influenciam o movimento do veículo. No caso ideal, todas essas forças deveriam ser consideradas durante a análise da missão. Além disso, a teoria da relatividade geral deveria ser usada para descrever o movimento do veículo. Entretanto, esse estudo tem como objetivo fazer uma análise preliminar do problema. Além disso, o custo computacional para se fazer uma análise detalhada seria muito alto devido aos algoritmos de otimização usados. Portanto, Algumas simplificações serão adotadas.

Primeiramente, será considerado que o movimento do veículo espacial sofrerá influência somente da força gravitacional do Sol e do seu empuxo proveniente da pressão de radiação solar. Uma missão interplanetária pode ser dividida em três etapas: a fase de partida, onde o veículo tem como influência gravitacional predominante o corpo celeste de origem; a fase heliocêntrica, durante a

trajetória entre os planetas; a fase de chegada, dentro da esfera de influência do objeto alvo. Será desconsiderado o processo de partida do corpo de origem e de chegada ao corpo alvo, pois a vela solar não é uma forma de propulsão eficiente para esses casos. Isso deve-se ao fato de que, em determinados trechos da órbita da vela, o seu vetor velocidade está contrário ao sentido da radiação solar. Portanto, nessas situações a vela seria incapaz de gerar um empuxo que afastaria o veículo do planeta, o que acarretaria em períodos onde a vela não poderia influenciar a trajetória. O mesmo acontece na fase de aproximação do corpo alvo. Dessa forma, torna-se mais interessante usar outras formas de propulsão durante essas fases.

Será considerado que toda massa do Sol está concentrada em um ponto e que ele é uma fonte luminosa puntiforme. Toda ação de perturbação será desconsiderada. Assim como, todo efeito radiativo e gravitacional dos outros corpos celestes, incluindo o planeta de partida e o de chegada. Essas simplificações resultam em um modelo de simulação de trajetórias heliocêntricas. Uma vez que a massa do veículo é desprezível em comparação com a massa do Sol, será considerado que o veículo orbita o centro de massa do Sol.

Será usada gravitação newtoniana para modelagem matemática do problema, desconsiderando a teoria da relatividade geral. A direção e a magnitude do vetor de empuxo da vela solar podem ser alteradas instantaneamente.

Para as características óticas do filme de uma vela solar, diferentes pressuposições podem ser feitas, que resultam em diferentes modelos para a magnitude e direção da força proveniente da pressão de radiação solar atuante sobre a vela. Em um modelo simplificado é assumido que a superfície da vela tem uma reflexão perfeita. Entretanto, uma vela solar real não apresenta uma reflexão perfeita da radiação incidente. Portanto, uma modelagem mais realista, que leve em consideração imperfeições na reflexão do filme que forma a superfície da vela, torna-se necessária, que será a formulação adotada neste

trabalho. Ambos os modelos da força de pressão da radiação solar desconsideram a forma do filme da vela. Ao invés disso, assume que a superfície é perfeitamente plana. Além disso, as características físicas da vela solar não se alteram com o tempo, ou seja, não se degradam.

## 2.2 Movimento em um campo gravitacional

Pela lei gravitacional de Newton, um corpo puntiforme de massa  $m$  é atraído pela massa  $M$  por uma força dada por:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad (2.1)$$

sendo  $G = 6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$  é a constante gravitacional universal (KUGA *et al.*; 2000) e  $r$  é a distância entre as duas massas. No caso do problema proposto neste trabalho,  $M$  é a massa do Sol. A força gravitacional é atrativa, e atua sobre as duas massas na direção do raio vetor unitário  $\hat{r}$ . Usando a segunda lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

pode-se escrever a Equação 2.1 da seguinte forma

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \quad (2.3)$$

sendo  $\vec{a}$  a aceleração total sofrida pelo corpo de massa  $m$ . Usando coordenadas esféricas e escrevendo a Equação 2.3 na forma de equação de estado (MENGALI E QUARTA, 2009)

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v/u \\ \frac{v^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \\ -uv/r \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $r$  e  $\theta$ , respectivamente, as coordenadas radial e azimutal e  $u$  e  $v$  são suas respectivas variações no tempo. A Equação 2.4 descreve as equações movimento de um corpo sujeito a um campo gravitacional na forma de equações de estado. Nas seções seguintes, será abordada a formulação matemática da força de pressão de radiação solar sobre uma vela solar, assim como, a inclusão do seu efeito nas equações de movimento.

### 2.3 Pressão de radiação solar

Pode ser derivado das leis de mecânica quântica e de relatividade especial que a pressão de radiação solar (DACHWALD, 2004), devido ao transporte de momento dos fótons provenientes do Sol, é expressa por

$$P = S/c \quad (2.5)$$

sendo  $S$  o fluxo de radiação solar e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Já que o fluxo de radiação de uma fonte puntiforme varia com o inverso do quadrado da distância e a média do fluxo a distância Terra-Sol ( $r_0 = 1 \text{ AU}$ ) é  $S_0 = 1368 \text{ W/m}^2$  (MCINNES, 1999), a pressão de radiação solar a uma distância  $r$  do Sol é

$$P = \frac{S_0}{c} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = 4,563 \left[\frac{\mu\text{N}}{\text{m}^2}\right] \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad (2.6)$$

### 2.4 Vetor normal e de empuxo da vela

Para expressar a força exercida pela pressão de radiação solar sobre a vela solar, é conveniente introduzir dois vetores unitários. O primeiro é o vetor normal, que descreve a atitude da vela solar. Denominado  $\vec{n}$ , é um vetor perpendicular a superfície da vela solar e sempre aponta no sentido oposto ao Sol. Ou seja,  $\vec{n} \cdot \vec{e}_r \geq 0$ , sendo  $\vec{e}_r$  o vetor radial de um sistema de coordenadas esféricas e tem direção e sentido dados pela posição da vela solar em relação ao Sol. O segundo vetor, denominado  $\vec{f}$ , tem direção e sentido iguais ao



empuxo gerado pela vela solar. De acordo com a Fig. 2.2, o ângulo  $\alpha$  é definido pelos vetores  $\vec{n}$  e  $\vec{e}_r$  (o vetor  $\vec{e}_r$  tem direção e sentido iguais a  $r$ ) No caso do vetor  $\vec{f}$ , o ângulo que determina sua direção é o ângulo  $\gamma$  (também contado a partir de  $\vec{e}_r$ ).

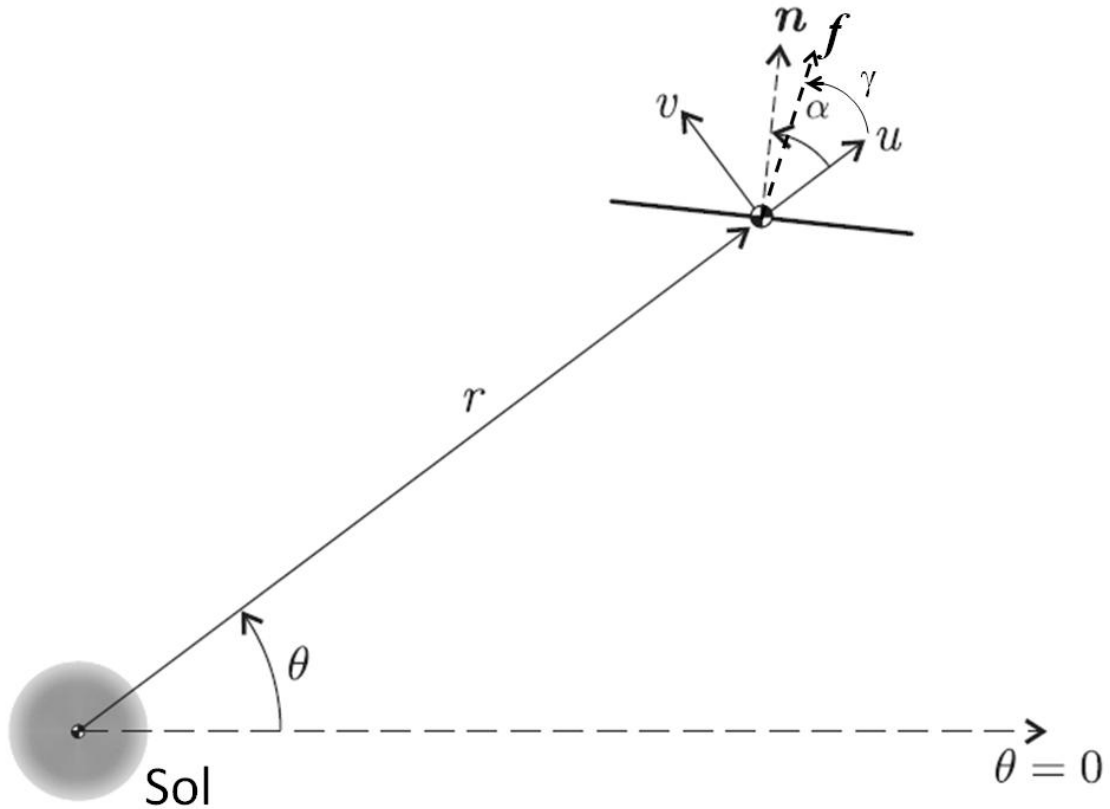


Figura 2.2 – Representação gráfica dos vetores unitários  $\vec{n}$  e  $\vec{f}$ , sendo  $r$  e  $\theta$  as componentes radiais e azimutais de um sistema de coordenadas cilíndricas,  $v$  e  $u$  as variações temporais de  $r$  e  $\theta$ , respectivamente.

## 2.5 Modelo da força da pressão de radiação solar de uma vela considerando reflexão ideal

A força exercida sobre uma vela solar perfeitamente refletora pode facilmente ser calculada a partir da Fig. 2.3. Usando os vetores unitários  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_{ref}$  definidos a partir da direção da radiação incidente e da refletida, respectivamente, a força exercida sobre a vela devido aos fótons incidentes é

$$\vec{F}_r = PA(\vec{e}_r \cdot \vec{n})\vec{e}_r \quad (2.7)$$

onde  $A(\vec{e}_r \cdot \vec{n})$  é a área da vela projetada na direção de  $\vec{e}_r$ .

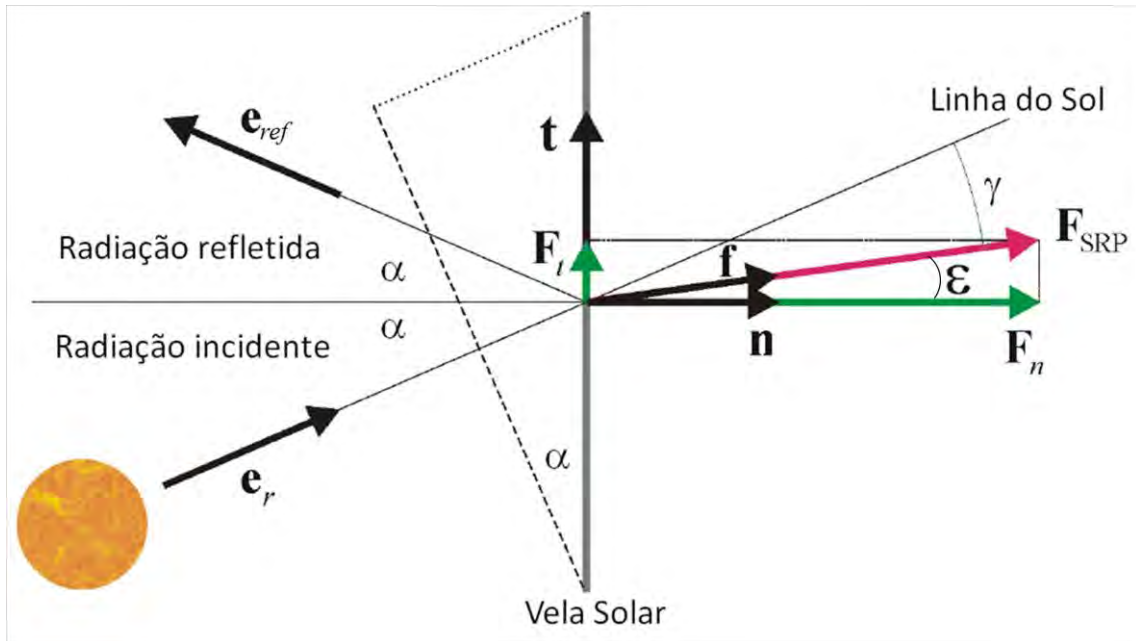


Figura 2.3 – Representação gráfica da força de radiação solar de uma vela que apresenta reflexão ideal.

Fonte: Dachwald (2004).

A força exercida sobre a vela devido aos fótons refletidos é

$$\vec{F}_{ref} = -PA(\vec{e}_r \cdot \vec{n})\vec{e}_{ref} \quad (2.8)$$

Portanto, usando a relação  $\vec{e}_r - \vec{e}_{ref} = 2(\vec{e}_r \cdot \vec{n})\vec{n}$ , a força total devido a pressão de radiação solar sobre a vela é dada por

$$\vec{F}_{SRP} = \vec{F}_r + \vec{F}_{ref} = 2PA(\vec{e}_r \cdot \vec{n})^2\vec{n} \quad (2.9)$$

e, fazendo uso da relação  $\vec{e}_r \cdot \vec{n} = \cos \alpha$ , obtêm-se

$$\vec{F}_{SRP} = \vec{F}_r + \vec{F}_{ref} = 2PA \cos^2 \alpha \vec{n} \quad (2.10)$$

Observando a equação acima, pode-se perceber que força da pressão de radiação solar sobre uma vela solar com reflexão perfeita é sempre na mesma direção e sentido do vetor normal a vela solar. Ou seja,  $\vec{f} = \vec{n}$ .

## 2.6 Modelo da força da pressão de radiação solar de uma vela considerando reflexão não ideal

Uma vez que uma vela solar não apresenta reflexão perfeita, uma simulação que seja mais representativa da trajetória real de uma vela solar deve levar em consideração as características óticas de um filme real da vela. Tais características podem ser parametrizadas pelos coeficientes de absorção  $\beta$ , de reflexão  $\rho$ , de transmissão  $\tau$ , e de emissão  $\varepsilon$  (MCINNES, 1999).  $\beta$  representa a quantidade de energia da radiação solar absorvida pelo filme. Essa energia é transformada em calor e reemitida ao espaço em forma de radiação de acordo com o coeficiente  $\varepsilon$  devido a temperatura do filme.  $\rho$  representa a quantidade de energia refletida pela vela. A vela com reflexão ideal tem esse parâmetro igual a 1 e todos os outros iguais a 0, ou seja, toda luz incidente é refletida.  $\tau$  representa a quantidade de energia que passa pelo filme sem nenhuma interação com o material. Tais coeficientes respeitam a seguinte restrição

$$\beta + \rho + \tau = 1 \quad (2.11)$$

Assumindo  $\tau = 0$  para o lado do filme que faz a reflexão da radiação solar, então o coeficiente de absorção pode ser descrito por

$$\beta = 1 - \rho \quad (2.12)$$

Sendo  $\tau$  o coeficiente de transmissão,  $\tau \neq 0$  implicaria que parte da radiação solar atravessaria o filme se interagir com ele. Seria equivalente a ter uma vela

de tamanho menor e com um filme cujo coeficiente de transmissão  $\tau = 0$ . Portanto, essa consideração não afeta a direção da força de pressão de radiação, apenas sua magnitude. Ou seja, esse efeito pode ser compensado escolhendo adequadamente o tamanho da vela.

A força da pressão de radiação solar nesse caso pode ser descrita pelas três forças apresentadas a seguir

$$\vec{F}_{SRP} = \vec{f}_\rho + \vec{f}_\beta + \vec{f}_\varepsilon \quad (2.13)$$

sendo  $\vec{f}_\rho$  a força devido a reflexão da radiação,  $\vec{f}_\beta$  a força devido a absorção da radiação e  $\vec{f}_\varepsilon$  a força devido a emissão de radiação por efeito térmico. A força  $\vec{f}_\beta$  pode ser descrita por

$$\vec{f}_\beta = PA \cos(\alpha) \vec{e}_r \quad (2.14)$$

A partir da Figura (2.4)

$$\vec{e}_r = \cos(\alpha) \vec{n} + \sin(\alpha) \vec{t} \quad (2.15)$$

sendo  $\vec{t}$  um vetor unitário ao longo da superfície do filme da vela. Portanto, pode-se escrever

$$\vec{f}_\beta = PA(\cos^2(\alpha) \vec{n} + \cos(\alpha) \sin(\alpha) \vec{t}) \quad (2.16)$$

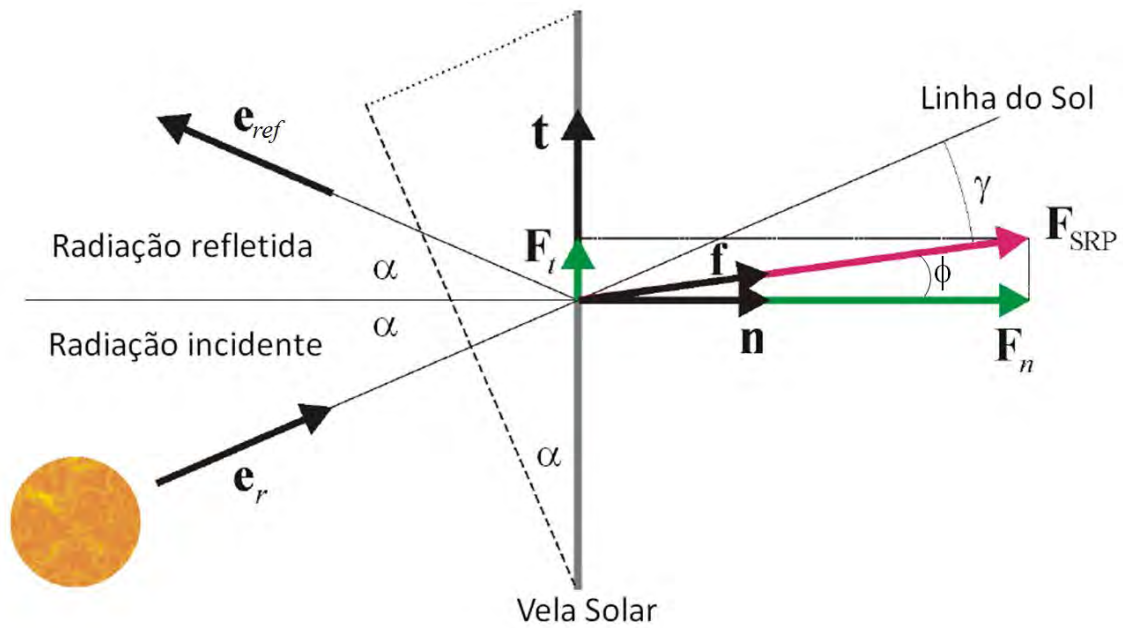


Figura 2.4 – Representação gráfica da força de radiação solar de uma vela que apresenta reflexão não ideal.

Fonte: Dachwald (2004).

Considerando que nem todos os fótons são refletidos especularmente, o coeficiente de reflexão pode ser dividido nos coeficientes de reflexão especular  $\rho_s$  e de reflexão difusa  $\rho_d$  tendo como restrição a seguinte relação

$$\rho_s + \rho_d = \rho \quad (2.17)$$

$$s = \frac{\rho_s}{\rho} \Rightarrow \rho_s = s\rho \quad (2.18)$$

e

$$\rho_d = (1 - s)\rho \quad (2.19)$$

Dessa forma, a força devido a reflexão especular pode ser descrita como

$$\vec{f}_{\rho_s} = -s\rho P A \cos(\alpha) \vec{e}_{ref} \quad (2.20)$$

sendo

$$\vec{e}_{ref} = -\cos(\alpha)\vec{n} + \sin(\alpha)\vec{t} \quad (2.21)$$

então

$$\vec{f}_{\rho s} = s\rho PA(\cos^2(\alpha)\vec{n} - \cos(\alpha)\sin(\alpha)\vec{t}) \quad (2.22)$$

O restante da radiação refletida ocorrerá de forma difusa. A força resultante dessa reflexão difusa pode ser descrita por

$$\vec{f}_{\rho d} = B_f\rho(1-s)PA\cos(\alpha)\vec{n} \quad (2.23)$$

sendo  $B_f$  um coeficiente que indica que a superfície frontal da vela é não-Lambertiana. Uma superfície Lambertiana é tal que aparenta ter o mesmo brilho independentemente do ângulo de aspecto. O coeficiente não-Lambertiano descreve o desvio dessa condição ideal (MCINNES, 1999). A partir das Equações 2.22 e 2.23 pode-se obter a força devido a reflexão da radiação

$$\vec{f}_\rho = \rho PA \left[ \left( s\cos^2(\alpha) + B_f(1-s)\cos(\alpha) \right) \vec{n} - s\cos(\alpha)\sin(\alpha)\vec{t} \right] \quad (2.24)$$

A força devido a emissão por efeito térmico depende do coeficiente de emissão  $\varepsilon$  que representa a potência  $\Pi$  que é emitida pela superfície de área  $A$  a uma temperatura absoluta  $T$ ,

$$\Pi = A\varepsilon c_{SB}T^4 \quad (2.25)$$

sendo  $c_{SB} = 5,67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$  a constante de Stefan-Boltzmann (Dachwald, 2004). Os coeficientes de emissão do lado voltado para o Sol e do

lado oposto do filme são  $\varepsilon_f$  e  $\varepsilon_b$ , respectivamente. A distribuição angular dos fótons emitidos e refletidos de forma difusa são descritos pelos coeficientes  $B_f$  e  $B_b$ , respectivamente. Como resultado, o modelo de reflexão não ideal de uma vela solar tem como parâmetros seis coeficientes representando as características óticas do filme:  $\Psi = \{\rho, s, \varepsilon_f, \varepsilon_b, B_f, B_b\}$ . De acordo com Wright (1992), os coeficientes óticos para uma vela cujo filme é feito de *aluminum-coated* (altamente refletivo) na superfície voltada para o Sol e *chromium-coated* (no lado oposto) são  $\Psi_{AlCr} = \{\rho = 0.88, s = 0.94, \varepsilon_f = 0.05, \varepsilon_b = 0.55, B_f = 0.79, B_b = 0.55\}$ . A força de emissão devido a temperatura do filme é dada por

$$\vec{f}_\varepsilon = PA(1 - \rho) \frac{\varepsilon_f B_f - \varepsilon_b B_b}{\varepsilon_f + \varepsilon_b} \cos(\alpha) \vec{n} \quad (2.26)$$

Usando os coeficientes óticos da vela acima definidos, a força da pressão de radiação solar exercida sobre a vela pode ser decomposta em duas componentes sendo descritas usando os vetores unitários  $\mathcal{S} = \{\vec{n}, \vec{t}\}$  pode-se escrever a força resultante  $\vec{F}_{SRP}$  em duas componentes: a normal  $\vec{F}_n$  ao longo de  $\vec{n}$  e a tangencial  $\vec{F}_t$  ao longo  $\vec{t}$  (veja Fig. 2.4). Somando-se as Equações 2.16, 2.24 e 2.26 pode-se obter a força resultante  $\vec{F}_{SRP}$

$$\vec{F}_{SRP} = 2PA \cos \alpha (a_1 \cos \alpha + a_2) \vec{n} + 2PA \cos \alpha a_3 \sin \alpha \vec{t} \quad (2.27)$$

Portanto, as componentes  $\vec{n}$  e  $\vec{t}$  podem escritas como

$$F_n = \vec{F}_{SRP} \cdot \vec{n} = 2PA \cos \alpha (a_1 \cos \alpha + a_2) \quad (2.27)$$

e

$$F_t = \vec{F}_{SRP} \cdot \vec{t} = 2PA \cos \alpha a_3 \sin \alpha \quad (2.28)$$

com

$$a_1 \triangleq \frac{1}{2}(1 + s\rho) \quad (2.29)$$

$$a_2 \triangleq \frac{1}{2} \left[ B_f(1 - s)\rho + (1 - \rho) \frac{\varepsilon_f B_f - \varepsilon_b B_b}{\varepsilon_f + \varepsilon_b} \right] \quad (2.30)$$

$$a_3 \triangleq \frac{1}{2}(1 - s\rho) \quad (2.31)$$

A força total devido a pressão de radiação solar pode ser escrita como

$$\vec{F}_{SRP} = 2PA \cos \alpha \psi \vec{f} \quad (2.32)$$

com

$$\psi \triangleq [(a_1 \cos \alpha + a_2)^2 + (a_3 \sin \alpha)^2]^{1/2} \quad (2.33)$$

sendo  $\psi$  dependente apenas do ângulo  $\alpha$  e dos coeficientes óticos  $\Psi$  do filme da vela. Sabendo que o ângulo entre  $\vec{f}$  e  $\vec{e}_r$  é o ângulo  $\gamma$ , enquanto que o ângulo entre  $\vec{f}$  e  $\vec{n}$  é referido como o ângulo  $\phi$  sendo este podendo ser calculado por

$$\phi = \arctan \left( \frac{a_3 \sin \alpha}{a_1 \cos \alpha + a_2} \right) \quad (2.34)$$

A partir da equação acima, o ângulo  $\gamma$  é então obtido pela equação  $\gamma = \alpha - \phi$ . A força total da pressão de radiação solar pode também ser escrita em termos dos vetores unitários  $\mathcal{O} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ , sendo  $\vec{e}_r$  o vetor radial e  $\vec{e}_\theta$  o transversal orbitais. A força  $\vec{F}_{SRP}$  no sistema de componentes  $\mathcal{O}$  pode ser obtida a partir do sistema  $\mathcal{S}$  através da equação

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_t \end{pmatrix} \quad (2.35)$$



sendo assim

$$F_r = \vec{F}_{SRP} \cdot \vec{e}_r = 2PA \cos \alpha (a_1 \cos^2 \alpha + a_2 \cos \alpha - a_3 \sin^2 \alpha) \quad (2.36)$$

$$F_\theta = \vec{F}_{SRP} \cdot \vec{e}_\theta = 2PA \cos \alpha \sin \alpha [(a_1 + a_3) \cos \alpha + a_2] \quad (2.37)$$

Finalmente, a força da pressão de radiação solar pode ser expressa em termos das componentes nas direções dos vetores  $\vec{e}_r$  e  $\vec{n}$ . Esta decomposição será necessária para o estudo da otimização da lei de controle que será apresentada a seguir. Como resultado obtêm-se

$$\vec{F}_{SRP} = 2PA \cos \alpha [b_1 \vec{e}_r + (b_2 \cos \alpha + b_3) \vec{n}] \quad (2.38)$$

Sendo os coeficientes  $b_1$ ,  $b_2$ , e  $b_3$  definidos por

$$b_1 \triangleq \frac{1}{2}(1 - s\rho) \quad (2.39)$$

$$b_2 \triangleq s\rho \quad (2.40)$$

$$b_3 \triangleq \frac{1}{2} \left[ B_f(1 - s)\rho + (1 - \rho) \frac{\varepsilon_f B_f - \varepsilon_b B_b}{\varepsilon_f + \varepsilon_b} \right] \quad (2.41)$$

Usando a Equação 2.38, pode-se verificar que a aceleração devido ao empuxo da vela é dada por

$$\vec{a}_{SRP} = a_c \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \cos \alpha \cdot [(b_1 + b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \cdot \vec{e}_r + (\sin \alpha (b_2 \cos \alpha + b_3)) \cdot \vec{e}_\theta] \quad (2.42)$$

sendo  $r_0 = 1 \text{ UA}$ ,

$$a_c = \frac{2PA}{m} \quad (2.43)$$

e  $m$  é a massa da vela solar.

## 2.7 Efeito da aceleração da vela solar sobre sua trajetória

Nessa seção será realizada uma breve análise qualitativa a respeito do efeito que a aceleração gerada pela vela solar causa em sua trajetória. Além disso, será apresentada uma comparação entre a força de pressão de radiação gerada pela vela solar e a força gerada por outro propulsor de baixo empuxo.

Na Figura 2.5 é apresentado um gráfico que mostra a região onde está restrita a força da pressão de radiação. O vetor que descreve a força tem sua origem na origem do gráfico e seu módulo é definido pela curva vermelha para o caso não-ideal e pela curva azul para o caso ideal. Pode-se observar a partir da Figura 2.5 que quanto maior o valor do ângulo  $\alpha$  menor a magnitude da força. O vínculo da magnitude da força exercida pela vela com o ângulo  $\alpha$  torna a busca pela trajetória ótima de uma vela solar mais complexo do que para o caso de outros propulsores de baixo empuxo, uma vez que não se pode escolher livremente a direção de atuação do empuxo da vela solar. Entretanto, essa desvantagem é compensada pelo fato da vela solar não consumir propelente, ao passo que outros propulsores consomem.

Apesar da componente radial da força  $\vec{F}_{SRP}$  ser sempre positiva, isso não impossibilita a vela de se aproximar do Sol, pois o efeito dessa componente será apenas reduzir a força de atração gravitacional do Sol. Ou seja, considerando apenas o efeito da força  $\vec{F}_{SRP}$  na direção de  $\vec{e}_r$ , seria como se o Sol tivesse um pouco menos massa. Para se alterar o semi-eixo maior de uma órbita é necessário aplicar uma força na direção da velocidade do veículo espacial. Além disso, sabe-se que para espiralar para fora do Sistema Solar é necessário que a força aplicada seja a favor da velocidade. Enquanto que, para

espiralar para dentro, a força deve ser contra a velocidade como mostra a Figura 2.6.

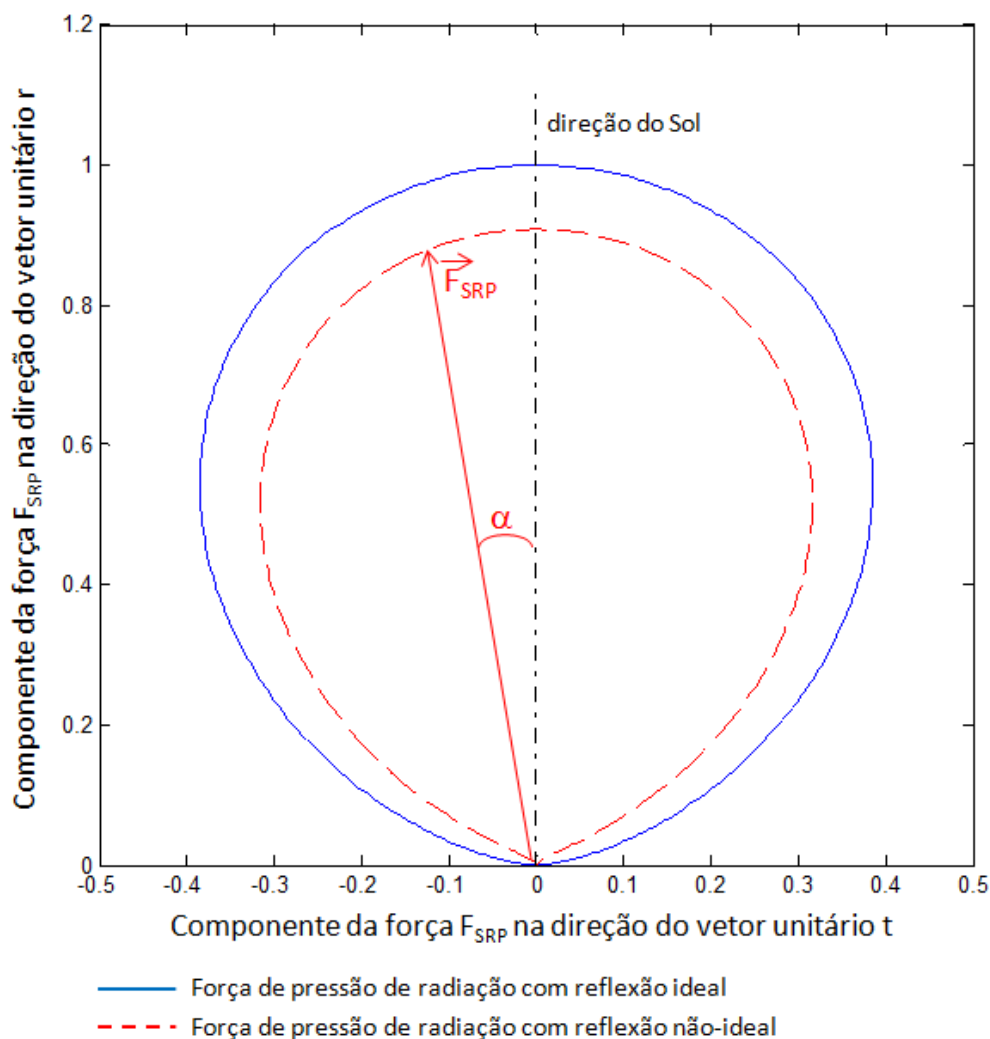


Figura 2.5 – Comparação entre as forças de pressão de radiação com reflexão ideal e não-ideal em função do ângulo de atitude  $\alpha$  da vela solar. Para gerar esse gráfico foi considerado  $a_c = 1 \text{ mm/s}^2$ ,  $r = 1 \text{ UA}$ ,  $b_1 = 0.0864$ ,  $b_2 = 0.8277$ ,  $b_3 = -0.00545$  e  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Na Figura 2.6 é apresentada uma análise qualitativa do efeito da força da pressão de radiação gerada pela vela solar. À esquerda, a vela solar possui um valor positivo do ângulo de atitude  $\alpha$  que gera uma aceleração a favor da

velocidade da vela. Conseqüentemente, a vela espirala para fora do Sistema Solar. À direita, a situação se inverte e o valor de  $\alpha$  passa a ser negativo, o que gera uma aceleração contrária a velocidade da vela e nesse caso ela espirala para dentro do Sistema Solar. Além disso, a figura mostra uma comparação entre os possíveis valores para força gerada por uma vela solar (curva em laranja) e para os demais propulsores de baixo empuxo (curva em verde), como por exemplo propulsores elétricos.

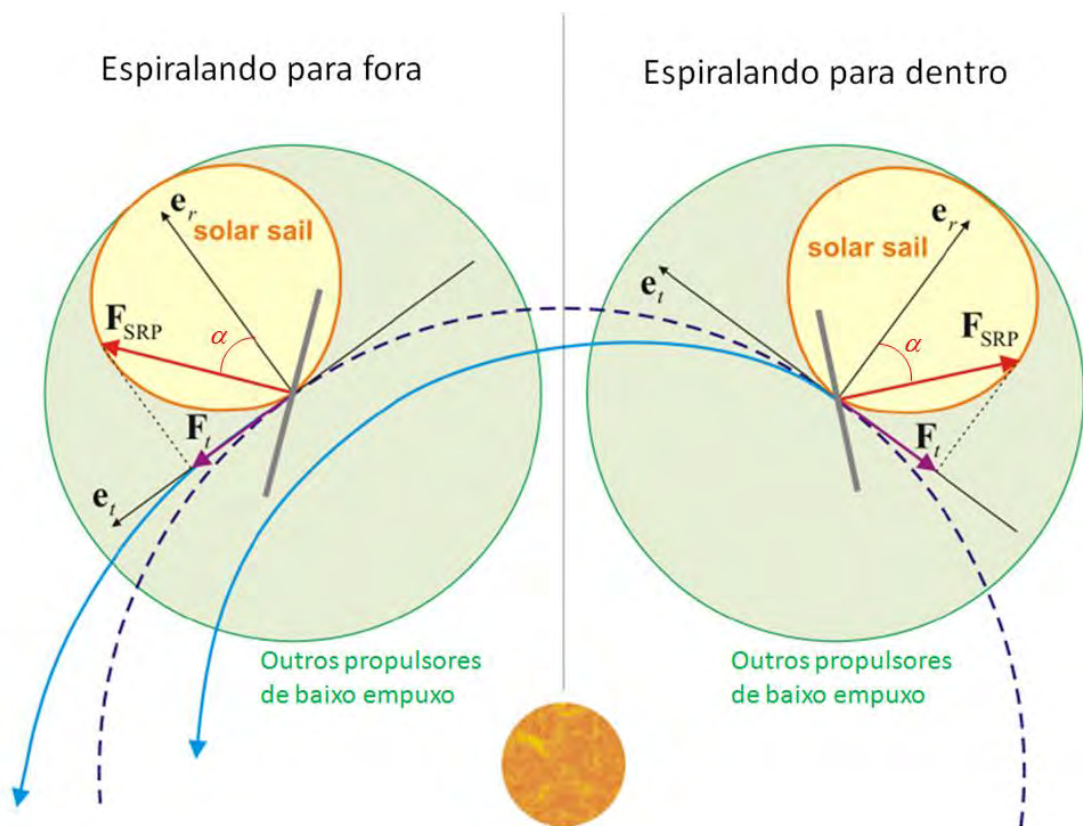


Figura 2.6 – Uma análise qualitativa do efeito da força de pressão de radiação sobre a trajetória de uma vela solar. A linha tracejada azul escura representa a órbita osculadora da vela. As linhas azuis claro representam as trajetórias espiralando em direção ao Sol e afastando do Sol.

Fonte: Dachwald (2004).

Além do vínculo apresentado acima, a vela solar apresenta outra dependência que dificulta o processo de busca por trajetórias otimizadas. Sabe-se que a intensidade da radiação solar é inversamente proporcional ao quadrado da distância do Sol, como a vela solar depende dessa radiação para gerar empuxo, então quanto maior a distância da vela solar com o Sol menor será a magnitude da força por ela exercida.

Entretanto, esse vínculo não impede missões de uma vela solar para regiões externas do Sistema Solar, pois existem estratégias capazes de gerar incrementos de energia grandes o suficiente a ponto de levar a vela para essas regiões. Uma estratégia amplamente estudada consiste em levar a vela para regiões próximas do Sol onde a intensidade da radiação solar é alta. Nesse trecho da trajetória, a vela é capaz de adquirir energia o suficiente para alcançar o Sistema Solar exterior e até mesmo para missões para regiões interestelares. No entanto, apesar de ser possível levar uma vela solar ao Sistema Solar exterior, o uso apenas da propulsão por ela gerada não permite missões de “rendezvous”, pois o empuxo gerado não é suficiente para alterar os estados da vela significativamente a ponto de permitir o encontro com alvo.

## 2.8 Equações de movimento da vela solar plana

Tendo em vista as considerações apresentadas na Seção 2.1, usando a Equação 2.4 e somando o efeito da aceleração devido a força de pressão de radiação apresentada na Equação 2.32, pode-se obter as seguintes equações de movimento para a vela solar plana

$$\dot{\tilde{x}}_e = \begin{bmatrix} u \\ v/r \\ \frac{v^2}{r} - \frac{GM}{r^2} + (b_1 + b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \cdot a_c \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos \alpha \\ -\frac{uv}{r} + \sin \alpha (b_2 \cos \alpha + b_3) \cdot a_c \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

sendo  $\vec{x}_e$  o vetor de estado da posição orbital da vela solar usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\vec{x}_e = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ u \\ \nu \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

## 2.9 Convenção de unidades para o problema proposto

Em estudos de problemas de trajetórias e transferências interplanetárias são amplamente usadas as seguintes unidades de medidas: unidade astronômica ( $UA$ ) para distância; radianos ( $rad$ ) para tempo. A transformação de metros ( $m$ ) para  $UA$  é trivial:  $1 UA = 1,5 \times 10^{11} m$ . A mudança em relação ao tempo está associada ao movimento orbital da Terra. Sabe-se que a Terra demora 1 ano para dar uma volta em torno do Sol e que isso representa uma rotação  $2\pi rad$ . Associa-se então, a contagem do tempo ao movimento médio da Terra em sua órbita. Portanto, pode-se escrever  $1 ano = 2\pi rad$ . A relação em segundos ( $s$ ) é  $1 s = 1,99096677 \times 10^{-7} rad$ .

A principal vantagem dessa mudança de unidades é o fato de garantir que os valores de distância e tempo ao longo dos processos de integração numérica nunca serão demasiadamente grandes nem pequenos. Dessa forma, evita-se problemas computacionais de representação numérica inconvenientes. Além disso, também no âmbito da representação numérica, a ordem de grandeza dos valores das diversas grandezas usadas no problema são próximas. Isso facilita a manipulação numérica do problema.

Dessa forma, as constantes envolvidas na Equação 2.35 podem ser escrita usando as seguintes unidades:

- $unidade[GM] = UA^3/rad^2$ ;
- $unidade[a_c] = UA/rad^2$ .

Usando as unidades propostas pode-se verificar que  $GM = 1,0 UA^3/rad^2$  e, considerando um valor de aceleração característica igual a  $1,0 mm/s^2$ , então  $a_c = 0,16863441 UA/rad^2$





### 3 O PROBLEMA DA OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIA

Neste capítulo, o problema de otimização de trajetória usando propulsor de baixo empuxo é caracterizado. É também apresentado a forma tradicional de resolver problemas de otimização de trajetória usando leis locais de direção e métodos numéricos de controle ótimo. Na seção 3.1, o problema de otimização de trajetória para propulsores de baixo empuxo é formalmente apresentado, de forma geral, e do ponto de vista da teoria de controle ótimo. As informações aqui apresentadas foram extraídas principalmente do trabalho de Dachwald (2004).

#### 3.1 Problema trajetória ótima de veículos espaciais de baixo empuxo

No caso geral, a trajetória de um veículo espacial pode ser definido pela imagem de algum intervalo de tempo  $[t_o, t_f]$  em algum espaço de estados hexa-dimensional do veículo  $\{\vec{x}_v\} \subset \mathbb{R}^6$ .  $\vec{x}_v$  é normalmente a posição  $\vec{r}_v \in \mathbb{R}^3$  e a velocidade  $\dot{\vec{r}}_v \in \mathbb{R}^3$  ou algum conjunto de elementos orbitais  $\vec{E} \in \mathbb{R}^6$ . Uma trajetória é obtida pelo uso de alguma lei de controle  $\vec{U}$  do veículo espacial que mapeia algum domínio de entrada (geralmente o mesmo intervalo de tempo  $[t_o, t_f]$ ) no vetor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  de controle do veículo, o qual define completamente a magnitude e a direção da força  $\vec{F}$  de propulsão do veículo. A trajetória, que é denominada por  $\vec{x}_v[t]$ , é obtida através da integração numérica das equações de movimento do veículo espacial, no caso deste trabalho, a Equação 2.34.

##### 3.1.1 Comparação entre otimização de trajetória usando alto e baixo empuxo

Para veículos espaciais com propulsão de alto empuxo como foguetes químicos, já existem métodos bem estabelecido e amplamente usados na literatura especializada para resolver o problema de encontrar trajetórias ótimas interplanetárias, com exceção dos casos onde manobras de auxílio gravitacional sejam necessárias, uma vez que apenas poucas fases de impulso

são necessárias (veja exemplo abaixo). Estas fases de impulso são muito curtas em comparação com o tempo de transferência, de modo que elas podem ser aproximadas por eventos singulares que alteram a velocidade  $\dot{\vec{r}}_v$  do veículo instantaneamente.

Considere a seguinte situação: deseja-se levar um veículo espacial do corpo inicial A até o corpo alvo B. Para uma trajetória interplanetária de interceptação, apenas um único impulso propulsivo ( $\Delta V_A$ ) em A é necessário, de modo que o espaço de solução do problema tem apenas três dimensões (por exemplo, amplitude de impulso e dois ângulos de direção). No caso de um problema de rendezvous, outro impulso propulsivo ( $\Delta V_B$ ) em B é necessário para fazer com que a velocidade do veículo espacial se iguale a velocidade do corpo B. No entanto, este impulso propulsivo é completamente definido pelo vetor de velocidade no ponto B, de modo que nenhum outro parâmetro de otimização seja adicionado ao problema. Para o problema de rendezvous, uma manobra orbital intermediária (M) que leva o veículo espacial a uma órbita cuja inclinação contém a linha de interseção entre A e B reduz a um a dimensão do problema de otimização. Sendo assim,  $V_A$  está dentro do plano orbital de A, a magnitude e direção da velocidade em  $V_M$  são completamente definidas por A e plano orbital B e pela velocidade do veículo no ponto M, e  $\Delta V_B$  é novamente definido pelo vetor velocidade em B.

Missões interplanetárias utilizando baixo empuxo exigem que o sistema de propulsão permaneça em operação por uma parte significativa da transferência de forma a gerar o incremento de velocidade  $\Delta V$  necessário. Consequentemente, o vetor de impulso  $\vec{F}(t)$  é uma função contínua no tempo.  $\vec{F}(t)$  é manipulada por meio de um vetor  $n_u$ -dimensional de variáveis de controle  $\vec{u}(t)$  (por exemplo, o empuxo e dois ângulos direcionais) que é também uma função de tempo contínuo. Dessa forma, o problema de otimização trajetória é equivalente ao problema de encontrar a melhor função de controle  $\vec{U}^*$  do veículo espacial em um espaço infinito-dimensional. Este

problema não pode ser resolvido analiticamente, exceto em casos muito raros (ROSS e FAHROO, 2002). No entanto, o que pode ser resolvido, pelo menos em termos numéricos, é uma aproximação discreta do problema.

### 3.1.2 Otimização de trajetória usando baixo empuxo sob a perspectiva da teoria do controle ótimo

Nesta seção, três tipos de problemas de otimização de trajetória são considerados: problemas de rendezvous, interceptação, e problemas de transferência orbital. Esses problemas são apresentados a partir da perspectiva da teoria de controle ótimo, tanto em tempo contínuo quanto discreto.

### 3.1.3 Formulação do problema em tempo contínuo

Em termos de teoria de controle ótimo, o problema de rendezvous **RV**, o de interceptação **FB**, e o de transferência de órbita **TO** pode ser declarado como apresentado a seguir:

Problema de rendezvous (**RV**) a partir da perspectiva da teoria de controle ótimo:

Encontrar uma lei de controle de um veículo espacial  $\vec{U}: t \in [t_o, t_f] \mapsto \vec{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ , capaz de levar os estados  $\vec{x}(t) = (\vec{r}_v(t), \dot{\vec{r}}_v(t))$  do veículo do seu valor inicial  $\vec{x}(t_o)$  para o estado  $\vec{x}_B(t)$  do corpo alvo, ao longo de uma trajetória que obedece a restrição dinâmica  $\dot{\vec{x}}_v(t) = G(\vec{x}_v(t), \vec{u}(t))$  e a restrição imposta pelo alvo  $\vec{x}_v(t_f) = \vec{x}_B(t_f)$ , e ao mesmo tempo minimiza alguma função custo  $J$ .

Problema de interceptação (**FB**) a partir da perspectiva da teoria de controle ótimo:

Encontrar uma lei de controle de um veículo espacial  $\vec{U}: t \in [t_o, t_f] \mapsto \vec{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ , capaz de levar a posição  $\vec{r}_v(t)$  do veículo a partir do seu valor inicial  $\vec{r}_v(t_o)$  até

a posição  $\vec{r}_B(t)$  do corpo alvo, ao longo de uma trajetória que obedece a restrição dinâmica  $\dot{\vec{x}}_v(t) = G(\vec{x}_v(t), \vec{u}_v(t))$  e a restrição imposta pelo alvo  $\vec{r}_v(t_f) = \vec{r}_B(t_f)$ , e ao mesmo tempo minimiza alguma função custo  $J$ .

Problema de interceptação orbital (**TO**) sob a perspectiva da teoria de controle ótimo:

Encontrar uma lei de controle de um veículo espacial  $\vec{U}: t \in [t_o, t_f] \mapsto \vec{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ , capaz de levar o conjunto de elementos orbitais  $\vec{E}_v(t)$  (que define por completo a órbita) do veículo, (por exemplo,  $\vec{E}_v(t) = (\mathbf{a}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{i}(t), \mathbf{\Omega}(t), \mathbf{\omega}(t), \mathbf{M}(t))$ , onde os cinco primeiros elementos definem a forma da órbita e o último define a posição nesta órbita) a partir da seu valor inicial  $\vec{E}_v(t_o)$  para o respectivo conjunto de elementos orbitais  $\vec{E}_B(t)$  do corpo alvo, ao longo de uma trajetória que obedece a restrição dinâmica  $\dot{\vec{E}}_v(t) = G(\vec{E}_v(t), \vec{u}(t))$  e a imposta pelo alvo  $(\mathbf{a}_v(t_f), \mathbf{e}_v(t_f), \mathbf{i}_v(t_f), \mathbf{\Omega}_v(t_f), \mathbf{\omega}_v(t_f)) = (\mathbf{a}_B(t_f), \mathbf{e}_B(t_f), \mathbf{i}_B(t_f), \mathbf{\Omega}_B(t_f), \mathbf{\omega}_B(t_f))$ , e ao mesmo tempo minimiza alguma função custo  $J$ .

A função dependente do tempo que descreve o estado  $\vec{x}_v^*(t)$  é a trajetória ótima para um dado problema. Sendo assim, todos os problemas de otimização de trajetória mencionados acima são realmente problemas de encontrar a lei de controle ótima  $\vec{U}^*$  do veículo espacial. Ambos  $t_o$  e  $t_f$  pode ser fixos ou livres, de modo que eles fazem parte do problema de otimização no segundo caso.

Considerando o caso de um propulsor que consome propelente, seu consumo pode ser otimizado usando a seguinte função custo

$$J_{mp} = \int_{t_o}^{t_f} \dot{m}_p(t) dt = m_p(t_f) - m_p(t_o)$$

sendo  $m_p$  a massa de propelente. Entretanto para otimização de trajetória de velas solares não faz sentido em considerar o consumo de propelente como uma das variáveis, já que tal propulsor não consome propelente. Sendo assim, é mais adequada para tal problema uma função custo que minimiza apenas o tempo de transferência  $T$ , que pode ser escrita como

$$J_T = \int_{t_o}^{t_f} dt = t_f - t_o = T$$

### 3.1.4 Formulação do problema em tempo discreto

Geralmente, os problemas do tipo  $RV$ ,  $FB$ , e  $TO$  não podem ser resolvidos analiticamente. Isto faz com que uma aproximação discreta do problema seja necessária, transformando a lei de controle do veículo espacial de contínua no tempo para discreta através de algum método numérico de discretização. Se o intervalo de tempo máximo de transferência  $[t_o, t_{max}]$  é dividido em  $n_{IT}$  elementos finitos  $t_o = \bar{t}_0, t_1 = \bar{t}_1, \dots; t_f = \bar{t}_f \leq \bar{t}_{n_{IT}} = t_{max}$ , sendo  $t_f$  o instante de encontro com o alvo, e  $\bar{\bar{U}}: \{\bar{t}_0, \dots; \bar{t}_{n_{IT}}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$  é a lei de controle discreta do veículo espacial, a solução ótima do problema aproximado é  $n_{IT}$ -dimensional pertencente a um subespaço  $n_{uf}$ -dimensional, que geralmente ainda é um espaço de muitas dimensões. O problema de otimização aproximada da trajetória é portanto, encontrar o controle ótimo do veículo espacial em função do tempo  $\bar{\bar{u}}^*(t) \in \mathbb{R}^{n_{IT}}$ , que leva o veículo a seguir a trajetória ótima  $\bar{\bar{x}}_v^*(t)$ . Deve-se notar que apenas o controle é discretizado. A trajetória permanece contínua. Através de discretização, o problema de encontrar  $\bar{\bar{U}}^*$  como uma função ótima no espaço infinito-dimensional é reduzido ao problema de encontrar a lei de controle ótima  $\bar{\bar{u}}^*(t)$  em um espaço de parâmetros de dimensão finita. O problema discreto de Rendezvous ( $\overline{RV}$ ) pode ser definido como a seguir:

Problema de Rendezvous ( $\overline{RV}$ ) a partir da perspectiva da teoria de controle ótimo considerando a discretização da lei de controle:

Encontrar uma lei de controle em função do tempo  $\vec{u}(\bar{t})$  ( $\bar{t} \in \{\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{f-1}\}$ ), capaz de levar os estados  $\vec{x}_v(\bar{t}) = (\vec{r}_v(\bar{t}), \dot{\vec{r}}_v(\bar{t}))$  de um veículo espacial do seu valor inicial  $\vec{x}_v(\bar{t}_0)$  para o estado  $\vec{x}_B(\bar{t})$  do corpo alvo, ao longo de uma trajetória que obedece a restrição dinâmica  $\dot{\vec{x}}_v(\bar{t}) = \mathbf{G}(\vec{x}_v(\bar{t}), \vec{u}_v(\bar{t}))$  e a restrição imposta pelo alvo  $\vec{x}_v(\bar{t}_f) = \vec{x}_B(\bar{t}_f)$ , e ao mesmo tempo minimiza alguma função custo  $J$ .

Os problemas discretos para os casos de interceptação ( $\overline{FB}$ ) e de interceptação orbital ( $\overline{TO}$ ) podem ser declarados de forma semelhante ao problema  $\overline{RV}$ . A função de estado resultante  $\vec{x}_v^*(\bar{t})$  é a trajetória ótima para o dado problema. Sendo assim, todos os três problemas de otimização de trajetória são realmente problemas de encontrar o controle ótimo em função do tempo  $\vec{u}^*(\bar{t})$ . As funções custo para o problema de otimização do consumo de propelente e para o problema de otimização do tempo de transferência podem ser definidos como anteriormente.

Deve-se notar que a formulação aqui apresentada tem caráter geral para o problema de otimização da trajetória de veículos espaciais. Nos capítulos seguintes serão apresentados: a forma de aplicação da teoria apresentada nesse capítulo ao problema proposto nesse trabalho; assim como, os algoritmos de otimização utilizados para resolverem tal problema.

## 4 ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO

Com a finalidade de otimizar a trajetória da vela solar plana considerando as equações de movimento e as simplificações apresentadas no Capítulo 2, serão usadas abordagens mono-objetivo e multi-objetivo. Na primeira abordagem, será realizado um estudo comparativo entre versões do algoritmo da Otimização Extrema Generalizada (GEO – Generalized Extremal Optimization) com codificação real e o algoritmo da Programação Quadrática Sequencial (SQP – Sequential Quadratic Programming). Na abordagem multi-objetivo, o algoritmo M-GEO<sub>real</sub> será usado para atacar o problema. As principais características desses métodos serão apresentadas neste capítulo.

### 4.1 GEO canônico

Desenvolvido por De Sousa, *et al.* (2003), as primeiras versões do algoritmo GEO tem como objetivo aplicar o conceito da Criticalidade Auto-Organizada (SOC – Self Organized Criticality) a um processo de busca por ótimos globais de problemas dos mais variados tipos. Além disso, buscou-se características desejáveis em um método de otimização, tais como: fácil implementação, capaz de abordar problemas de otimização que possuam um espaço de projeto complexo, que pode ser não convexo, disjunto, apresente múltiplos mínimos e não-linearidades na função-objetivo e nas restrições.

#### 4.1.1 Criticalidade auto-organizada

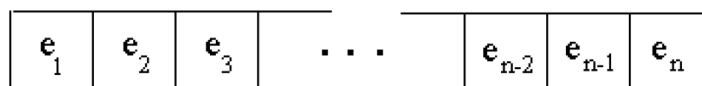
Proposta inicialmente para explicar a origem do ruído  $1/f$  em sistemas físicos (BAK *et al.*, 1987), a teoria da criticalidade auto-organizada (Self-Organized Criticality – SOC) vem sendo largamente usada nos últimos anos para explicar o comportamento de sistemas complexos em diferentes campos do conhecimento, como em geologia, economia e biologia (BAK, 1996). A teoria de SOC propõe que sistemas complexos que possuem muitos elementos que interagem entre si, evoluem naturalmente para um estado crítico onde uma pequena mudança em um deles gera “avalanches” que podem atingir qualquer

dos outros elementos que fazem parte do sistema. A distribuição de probabilidade dos tamanhos  $T_a$  dessas avalanches é descrita por uma lei de potência na forma:

$$P(T_a) = T_a^{-\tau} \quad (4.1)$$

onde  $\tau$  é um parâmetro positivo. Ou seja, a probabilidade de ocorrerem pequenas avalanches é maior. Entretanto, avalanches tão grandes quanto o sistema podem ocorrer com probabilidade não desprezível. Para mostrar que a teoria SOC poderia explicar características observáveis em ecossistemas naturais, Bak e Sneppen (1993) desenvolveram um modelo simplificado de um ecossistema onde espécies são colocadas lado a lado com condições de contorno periódicas, como apresentado na Figura 4.1.

#### Ecossistema composto de n espécies



↳ Cada lacuna representa uma espécie

Figura 4.1 – População de espécies no modelo evolutivo de Bak e Sneppen (1993).

Na população, a vizinhança de cada espécie é composta pelas duas espécies que a margeiam, e a condição de contorno periódica implica que  $e_1$  é vizinha de  $e_n$ . Para cada espécie é atribuído aleatoriamente, com distribuição uniforme, um índice de adaptabilidade no intervalo  $[0,1]$ . A espécie menos adaptada, aquela que tiver o menor índice de adaptabilidade, é então forçada a sofrer uma mutação, ou seja, um novo índice de adaptabilidade é atribuído à mesma, também de forma aleatória. A mudança no índice de adaptabilidade da espécie menos adaptada significa para suas vizinhas que estas terão que se adaptar a um novo competidor local e assim também serão forçadas a sofrer mutação, mesmo que seus índices de adaptabilidade sejam altos. Após algumas



iterações, a população evolui para um estado crítico onde todas as espécies apresentam um índice de adaptabilidade acima de um certo valor, denominado valor crítico. A partir deste momento, a dinâmica do sistema faz com que, eventualmente, o índice de adaptabilidade de uma quantidade de espécies caia para valores abaixo do patamar crítico, em forma de “avalanches” que podem atingir todas as espécies. Na Figura 4.2 é apresentada uma “fotografia” de uma avalanche em andamento.

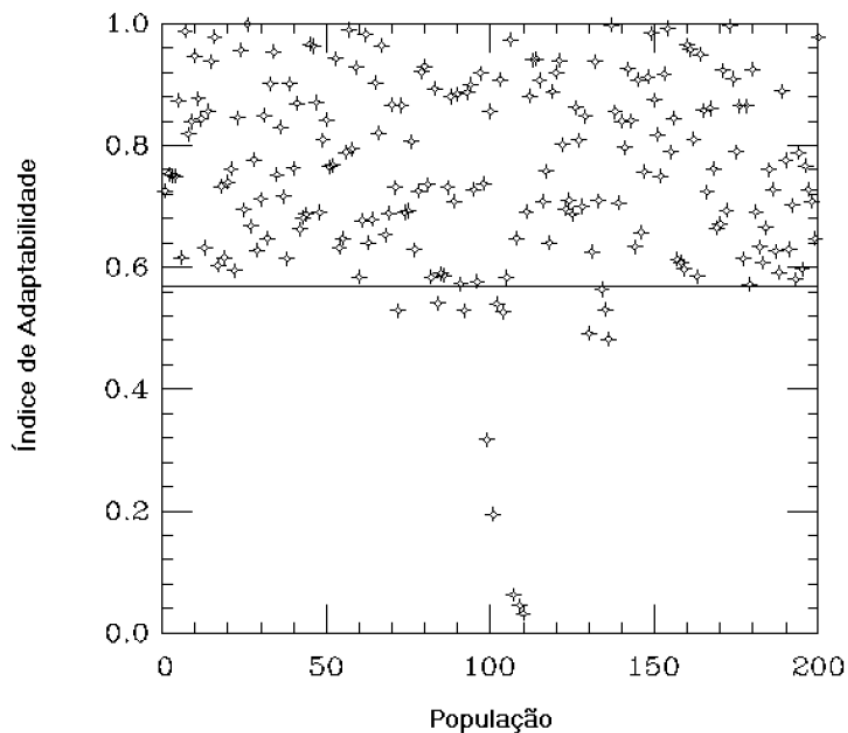


Figura 4.2 – “Fotografia” de uma avalanche na população de espécies do modelo unidimensional de Bak-Sneppen  
Fonte: Bak e Boettcher, 1997.

Como as espécies que estão abaixo do nível crítico são mais ativas, ou seja, têm mais probabilidade de sofrer mutação, o sistema tende sempre a voltar para o estado crítico e assim avalanches de menor tamanho ocorrem mais freqüentemente que avalanches grandes. De fato, a distribuição da ocorrência de avalanches de um dado tamanho  $s$  segue também uma lei de potência na forma da Equação 4.1. Um método de otimização baseado no modelo de Bak-

Sneppen, com uma busca dinâmica que apresente características SOC, possibilitaria o aparecimento de soluções ótimas rapidamente, sistematicamente modificando as espécies menos adaptadas da população, ao mesmo tempo em que poderia escapar de mínimos locais através de avalanches.

#### **4.1.2 Otimização Extrema**

Inspirados pelo modelo desenvolvido por Bak e Sneppen (1993), Boettcher e Percus (2001) propuseram uma meta-heurística para problemas difíceis de otimização combinatória denominada Otimização Extrema (Extremal Optimization – EO). Diferentemente da maneira como é visto um indivíduo em um algoritmo evolutivo convencional, onde cada um representa uma solução no espaço de projeto (EIBEN e SMITH, 2003), no algoritmo EO a população é formada pelas variáveis de projeto, e a cada uma delas atribuído um índice de adaptabilidade. Como comentado por Boettcher e Percus (2001), para determinados problemas este procedimento pode se mostrar ambíguo, ou mesmo impossível.

#### **4.1.3 Estratégia de busca do algoritmo GEO**

O algoritmo GEO foi desenvolvido originalmente com o intuito de generalizar o algoritmo EO (DE SOUSA e RAMOS, 2002, DE SOUSA, 2003, DE SOUSA *et al.*; 2003, DE SOUSA *et al.*; 2005a). Ou seja, ele torna a implementação do método EO independente do tipo de problema que está sendo abordado.

Analogamente ao modelo de Bak e Sneppen (1993), no algoritmo GEO,  $L$  espécies são dispostas lado a lado e a cada uma delas é atribuído um índice de adaptabilidade que determinará quais as espécies que estão mais propícias a sofrer mutação. No GEO a população de espécies é formada por uma seqüência (string) de bits, ou seja, cada bit representa uma espécie. As variáveis de projeto são codificadas pela seqüência de bits, que é similar a um

cromossomo binário em um Algoritmo Genético (GA – Genetic Algorithm) canônico, como apresentado na Figura 4.3. Entretanto, deve-se ressaltar que no GA a população é formada por várias strings, cada uma representando um indivíduo, enquanto no algoritmo GEO existe apenas uma string.

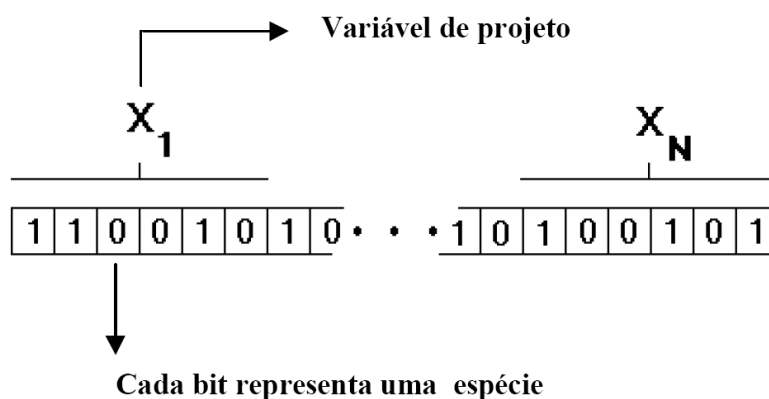


Figura 4.3 –  $N$  variáveis codificadas em seqüência binária, a variável representada por seis bits.

O funcionamento básico do GEO segue os seguintes passos:

- (i) Inicialize aleatoriamente uma seqüência de bits de comprimento  $L$ , onde cada bit pode assumir os valores 0 e 1;
- (ii) Divida a seqüência de  $L$  bits em  $N$  sub-sequências de comprimento  $l_j$  ( $j = 1, N$ ), como é apresentado na Figura 4.3. Cada sub-sequência codifica uma variável de projeto;
- (iii) Calcule o valor da função-objetivo para essa configuração de bits, e armazene como o melhor valor obtido até o momento ( $F_{best}$ ). Armazene, também, os valores das variáveis  $\vec{x}$  de projeto que geraram a solução  $F_{best}$  em um vetor  $\vec{x}_{best}$ ;
- (iv) Estabeleça para cada bit um valor de adaptação, através do seguinte processo: mude o valor de um bit (de 0 para 1 ou de 1 para 0), decodifique a variável associada a esse bit, calcule o novo valor da função-objetivo (esse valor indica o ganho ou perda no valor da função-objetivo, o qual determinará qual bit tem maior probabilidade de ser alterado) e armazene esse valor como  $F_i$  (com  $i = 1, L$ ).

Criando, dessa forma, um par  $(i, F_i)$ , onde  $i$  é o  $i$ -ésimo bit da seqüência. Compare o valor de  $F_{best}$  com o valor de  $F_i$ , se este for melhor substitua o valor de  $F_{best}$  pelo de  $F_i$  e o vetor  $\vec{x}_{best}$  pelos novos valores de  $\vec{x}_i$ ;

- (v) Ordene os pares de acordo com os seus valores de adaptação, do “rank”  $k = 1$ , para o menos adaptado, à  $k = L$ , para o mais adaptado. Vale salientar aqui que o bit menos adaptado é aquele que, ao se mudar seu valor, tenha o maior ganho ou menor perda no valor da função-objetivo. Portanto, em um problema de minimização, valores altos de  $F_i$  terão maior “rank”, enquanto que em problemas de maximização ocorre o oposto. Se ocorrer de dois ou mais bits apresentarem o mesmo valor para  $F_i$  eles são ordenados aleatoriamente com distribuição uniforme;
- (vi) Selecione com probabilidade igual a  $(k^- / L)$  um bit para sofrer mutação, sendo  $k^-$  um parâmetro de ajuste, com  $k^- \geq 0$ ;
- (vii) Teste um critério de parada, se ele for satisfeito o algoritmo retornará  $F_{best}$  e  $\vec{x}_{best}$ . Caso contrário, a nova seqüência de bits será definida como a seqüência corrente e será dada continuidade ao processo de busca.

O fluxograma do algoritmo GEO é apresentado na Figura 4.4.

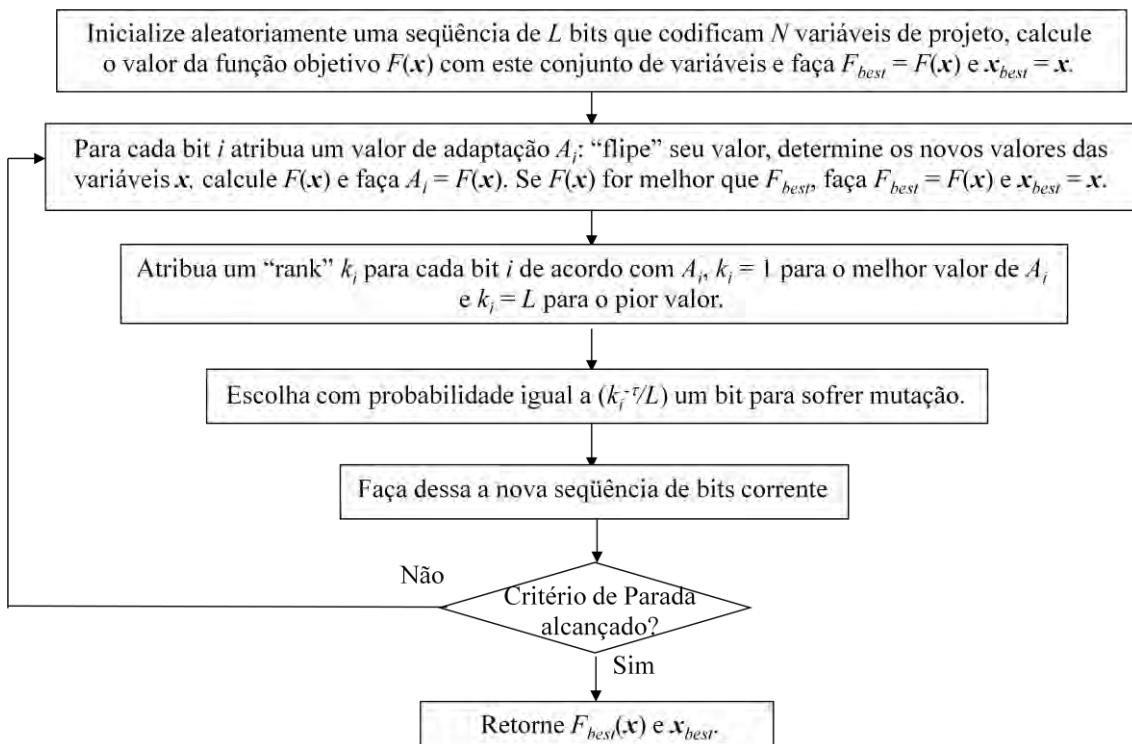


Figura 4.4 – Algoritmo GEO canônico.

## 4.2 GEO<sub>var</sub>

Em outra implementação do GEO, a cada iteração são modificados  $N$  bits, um por variável de projeto. Denominada GEO<sub>var</sub>, esta versão do GEO tem como objetivo acelerar o processo de modificação das variáveis com o intuito de obter o mínimo global com um número de menor de iterações.

O funcionamento do algoritmo GEO<sub>var</sub> é muito semelhante aquele apresentado pelo algoritmo GEO. O processo de busca inicia-se reproduzindo os três primeiros passos apresentados na seção anterior para o algoritmo GEO sem nenhuma alteração. As diferenças entre os dois algoritmos surgem a partir do passo (iv) em diante, sendo essas apresentadas a seguir:

- (iv) Faça  $j = 1$ ;
- (v) Estabeleça para cada bit da variável  $j$  um valor de adaptação, através do seguinte processo: mude o valor de cada bit, decodifique a variável  $j$  para esse novo valor do bit  $i$ , calcule o novo valor da

função-objetivo e armazene esse valor como  $F_i$  (com  $i = 1, l_j$ ). Criando, dessa forma, um par  $(i, F_i)$ , onde  $i$  é o  $i$ -ésimo bit da variável. Compare o valor de  $F_{best}$  com o valor de  $F_i$ , se este for melhor substitua o valor de  $F_{best}$  pelo de  $F_i$  e o vetor  $\vec{x}_{best}$  pelos novos valores de  $\vec{x}_i$ ;

- (vi) Ordene os pares de acordo com os seus valores de adaptação, do “rank”  $k = 1$ , para o menos adaptado, à  $k = l_j$ , para o mais adaptado;
- (vii) Selecione com probabilidade igual a  $(k^- / l_j)$  um bit para sofrer mutação, sendo  $\alpha$  um parâmetro de ajuste. Armazene a informação de qual bit foi escolhido, mas não realize a mutação. Incremente o valor de  $j$  e retorne ao passo (v) se  $j \leq N$ . Caso contrário, avance para o passo (viii);
- (viii) Faça a mutação de todos os bits escolhidos no passo (vii). Um para cada variável de busca. Teste um critério de parada, se ele for satisfeito o algoritmo retornará  $F_{best}$  e  $\vec{x}_{best}$ . Caso contrário, Retorne ao passo (iv).

O fluxograma do algoritmo  $GEO_{var}$  é apresentado na Figura 4.5.

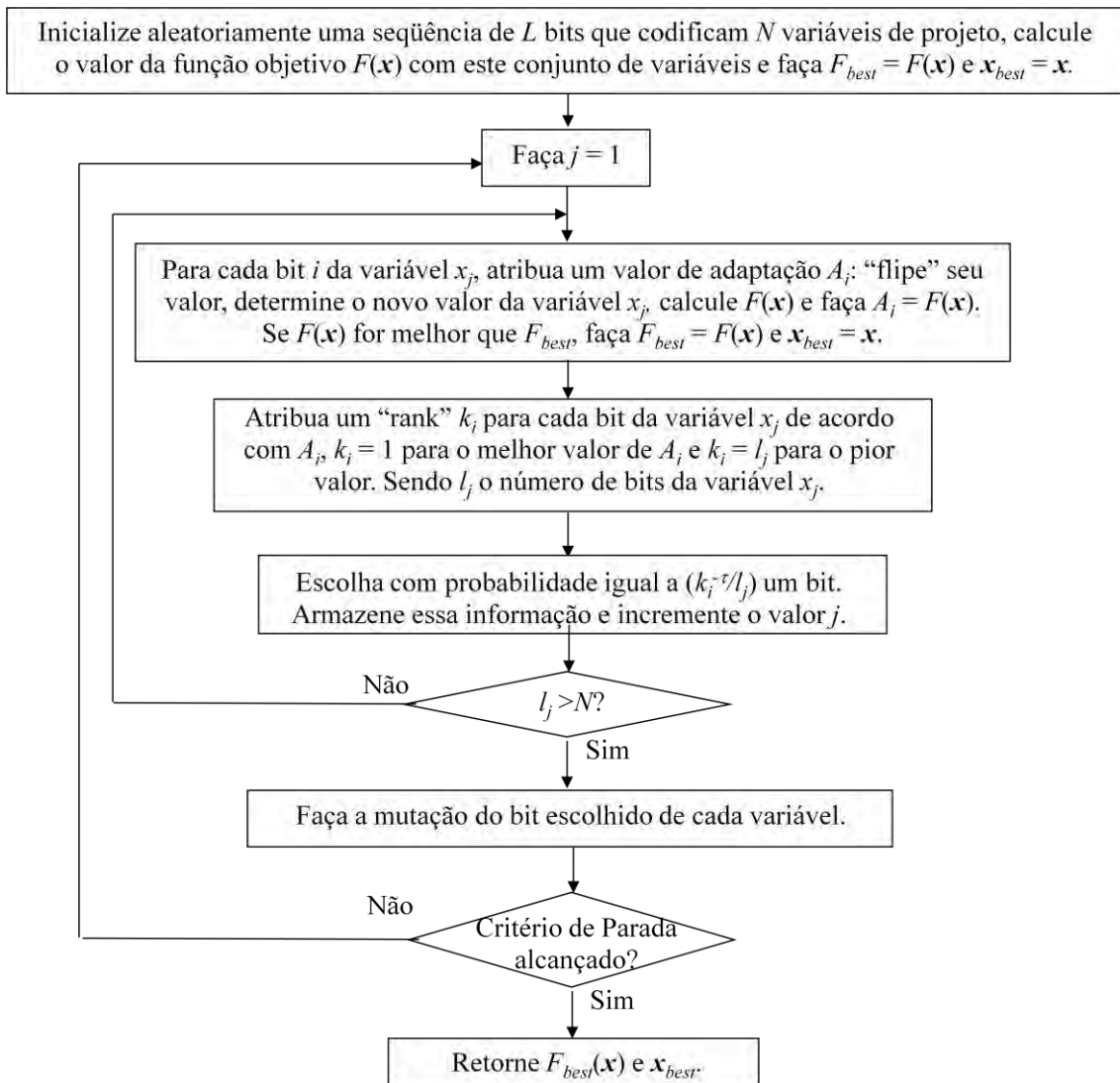


Figura 4.5 – Algoritmo GEO<sub>var</sub>.

### 4.3 GEO com codificação real – GEO<sub>real</sub>

Apesar do algoritmo GEO demonstrar ser uma ferramenta de otimização competitiva, ele apresenta uma limitação no que diz respeito à resolução. Uma vez que ele utiliza codificação binária, sempre será necessário estipular a resolução da busca, sendo definida pelo número de bits atribuído às variáveis. Em outras palavras a codificação binária estipula um conjunto de soluções quantizadas. Ao “flipar” o bit menos significativo implica em saltar de um valor da variável para outro, sendo que os valores intermediários sejam impossíveis de serem testados. Isso pode fazer com que o algoritmo seja incapaz de

encontrar o mínimo global, se este não pertencer ao conjunto de soluções possíveis de serem testadas. Com o intuito de evitar essa limitação foram desenvolvidos duas versões do algoritmo GEO que, ao invés de usar bits para codificar as variáveis, trabalha-se diretamente com as variáveis reais.

#### 4.3.1 GEO<sub>real1</sub>

A primeira versão com variáveis reais, denominada GEO<sub>real1</sub>, tem como inspiração o funcionamento básico do algoritmo GEO. A principal mudança está na forma de alterar o valor das variáveis. No algoritmo GEO isso é feito mudando o valor dos bits de 0 para 1, ou 1 para 0, enquanto que no GEO<sub>real</sub> essa mudança é feita através de uma perturbação na variável de projeto.

O algoritmo GEO<sub>real1</sub> segue os seguintes passos:

- (i) Inicialize aleatoriamente uma população de  $N$  espécies, onde cada espécie representa uma variável de projeto. Neste caso, não é necessário codificar as  $N$  variáveis  $\vec{x}$ , pois as espécies já assumem o valor das variáveis;
- (ii) Calcule o valor da função-objetivo  $F(\vec{x})$ , faça  $F_{best} = F(\vec{x})$  e  $\vec{x}_{best} = \vec{x}$ , sendo  $F_{best}$  o melhor valor da função-objetivo encontrado e  $\vec{x}_{best}$  o vetor que gera o valor de  $F_{best}$ , ou seja, a melhor solução encontrada;
- (iii) Faça  $m = 1$ ;
- (iv) Armazene o valor da variável  $x_m$  e crie uma nova solução alterando o valor de  $x_m$  no vetor  $\vec{x}$  através da equação

$$x'_m = x_m + N(0, \sigma) \quad (4.2)$$

onde  $x'_m$  é o novo valor da  $m$ -ésima variável e  $N(0, \sigma)$  é um número aleatório com distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão  $\sigma$ . Deve-se notar que o valor de  $\sigma$  pode assumir diferentes valores para as várias variáveis;



- (v) Calcule a adaptabilidade  $F_m$ , ou seja, o valor da função-objetivo para a nova solução, e crie o par  $(x'_m, F_m)$ . Faça  $F_{best} = F(\vec{x})$  e  $\vec{x}_{best} = \vec{x}$ , se  $F(\vec{x})$  for melhor do que  $F_{best}$ , sendo que  $\vec{x}$  é o novo conjunto de variáveis após mudar a variável de índice  $m$  de acordo com a Equação 4.2. Armazene o valor de  $x'_m$ ;
- (vi) Retorne para variável  $x_m$  seu valor original armazenado no passo (iv), incremente o valor de  $m$  e retorne ao passo (iv) se  $m \leq N$ . Caso contrário, siga para o passo (vii);
- (vii) Ordene os pares  $(x'_m, F_m)$  de acordo com  $F_m$ , e atribua um “rank”  $k$ , onde a variável menos adaptada assume  $k = 1$  e a mais adaptada  $k = N$ ;
- (viii) Sorteie uma variável para sofrer mutação com probabilidade  $k^- / N$ . A variável selecionada terá seu valor substituído pelo valor  $x'_m$  armazenado no passo (v) para essa variável;
- (ix) Faça esse novo vetor  $\vec{x}$  ser o corrente;
- (x) Teste um critério de parada, se foi alcançado, retorne o  $F_{best}$  e  $\vec{x}_{best}$ . Caso contrário, retorne ao passo (iii) e continue a busca.

O fluxograma do algoritmo GEO<sub>real1</sub> é apresentado na Figura 4.6.

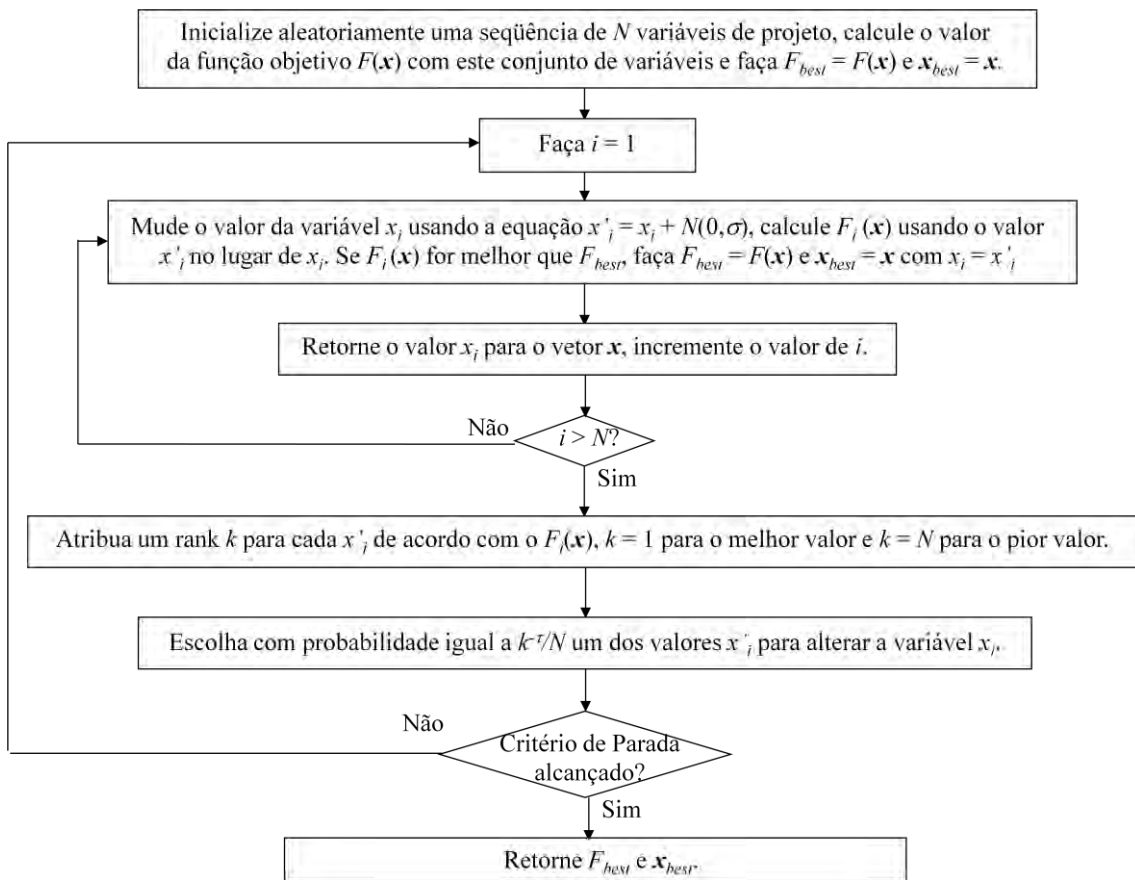


Figura 4.6 – Fluxograma do algoritmo  $GEO_{real1}$

#### 4.3.2 $GEO_{real2}$

Uma segunda versão com codificação real, chamada  $GEO_{real2}$ , foi inspirada na versão  $GEO_{var}$ . Portanto, ao contrário de, a cada iteração altera apenas uma variável, o algoritmo  $GEO_{real2}$  altera todas as variáveis. O algoritmo segue os seguintes passos:

- (i) Inicialize da mesma forma que a versão  $GEO_{real1}$ , sorteando aleatoriamente as variáveis de projeto e calculando a função-objetivo  $F(\vec{x})$ . Faça  $F_{best} = F(\vec{x})$  e  $\vec{x}_{best} = \vec{x}$ ;
- (ii) Defina  $P$  valores  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, P$ );
- (iii) Faça  $j = 1$ ;
- (iv) Armazene o valor da variável  $x_j$  e faça  $l = 1$ ;
- (v) Altere o valor da variável  $x_j$  de acordo com

$$x'_l = x_j + N(0, \sigma_l) \quad (4.3)$$

- (vi) Usando o valor  $x'_l$  na variável de índice  $j$  do vetor  $\vec{x}$ , calcule o valor da adaptabilidade  $F_l$  e crie um par  $(x'_l, F_l)$ . Faça  $F_{best} = F_l$  e  $\vec{x}_{best} = \vec{x}$ , se  $F_l$  for melhor do que  $F_{best}$ ;
- (vii) Retorne o valor original da variável  $x_j$  armazenado no passo (iv), incremente o valor de  $l$  e retorne ao passo (v) se  $l \leq P$ . Caso contrário, siga para o passo (viii);
- (viii) Ordene os pares  $(x'_l, F_l)$ , de acordo com  $F_l$  e atribua um “rank”  $k$  para cada par;
- (ix) Sorteie com probabilidade igual a  $k^- / P$  um dos valores de  $x'_l$  e armazene o valor sorteado. Incremente o valor de  $j$  e retorne para o passo (iv) se  $j \leq N$ . Caso contrário, siga para o passo (x);
- (x) Substitua todos os valores do vetor  $\vec{x}$  pelos respectivos valores selecionados e armazenados no passo (ix) e faça desse a nova solução corrente;
- (xi) Teste um critério de parada, se for satisfeito retorne  $F_{best}$  e  $\vec{x}_{best}$ . Caso contrário, continue a busca retornando ao passo (iii).

O fluxograma algoritmo  $GEO_{real2}$  é apresentado na Figura 4.7.

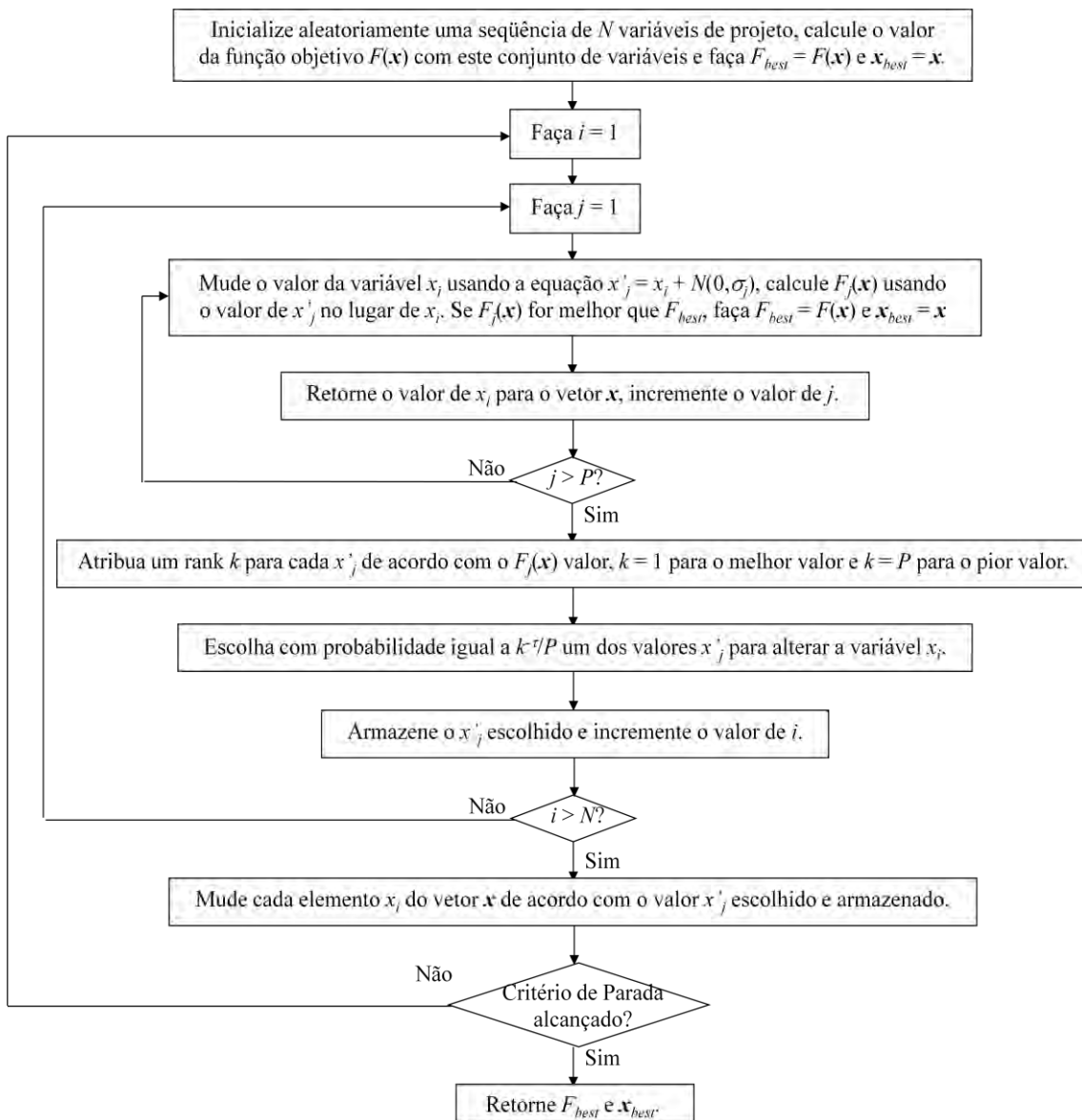


Figura 4.7 – Fluxograma do algoritmo  $GEO_{real2}$

Uma desvantagem apresentada pelos algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  é o aumento de parâmetros livres. No Caso do  $GEO_{real1}$ , o único parâmetro novo é o  $\sigma$ . No  $GEO_{real2}$ , existem  $P + 1$  novos parâmetros, sendo  $P$  desvios padrões e o próprio valor de  $P$ , ou seja, determinar quantos valores de desvio padrão serão usados. A intenção de se usar vários valores de desvio padrão para uma mesma variável é fazer com que o algoritmo seja capaz de fazer buscas próximas e distantes do valor da variável em uma única iteração. Portanto,

torna-se interessante selecionar tanto valores altos de  $\sigma$  quanto baixos. Para diminuir a quantidade de parâmetros livres foi criada a seguinte regra

$$\sigma_{i+1} = \frac{\sigma_i}{ft.i} \quad (4.4)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots (P - 1)$ . Dessa forma, basta definir  $\sigma_1$  e  $ft$  e todos os demais valores de  $\sigma$  estarão automaticamente definidos. Além disso, existiram tantos valores altos como baixos de  $\sigma$ . Resta definir agora, apenas três novos parâmetros livres  $\sigma_1$ ,  $P$  e  $ft$ .

#### 4.4 Problema de otimização multi-objetivo

Geralmente, em problemas multi-objetivos, não é possível obter apenas uma solução ótima. Isso se deve à natureza conflitante entre as funções-objetivo a serem abordadas. Quando isso acontece, soluções ótimas para uma função-objetivo apresentam-se ruins para as demais funções-objetivo. Para esse tipo de problema existe um conjunto de soluções, onde cada solução  $\vec{x}^* \in \mathcal{S}$  é tal que nenhuma outra solução possível  $\vec{x} \in \mathcal{S}$  (sendo  $\mathcal{S}$  o espaço de soluções possíveis) é capaz de melhorar uma função-objetivo sem piorar pelo menos uma das outras funções-objetivo, quando isso ocorre  $\vec{x}^*$  é chamado de uma solução não dominada (COELLO, 2004). A esse conjunto de soluções não dominadas é dado o nome de conjunto de Pareto que forma, no espaço objetivo, a fronteira de Pareto.

Um problema multi-objetivo de minimização pode ser formulado genericamente da seguinte forma:

$$\text{Min } \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \text{ onde } \vec{x} \in \Omega \quad (4.5)$$

Sujeito a

$$\begin{cases} c_{Ei}(\vec{x}) = 0, i = 1, \dots, m_E \\ c_{Ij}(\vec{x}) \geq 0, j = 1, \dots, m_I \end{cases} \quad (4.6)$$

sendo  $\Omega$  o espaço das variáveis,  $c_I(x)$  e  $c_E(x)$  são as funções que descrevem as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

Um problema multi-objetivo pode ser interpretado como um problema cuja solução é vetorial no espaço objetivo, pois cada solução está associada  $m$  valores, um valor para cada função objetivo. Sendo assim, pode-se dizer que um problema multi-objetivo é aquele que busca otimizar uma função-objetivo vetorial. Conseqüentemente, um problema mono-objetivo pode ser considerado um caso específico de um problema multi-objetivo, onde a função-objetivo possui apenas um valor. Ou seja, a função-objetivo para um problema mono-objetivo é escalar.

Uma forma clássica para resolução de problemas multi-objetivo é estipular pesos para cada função-objetivo do problema e transformar o problema multi-objetivo em mono-objetivo criando uma função-objetivo escalar formada da soma de cada função-objetivo do problema original ponderada pelos pesos estipulados. Ao otimizar a função escalar para conjuntos diferentes de pesos, obtêm-se os pontos da fronteira de Pareto. Além da soma ponderada, outros funcionais são também utilizados para se obter a função escalar. Eles são chamados métodos de agregação ou escalarização. Uma das desvantagens dos métodos de escalarização é a necessidade de executar um método de otimização para cada conjunto de pesos. Além disso, aqueles que possuem funcionais lineares, que são os mais comumente usados, apresentam ineficiência para obter fronteiras de Pareto com regiões não convexas.

Uma forma alternativa e que vem sendo cada vez mais utilizada para obter a fronteira de Pareto faz uso de algoritmo evolutivos (AE), tais como os algoritmos VEGA (SCHAFER, 1985), NSGAII (DEB *et al.*; 2002), MOGA com

combinado com teoria *fuzzy* (AGUILAR-LASSERRE et al. 2009), NSGAI com SBX *crossover* (STEUERNAGEL E POLANI, 2010), entre outros. Os AEs podem ser aplicados a problemas com alta dimensionalidade no espaço de busca e permitem que múltiplas soluções de compromisso sejam obtidas em uma única execução. Além disso, os AEs são capazes de gerar fronteiras de Pareto completas, mesmo aquelas que apresentam regiões não convexas.

A versão multi-objetivo do GEO, chamada M-GEO, foi desenvolvida (GALSKI, 2006) com o intuito de gerar a fronteira de Pareto para problemas multi-objetivos mantendo as principais características do algoritmo GEO (universalidade de aplicação e o menor número possível de parâmetros de ajuste).

#### **4.4.1 GEO<sub>real</sub> Multi-Objetivo**

Mais recentemente, foi desenvolvida uma versão multi-objetivo do algoritmo GEO<sub>real1</sub>. Chamada M-GEO<sub>real</sub>, ela tem como objetivo ser capaz de usar a mesma estratégia de busca da versão GEO<sub>real1</sub> aplicada a problemas multi-objetivo. Para tanto as seguintes modificações foram implementadas:

- i) Cada nova solução criada durante a busca é comparada com as pertencentes a um conjunto de soluções não-dominadas e é incorporada a ela caso seja uma nova solução não-dominada. Se dominar soluções contidas no conjunto armazenado anteriormente, estas serão excluídas do conjunto. Esse processo é realizado em uma sub-rotina denominada ParetoTest. O fluxograma dessa sub-rotina é apresentado na Fig. 4.8;
- ii) M-GEO<sub>real</sub> pode ser reiniciado durante o processo de busca. Assim como nas demais versões do algoritmo GEO, na versão M-GEO<sub>real</sub> a população inicial representa um único ponto no espaço de projeto e no espaço objetivo. Isso pode fazer com que uma população inicial localize-se próxima de um dos limites da fronteira de Pareto no espaço das funções-objetivo, atrasando, dessa forma, a difusão da

população por toda fronteira. Com o intuito de evitar isso, o algoritmo é reiniciado algumas vezes durante o processo. É importante notar que a população de bits pode ser reiniciada, mas o conjunto de soluções não dominadas é mantido em um arquivo separado e preservado durante todo o processo de busca do  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$ .

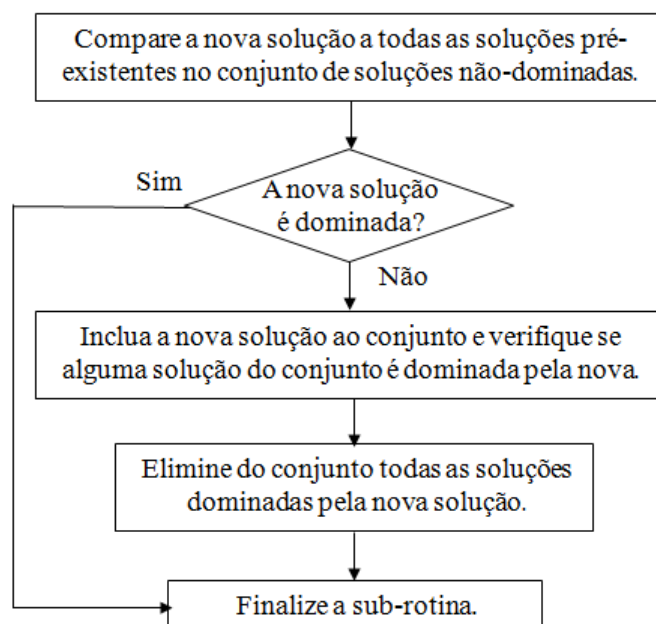


Figura 4.8 – Fluxograma da sub-rotina ParetoTest, responsável pela atualização do conjunto das soluções não-dominada.

Na Fig. 4.9 é apresentado um fluxograma do algoritmo  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$ . Nota-se que  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$  é muito similar ao  $\text{GEO}_{\text{real}1}$ , podendo-se obter o  $\text{GEO}_{\text{real}1}$  a partir do  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$  apenas considerando  $M = 1$  (uma função-objetivo) e eliminando o processo de reinicialização da população. Além disso, alusões a “fronteira de Pareto” e “conjunto de Pareto” devem ser substituídas por “melhor  $F_{\text{best}}$ ” e “ $\vec{x}_{\text{best}}$ ”, respectivamente.



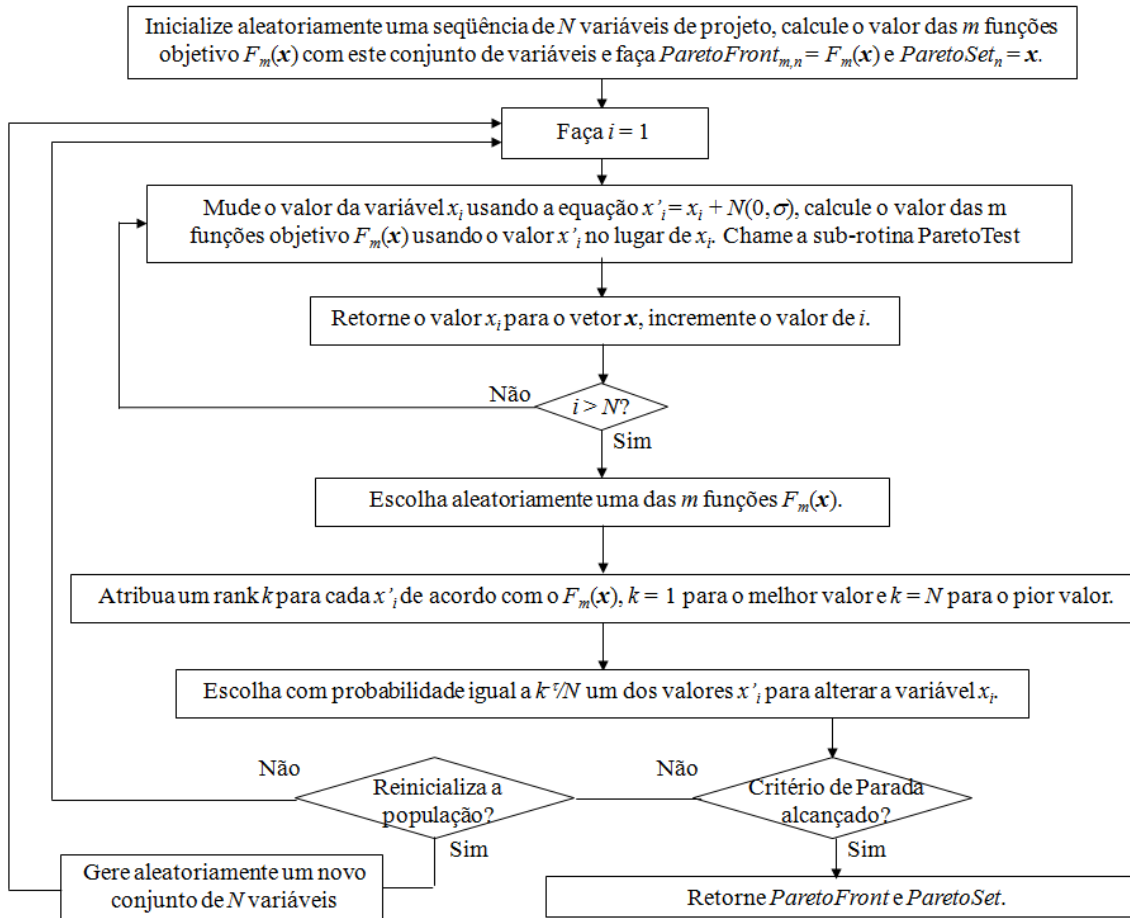


Figura 4.9 – Fluxograma do algoritmo M-GEO<sub>real</sub>.

#### 4.5 Programação Quadrática Sequencial

O algoritmo da Programação Quadrática Sequencial (SQP – Sequential Quadratic Programming) é capaz de abordar problemas de otimização não-lineares descritos da forma

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ l \leq x \leq u \\ c_I(x) \leq 0 \\ c_E(x) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

sendo que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c_I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_I}$  e  $c_E: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_E}$  são funções não-lineares suáveis, com a possibilidade de serem não-convexas.  $c_I(x)$  e  $c_E(x)$  são as funções que descrevem as restrições de desigualdade e igualdade,

respectivamente. Suavidade de função significa que ela tem pelo menos a primeira derivada. A inequação  $l \leq (x, c_I(x)) \leq u$  representa as restrições laterais de  $x$  e  $c_I(x)$ . Os limites inferiores e superiores  $l$  e  $u \in \mathbb{R}^{n+m_I}$ , respectivamente, devem satisfazer  $l < u$ . Além disso, o problema  $\mathcal{P}$  tem  $m_I \geq 0$  restrições não-lineares de desigualdade e  $m_E \geq 0$  de igualdade.

A solução do problema  $\mathcal{P}$  é um vetor  $\vec{x}^*$  de  $n$  componentes, que seja viável, ou seja, que satisfaça todas as restrições de  $\mathcal{P}$ . Além disso, que  $f(\vec{x}^*)$  seja um valor melhor do que  $f(\vec{x})$ , sendo  $\vec{x}$  qualquer outra solução viável de  $\mathcal{P}$ .

As condições de optimalidade para um mínimo local do problema  $\mathcal{P}$  são dadas pelas condições Karush–Kuhn–Tucker (KKT) que no mínimo local  $(\vec{x}, \lambda, \mu)$  satisfazem (ZHANG et al. 2010)

$$\nabla J(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m_E} \lambda_i \nabla c_{Ei}(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m_I} \mu_j \nabla c_{Ij}(\vec{x}) = 0; \quad (4.8)$$

$$c_{Ei}(\vec{x}) = 0, i = 1, \dots, m_E; \quad (4.9)$$

$$c_{Ij}(\vec{x}) \geq 0, \mu_j \geq 0, \mu_j \nabla c_{Ij}(\vec{x}) = 0, j = 1, \dots, m_I; \quad (4.10)$$

sendo  $\nabla$  a notação para gradiente em relação a  $\vec{x}$  e  $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$  e  $\mu^T = (\mu_1, \dots, \mu_{m_2})$ .

As condições KKT são as condições necessárias de primeira ordem para que uma solução em programação não-linear seja ótima. A abordagem KKT, ao permitir a inclusão de restrições de desigualdade, generaliza o método dos multiplicadores de Lagrange, que permite apenas restrições de igualdade, para programação não-linear. O sistema de equações correspondentes às condições KKT geralmente não é resolvido diretamente, exceto nos poucos casos especiais, onde soluções podem ser derivadas analiticamente. Em geral, muitos algoritmos de otimização podem ser empregados como os métodos para resolver numericamente o sistema de equações KKT (BOYD E VANDENBERGHE, 2004).

o mínimo local que satisfaça o sistema de equações 4.8,4.9 e 4.10 pode ser encontrado usando o método SQP. Nesse método, a função-objetivo é aproximada no  $k$ -ésimo passo por uma função quadrática, enquanto as restrições são linearmente aproximadas ao redor do  $k$ -ésimo mínimo local estimado do vetor de estado  $\vec{x}(k)$  e este é iterativamente atualizado adicionando-se um vetor de busca direcional  $\vec{d}$  a  $\vec{x}(k)$  como é mostrado na equação a seguir

$$\vec{x}(k+1) = \vec{x}(k) + \vec{d} \quad (4.11)$$

sendo que  $\vec{d}$  é encontrado minimizando

$$\nabla J^T(\vec{x}(k))\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{d}^T B(k)\vec{d} \quad (4.12)$$

sujeito às condições

$$c_{Ei}(\vec{x}(k)) + c_{Ei}^T(\vec{x}(k))\vec{d} = 0, i = 1, \dots, m_E; \quad (4.13)$$

$$c_{Ij}(\vec{x}(k)) + c_{Ij}^T(\vec{x}(k))\vec{d} = 0, j = 1, \dots, m_I; \quad (4.14)$$

sendo  $B(k)$  a matriz  $N \times N$  definida positiva da  $k$ -ésima aproximação da Hessiana da Lagrangiana

$$L(\vec{x}, \lambda, \mu) = J(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i c_{Ei}(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j c_{Ij}(\vec{x}) \quad (4.15)$$

Mais detalhes sobre esse método podem ser encontrados no trabalho de Betts e Huffman (1993).



## 5 TESTES DE DESEMPENHO DO M-GEO<sub>real</sub>

Nesse capítulo, o desempenho do algoritmo M-GEO<sub>real</sub> foi comparado ao desempenho apresentado pelo algoritmo M-GEO (GALSKI, 2006) e pelo algoritmo NSGAI (DEB *et al.*; 2002). Esse teste de desempenho foi realizado usando 3 funções-teste intituladas FTM<sub>4</sub> (GALSKI, 2006), TNK e ZDT1 (MAINENTI-LOPES *et al.*; 2009). Os algoritmos M-GEO e M-GEO<sub>real</sub> foram usados para abordar as 3 funções, sendo que os dados referentes a função-teste FMT<sub>4</sub> foram obtidos do trabalho de Galski (2006) e referente as funções-teste TNK e ZDT1 do trabalho de Mainenti-Lopes *et al.* (2009). A comparação com o algoritmo NSGAI foi realizada apenas para as funções-teste TNK e ZDT1. Na Tabela 5.1 são apresentadas as principais características de cada função-teste.

Para determinar os melhores valores dos parâmetros livres a serem usados para cada função-teste foi usada a seguinte metodologia:

1. Fixa-se arbitrariamente valores para todos os parâmetros livres, exceto para o parâmetro  $\tau$ . Os valores iniciais dos parâmetros fixos foram:  $\sigma = 10\%$  do intervalo das variáveis e  $rt = 1$ . Os valores de  $\tau$  testado foram  $\{1,2,3, \dots, 10\}$ .
2. Para se determinar o valor do parâmetro que retornou a melhor fronteira otimizada, foi verificado qual fronteira apresentou o maior número de soluções não-dominadas pelas outras fronteiras.
3. Uma vez determinado o melhor valor de  $\tau$ , fixa-se esse valor e faz-se o mesmo processo de escolha realizado anteriormente para o parâmetro  $\sigma$ . Os valores de  $\sigma$  testados foram  $\{1\%, 5\%, 10\%, 20\%, 30\%, \dots, 100\%\}$ .
4. Uma vez determinado o melhor valor de  $\tau$  e de  $\sigma$ , fixa-se esses valores e faz-se o mesmo processo de escolha para o parâmetro  $rt$ . Os valores de  $rt$  testado foram  $\{1,5,10,20\}$ .

Tabela 5.1 – Características das funções-teste usadas para verificar o desempenho do M-GEO<sub>real</sub>.

<b>Nome</b>	<b>Função</b>	<b>Restrições</b>
FTM <sub>4</sub>	$F_1 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2$ $F_2 = 9x_1 - (x_2 - 1)^2$	$x_1^2 + x_2^2 - 225 \leq 0$ $x_1 - 3x_2 + 10 \leq 0$ $-20 \leq (x_1, x_2) \leq 20$
ZDT1	$F_1 = x_1$ $F_2 = g \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{x_1}{g}} \right)$ <p>sendo</p> $g = 1 + \frac{9}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i$ $N = 30$	$0 \leq x_i \leq 1$ <p>sendo</p> $i = 1, 2, 3, \dots, N$
TNK	$F_1 = x_1$ $F_2 = x_2$	$C_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 -$ $-0,1 \cos \left( 16 \arctan \frac{x_1}{x_2} \right) \geq 0$ $C_2(\vec{x}) = (x_1 - 0,5)^2 +$ $+(x_2 - 0,5)^2 \leq 0,5$ $0 \leq x_1 \leq \pi$ $0 \leq x_2 \leq \pi$

Os valores selecionados dos parâmetros livres foram, para cada função-teste, os apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Valores dos parâmetros livres do algoritmo M-GEO<sub>real</sub> usados para cada uma das funções-teste.

<b>Nome da função</b>	$\tau$	$\sigma$	$rt$
FTM <sub>4</sub>	3	10%	1
ZDT1	9	5%	1
TNK	3	5%	1

Com o intuito de garantir uma comparação adequada do algoritmo M-GEO<sub>real</sub> com os demais algoritmos, foi estipulado o número máximo de avaliações da função-objetivo igual àqueles dos trabalhos usados como comparação para comparação:  $5 \times 10^4$  para FTM<sub>4</sub> e  $10^5$  para ZDT1 e TNK.

Na Figura 5.1 são apresentadas as melhores fronteiras obtidas pelos algoritmos de otimização M-GEO (em vermelho) e M-GEO<sub>real</sub> (em azul) ao abordar a função-teste FTM<sub>4</sub>.

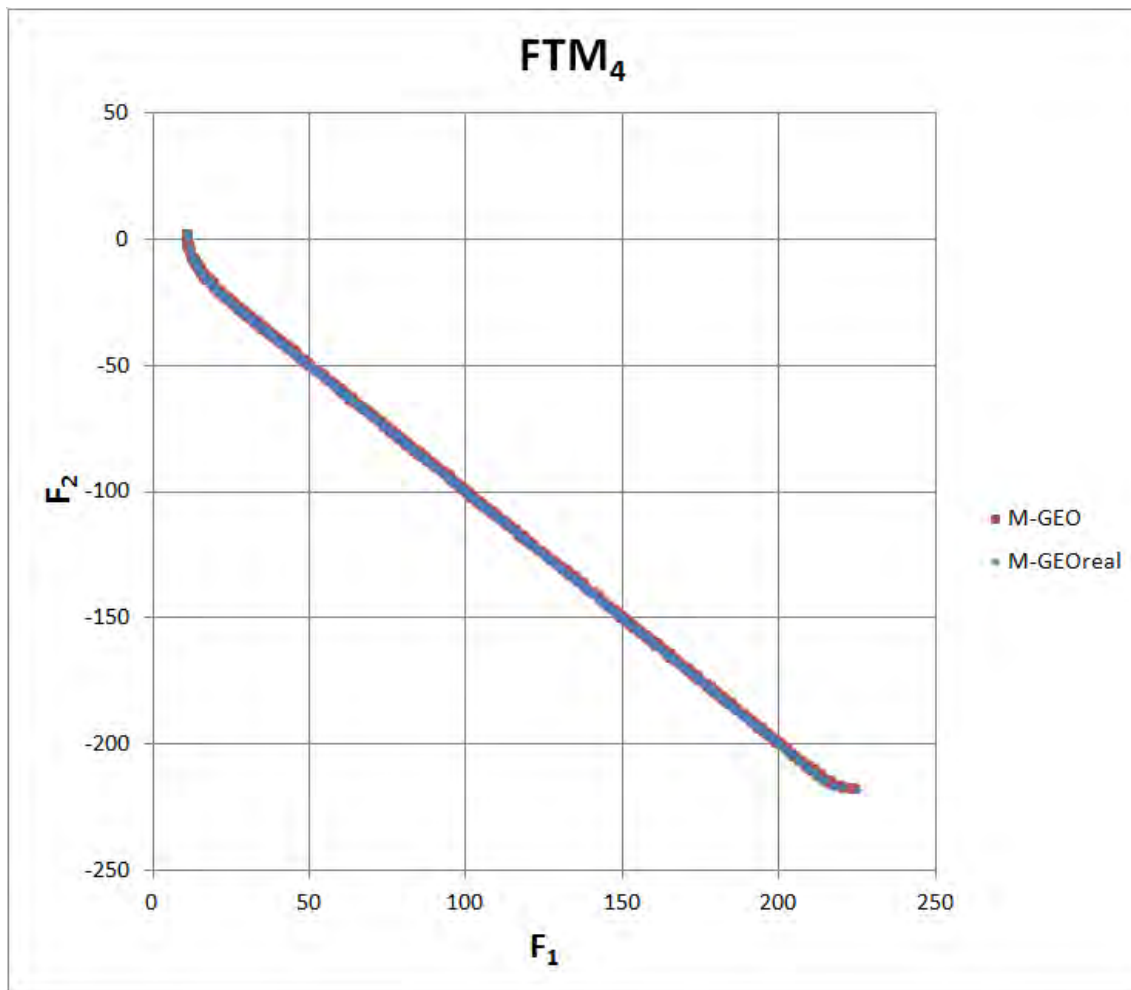


Figura 5.1 – Fronteiras otimizadas obtidas pelos algoritmos M-GEO (em vermelho) e M-GEO<sub>real</sub> (em azul) ao abordar a função-teste FTM<sub>4</sub>.

Na Figura 5.2 são apresentadas as melhores fronteiras obtidas pelos algoritmos de otimização NSGAI (em verde), M-GEO (em vermelho) e M-GEO<sub>real</sub> (em azul) ao abordar a função-teste ZDT1.



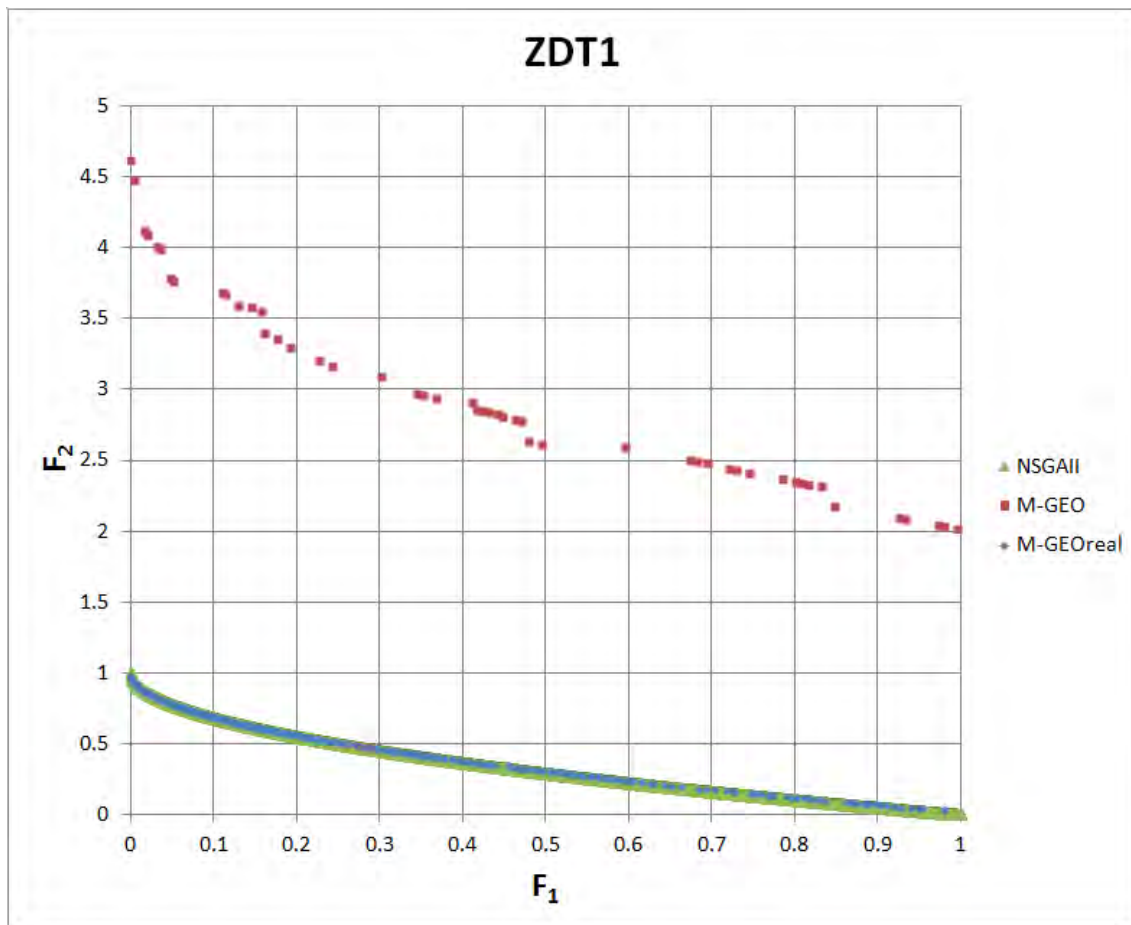


Figura 5.2 – Fronteiras otimizadas obtidas pelos algoritmos NSGAI (em verde), M-GEO (em vermelho) e M-GEO<sub>real</sub> (em azul) ao abordar a função-teste ZDT1.

Na Figura 5.3 são apresentadas as melhores fronteiras obtidas pelos algoritmos de otimização NSGAI (em verde), M-GEO (em vermelho) e M-GEO<sub>real</sub> (em azul) ao abordar a função-teste TNK.

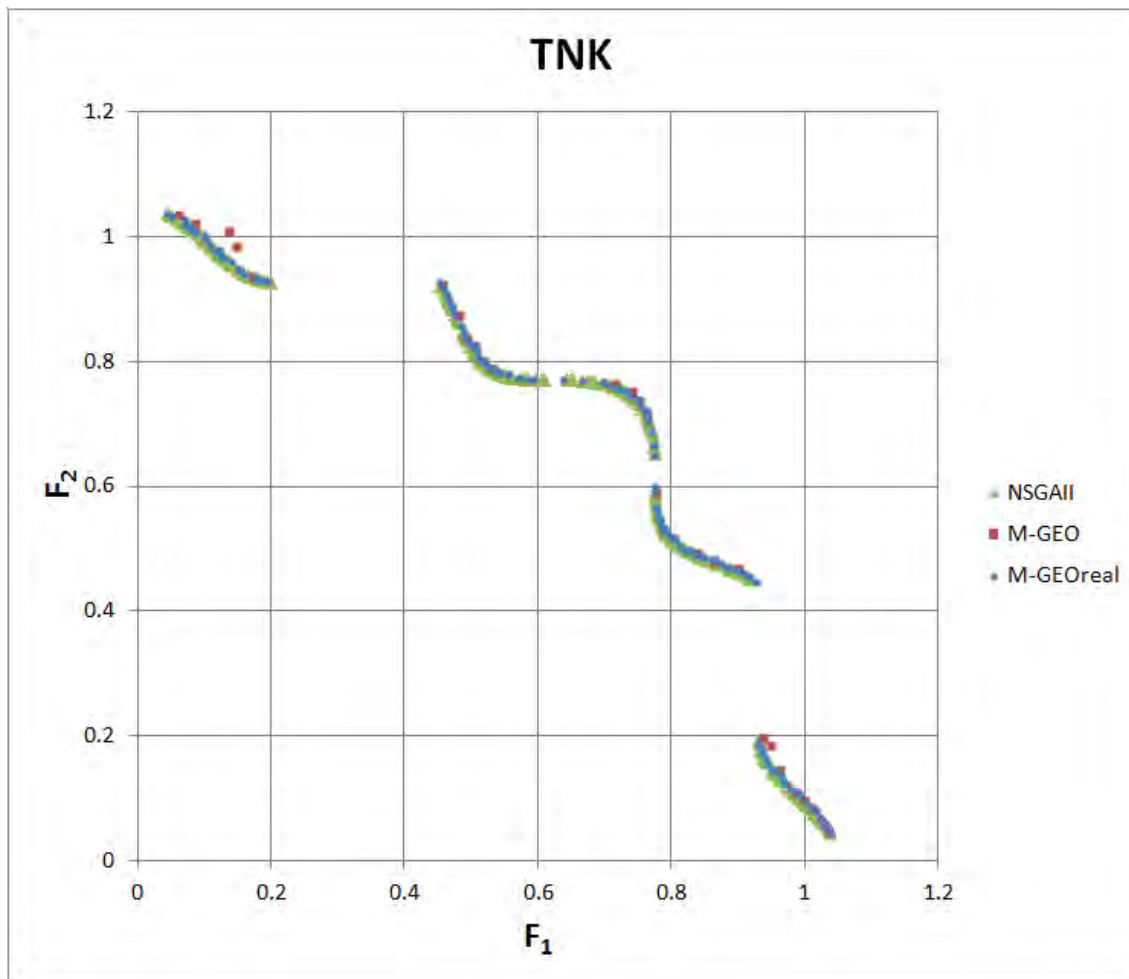


Figura 5.3 – Fronteiras otimizadas obtidas pelos algoritmos NSGAI (em verde), M-GEO (em vermelho) e M-GEO<sub>real</sub> (em azul) ao abordar a função-teste TNK.

Baseado nos gráficos apresentados das figuras 5.1, 5.2 e 5.3, pode-se observar que o M-GEO<sub>real</sub> mostrou-se um algoritmo competitivo, sendo capaz de retornar a fronteira de Pareto para todas as funções-teste usadas. Em uma comparação com o M-GEO, o algoritmo M-GEO<sub>real</sub> demonstrou igual desempenho ao abordar a função-teste FTM<sub>4</sub> e para as funções-teste ZDT1 e TNK apresentou melhor desempenho. Ao comparar com o algoritmo NSGAI, ambos foram capazes de retornar a Fronteira de Pareto. Entretanto, o NSGAI foi capaz de retornar um maior número de soluções, apresentando assim uma fronteira de Pareto mais completa.

Uma limitação do algoritmo  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$  foi identificada ao tentar usá-lo para atacar funções-teste, que possuem apenas uma variável, apresentadas no trabalho de Galski (2006). Sabendo que o  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$  gera por iteração um número de novas soluções igual ao número variáveis da função e escolhe uma dessas soluções para ser a solução corrente na próxima iteração, ao abordar funções que possuem apenas uma variável, o  $M\text{-GEO}_{\text{real}}$  gerará apenas uma nova solução e essa será escolhida para a próxima iteração. Portanto, o parâmetro  $\tau$  perde seu valor na escolha da nova solução corrente e o algoritmo fará meramente uma busca onde cada nova solução é gerada a partir de uma perturbação com distribuição gaussiana no valor da variável da solução anterior.



## 6 METODOLOGIA PROPOSTA

Nesse capítulo são apresentadas as diversas formas de abordagem do problema de trajetória ótima usando as várias versões do algoritmo GEO e o SQP. Essas várias abordagens diferem uma das outras em três aspectos: pela estratégia de controle da vela, pelo cálculo da função-objetivo e pelo algoritmo de otimização. Nos tópicos a seguir são apresentadas as características de cada um desses aspectos.

### 6.1 Estratégia de controle da vela solar

Para se otimizar a trajetória de uma vela solar plana é necessário definir a atitude da vela em função do tempo. Ou seja, deve-se encontrar  $\alpha^*(t)$ , sendo  $\alpha(t)$  a função que descreve a atitude da vela solar, em relação ao Sol, em função do tempo e  $\alpha^*$  é a denominação para solução ótima. Em geral, essa função pode assumir qualquer forma, desde que seu contradomínio permaneça confinado entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , que são os valores possíveis para o ângulo de atitude de uma vela solar em operação normal. Um exemplo de como essa função pode se comportar é apresentado graficamente na Fig 6.1 (linha contínua).

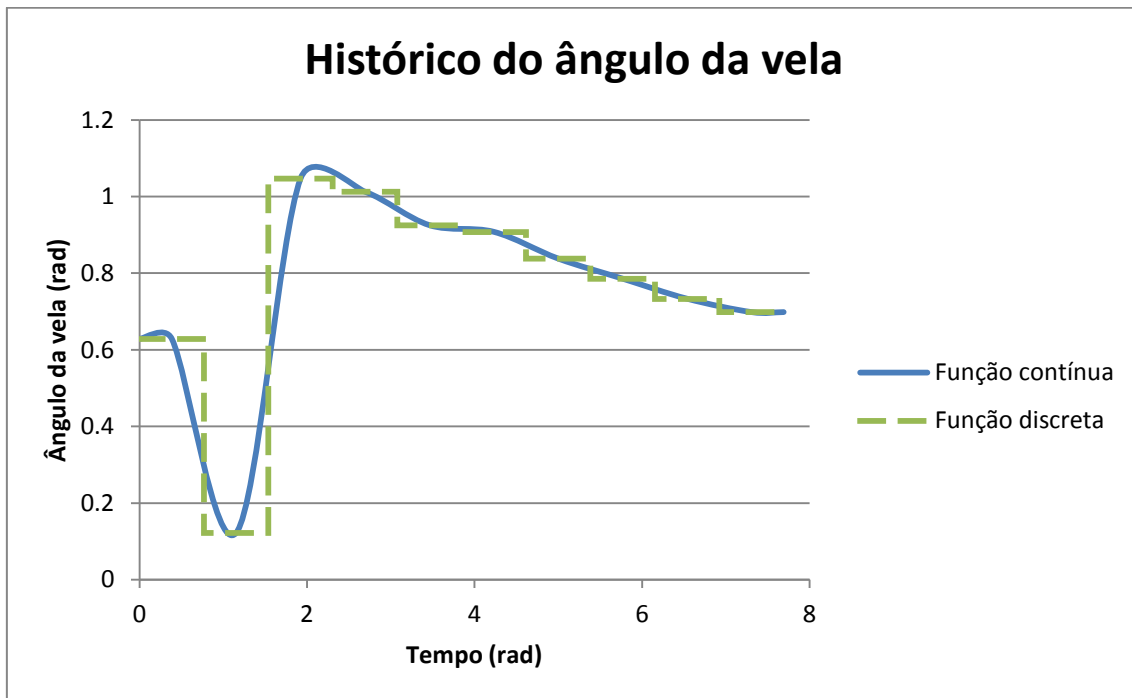


Figura 6.1 – Representação gráfica do histórico do ângulo da vela solar em relação ao Sol para os casos contínuo (linha contínua) e discretizado (linha tracejada).

A abordagem realizada nesse trabalho considera que a função  $\alpha(t)$  é transformada na soma de diversas funções degrau. Como é mostrado na Fig. 4.1 (linha tracejada). Dessa forma, para se determinar a função, deve-se definir o valor de cada degrau e o tempo de permanência naquele degrau. Ou seja, pode-se interpretar que a função  $\alpha(t)$  foi discretizada, podendo ser caracterizada pelos vetores  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{T}_{int}$ , que são os vetores do ângulo de atitude da vela em cada degrau da função  $\alpha(t)$  e do tempo que a vela permanece em cada um dos degraus. Portanto, o número de elementos  $N_m$  desses dois vetores devem ser iguais e representa o número máximo de manobras realizadas pela vela durante a transferência.

Duas estratégias serão utilizadas. Na primeira, foi considerado que os tempos de permanência em cada trecho (degrau) da função  $\alpha(t)$  sejam iguais. Ou seja, que todos os elementos do vetor  $\vec{T}_{int}$  são iguais. A outra considera a possibilidade de variação do tempo de integração nos diversos degraus. Ou

seja, os elementos do vetor  $\vec{T}_{int}$  podem assumir valores distintos. A primeira e a segunda estratégia serão denominadas Est1 e Est2, respectivamente, no decorrer desse documento.

## 6.2 Funções-objetivo

A definição da função-objetivo é crucial para o bom desempenho de um algoritmo ao abordar um problema, pois essa tarefa define o *landscape* da função a ser otimizada. Uma má escolha da função-objetivo pode impossibilitar por completo a obtenção do ótimo do problema físico. Devido a esse fato, foram testados cinco formas diferentes para construção da função-objetivo: três usando a estratégia Est1 e duas a Est2.

O problema de otimização mono-objetivo abordado nesse trabalho pode ser caracterizado da seguinte forma:

$$\text{Min } F = F_{obj(i)} \quad (6.1)$$

Sujeito as restrições

$$\begin{cases} -\pi/2 \leq \alpha_j \leq \pi/2 \\ 0,57 \leq T_{int}(j) \leq 1,2 \\ \text{com } j = 1, 2, 3, \dots, 10 \end{cases} \quad (6.2)$$

e a dinâmica da vela solar dada por

$$\dot{\vec{x}}_e = \begin{bmatrix} u \\ v/r \\ \frac{v^2}{r} - \frac{GM}{r^2} + (b_1 + b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \cdot a_c \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos \alpha \\ -\frac{uv}{r} + \sin \alpha (b_2 \cos \alpha + b_3) \cdot a_c \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

sendo  $F_{obj(i)}$  a função objetivo representa o tempo de transferência da vela solar mais o erro de encontro com a órbita de marte e o índice  $i$  indica uma das 5 formas usadas para representar essa grandeza física.

O problema de otimização multi-objetivo abordado nesse trabalho pode ser caracterizado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min } F_1 = F_{obj3} \\ \text{Min } F_2 = N_{manobras} \end{cases} \quad (6.4)$$

Sujeito as restrições

$$\begin{cases} -\pi/2 \leq \alpha_j \leq \pi/2 \\ 0,57 \leq T_{int}(j) \leq 1,2 \\ 1 \leq N_{manobras} \leq 20 \\ \text{com } j = 1, 2, 3, \dots, 10 \end{cases} \quad (6.5)$$

e a dinâmica da vela solar dada pela Eq. 6.3.

sendo  $N_{manobras}$  o número de manobras realizadas pela vela solar para alcançar a órbita de Marte.

A primeira função-objetivo ( $F_{obj1}$ ) testada foi baseada no trabalho de Zhang *et al.* (2009), que usou a seguinte equação como função-objetivo

$$F_{obj1} = k_1 \cdot T_{Tint} + k_2 \cdot (r_M - r(T_{Tint}))^2 + k_3 \cdot (u(T_{Tint}))^2 + k_4 \cdot (v_M - v(T_{Tint}))^2 \quad (6.6)$$

sendo  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  pesos,  $T_{Tint}$  o tempo total de integração (vale lembrar aqui que a estratégia utilizada considera que todos os elementos do vetor  $\vec{T}_{int}$  são iguais),  $r_M$  é o semi-eixo maior da órbita de Marte,  $r(T_{Tint})$  é a distância Sol-vela no instante de integração  $T_{Tint}$  e  $u(T_{Tint})$  e  $v(T_{Tint})$  são, respectivamente, as



componentes radial e tangencial da velocidade da vela no instante de integração  $T_{Tint}$ . Portanto, nesse caso o método de integração numérico é executado até o tempo máximo de integração ignorando se durante a integração a vela passou por Marte ou não.

A segunda função-objetivo ( $F_{Obj2}$ ) é uma pequena variação da  $F_{Obj1}$ . Enquanto a  $F_{Obj1}$  faz a integração da trajetória até  $T_{Tint}$  independentemente do que ocorreu entre o ponto inicial e final do trajeto, a  $F_{Obj2}$  considera a possibilidade de finalizar a integração no instante que a vela encontra Marte, dado uma precisão exigida. Portanto, toda indicação de  $T_{Tint}$  na equação da  $F_{Obj1}$  é trocada por  $T_{enc}$ , que é o instante de encontro com Marte no caso de ocorrer um encontro com Marte. Se isso não acontecer então  $T_{enc} = T_{Tint}$ .

Nas funções-objetivo  $F_{Obj1}$  e  $F_{Obj2}$ , os três últimos termos da equação podem ser interpretados como a soma de penalidades associadas à diferença da posição e velocidade da vela em relação às de Marte. Entretanto, mesmo no caso onde a vela encontra Marte (dentro de uma precisão assumida), essa penalidade permanece ativa para as funções-objetivo supracitadas. Essa característica pode modificar o *landscape* da função-objetivo de forma a prejudicar a busca pelo mínimo global do problema físico, e em alguns casos impossibilitar por completo sua determinação. Com o intuito de evitar esse tipo de problema, a terceira função-objetivo testada é descrita pela seguinte equação

$$F_{Obj3} = k_1 \cdot T_{enc} + \left\{ \begin{array}{l} k_2 \cdot (r_M - r(T_{enc}))^2 + k_3 \cdot (u(T_{enc}))^2 + \\ + k_4 \cdot (v_M - v(T_{enc}))^2 \text{ se } \Delta r > e_r \text{ ou } \Delta u > e_u \text{ ou } \Delta v > e_v \\ 0 \text{ se } \Delta r \leq e_r \text{ e } \Delta u \leq e_u \text{ e } \Delta v \leq e_v \end{array} \right. \quad (6.7)$$

sendo  $\Delta r$ ,  $\Delta u$  e  $\Delta v$  as diferenças entre os estados  $r$ ,  $u$  e  $v$  da vela e de Marte, respectivamente,  $e_r$ ,  $e_u$  e  $e_v$  os erros máximos de precisão admitidos para os estados  $r$ ,  $u$  e  $v$  ao se considerar um encontro da vela com Marte.

As próximas duas funções-objetivo testadas contemplam a possibilidade de variação do tempo de permanência em cada condição de atitude da vela. Nos casos apresentados anteriormente, o tempo total de transferência foi dividido em 10 partes iguais e para cada uma dessas partes é atribuído um valor de ângulo de atitude. Portanto, nesse caso, o algoritmo de otimização abordou um problema que possuía 11 variáveis de busca: os 10 valores de ângulo e o tempo entre uma manobra e outra. No segundo caso, o tempo total de transferência é dividido em 10 partes diferentes, ou seja, para cada valor do ângulo de atitude da vela existe associado um valor de tempo de permanência naquela atitude. Portanto, 20 variáveis devem ser otimizadas nesse caso: 10 valores de ângulo de atitude e 10 valores de tempo. Portanto, ocorre um aumento no número de variáveis do problema. Entretanto, a equação usada para se calcular o valor da função-objetivo permanece inalterada, uma vez que ela depende dos valores dos estados da vela no instante de encontro com Marte. A quarta função-objetivo ( $F_{obj4}$ ) foi baseada na função-objetivo  $F_{obj2}$ , pois o processo de integração é interrompido quando a vela alcança Marte, mas as penalidades continuam ativas mesmo nesse instante. Enquanto que a quinta função-objetivo ( $F_{obj5}$ ) foi baseada na função-objetivo  $F_{obj3}$ , pois, além de parar a integração quando alcança Marte, as penalidades tornam-se inativas nesse instante.

Os valores usados para os pesos nas  $F_{obj1}$ ,  $F_{obj2}$  e  $F_{obj3}$  foram obtidos a partir do trabalho de Zhang *et al.* (2009), transformados segundo a convenção de unidades adotadas na Seção 2.9 e normalizada para  $k_1 = 1$ . Sendo assim,  $k_2 = 1,4 \times 10^6$ ,  $k_3 = 7,5 \times 10^6$  e  $k_4 = 3,0 \times 10^6$ . Além disso, a Tabela 6.1 mostra os valores considerados para entrada na órbita de Marte.

Tabela 6.1 – Estados da órbita alvo e os erros associados a eles.

Símbolo	Nome do parâmetro	Valor	Unidades
$r_M$	Semi-eixo maior da órbita de Marte	1,523	UA
$u_M$	Velocidade radial da órbita de Marte	0	UA/rad
$v_M$	Velocidade transversal da órbita de Marte	0,810	-
$e_r$	Erro associado a coordenada $r$	0,002	UA
$e_u$	Erro associado a velocidade radial	0,002	UA/rad
$e_v$	Erro associado a velocidade transversal	0,002	-

### 6.3 Uso dos algoritmos de otimização

Nesse trabalho foram realizadas duas baterias de testes usando abordagem mono-objetivo e um estudo usando a abordagem multi-objetivo. Nessa seção serão discutidas as formas como os algoritmos de otimização foram usados para abordar o problema e quais informações pretende-se obter com cada bateria de testes.

A primeira bateria de testes contempla o uso das funções-objetivo  $F_{obj1}$ ,  $F_{obj2}$  e  $F_{obj3}$ , ou seja, as funções-objetivo que possuem penalidades ativas mesmo no caso de encontro com Marte. Nessa primeira bateria de testes espera-se obter uma avaliação comparativa entre os algoritmos SPQ,  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  reproduzindo com a máxima exatidão a metodologia usada por Zhang *et al.* (2010). Além disso, fazer uma avaliação do desempenho dos algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  ao se usar diferentes formas de cálculo da função-objetivo. Serão realizados os seguintes testes:

- SQP1 – usa o algoritmo SQP com a função-objetivo  $F_{obj1}$ ;
- GEO1F1 – usa o algoritmo  $GEO_{real1}$  com a função-objetivo  $F_{obj1}$ ;
- GEO2F1 – usa o algoritmo  $GEO_{real2}$  com a função-objetivo  $F_{obj1}$ ;
- GEO1F2 – usa o algoritmo  $GEO_{real1}$  com a função-objetivo  $F_{obj2}$ ;
- GEO2F2 – usa o algoritmo  $GEO_{real2}$  com a função-objetivo  $F_{obj2}$ ;

- GEO1F3 – usa o algoritmo  $GEO_{real1}$  com a função-objetivo  $F_{obj3}$ ;
- GEO2F3 – usa o algoritmo  $GEO_{real2}$  com a função-objetivo  $F_{obj3}$ ;

Na segunda bateria de testes, foram usados os algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  para otimizar as funções-objetivo  $F_{obj4}$  e  $F_{obj5}$ . Esses testes tiveram como objetivo determinar o efeito sobre o desempenho da vela ao se considerar diferentes valores de  $T_{int}$  para os vários ângulos de atitude ao longo da trajetória, assim como, determinar qual das duas versões do algoritmo GEO é mais adequado para abordar esse problema. A escolha de qual das duas estratégias usar para a abordagem multi-objetivo levou em consideração os resultados apresentados nessa bateria de testes. Assim como no caso anterior, os testes realizados nessa bateria foram:

- GEO1F4 – usa o algoritmo  $GEO_{real1}$  com a função-objetivo  $F_{obj4}$ ;
- GEO2F4 – usa o algoritmo  $GEO_{real2}$  com a função-objetivo  $F_{obj4}$ ;
- GEO1F5 – usa o algoritmo  $GEO_{real1}$  com a função-objetivo  $F_{obj5}$ ;
- GEO2F5 – usa o algoritmo  $GEO_{real2}$  com a função-objetivo  $F_{obj5}$ ;

Por fim, a terceira bateria de testes refere-se à abordagem multi-objetivo do problema. O primeiro teste realizado nessa bateria, foi o uso do algoritmo M- $GEO_{real1}$  para otimizar a função-objetivo  $F_{obj3}$  e o número de manobras.

Na Tabela 6.2 é apresentado um resumo das características de cada um dos testes mencionados acima.

Tabela 6.2 – Resumo das características de cada um dos testes usando abordagem mono-objetivo.

Teste	Estratégia de Controle - valores do tempo entre manobras:	Função- objetivo	Algoritmo
SQP1	Iguais	$F_{obj1}$	SQP
GEO1F1	Iguais	$F_{obj1}$	GEO <sub>real1</sub>
GEO2F1	Iguais	$F_{obj1}$	GEO <sub>real2</sub>
GEO1F2	Iguais	$F_{obj2}$	GEO <sub>real1</sub>
GEO2F2	Iguais	$F_{obj2}$	GEO <sub>real2</sub>
GEO1F3	Iguais	$F_{obj3}$	GEO <sub>real1</sub>
GEO2F3	Iguais	$F_{obj3}$	GEO <sub>real2</sub>
GEO1F4	Diferentes	$F_{obj4}$	GEO <sub>real1</sub>
GEO2F4	Diferentes	$F_{obj4}$	GEO <sub>real2</sub>
GEO1F5	Diferentes	$F_{obj5}$	GEO <sub>real1</sub>
GEO2F5	Diferentes	$F_{obj5}$	GEO <sub>real2</sub>



## 7 RESULTADOS

Nesse capítulo são apresentados os resultados referentes aos testes e comparações descritos no Capítulo 4. Foram realizados inicialmente testes com o intuito de definir os valores dos parâmetros livres do  $GEO_{real1}$ ,  $GEO_{real2}$  e  $M-GEO_{real1}$ , para então, realizar o estudo comparativo entre os vários métodos usados.

Foram usados dois computadores para obtenção dos resultados aqui apresentados. Os processadores apresentavam as seguintes características:

- AMD Athlon(tm) Dual Core, Processor 5400B, 2,81GHz, 1,93Gb de RAM
- Intel(R) Core(TM) 2 Duo CPU E7400, 2,79 GHz, 2 Gb de RAM

O tempo de processamento ao abordar tal problema com esses processadores foi da ordem de 8,3 h para cada  $10^5$  avaliações da função objetivo ao se usar os algoritmos  $GEO_{real1}$ ,  $GEO_{real2}$  e  $M-GEO_{real}$ . Esses algoritmos foram programados na linguagem C++ usando o compilador do Microsoft Visual C++ Express 2010. Enquanto para o SQP foi usado rotinas em MATLAB r2006a.

Com exceção do teste SQP1, foi usada a seguinte metodologia para definição dos parâmetros livres das várias versões do algoritmo GEO usadas:

1. Fixa arbitrariamente valores para todos os parâmetros livres, exceto para o parâmetro  $\tau$ . Os valores iniciais dos parâmetros fixos foram para:
  - a.  $GEO_{real1}$ :
    - i.  $\sigma = 10\%$  do intervalo das variáveis.
  - b.  $GEO_{real2}$ :
    - i.  $\sigma = 10\%$  do intervalo das variáveis;
    - ii.  $P = 3$ ;
    - iii.  $ft = 4$ .
2. Para diferentes valores de  $\tau$ , inicie 50 execuções independentes com  $10^4$  avaliações da função-objetivo cada e faça a média dos 50 valores de  $F_{best}$  obtidos. Os valores de  $\tau$  testado foram  $\{1,2,3, \dots, 10\}$ .
3. A partir da média de  $F_{best}$  em função de  $\tau$ , escolha o melhor  $\tau$ .

4. Fixa o valor de  $\tau$  baseado na escolha anterior e:
  - a. para  $\text{GEO}_{\text{real1}}$ , faça o mesmo processo de escolha realizado anteriormente para o parâmetro  $\sigma$ ;
  - b. no caso do algoritmo  $\text{GEO}_{\text{real2}}$ , o mesmo procedimento é usado para se determinar o valor do parâmetro  $\sigma_o$ .
5. Os valores de  $\sigma$  e  $\sigma_o$  testado foram  $\{10\%, 20\%, 30\%, \dots, 100\%\}$ .

## 7.1 Teste SQP1

Este teste refere-se à tentativa de reprodução dos resultados obtidos por Zhang *et al.* (2010). Para tanto, foram usados os parâmetros por eles apresentados. Entretanto, por ser um algoritmo baseado em gradiente, o SQP é incapaz de evitar a convergência para um mínimo local, uma vez que solução inicial encontra-se dentro de sua bacia de convergência. Aliado ao fato de não ter sido disponibilizado a solução inicial usada por Zhang *et al.* (2010), seus resultados são diferentes dos apresentados nesse trabalho. Mas, para fim de comparação, que é a proposta dessa bateria de testes, uma análise estatística do desempenho de cada método é mais valiosa do que a obtenção do ótimo global.

## 7.2 Testes GEO1F1 ao GEO2F3

Nessa seção são apresentados os parâmetros livres escolhidos usando a metodologia descrita no início desse capítulo para os testes que usam a primeira estratégia de controle descrita na Seção 5.1. Tais valores são apresentados na Tabela 7.1. É apresentado também a comparação entre esses testes e são apresentados e comentados os melhores resultados obtidos pelos três algoritmos de otimização utilizados.



Tabela 7.1 – Valores dos parâmetros  $\tau$ ,  $\sigma$  e  $\sigma_o$  escolhidos para os testes GEO1F1 ao GEO2F3.

Testes	$\tau$	$\sigma$ (%)	$\sigma_o$ (%)
GEO1F1	1	20	-
GEO2F1	8	-	30
GEO1F2	4	30	-
GEO2F2	6	-	60
GEO1F3	2	30	-
GEO2F3	4	-	10

### 7.2.1 Comparação do desempenho dos métodos

Nessa seção serão apresentados os resultados de comparação entre os métodos usados na Primeira bateria de testes. Na Tabela 7.2 estão relacionados os métodos com: a média das soluções obtidas em 10 execuções independentes, o pior e melhor resultados, o tempo de transferência para Marte e o número de soluções viáveis obtidas. Como o critério de parada para o  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  foi estipulado como  $10^5$  avaliações da função-objetivo para cada uma das execuções, então o número total de avaliações foi de  $10^6$ . No caso do SQP, o número de avaliações da função depende da velocidade de convergência que, por sua vez, depende da solução inicial. Portanto, cada execução tem um número diferente de avaliações da função-objetivo. O total de avaliações para o SQP foi de  $1,35 \times 10^4$ .

Tabela 7.2 – Comparação do desempenho dos algoritmos considerando a estratégia onde os valores de tempo entre as manobras são iguais entre si.

Testes	Média de $F_{best}$	Pior resultado	Melhor resultado	Melhor tempo (dias)	Nº de soluções viáveis
SQP1	151465,86	1438030	10,8509	630,70	2
GEO1F1	98,97	170,718	13,9413	534,25	4
GEO2F1	217,20	551,735	11,182	553,84	3
GEO1F2	30,91	38,1484	26,6858	460,34	10
GEO2F2	207,78	530,211	42,8938	509,23	4
GEO1F3	8,68	9,8415	7,8431	455,94	10
GEO2F3	15,38	71,0985	8,3847	487,43	9

A partir da Tabela 7.2 pode-se observar que o método mais eficiente foi o usado no GEO1F3. Ou seja, o uso da versão  $GEO_{real1}$  com a função-objetivo com penalidade exterior ( $F_{obj3}$ ). O método usando o algoritmo SQP funcionou como esperado, pois há uma grande divergência entre as melhores e as piores soluções. Isso ocorre devido sua forma de busca determinística. Quando inicia a busca em uma bacia de convergência cujo mínimo local representa uma solução viável (cuja trajetória da vela entra na órbita de Marte), o método rapidamente converge para essa solução. Enquanto que, quando o mínimo local é uma solução inválida, o método será incapaz de escapar. Nesse caso, nenhuma das trajetórias obtidas por esse algoritmo (tanto a solução final, como qualquer solução intermediária) entrará na órbita Marte. Por esse motivo foram testadas outras funções-objetivo para as versões do algoritmo GEO, mas não para o caso do SQP.

A necessidade de se criar as funções-objetivo  $F_{obj2}$  e  $F_{obj3}$  surgiu a partir do GEO1F1 e GEO2F1, ao se observar que a trajetória da vela passava próxima da órbita de Marte antes do fim do processo de integração e depois voltava a distanciar do alvo. Com o intuito de capturar essas soluções foram criadas as

duas funções acima citadas. Ao contrário do que acontece com os algoritmos estocásticos, essa situação não é observada para o algoritmo SQP. Por essa razão, o SQP não foi usado para abordar essas funções-objetivo.

O motivo desse fato ocorrer encontra-se na forma de busca dos algoritmos. O SQP determina a direção de busca baseado no gradiente e este se determina fazendo variações infinitesimais nas variáveis. Essas variações não são grandes o suficientes para levar de uma solução inviável para uma viável (ou seja, uma que entre na órbita de Marte). Entretanto, no caso onde a solução inicial encontra-se dentro da bacia de atração de uma solução viável, o gradiente aponta em uma direção cujo mínimo é tal que, no fim do processo de integração, a vela está mais próxima de Marte do que estava na solução anterior. Dessa forma, o algoritmo garante que quando a função-objetivo for otimizada o tempo de integração coincidirá com o tempo de transferência até a órbita de Marte. Quando a solução inicial encontra-se em uma bacia de convergência cujo mínimo é uma solução inviável, nenhuma das soluções intermediárias que o algoritmo obtiver passará próximo entrar na órbita de Marte.

No caso de um algoritmo estocástico, os “saltos” entre uma solução e outra são grandes o suficiente para passar de uma solução cuja trajetória passa longe da órbita de Marte para uma solução que passa perto, sem necessariamente ter otimizado o tempo de integração. Nesse caso, a vela entrará na órbita de Marte antes que se termine o processo de integração como é observado ao se usar o  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ .

A seguir são apresentadas as trajetórias da vela solar para as melhores soluções obtidas pelos algoritmos SQP,  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  nas Figuras 7.1, 7.2 e 7.3, respectivamente.

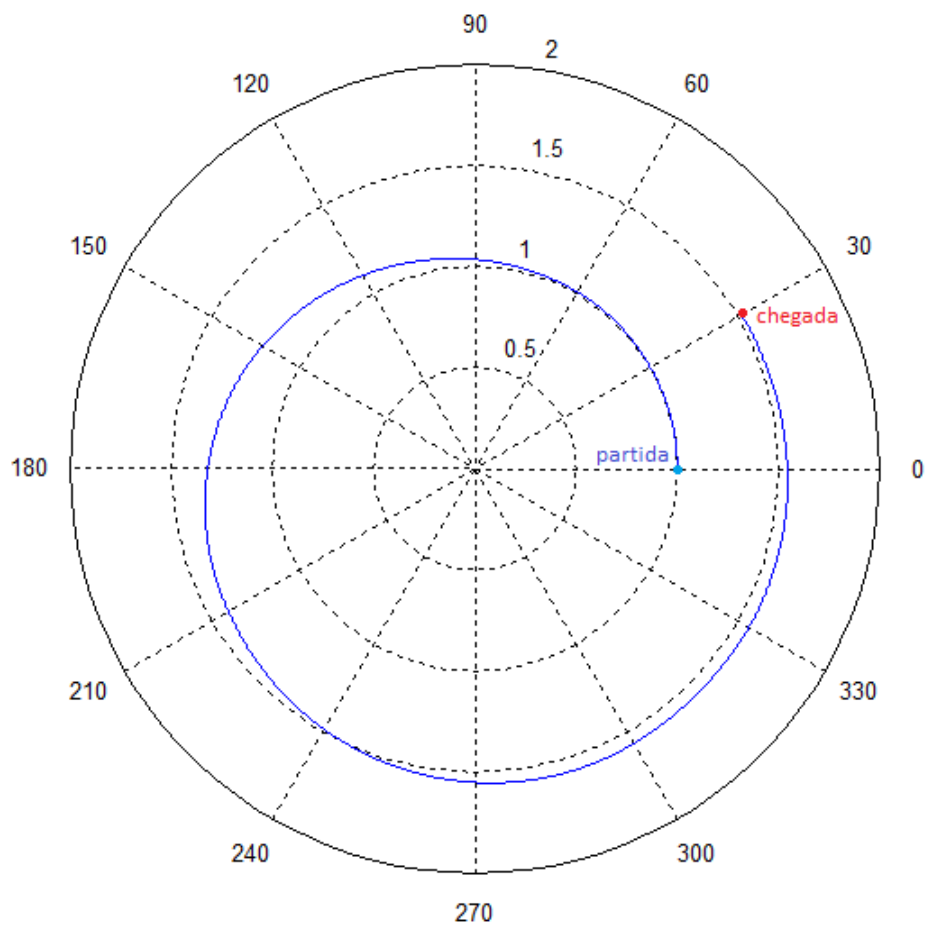


Figura 7.1 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo SQP usando a estratégia de controle que mantém o tempo entre as manobras iguais entre si.

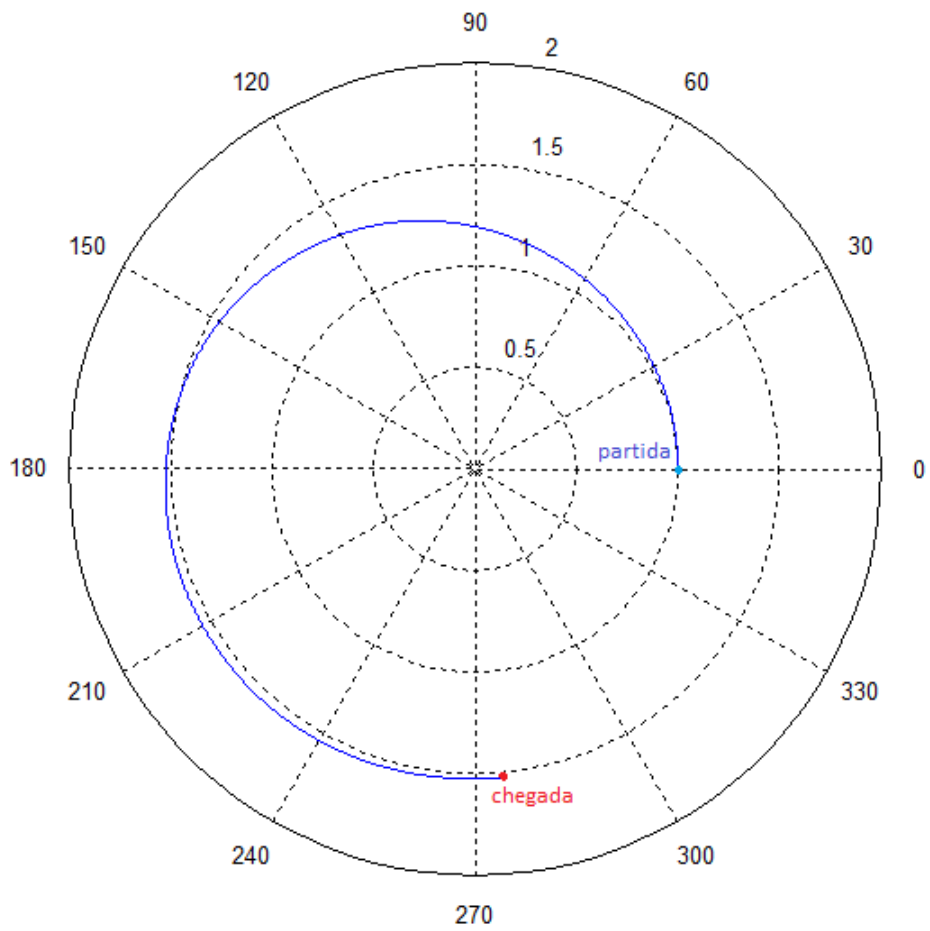


Figura 7.2 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo  $GEO_{real1}$  usando a estratégia de controle que mantém o tempo entre as manobras iguais entre si.

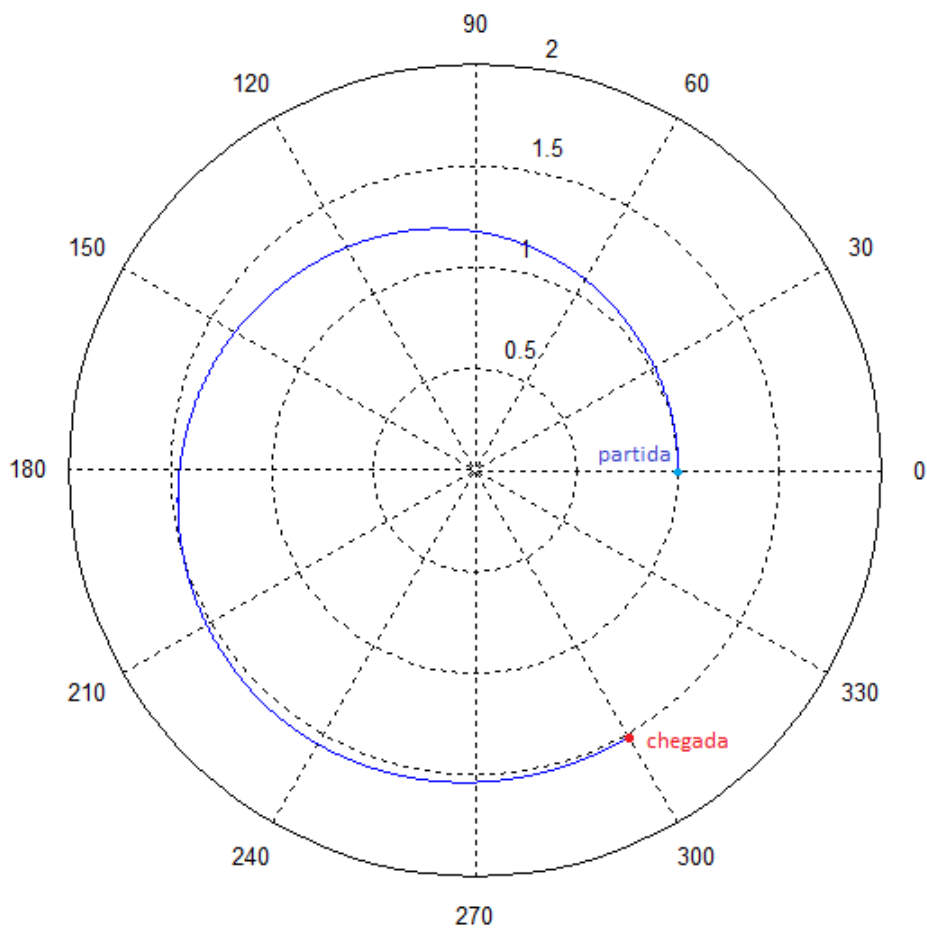


Figura 7.3 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo  $GEO_{real2}$  usando a estratégia de controle que mantém o tempo entre as manobras iguais entre si.

Na Figura 7.4 são apresentados os históricos do ângulo de atitude da vela solar das melhores soluções obtidas pelos algoritmos de otimização  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ .

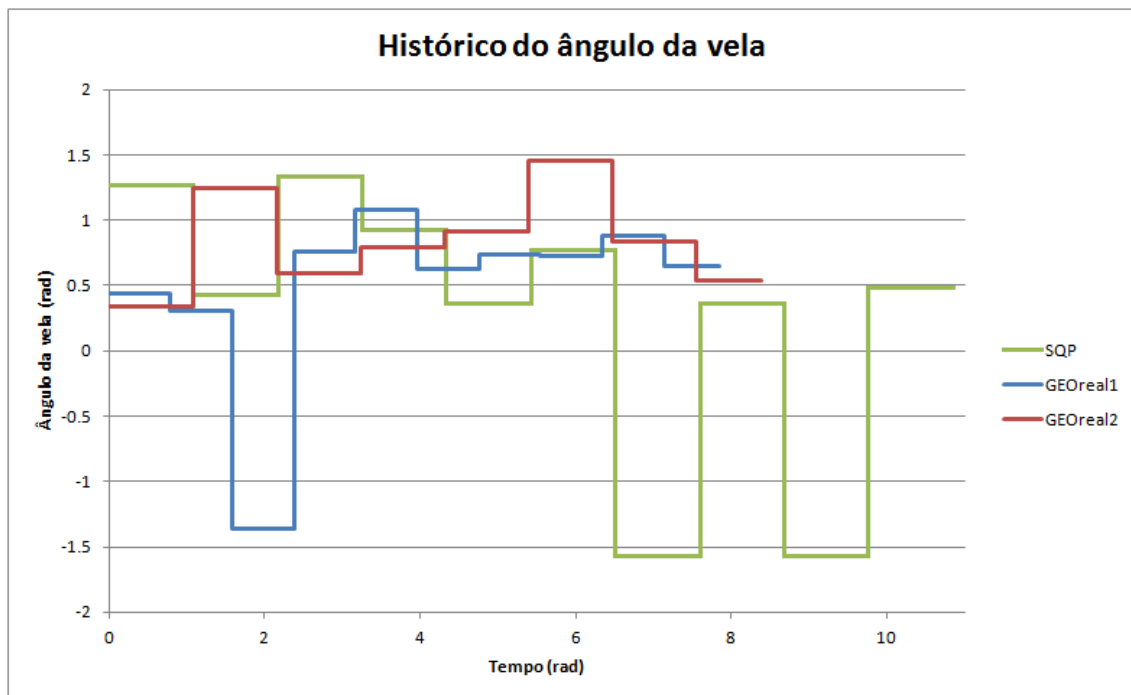


Figura 7.4 – Histórico do ângulo de atitude da vela solar das melhores soluções obtidas pelos algoritmos de otimização usando a primeira estratégia de controle. Linha verde refere-se à solução obtida pelo algoritmo SQP, linha azul pelo  $GEO_{real1}$  e linha vermelha  $GEO_{real2}$ .

Como esses testes mostraram que algoritmos estocásticos têm melhor desempenho para esse tipo de problema, uma vez que a média de  $F_{best}$  foi melhor para todos os testes usando os algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ , para a próxima bateria de testes apenas esses algoritmos serão usados. Além disso, não será mais usada a função-objetivo  $F_{obj1}$ , ou seja, aquela definida por Zhang *et al.* (2010). Uma vez que ela demonstrou ser inadequada ao se usar um algoritmo estocástico pelo algoritmo encontrar soluções onde a vela solar chega a órbita de Marte antes do fim do tempo de integração, como foi explicado anterior.

### 7.3 GEO1F4 ao GEO2F5

Nessa seção são apresentados os parâmetros livres para os testes que usam a segunda estratégia de controle descrita na Seção 5.1. Tais valores são

apresentados na Tabela 7.3. É apresentado também a comparação entre esses testes e são apresentados e comentados os melhores resultados obtidos pelos três algoritmos de otimização utilizados.

Tabela 7.3 – Valores dos parâmetros  $\tau$ ,  $\sigma$  e  $\sigma_o$  escolhidos para os testes GEO1F4 ao GEO2F5.

Testes	$\tau$	$\sigma$ (%)	$\sigma_o$ (%)
GEO1F4	4	60	-
GEO2F4	8	-	70
GEO1F5	6	10	-
GEO2F5	8	-	10

### 7.3.1 Comparação do desempenho dos métodos

Nessa seção serão apresentados os resultados de comparação entre os métodos usados na Segunda bateria de testes. A Tabela 7.4 relaciona os métodos da mesma forma que a Tabela 7.2 faz em relação à Primeira bateria de testes.

Tabela 7.4 – Comparação do desempenho dos algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$  considerando a estratégia onde os valores de tempo entre as manobras são diferentes entre si.

Testes	Média de $F_{best}$	Pior resultado	Melhor resultado	Melhor tempo (dias)	Nº de soluções viáveis
GEO1F4	26,99	40,047	21,7854	513,11	10
GEO2F4	137,52	297,856	38,2458	477,54	7
GEO1F5	8,63	9,2411	8,1327	472,78	10
GEO2F5	100,30	467,848	7,973	463,49	7

A partir da Tabela 7.4, pode-se observar que, mais uma vez, o  $GEO_{real1}$  teve melhor desempenho estatístico. Entretanto, nesse caso, a melhor solução do  $GEO_{real2}$  foi melhor do que a melhor solução do  $GEO_{real1}$ . Isso pode ser



explicado pelo fato do  $GEO_{real2}$  modificar todas as variáveis a cada iteração, fazendo com que seja mais dinâmico que o  $GEO_{real1}$ . Ao ser aplicado a um problema com mais variáveis, possibilita encontrar uma boa solução mais rapidamente. Por outro lado, como todas as variáveis são sempre modificadas, esse mecanismo pode fazer com que o algoritmo distancie-se da solução ótima ao modificar variáveis que já tem o seus valores otimizados.

Nas Figuras 7.5 e 7.6 são apresentadas as trajetórias da vela solar para as melhores soluções obtidas pelos algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ , respectivamente.

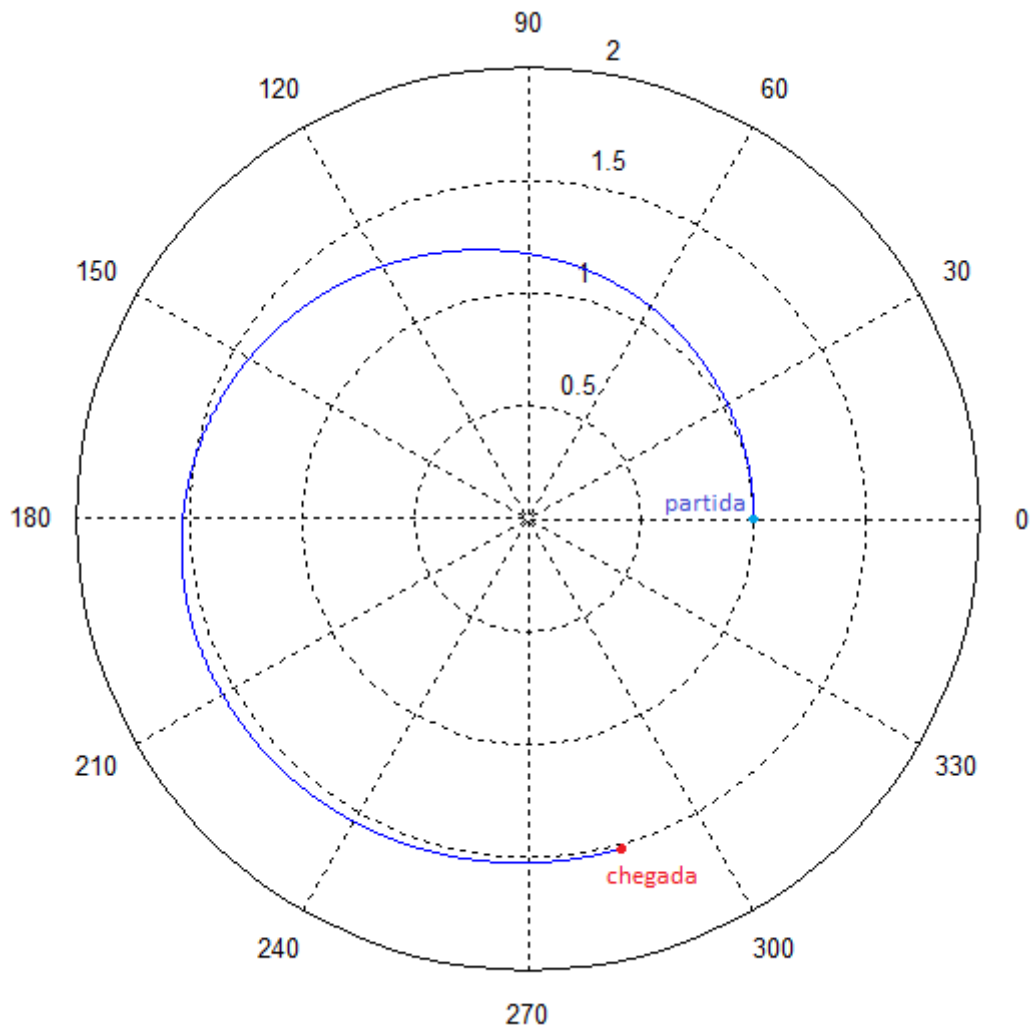


Figura 7.5 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo  $GEO_{real1}$  usando a estratégia de controle que contempla a possibilidade de tempo entre manobras diferentes entre si.

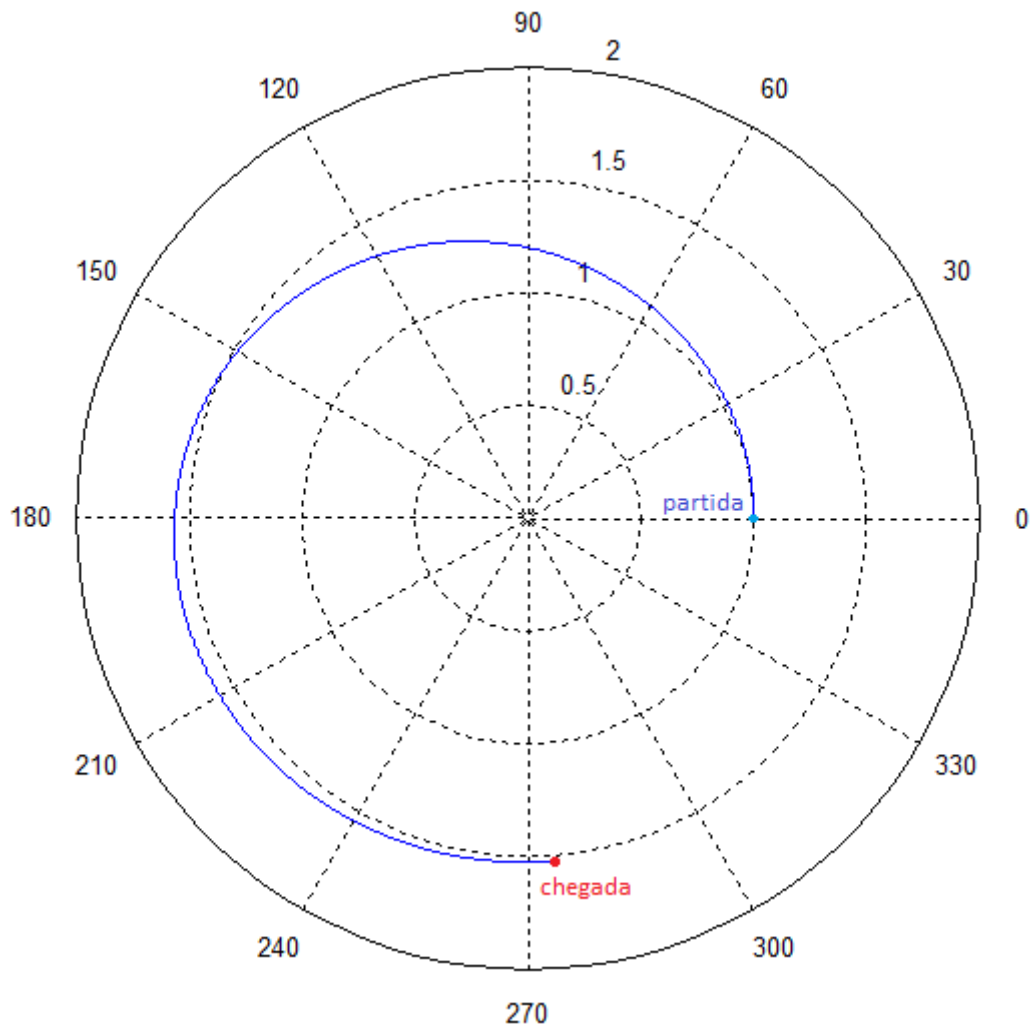


Figura 7.6 – Trajetória da melhor solução obtida pelo algoritmo  $GEO_{real2}$  usando a estratégia de controle que contempla a possibilidade de tempo entre manobras diferentes entre si.

Na Figura 7.7 são apresentados os históricos do ângulo de atitude da vela solar das melhores soluções obtidas pelos algoritmos de otimização  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ .

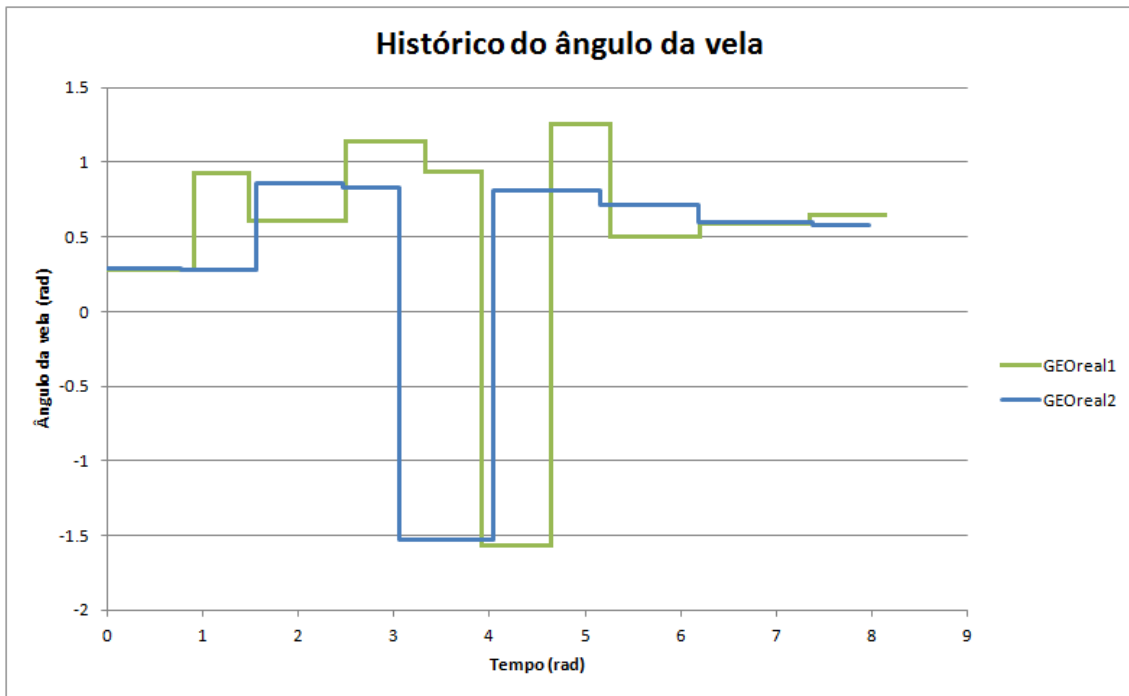


Figura 7.7 – Histórico do ângulo de atitude da vela solar das melhores soluções obtidas pelos algoritmos de otimização usando a segunda estratégia de controle. Linha verde refere-se à solução obtida pelo algoritmo  $GEO_{real1}$  e linha azul pelo  $GEO_{real2}$ .

#### 7.4 Comparação entre as estratégias de controle

Com o intuito de verificar qual estratégia de controle apresentou melhores resultados, foram comparados, através da Tabela 7.5, os resultados referentes ao uso do  $GEO_{real1}$  ao atacar o problema de otimização as duas estratégias de controle apresentadas na Seção 6.1.

Pode-se observar que o GEO2F5 teve um melhor desempenho estatístico. Entretanto, o GEO2F3 apresentou o melhor resultado. Sabendo que o GEO2F5 tem uma estratégia de controle que permite valores de tempo entre as manobras sejam diferentes entre si e que o GEO2F3 tem valores iguais entre si, então o espaço de busca do GEO2F5 contém o espaço de busca do GEO2F3. Portanto, espera-se que o GEO2F5 fosse capaz de retornar soluções melhores que o GEO2F3, ou pelo menos iguais. Entretanto, isso não foi

observado, o que sugere que o aumento de complexidade de um espaço de busca para o outro foi grande o suficiente a ponto de fazer com que o algoritmo fosse incapaz de gerar soluções tão boas para o GEO2F5 quanto gerou para o GEO2F3.

Tabela 7.5 – Comparação do desempenho do algoritmo  $GEO_{real1}$  considerando as duas estratégias de controle.

Testes	Média de $F_{best}$	Pior resultado	Melhor resultado	Melhor tempo (dias)	Nº de soluções viáveis
GEO2F3	8,68	9,8415	7,8431	455,94	10
GEO2F5	8,63	9,2411	8,1327	472,78	10

## 7.5 Abordagem multi-objetivo

Nesta seção são apresentados os resultados da abordagem multi-objetivo do problema de otimização de trajetória de uma vela solar plana. Foi utilizado o algoritmo M- $GEO_{real1}$ , pois sua versão mono-objetivo mostrou melhor desempenho nos testes anteriores. Além disso, foi usada a primeira estratégia de controle apresentada na seção 6.1 por ter menos variáveis de projeto, consequentemente, apresenta um espaço de busca menos complexo. O custo para se fazer uma avaliação da função-objetivo é alto. Foi escolhida essa estratégia, pois a inclusão de uma segunda função-objetivo ao problema torna-o mais complexo. Além disso, é necessário muitas avaliações da função objetivo para que o algoritmo alcance a convergência. Dessa forma, o tempo de processamento necessário para isso seria alto. Portanto, foi escolhido a estratégia de controle mais adequada a permitir uma convergência do algoritmo mais rápida.

Assim como no problema mono-objetivo, foram realizados testes para se determinar os melhores valores dos parâmetros livre. Esses testes foram realizados usando  $5 \times 10^5$  avaliações da função-objetivo e comparando as fronteiras otimizadas para diferentes valores dos parâmetros. Vale salientar

que nessa seção, o termo “fronteira otimizada” será usada para designar o conjunto de soluções no espaço de funções-objetivo obtida pelo algoritmo, uma vez que o algoritmo não garante a obtenção da fronteira de Pareto. A metodologia usada é descrita a seguir:

1. Foi fixado arbitrariamente valores para todos os parâmetros livres, exceto para o parâmetro  $\tau$ . Os valores iniciais dos parâmetros fixos foram  $\sigma = 50\%$  do intervalo das variáveis e  $rt = 20$ .
2. Foram testados os seguintes valores de  $\tau$ :  $\{1,2,3, \dots, 8\}$ .
3. A partir das fronteiras otimizadas obtidas no passo anterior, foi escolhido  $\tau = 2$ .
4. Fixou-se o valor de  $\tau$  baseado na escolha anterior e foram testados os seguintes valores de  $\sigma$ :  $\{10\%, 20\%, 30\%, \dots, 100\%\}$ .
5. A partir das fronteiras otimizadas obtidas no passo anterior, foi verificado que três diferentes valores de  $\sigma$  (40%, 50% e 60%) apresentaram bons resultados. Cada uma cobrindo região diferentes da fronteira. Sendo assim, foi determinado usar os três valores para a execução do algoritmo M-GEO<sub>real1</sub>. O número total de avaliações foi dividido em três e cada terça parte usou-se um valor escolhido de  $\sigma$ .
6. Para se determinar o valor de  $rt$ , foi usado  $\sigma = 50\%$  e  $\tau = 2$ , e foram testados os seguintes valores:  $\{10,20,30,40,50\}$ . Após comparar as várias fronteiras foi escolhido  $rt = 20$ .

Na Figura. 7.8 é apresentada a fronteira otimizada obtida pelo algoritmo M-GEO<sub>real1</sub> usando os valores dos parâmetros livres apresentados acima.

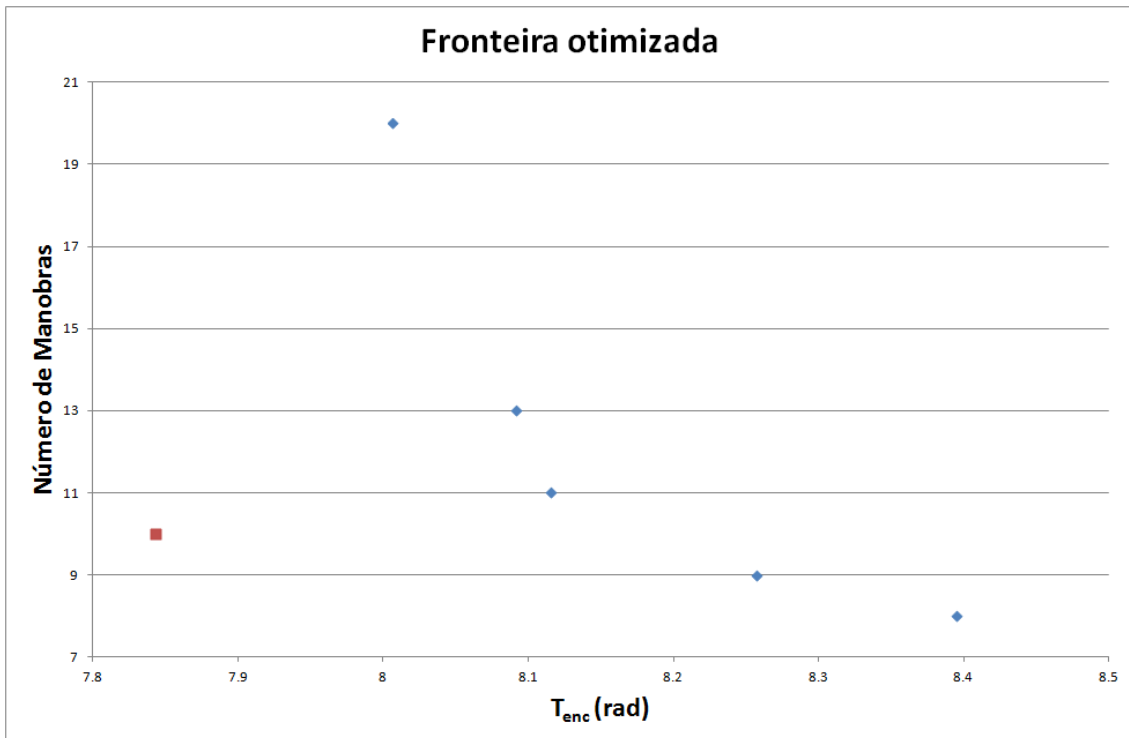


Figura 7.8 – Fronteira otimizada (soluções em azul), obtida pelo algoritmo M-GEO<sub>real1</sub>, do problema multi-objetivo que visa otimizar o número de manobras e o tempo de transferência de uma vela solar. A solução em vermelho foi obtida pelo algoritmo GEO<sub>real1</sub>.

Foram selecionados para comparação as soluções das extremidades apresentadas na fronteira da Figura 7.8, ou seja, a solução de menor tempo de transferência e a solução que realiza o menor número de manobras. Na Figura 7.9 são apresentados os históricos do ângulo de atitude da vela solar das soluções selecionadas.

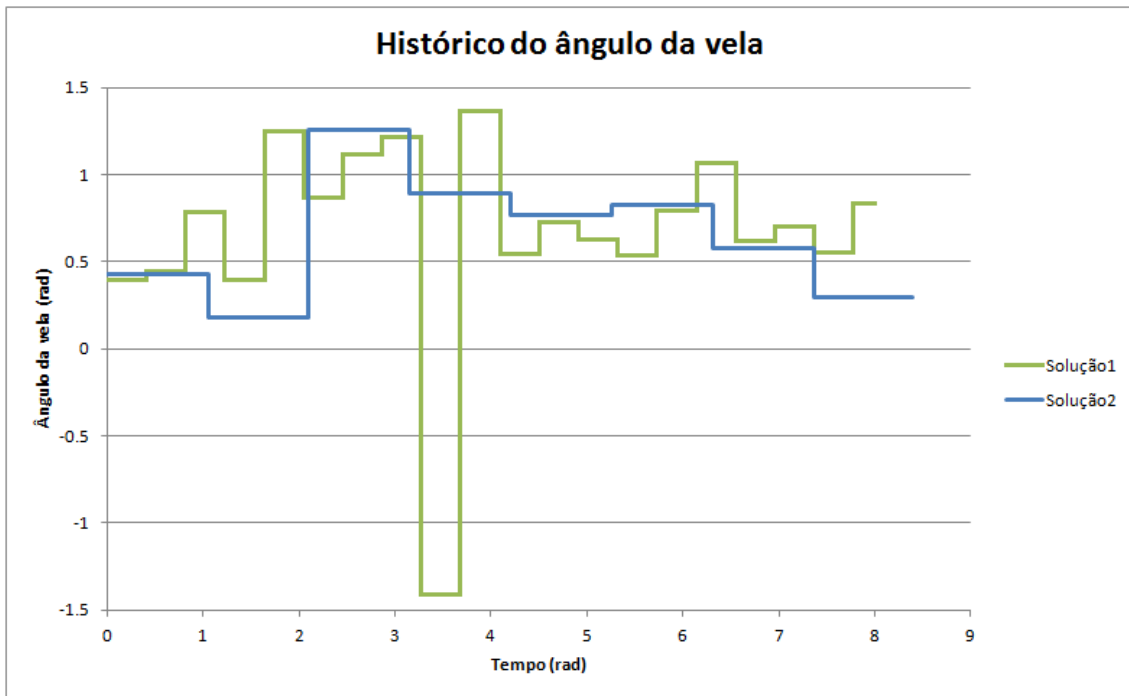


Figura 7.9 – Histórico do ângulo de atitude da vela solar de duas soluções obtidas pelo algoritmo de otimização M-GEO<sub>real1</sub> usando a primeira estratégia de controle. Linha verde refere-se à solução obtida de menor tempo de transferência e linha azul de menor número de manobras.

Vale observar na Figura 7.9 que, além da Solução 1 ter maior número de manobras, ela apresenta grandes variações do ângulo de atitude em algumas manobras. Do ponto de vista de confiabilidade da missão e gasto de energia, grandes manobras são indesejáveis para o projeto. Portanto, torna-se interessante levar em consideração, não somente o número de manobras, mas também sua amplitude de deslocamento angular.

Nas Figuras 7.10 e 7.11 são apresentadas as trajetórias das soluções selecionadas a partir da fronteira da Figura 7.8. Pode-se notar que o ponto de chegada à órbita de Marte para as duas soluções são próximas. Entretanto, isso não significa que os valores do tempo de transferência das soluções sejam iguais. Pode-se notar também que para o caso com número mínimo de



manobras, a vela solar distancia-se mais do Sol antes de entrar na órbita de Marte.

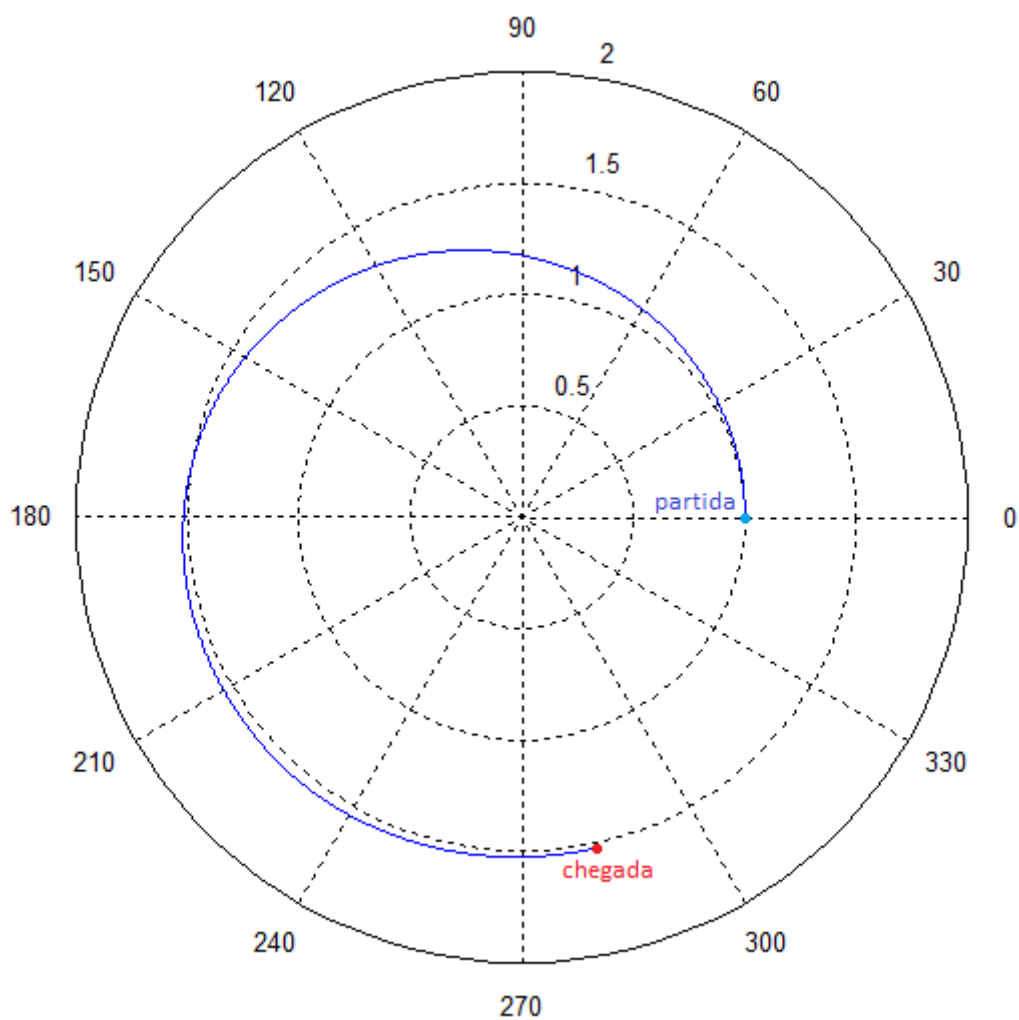


Figura 7.10 – Trajetória da solução de menor tempo de transferência obtida pelo algoritmo M-GEO<sub>real1</sub>.

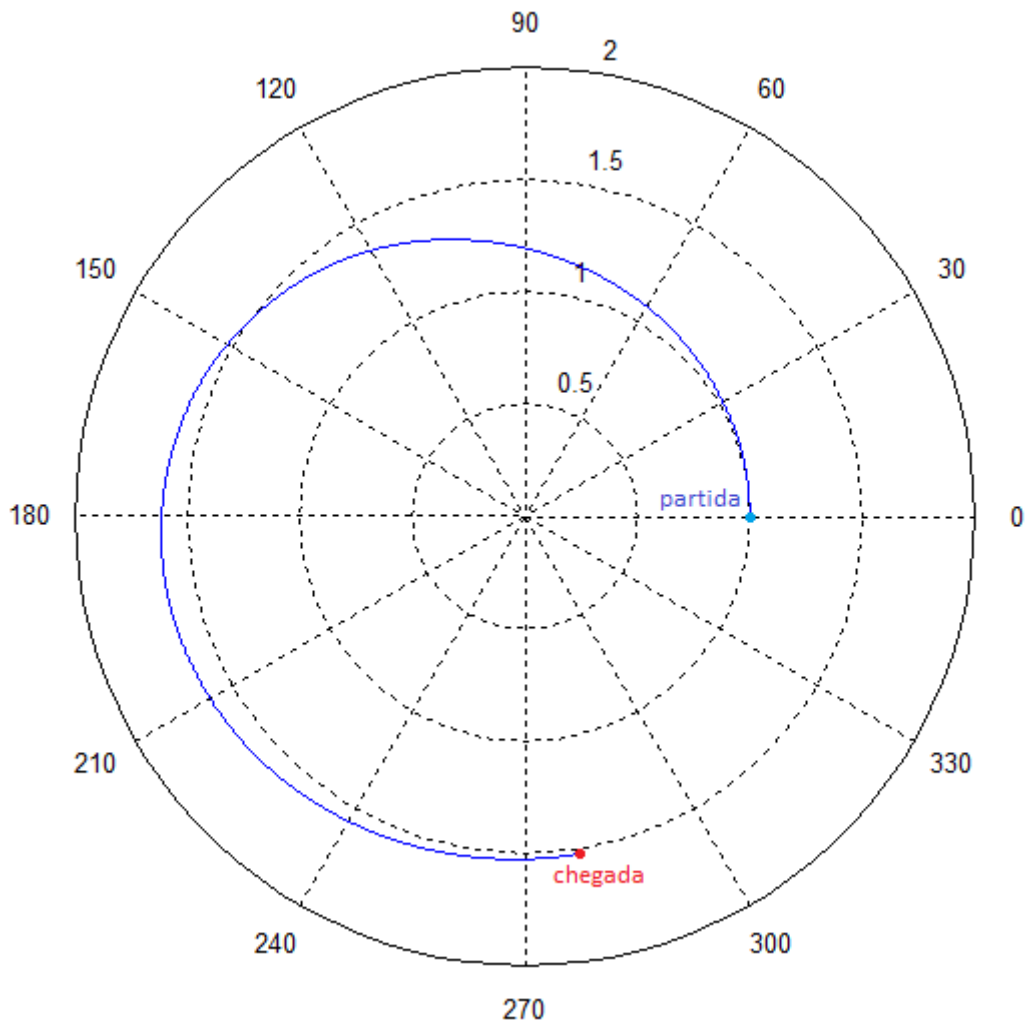


Figura 7.11 – Trajetória da solução de menor número de manobras obtida pelo algoritmo M-GEO<sub>real1</sub>.

Com o intuito de buscar uma fronteira mais otimizada, as soluções apresentadas na Figura 7.8 foram usadas como soluções iniciais de busca para o algoritmo SQP. Este algoritmo foi usado para otimizar somente o valor do tempo de transferência, ou seja, para cada solução obtida pelo M-GEO<sub>real1</sub> é executada uma otimização mono-objetivo usando o SQP e mantendo fixo o número de manobras daquela solução. Foi considerado a possibilidade do algoritmo modificar independentemente o tempo entre uma manobra e outra. Ou seja, foi usada a segunda estratégia de controle apresentada na Seção 6.1. Essas soluções geradas pelo SQP são apresentadas na Tabela 7.5. Assim

como, a comparação com as soluções iniciais geradas somente com o uso do M-GEO<sub>real1</sub>. As soluções estão listadas de menor tempo de transferência para maior.

Tabela 7.5 – Comparação dos resultados usando apenas o M-GEO<sub>real</sub> com os resultados usando o SQP para otimizar os resultados gerados pelo M-GEO<sub>real</sub>.

Solução	T <sub>enc</sub> (rad): M-GEO <sub>real1</sub>	Núm. de manobras	T <sub>enc</sub> (rad): SQP
1	8,0067	20	-
2	8,0913	13	7,8384
3	8,1158	11	7,9471
4	8,2574	9	8,2453
5	8,3953	8	8,3703

Pode-se observar que o SQP foi capaz de reduzir o tempo de transferência de todas soluções com exceção daquela que usa 20 manobras durante a transferência. Esse fato levou a solução a ser dominada por outras da fronteira. Na Figura 7.12 é apresentada a fronteira otimizada usando o M-GEO<sub>real</sub> e o SQP.

Apesar de ter reduzido a 4 soluções não-dominadas, o tempo de transferência das soluções foram reduzidos. Dentre as novas soluções apenas uma continua sendo dominada pela solução obtida pelo GEO<sub>real1</sub>. Esse fato sugere que uma versão híbrida para abordar problemas multi-objetivo pode ser retornar soluções significativamente melhores.

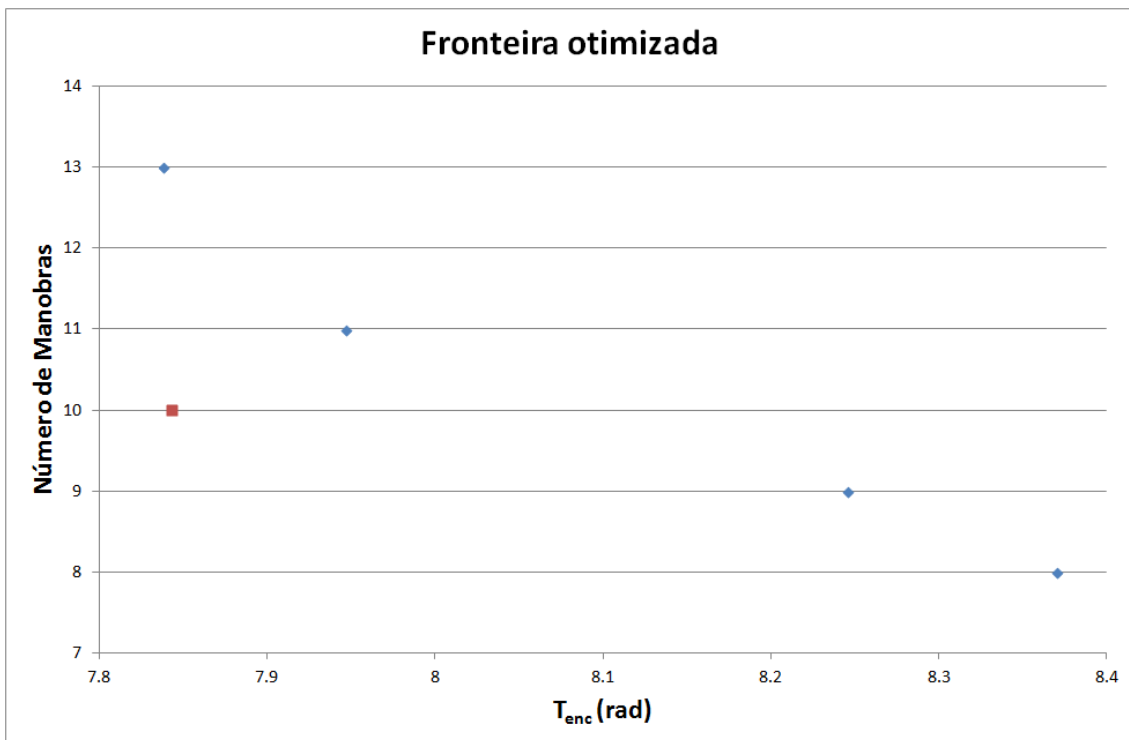


Figura 7.12 – Fronteira otimizada obtida a partir das soluções geradas pelo M-GEO<sub>real1</sub> e usadas como soluções iniciais do SQP (em azul). Solução obtida pelo GEO<sub>real1</sub> (em vermelho).

## 8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto o estudo do problema de otimização da trajetória de velas solares. Na abordagem aqui apresentada considerou-se transferências entre órbitas circulares, coplanares e centradas no Sol. A órbita de origem tem o raio igual ao semi-eixo maior da órbita de Terra e a órbita de destino o raio é igual ao semi-eixo da órbita de Marte.

O estudo da otimização da trajetória foi realizado de duas formas: abordagem mono-objetivo; e abordagem multi-objetivo. Sendo esta segunda abordagem uma contribuição inovadora nessa área de estudo de velas solares. A abordagem mono-objetivo trata-se de um estudo comparativo entre três algoritmos de otimização: SQP,  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ . Estes algoritmos tiveram como função otimizar o ângulo de atitude da vela em função do tempo de tal forma que a vela partisse da órbita da Terra e chegasse a órbita de Marte no menor tempo.

A função que descreve o ângulo de atitude da vela foi discretizado de duas formas. No primeiro caso, o tempo total de transferência é dividido em 10 partes iguais e para cada uma dessas partes é atribuído um valor de ângulo de atitude. No segundo caso, o tempo total de transferência é dividido em 10 partes diferentes, ou seja, para cada valor do ângulo de atitude da vela existe um valor de tempo de permanência naquela atitude associado.

Foram realizados 7 testes para a primeira forma de discretizar a função do ângulo de atitude da vela. A partir de um estudo comparativo baseado nos resultados apresentados por esses testes, pode-se observar que o  $GEO_{real1}$  teve o melhor desempenho. Este algoritmo retornou tanto o melhor valor de tempo de transferência quanto o melhor resultado estatístico. Das 10 soluções iniciais usadas, o algoritmo  $GEO_{real1}$  foi capaz de retornar soluções viáveis para todas. O SQP retornou apenas 2 soluções viáveis, o que mostra que esse problema é multimodal. Além disso, indica que, considerando a forma como a

função-objetivo foi formulada, é mais provável iniciar a buscar em bacias de convergência cujo mínimo local representa uma solução inviável. O algoritmo  $GEO_{real2}$  teve um desempenho intermediário, retornando soluções viáveis na maioria dos testes, entretanto, numa frequência significativamente menor do que nos testes do  $GEO_{real1}$ .

No caso da segunda forma de discretizar a função do ângulo da vela, foram realizados 4 testes usando os algoritmos  $GEO_{real1}$  e  $GEO_{real2}$ . Mais uma vez o algoritmo  $GEO_{real1}$  apresentou um melhor desempenho estatístico que o  $GEO_{real2}$ . Entretanto, nesse caso o  $GEO_{real2}$  retornou a melhor solução encontrada. Além disso, em uma comparação entre as duas forma de discretização, pode-se notar que estatisticamente a segunda forma é melhor, pois retorna melhores médias entre as 10 execuções independentes. Entretanto, os melhores resultados obtidos pelo  $GEO_{real1}$  para a primeira forma de discretização são significativamente melhores do que para a segunda forma. Uma possível explicação para essa situação é o aumento do número de variáveis do problema, conseqüentemente, um aumento de complexidade do espaço de busca. Além disso, foi mantido o número máximo de avaliações da função-objetivo. Portanto, houve uma redução do número de iterações do algoritmo.

Tendo em vista que o algoritmo  $GEO_{real1}$  teve melhor desempenho do que o  $GEO_{real2}$ , o algoritmo usado na abordagem multi-objetivo do problema foi baseado na estratégia de busca do primeiro. Nesse primeiro estudo, foi usado a forma de discretização da função do ângulo da vela que mantém valores iguais de tempo. Buscou-se otimizar o tempo de transferência entre a órbita da Terra e a de Marte e o número de manobras necessárias.

Para tanto, foi usado o algoritmo M- $GEO_{real}$ . Proposto nesse trabalho como um novo algoritmo evolutivo capaz de abordar problemas multi-objetivo baseado na estratégia de busca do  $GEO_{real1}$ . Como testes preliminares, esse algoritmo foi usado para abordar três funções-teste propostas na literatura especializada.

Seu desempenho foi comparado ao desempenho dos algoritmos M-GEO e NSGAI. O M-GEO<sub>real</sub> mostrou uma melhoria significativa em relação ao M-GEO e apresentou desempenho semelhante ao NSGAI. Entretanto, foi identificada uma limitação de uso do algoritmo. Ele deve ser usado para abordar problemas de otimização que possuam pelo menos duas variáveis.

Ao abordar o problema de otimização de trajetória de vela solar proposto nesse trabalho, o algoritmo M-GEO<sub>real</sub> apresentou dificuldades em retornar a fronteira de Pareto do problema. Além de ter retornado apenas 5 soluções não-dominadas, 3 dessas soluções foram dominadas pelo resultado obtido pelo algoritmo GEO<sub>real1</sub>. Isso sugere que houve um aumento significativo de complexidade entre o problema formulado como mono-objetivo e o multi-objetivo, o que levou o algoritmo a retornar soluções não-ótimas.

Com o intuito de tentar melhorar as soluções obtidas pelo M-GEO<sub>real</sub>, estas foram usadas como soluções iniciais em uma busca usando o algoritmo SQP. Nesse teste foi usada a estratégia de controle que considera a possibilidade de diferentes valores de tempo entre manobras e somente o tempo de transferência foi otimizado, mantendo o número de manobras constante. Como resultado, o SQP foi capaz de reduzir significativamente o tempo de transferência de 4 das soluções iniciais. O único caso que não apresentou mudanças foi a solução que usava 20 manobras para a transferência. Essa solução passou a ser dominada pelas demais soluções e foi retirada da fronteira otimizada. Além disso, após o uso do SQP, apenas uma solução da fronteira otimizada continuou sendo dominada pela solução gerada pelo GEO<sub>real1</sub>. Isso sugere que uma versão híbrida do algoritmo M-GEO<sub>real</sub> pode vir a apresentar melhor desempenho do que a versão aqui proposta. Sabendo disso, torna-se interessante como trabalhos futuros investigar as possibilidades de hibridizar versões multi-objetivo do algoritmo GEO.

Esse trabalho teve como principais contribuições: o estudo comparativo entre os algoritmos SQP, GEO<sub>real1</sub> e GEO<sub>real2</sub> ao abordar o problema de otimização

de trajetória de uma vela solar; a proposição de uma abordagem multi-objetivo com o intuito de minimizar simultaneamente o tempo de transferência e o número de manobras realizadas pela vela solar; a proposição, e testes contra funções-teste, de uma nova versão do algoritmo GEO, chamada M-GEO<sub>real</sub>, capaz de abordar problemas multi-objetivo usando variáveis reais. Por fim, o algoritmo M-GEO<sub>real</sub> foi aplicado ao problema multi-objetivo proposto. Apesar do algoritmo M-GEO<sub>real</sub> ter apresentado dificuldades de gerar a fronteira de Pareto para o problema, foi verificado que a implementação de uma versão híbrida do M-GEO<sub>real</sub> pode trazer benefícios no desempenho do algoritmo.

Esses resultados mostram que é possível uma abordagem multi-objetivo do problema de otimização de trajetória de uma vela solar. Nesse sentido torna-se interessante uma investigação mais aprofundada considerando um sistema dinâmico mais realístico e usando outras formas de descrever as funções-objetivo, ou até mesmo buscando otimizar outras características do problema. Uma possibilidade proposta nesse trabalho é buscar minimizar deslocamento de cada manobra, além das funções-objetivo já abordadas. Outra promissora função-objetivo a ser otimizada é o uso do erro quadrático da posição e velocidade da vela solar em relação ao alvo.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUILAR-LASSERRE, A.A.; PIBOULEAU, L.; AZZARO-PANTEL, C.; DOMENECH, S. Enhanced genetic algorithm-based fuzzy multiobjective strategy to multiproduct batch plant design, *Applied Soft Computing* 9 (4) (2009) 1321–1330.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise. *Physical review letters*, v. 59, n. 4, p. 381-384, 1987.
- BAK, P.; SNEPPEN, K. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Physical review letters*, v. 71, n. 24, p. 4083-4086, 1993.
- BAK, P. *How nature works*. New York: Copernicus, Springer-Verlag, 1996.
- BAK, P.; BOETTCHER, S. Punctuated equilibria and self-organized criticality in evolution. *Physica D*, v. 107, n. 143, 1997.
- BETTS, J. T.; HUFFMAN, W. P. Path-constrained trajectory optimization using sparse sequential quadratic programming. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993, 16(1):59-68.
- BOETTCHER, S.; PERCUS, A. Optimization With Extremal Dynamics. *Physical review letters*, v. 86, p. 5211-5214, 2001.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. 2004. Cambridge: Cambridge University Press. p. 244. ISBN 0-521-83378-7.
- CLARCK, D.E, MANNHOLD, R.; KUBINYI, H.; TIMMERMAN, H. *Evolutionary algorithms in molecular design*. Weinheim: Wiley-VCH, 2000.
- COELLO, C. A. C.; G. T. PULIDO, E. M. MONTES. Current and Future Research Trends in Evolutionary Multi-objective Optimization. Grana, M.; Duro, R.; d'Anjou A.; Wang, P. P. (Editores). In: *Information processing with evolutionary algorithms*. New York: Springer Verlag (Editora), 2004.
- CUBILLOS, X. C. M.; SOUZA, L. C. G. Solar sails – the future of exploration of the space. 2011. In: *Workshop em Engenharia e Tecnologia Espaciais (WETE)*, n. II, 03 – 05 de Maio de 2012, São José dos Campos – SP.
- DACHWALD, B. Optimization of Interplanetary Solar Sailcraft Trajectories Using Evolutionary Neurocontrol. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004a, 27(1).

DACHWALD, B. Low-Thrust Trajectory Optimization and Interplanetary Mission Analysis Using Evolutionary Neurocontrol. Tese de doutorado - Universität der Bundeswehr München Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik Institut für Raumfahrttechnik, 2004b

DACHWALD, B.; OHNDORF, A.; AND WIE, B. "Solar Sail Trajectory Optimization for the Solar Polar Imager (SPI) Mission," AIAA Paper 2006-6177, 2006.

DACHWALD, B, WURM P. Mission analysis and performance comparison for an Advanced Solar Photon Thruster. Advances in Space Research Vol. 48, No. 11, 2011, pp. 1858-1868.

Mengali, G, Quarta, A, A. Solar Sail Near-Optimal Circular Transfers with Plane Change. JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS Vol. 32, No. 2, March–April 2009.

DASGUPTA, D.; MICHALEWICZ, Z. (Editores), Evolutionary Algorithms in: Engineering applications. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2001.

DAVIS, L.D.; DE JONG, K.; VOSE, M.D.; Whitley, L.D. Evolutionary algorithms. New York: Springer-Verlag, the IMA Volumes in Mathematics and its Applications, v. 111, 1999.

DEB, K.; A. PRATAP, S. AGARWAL, T. MEYARIVAN, A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II, IEEE Transactions on Evolutionary Computation 6 (2) (2002) 182–197.

DE SOUSA, F.L.; RAMOS, F.M. Function Optimization using Extremal Dynamics. In: International Conference on Inverse Problems in Engineering, n.IV v. I, p. 115-119, Rio de Janeiro, Brazil, 2002.

DE SOUSA, F. L. Otimização extrema generalizada: um novo algoritmo estocástico para o projeto ótimo. 2002-09. 142 p. (INPE-9564-TDI/836). Tese (Doutorado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2002. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/marciana/2003/03.18.15.39>>. Acesso em: 05 ago. 2008.

DE SOUSA, F.L.; RAMOS, F.M.; PAGLIONE, P.; GIRARDI, R.M. New Stochastic Algorithm for Design Optimization, AIAA journal, Vol. 41, Number 9, pp. 1808-1818, 2003 (ISSN 0001-1452).

DE SOUSA, F. L.; RAMOS, F. M.; GALSKI, R. L.; MURAOKA, I. Generalized Extremal Optimization: A New Meta-heuristic Inspired by a Model of Natural Evolution. In: Recent developments in biologically inspired computing, De

Castro, L. N. & Von Zuben, F. J. (editores), Idea Group Inc, 2005. (ISBN 1-59140-312-X).

DE SOUSA, F. L.; TAKAHASHI, W. K. Discrete Optimal Design of Trusses by Generalized Extremal Optimization. In: World Congress in Structural and Multidisciplinary Optimization, n. VI, 30 de Mai a 03 de Jun de 2005, Rio de Janeiro, Brasil.

DE SOUSA, F. L.; RAMOS F. M.; SOEIRO F. J. C. P.; SILVA NETO A. J. Application of the Generalized Extremal Optimization Algorithm to an Inverse Radiative Transfer Problem. In: International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, n. V, 11 – 15 de Jul de 2005, Cambridge, UK.

DE SOUSA, F.L.; SOEIRO, F.J.C.P.; SILVA NETO, A.J.; RAMOS, F.M. Application of the generalized extremal optimization algorithm to an inverse radiative transfer problem. Inverse problems in science and engineering, v. 15, n. 7, p. 699-714, October, 2007 (ISSN 1741-5977).

ELLIS, J.; LISANO, M.; WOLF, P.; EVANS, J.; BLADT, J.; SCHEERES, D.J.; RIOS-REYES, L.; LAWRENCE, D. A solar sail integrated simulation toolkit. In The 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, February 8-12, 2004. Maui, Hawaii.

EIBEN, A. E.; SMITH, J.E. Introduction to evolutionary computing. Berlin: Springer, 2003.

GALSKI, R. L. Desenvolvimento de versões aprimoradas híbridas, paralela e multiobjetivo do método da otimização extrema generalizada e sua aplicação no projeto de sistemas espaciais. 2006-09-22. 279 p. (INPE-14795-TDI/1238). Tese (Doutorado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2006. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m17@80/2006/11.30.19.04>>. Acesso em: 05 ago. 2008.

GARNER, C.; LEIPOLD M. Developments and activities in solar sail propulsion. In 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, July 16-19, 2000. Huntsville, Alabama.

GOTLIB, V.M.; LINKIN, V.M.; LIPATOV, A.N.; PITCHKHADZE, K.M.; KUDRYASHOV, V.A.; FRIEDMAN, L.; CANTRELL, J.; DELORY, G.; CHERTKOW, A. Cosmos 1: The worlds first solar sail spacecraft. In The 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, February 8-12, 2004. Maui, Hawaii.

GUERMAN, A.D.; SMIRNOV, G.; PEREIRA, M.C. Orbital dynamics of a Simple Solar Photon Thruster. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2009, Article ID 537256, 11 pages, 2009.

HARGRAVES, C. R.; PARIS, S. W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, 10(4): 338-342.

KUGA, H. K.; RAO, K. R.; CARRARA, V. Satélites Artificiais - Movimento Orbital. *Notas de aulas da disciplina Satélites Artificiais - Movimento Orbital*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, São José dos Campos, SP, Brasil, 2000. <<http://mtc-m19.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25/doc/publicacao.pdf>> Acesso em: 26 Jul. 2013.

LEIPOLD, M. To the Sun and Pluto with Solar Sails and Micro-Sciencecraft. *Acta Astronautica*, 45(4-9):549–555, 1999

LICHODZIEJEWSKI, D.; DERBES, B.; BELVIN, K.; SLADE, K.; MANN, T. Development and ground testing of a compactly stowed scalable in°atably deployed solar sail. In *The 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, April 19-22, 2004. Palm Springs, California.

LICHODZIEJEWSKI, D.; DERBES, B.; SLADE, K.; MANN T. Vacuum deployment and testing of a 4-quadrant scalable inflatable rigidizable solar sail system. In *The 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, April 18-21, 2005. Austin, Texas.

MACDONALD, M. *Solar Sailing: Applications and Technology Advancement*, em *Advances in Spacecraft Technologies*. Ed. Jason Hall, publicado por InTech, 2011.

MAIENTI-LOPES, I. Controle de atitude de satélites rígido-flexíveis usando a otimização extrema generalizada com abordagem multi-objetivo. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2008.

MAIENTI-LOPES, I.; SOUZA, L. C. G.; DE SOUSA, F. L.; CUCO, A. P. C.; Multi-objective Generalized Extremal Optimization with real codification and its application in satellite attitude control. 2009. In: *International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, n. XX, 15 – 20 de Nov de 2009, Gramado – RS.

MAIENTI-LOPES, I.; SOUZA, L. C. G.; DE SOUSA, F. L.; Design of a nonlinear controller for a rigid-flexible satellite using multi-objective Generalized Extremal Optimization with real codification. 2012a. *Sound And Vibration*, 19 (2012) 1–10 1. DOI 10.3233/SAV-2012-0702.

- MAINENTI-LOPES, I.; SOUZA, L. C. G.; DE SOUSA, F. L. Otimização da trajetória de uma vela solar através da Otimização Extrema Generalizada. 2012b. In: Workshop em Engenharia e Tecnologia Espaciais (WETE), n. III, 05 – 06 de Jun de 2012, São José dos Campos – SP.
- MAINENTI-LOPES, I.; SOUZA, L. C. G.; DE SOUSA, F. L. Aplicação da Otimização Extrema Generalizada ao problema de trajetória ótima de uma vela solar. 2012c. In: Colóquio Brasileiro do Dinâmica Orbital (CBDO), n. XVI, 26 – 30 de Nov de 2012, Serra Negra – SP.
- MCINNES C.R. Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications. Springer-Praxis, Chichester, UK, 1999.
- MENGALI, G, QUARTA, A, A. Rapid Solar Sail Rendezvous Missions to Asteroid 99942 Apophis. Journal of Spacecraft and Rockets Vol. 46, No. 1, January–February 2009b
- MENGALI, G, QUARTA, A, A. Solar sail trajectories with piecewise-constant steering laws Aerospace Science and Technology 13 (2009c) 431–441.
- MORI, O.; TSUDA, Y.; SAWADA, H.; FUNASE, R.; YAMAMOTO, T.; SAIKI, T.; YONEKURA, K.; HOSHINO, H.; MINAMINO, H.; ENDO, T.; KAWAGUCHI, J. World's First Demonstration of Solar Power Sailing by IKAROS, Proceedings of the Second International Symposium on Solar Sailing (ISSS 2010), The New York City College of Technology of the City University of New York, July 2010.
- OLIVEIRA, T. C.; ROCCO, E. M.; FERREIRA, J. L.; PRADO, A. F. B. A. Minimum Fuel Low-Thrust Transfers for Satellites Using a Permanent Magnet Hall Thruster. Mathematical Problems in Engineering. Volume 2013 (2013), Article ID 945030, 12 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/945030>
- ROSS, I.M.; FAHROO F. A Perspective on Methods for Trajectory Optimization. Monterey, USA, August 2002. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. AIAA-2002-4727.
- SAUER, C. G. Optimum Solar-Sail Interplanetary Trajectories. San Diego, USA, August 1976. AIAA/AAS Astrodynamics Conference. 76-792
- SCHAFFER, J. D. Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms. In: International Conference on Genetic Algorithms, n. I, 01 de Julho de 1985. p. 93-100.
- SRINIVAS, N.; DEB. K. Multi-Objective function optimization using non-dominated sorting genetic algorithms. Evolutionary computation. v. 2(3) p. 221–248, 1994.

STEUERNAGEL, O.; POLANI, D. Multiobjective optimization applied to the eradication of persistent pathogens, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 14 (5) (2010) 759–765.

TAKEUCHI, S. Deployment experiment result of solar sail using sounding rocket. In *55th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, the International Academy of Astronautics, and the International Institute of Space Law*, October 4-8, 2004. Vancouver, Canada.

VENDITTI, F. C. F.; ROCCO, E. M.; PRADO, A. F. B. A.; SUHKANOV, A. Gravity-assisted maneuvers applied in the multi-objective optimization of interplanetary trajectories. *Acta Astronautica* 01/2010; 67(9):1255-1271. DOI:10.1016/j.actaastro.2010.06.022

WRIGHT, J.L.; WARMKE J. Solar sail mission applications. In *AIAA/ASS Astrodynamics Conference*, August 18-20, 1976. San Diego, CA.

WRIGHT, J.L. *Space Sailing*. Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

ZHANG, M.; WANG, G.; SUN, Y. Solar Sail Trajectory Optimization for Earth-Mars Mission Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. July 29-31, 2010, Beijing, China.